24/09/25
Irlanda Alvarez

Tarea

MÉTODOS NUMERICOS

1. Sistematicos: Desviaciones constantes por mala calibración o supestos incorrectos.
Aleatorio: Variaciones impredecibles (ruido).
Humanos: Equivocaciones al medir o registrar.
Redondeo: Limitación por la representación finita de números.
Trucamiento/discretezación: Aproximar series infinitas o procesos continuos con valores finitos.
Modelado: Diferencias entre la realidad y el modelo usado.
Iterativos: Cuando un método númerico no converge del todo. Se controla con tolerancias adecuadas y buenas condiciones iniciales.
Propagación de errores: como las incertidumbres de entrada afectan el resultado. Se evalúa con derivadas parciales y se minimizan las variables más sensibles.
Cancelación catastrófica: Perdida de precisión al restar números muy parecidos.

2. Expansión Serie de Taylor al 4to orden, $f(3)$ si $f(x)=\ln(x)$ $x=1 \to$ base.

$f(x)=\ln(x)$ $\quad f(1)=\ln(1)=0$
$f'(x)=1/x$ $\quad f'(1)=1$
$f''(x)=-1/x^2$ $\quad f''(1)=-1$
$f'''(x)=2/x^3$ $\quad f'''(1)=2$
$f''''(x)=-6/x^4$ $\quad f''''(1)=-6$

Fórmula general
$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\cdots$$

Sustituimos
$$\ln(x)=0+1(x-1)+\frac{(-1)}{2!}(x-1)^2+\frac{(2)}{3!}(x-1)^3+\frac{(6)}{4!}(x-1)^4$$

$x=3$, entonces $\to x-1=2$
$$\ln(3)=0+1(2)+\frac{(-1)}{2!}(2)^2+\frac{(2)}{3!}(2)^3+\frac{(-6)}{4!}(2)^4$$
$$\ln(3)=0+2+(-2)+2.67-4$$
$$\underline{\ln(3)=-1.33}$$ // $\to$ Sale muy desviado, valor real $\ln(3)=1.09$

Puede deberse a que la serie de Taylor converge en $\ln(x)$ para menor a 1.

3. $f(x) = x - 1 - 0.5\,\text{Sen}(x)$. $a = x_i = \pi/2$ con intervalo $[0, \pi]$. Expansión de Serie de Taylor con un error máximo de 0,015.

Lo intentare hasta orden 5

Fórmula general

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f''''(a)}{4!}(x-a)^4 + \frac{f^{(5)}(a)}{5!}(x-a)^5$$

$f'(x) = 1 - 0.5\,\text{Cos}(x)$ $\quad f'(\pi/2) = 1$ $\quad f(\pi/2) = 0.07$

$f''(x) = 0.5\,\text{Sen}(x)$ $\quad f''(\pi/2) = 0.5$

$f'''(x) = 0.5\,\text{Cos}(x)$ $\quad f'''(\pi/2) = 0$

$f^4(x) = -0.5\,\text{Sen}(x)$ $\quad f^4(\pi/2) = -0.5$

$f^5(x) = -0.5\,\text{Cos}(x)$ $\quad f^5(\pi/2) = 0$

Sustituimos

$$f(x) = 0.07 + 1(x - \pi/2) + \frac{0.5}{2!}(x-\pi/2)^2 + 0 + \frac{(-0.5)}{4!}(x-\pi/2)^4 + 0$$

Error

$$|R_n(x)| \leq 0.5\,\frac{(\pi/2)^{n+1}}{(n+1)!}$$, el 0.5 es la incertidumbre aprox. entre cada termino de la Serie

Prueba con todas las n

$n=1$ $\quad |R_1(x)| \leq 0.5\,\frac{(\pi/2)^2}{2!} = 0.616 > 0.015$

$n=2$ $\quad |R_2(x)| \leq 0.5\,\frac{(\pi/2)^3}{3!} = 0.322 > 0.015$

$n=3$ $\quad |R_3(x)| \leq 0.5\,\frac{(\pi/2)^4}{4!} = 0.126 > 0.015$

$n=4$ $\quad |R_4(x)| \leq 0.5\,\frac{(\pi/2)^5}{5!} = 0.039 > 0.015$

$n=5$ $\quad |R_5(x)| \leq 0.5\,\frac{(\pi/2)^6}{6!} = 0.010 < 0.015$

Sería para un error $= 0.015$ un $n=5$ //

24109125
Irlanda Alvarez

4. $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$, Evaluar la derivada $x=2$, incremento de 0.2.

