Primer exámen parcial

David Isaac Oliva Villar

Septiembre 2025

Tarea Métodos Numéricos
Prof. Alma Xóchitl González Morales

1. Describe los diferentes tipos de error que pueden aparecer en la determinación de alguna cantidad cuando hay procedimientos experimentales y/o de análisis numérico.

   Sistematicos, aleatorios y humanos por parte del operador en la parte experimental.

   En el caso del análisis numérico, está el error presente por truncamiento.

2. Use la expansión de la serie de Taylor de cero al cuarto orden para estimar $f(3)$ si $f(x) = \ln(x)$ utilizando $x = 1$ como punto base.

$$f(x) = ln(a)$$

Estimar la función en $f(3)$, con $a = 1$

Entonces:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1) * (x-1)}{1!} + \frac{f''(1) * (x-1)^2}{2!}.....$$

$$f(x) = ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Evaluación	**Valor**	**Error aprox.**	**Error real**
Valor real	1.09861	N/A	0
Grado 0	0	N/A	1.09861
Grado 1	2	2	0.90139
Grado 2	0	2	1.09861
Grado 3	2.666...	0.666...	1.56739
Grado 4	-1.333...	4	2.43161

La aproximación tiene un error muy grande con ese punto de expansión por estar lejos del valor que se desea evaluar, convergerá mejor si se usa uno más cercano a "3"

3. Para calcular las coordenadas espaciales de un planeta tenemos que resolver la función $f(x) = x–1–0.5\sin(x)$. Sea $a = x_i = \pi/2$ en el intervalo $[0, \pi]$ el punto base. Determine la expansión de la serie de Taylor de orden superior que da un error máximo de 0.015 en el intervalo dado.

Para esto, se evaluó manualmente la serie de Taylor considerando x como los extremos del intervalo para rectificar el resultado.

Como puede verse, hay términos donde Ea=0, pero no se toman en cuenta porque aún siendo cero el valor de Ea en esos puntos por tener términos multiplicados por cero dejando la expresión igual al punto anterior, hay que considerar que con una iteración adicional el error si cambia y mucho, además de que el residuo de Lagrange (del que no sabemos ξ), no necesariamente es cero en esos puntos.

Iter	**Valor aprox (x=0)**	**Valor aprox (x=π)**	**EA (x=0)**	**EA (x=π)**
0	0.07079632679	0.07079632679	N/A	N/A
1	-1.5	1.641592654	1.570796327	1.570796327
2	-0.8831497249	2.258442929	0.6168502751	0.6168502751
3	-0.8831497249	2.258442929	0	0
4	-1.009984479	2.131608175	0.126834754	0.126834754
5	-1.009984479	2.131608175	0	0
6	-0.9995527385	2.142039915	0.01043174038	0.01043174038

Por lo visto en la tabla, es en la sexta expansión (con la sexta derivada), donde vemos un error que cumple con las especificaciones:

$$E_{a\,(T^6)} = 0.0104... < 0.015$$

4. Utilice aproximaciones en diferencias de $O(h)$ hacia atrás y hacia adelante y una aproximación de diferencia central de $O(h^2)$ para estimar la primera derivada de la función $f(x) = 25x^3 – 6x^2 + 7x – 88$. Evalúe la derivada en $x = 2$ usando un tamaño del incremento 0.2. Compare los resultados con el valor exacto de las derivadas. Interprete los resultados considerando el término residual de la expansión en la serie de Taylor.

$$x_i = 2, \quad h = 0.2$$
$$f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$$
$$f'(x) = 75x^2 - 12x + 7$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \rightarrow \text{Hacia atrás}$$
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \rightarrow \text{Hacia adelante}$$
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} \rightarrow \text{Centrada}$$

Derivada	**Valor**	**Error (%)**
Real	283	N/A
primera hacia atras	255.2	9.82332
primera hacia adelante	312.8	10.53003
centrada	284	0.353357

En este caso, las primeras derivadas son bastante cercanas entre sí en lo que respecta a la desviación del valor real.
Si consideramos la serie de Taylor, la primera diferencia finita centrada es la que más se acerca al valor real con una menor desviación, debido a que esta tiene un error $O(h^2)$, mientras que las otras dos diferencias finitas poseen uno del tipo $O(h)$, siendo el primero uno más pequeño por ser de segundo orden.

