Determinante de una matriz

$$\det A = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

$$\therefore \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$

$$+ a_{12}(a_{33}a_{21} - a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{32}a_{21} - a_{22}a_{31})$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det}[A]$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11} \to 0 \\ a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21} \to 0 & -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} \end{vmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}[A]$$

$$\det A = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \sum_{k}^{n} \varepsilon_{ijk\ldots z}\, a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot a_{nz}$$

$$\det A_{2\times 2} = \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_{ij}\, a_{1i} a_{2j} \right) = \cancel{\varepsilon_{11} a_{11} a_{21}} \to 0 + a_{11} a_{22}$$

$$- a_{12} a_{21} + \cancel{\varepsilon_{22} a_{12} a_{22}} \to 0$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Símbolo Levi - Civita

$$\varepsilon_{ijk\ldots z} = \begin{cases} 1 & \text{si la permutación es par} \\ -1 & \text{si la permutación es impar} \\ 0 & \text{si hay índices repetidos} \end{cases}$$

Matriz

Transpuesta: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow X^T = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$

Entonces

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}$$

la diagonal no se mueve

Si el determinante es cero, no hay forma de calcular el inverso de la matriz!

Martes 07 de Octubre de 2025

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$\Rightarrow m = n = 2$ Método gráfico

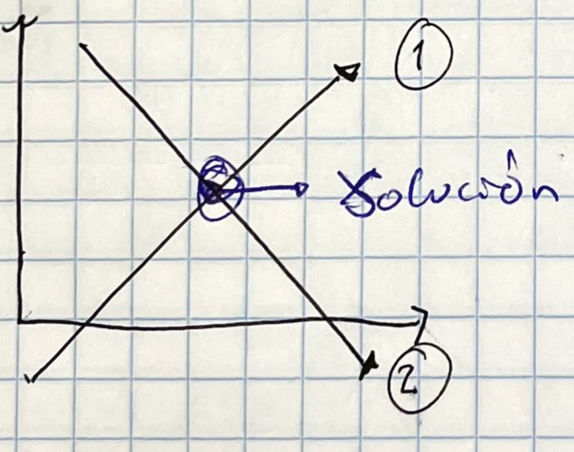
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad (2)$$

Despejando x_1 de (1) y (2)

$$x_{11} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2$$

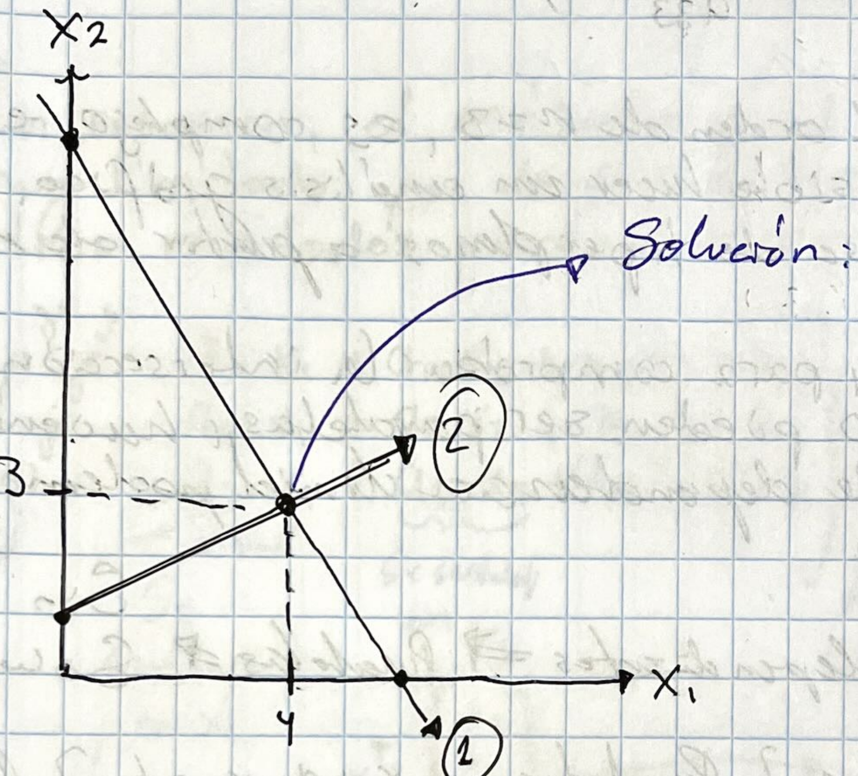
$$x_1 = \frac{b_2}{a_{21}} - a_{22}x_2$$