$f'(x) = 75x^2 - 12x + 7$

$x = 2$

$f'(2) = 75(2)^2 - 12(2) + 7 = 283 \longrightarrow$ Valor exacto

$f(2) = 25(2)^3 - 6(2)^2 + 7(2) - 88 = 102$

Adelante $x + 0.2$

$f(2.2) = 25(2.2)^3 - 6(2.2)^2 + 7(2.2) - 88 = 164.56$

Atrás $x - 0.2$

$f(1.8) = 25(1.8)^3 - 6(1.8)^2 + 7(1.8) - 88 = 50.96$

Deferencias:

Adelante
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(2.2) - f(2)}{0.2} = \frac{164.56 - 102}{0.2} = 312.8$$

Atrás
$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(2) - f(1.8)}{0.2} = \frac{102 - 50.96}{0.2} = 255.2$$

Central
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{f(2.2) - f(1.8)}{0.4} = \frac{164.56 - 50.96}{0.4} = 284$$

Error absoluto

Adelante: $|312.8 - 283| = 29.8$

Atrás: $|255.2 - 283| = 27.8$

Central: $|284 - 283| = 1$

Error absoluto

Adelante: $(29.8/283)100 = 10.53\%$

Atrás: $(27.8/283)100 = 9.8\%$

Central: $(1/283)100 = 0.35\%$

Interpratación con Taylor $f(x \pm h)$

Adelante:
$$e_{ade} = \frac{h}{2} f''(2)$$

Atrás:
$$e_{atr} = -\frac{h}{2} f''(2)$$

Central:
$$e_{cen} = \frac{h^2}{6} f'''(2)$$

$f''' = 150x - 2 \rightarrow f'''(2) = 288$

5. Raíces reales $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$

a) Grafica

Viendo la gráfica la raíz positiva se encuentra entre 6 y 7

$f(6) > 0,\ f(7) < 0$

b) Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = -0.5$
$b = 2.5$
$c = 4.5$

$$x = \frac{-2.5 \pm \sqrt{(2.5)^2 - 4(-0.5)(4.5)}}{2(-0.5)}$$

$$x = \frac{-2.5 \pm 3.905}{-1}$$

$$x_1 = \frac{-2.5 + 3.905}{-1} = \underline{-1.405}\,//$$

$$x_2 = \frac{-2.5 - 3.905}{-1} = \underline{6.405}\,//$$

c) Método de bisección con 3 iteracciones para la raíz más grande

De acuerdo al a) $[6, 7]$ $f(6) = -0.5(6)^2 + 2.5(6) + 4.5 = 1.5 > 0$

$f(7) = -0.5(7)^2 + 2.5(7) + 4.5 = -2.5 < 0$

Iteracción 1:

$x_1 = (6+7)/2 = 6.5$

$f(6.5) = -0.5(6.5)^2 + 2.5(6.5) + 4.5 = -0.375 < 0$

$f(6) > 0,\ f(6.5) < 0 \rightarrow [6, 6.5]$

Iteracción 2:

$x_2 = (6.5+6)/2 = 6.25$

$f(6.25) = -0.5(6.25)^2 + 2.5(6.25) + 4.5) = 0.59375 > 0$

$f(6.25) > 0,\ f(6.5) < 0 \rightarrow [6.25, 6.5]$

Iteracción 3:

$x_2 = (6.25+6.5)/2 = 6.375$

$f(6.375) = -0.5(6.375) + 2.5(6.25) + 4.5 = 0.1171875 > 0$

$f(6.375) > 0,\ f(6.5) < 0 \rightarrow [6.375, 6.5]$

$\underline{x_3 = 6.375}\,//$

$x_{exacta} = 6.405$

d) Errores: estimado ε_a y verdadero ε_v

$$\varepsilon_a = \frac{b_n - a_n}{2}$$

$[a_n, b_n]$
$\downarrow$
Después de la iteracción

Iteracción 1:

$[6, 6.5]$ longitud $= 0.5$

$\varepsilon_a = 0.5/2 = \underline{0.25}$ //

$x_1 = 6.5$

$\varepsilon_v = |x_n - x_{exal}$

$\varepsilon_v = |6.5 - 6.405| = \underline{0.095}$ //

Iteracción 2

$[6.25, 6.5]$ longitud $= 0.25$

$\varepsilon_a = 0.25/2 = \underline{0.125}$ //

$x_2 = 6.25$

$\varepsilon_v = |6.25 - 6.405| = \underline{0.155}$ //

Iteracción 3

$[6.375, 6.5]$ longitud $= 0.125$

$\varepsilon_a = 0.125/2 = \underline{0.0625}$ //

$x_3 = 6.375$

$\varepsilon_v = |6.375 - 6.405| = \underline{0.0300}$ //

8 y 9

Método secante

$$V\frac{dc}{dt} = \overset{W}{\uparrow}Q - Qc - kV\sqrt{c}$$

$V = 1\times10^6\,m^3$ $\quad c = 4\,g/m^3$

$Q = 1\times10^5\,m^3/año$ $\quad d = 0.5$

$W = 1\times10^6\,g/año$

$k = 0.25\,m^{0.5}/año$

$$V\,0 = W - Qc - kV\sqrt{c}$$

$$0 = \frac{W}{V} - \frac{Qc}{V} - k\sqrt{c}$$

$$0 = \frac{1\times10^6\,g/año}{1\times10^6\,m^3} - \frac{1\times10^5\,m^3/año}{1\times10^6\,g/año}c - 0.25\,m^{0.5}/año\sqrt{c}$$

$$0 = 1 - 0.1c - 0.25\sqrt{c} = f(c)$$

Método secante

$$c_{i+1} = c_i - \frac{f(c_i)\cdot d}{f(c_i+d) - f(c_i)} \longrightarrow$$ Variables utilizadas por nuestro problema

$C_0 = 4 \quad d = 0.5$

$$f(C_0) = 1 - 0.1(4) - 0.25\sqrt{4} = 0.1 \longrightarrow 4$$

$$f(C_0+d) = 1 - 0.1(4.5) - 0.25\sqrt{4.5} = 0.019 \longrightarrow 4.5$$

$$C_1 = 4 - \frac{(0.1\cdot0.5)}{(0.019-0.1)} = 4.61$$ Iteración 1

Iteración 2

$$f(C_1) = 1 - 0.1(4.61) - 0.25\sqrt{4.61} = 0.0022$$

$$f(C_1+d) = 1 - 0.1(5.11) - 0.25\sqrt{5.11} = -0.076$$

$$C_2 = 4.61 - \frac{(0.0022\cdot0.5)}{(-0.076-0.0022)} = 4.62$$

$$\varepsilon_r = \left|\frac{C_2 - C_1}{C_2}\right|\times100 = \left|\frac{4.62-4.61}{4.62}\right|\times100 = 0.216\%$$

Iteracción 3

$$f(c_2) = 1 - 0.1(4.62) - 0.25\sqrt{4.62} = 0.0006$$

$$f(c_2+d) = 1 - 0.1(5.12) - 0.25\sqrt{5.12} = -0.077$$

$$c_3 = 4.62 - \frac{(0.0006 \cdot 0.5)}{(-0.077 - 0.0006)} = 4.623$$

$$\varepsilon_r = \left|\frac{c_3 - c_2}{c_3}\right| \times 100 = \left|\frac{4.623 - 4.62}{4.623}\right| \times 100 = 0.064\%$$

La concentración aproximada es de $c \approx 4.623$

2 Funciones propuestas

$$1 - 0.25\sqrt{c} = 0.1c$$

① $$c = \frac{1 - 0.25\sqrt{c}}{0.1} = 10 - 2.5\sqrt{c} = g_1(c)$$

De $1 - 0.1c = 0.25\sqrt{c}$ → Multiplicar por 4

$$4 - 0.4c = 1\sqrt{c}$$

② $$c = (4 - 0.4c)^2 = g_2(c)$$

Para ①

$$g_1'(c) = -2.5 \cdot \frac{1}{2} c^{-1/2} = -\frac{1.25}{\sqrt{c}}$$

$c = 4.623 \rightarrow \sqrt{c} = 2.15$

$$g_1'(c) = \left|\frac{-1.25}{2.15}\right| = 0.581 < 1 \rightarrow \text{Converge}$$

Para ②

$$g_2'(c) = 2(4 - 0.4c)(-0.4) = -0.8(4 - 0.4c)$$

$c = 4.623 \rightarrow 4 - 0.4c = 4 - 0.4(4.623) = 2.1508$

$$g_2'(c) = |-0.8(2.1508)| = 1.72064 > 1 \rightarrow \text{Diverge}$$

Función 1 sería la adecuada para la convergencia