5. Determine las raíces reales de $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$:

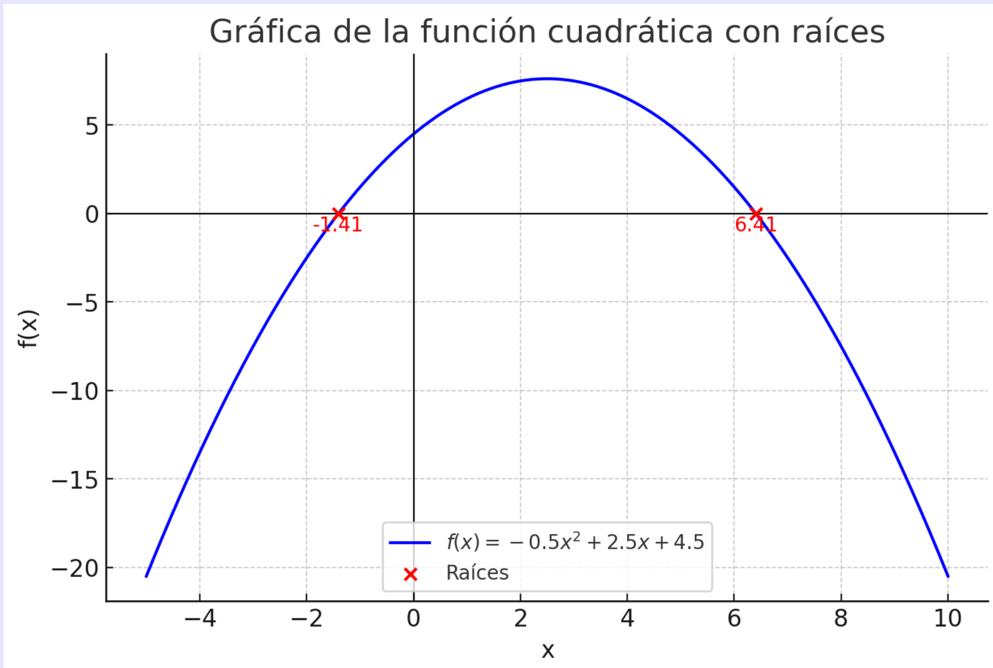
(a) Gráficamente

(b) Empleando la fórmula cuadrática.

(c) Usando el método de bisección con tres iteraciones para determinar la raíz más grande.

(d) Calcule el error estimado ϵ_a y el error verdadero ϵ_v para cada iteración.

a)



Mediante este gráfico, podemos visualizar de mejor manera las raíces, siendo:

$$\boxed{x_1 = -1.41\,,\ \ x_2 = 6.41}$$

b) Tenemos la función $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{9}{2} = 0$.

$$\Longrightarrow \quad a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2},\ c = \frac{9}{2}.$$

$$x \ = \ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ \Longrightarrow \quad x = \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{2}\right)}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}.$$

$$b^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}, \qquad 4ac = 4\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{2}\right) = -9$$

$$\Rightarrow \quad b^2 - 4ac = \frac{25}{4} - (-9) = \frac{25}{4} + \frac{36}{4} = \frac{61}{4}.$$

$$x = \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{61}{4}}}{-1} = \frac{5}{2} \mp \frac{\sqrt{61}}{2}.$$

$$\boxed{x_1 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{61}}{2}, \qquad x_2 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{61}}{2}}$$

c)

Iter	**a**	**b**	**c=(a+b)/2**	**f(c)**	**Nuevo intervalo**
1	6	7	6.5	-0.375	[6, 6.5]
2	6	6.5	6.25	0.59375	[6.2500, 6.5]
3	6.25	6.5	6.375	0.1171875	[6.375, 6.5]