La solución ocurre en la intersección de las ecuaciones



$$\text{Ejemplo:} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 18 \quad (1) \\ -x_1 + 2x_2 &= 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{18}{2} - \frac{3}{2}x_1 = 9 - \frac{3}{2}x_1 \\ x_2 &= \frac{2}{2} + \frac{x_1}{2} = 1 + \frac{x_1}{2} \end{aligned}\right\} \text{Desde aquí se perciben pendientes opuestas :)}$$



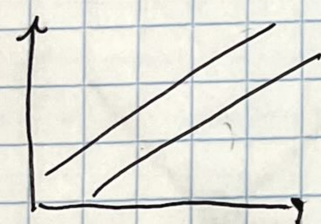
Subiendo a $n=3$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{b_1}{a_{13}} - \frac{a_{11}}{a_{13}}x_1 - \frac{a_{12}}{a_{13}}x_2 \\ x_3 &= \frac{b_2}{a_{23}} - \frac{a_{21}}{a_{23}}x_1 - \frac{a_{22}}{a_{23}}x_2 \\ x_3 &= \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2 \end{aligned}\right\}$$ En este caso se intersectan planos

Superiores al orden de $n=3$, es complejo e incluso imposible hacer un análisis gráfico, esto al tratarse de hiperplanos a partir de $n=4$

Igualmente, para comprobar la intersección, las rectas no pueden ser paralelas, haciendo un análisis de dependencia lineal podemos determinarlo

$\Rightarrow$ Linealmente dependientes $\Rightarrow$ Paralelas $\Rightarrow$ Sin Solución



} Paralelas $\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}\right\}$ Dependencia lineal

Esto lo usamos de dos formas

Si usando un coeficiente en la ecuación:

a) $\underbrace{\left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 &= 1 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\}}_{\text{Paralelas}}$ Resultado diferente

Tienen la misma pendiente

Sin solución

b) $\left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$ al igualarse con un coeficiente

$\hookrightarrow$ Son exactamente iguales: Soluciones infinitas, mal especificado

Al tener rectas muy cercanas con pendientes de diferencias bajas, es muy complicado usar el método gráfico para ver el punto de la solución

Ejemplo: $x_2 = 1.1 + 0.46x_1$, $x_2 = 1 + 0.5x_1$ } Son muy similares y es difícil encontrar la intersección de forma gráfica.

En resumen, el método gráfico es útil pero muy limitado, por lo que es necesario usar otros métodos para resolver el sistema:

Sistema de Ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ \underbrace{a_{31}x_1}_{\text{Se sustituye en } x_1} + \underbrace{a_{32}x_2}_{\text{Se sustituye en } x_2} + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

La representación matricial

$Ax^T = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longleftrightarrow x = [x_1, x_2, x_3]$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Sea D el determinante de A

La solución:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

Ejemplo Regla de Cramer

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.52 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.67 \\ -0.44 \end{bmatrix}$$

$$D = 0.3\begin{vmatrix} 1 & 1.9 \\ 0.3 & 0.5 \end{vmatrix} - 0.52\begin{vmatrix} 0.5 & 1.9 \\ 0.1 & 0.5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.3 \end{vmatrix}$$

$$D = 0.3(0.5 - 0.57) - 0.52(0.25 - 0.19) + (0.15 - 0.1)$$

$$D = 0.3(-0.07) - 0.52(0.06) + 0.05 = -2.2 \times 10^{-3} = -0.0022$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0.01 & 0.51 & 1 \\ 0.67 & 1 & 1.9 \\ -0.44 & 0.3 & 0.5 \end{vmatrix}}{-0.0022} = \left[-0.01(0.5 - 0.57) - 0.52(0.335 + 0.836) + (0.201 + 0.44)\right] / -0.0022$$

$$x_1 = -14.9$$ Solución

Terminar para x_2 y x_3

$$A\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ float $A[m][n]$ (arreglos)

$\hookrightarrow A[0][0] \Rightarrow$ Elemento fila 1 columna 1

Si $\overset{m=3,\,n=3}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \therefore A[2][2] = a_{33}$

$\hookrightarrow A[1][2]\ a_{23}$

Operación 1: $\forall n$: $A[0][n]\left(\frac{A[1][0]}{A[0][0]}\right)$

$\Downarrow$

$$A[1][n] = A[1][n] - \left(\frac{A[1][0]}{A[0][0]}\right) * A[0][n]$$

Para todo m desde 1 hasta m-1

$$A[m][n] = A[m][n] - \left(\frac{A[m][0]}{A[0][0]}\right) * A[0][n]$$

Para K desde 0 hasta m-1

$$A[m][n] = A[m][n] - \left(\frac{A[m][K]}{A[K][K]}\right) * A[K][n]$$