Tras tres iteraciones usando el método de bisección, tenemos el siguiente resultado para la raíz más grande:

$$\boxed{x^{(3)} = 6.375}$$

d)

Iter	**a**	**b**	**c=(a+b)/2**	**f(c)**	**Nuevo intervalo**	Ea (%)	Er (%)
1	6	7	6.5	-0.375	[6, 6.5]	N/A	1.404
2	6	6.5	6.25	0.59375	[6.25, 6.5]	4	2.49
3	6.25	6.5	6.375	0.1171875	[6.375, 6.5]	1.96	0.546

6. Suponga que está diseñando un tanque esférico para almacenar agua para un poblado pequeño en un país en desarrollo.

   El volumen de líquido que puede contener se calcula con:

$$V = \pi h^2 \frac{3R - h}{3}$$

   donde V es el volumen $[m^3]$, h la profundidad del agua en el tanque [m], y R el radio del tanque [m].

   Si R = 3m, ¿a qué profundidad debe llenarse el tanque de modo que contenga 30 m^3? Haga tres iteraciones con el método de la falsa posición a fin de obtener la respuesta. Determine el error relativo aproximado después de cada iteración.

Si $R = 3m$, entonces:

$$V = \pi h^2 \frac{(9 - h)}{3}$$

Buscamos una altura h de modo que:

$$V = \pi h^2 \frac{(9 - h)}{3} = 30\, m \Longrightarrow \pi h^2 \frac{(9 - h)}{3} - 30 = 0$$

De este modo, probamos dos extremos iniciales que dan una diferencia de signo al multiplicar la función evaluada en estos:

$$x_l = 2, \qquad x_u = 3;$$

$$\text{Para } x_l = 2: \quad \pi(4)\frac{7}{3} - 30 = 29.3215 - 30 = -0.6785$$

$$\text{Para } x_u = 3: \quad \pi(9)\frac{6}{3} - 30 = 56.5487 - 30 = 26.5487$$

Entonces: $f(x_l)f(x_u) < 0$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Iter	x_l	$f(x_l)$	x_u	$f(x_u)$	x_r	$f(x_r)$	$\epsilon_a(\%)$
1	2	-0.6784	3	26.5487	2.0249	-0.0502	—
2	2.0249	-0.0502	3	26.5487	2.0267	-0.0037	0.091%
3	2.0267	-0.0036	3	26.5487	2.0269	-0.00027	0.006615%

A la tercera iteración tenemos el siguiente resultado:

$$\boxed{h \approx 2.0269}$$

7. La concentración de saturación de oxígeno disuelto en agua dulce se calcula con la ecuación (APHA, 1992) $\ln(o_{sf}) = -139.34 + \frac{1.575701\times10^5}{T_a} - \frac{6.642309\times10^7}{T_a^2} - \frac{8.621949\times10^{11}}{T_a^4}$

donde o_{sf} es la concentración de saturación de oxígeno disuelto en agua dulce a 1 atm (mg/L) y T_a es la temperatura absoluta (K). De acuerdo con esta ecuación, la saturación disminuye con el incremento de la temperatura. Para aguas naturales comunes en climas templados, la ecuación se usa para determinar que la concentración de oxígeno varía de 14.621 mg/L a 0ºC a 6.413 mg/L a 40ºC. Dado un valor de concentración de oxígeno, puede emplearse esta fórmula y el método de bisección para resolver para la termperatura en ºC. TIP: Usa las temperaturas en Kelvin.

Tenemos la función

$$\ln(o_{sf}) = -139.34 + \frac{1.575701\times10^5}{T} - \frac{6.642309\times10^7}{T^2} - \frac{8.621949\times10^{11}}{T^4},$$

Para determinar una concentración objetivo $o^\star$ definimos la siguiente función g(T):

$$g(T) \;=\; -139.34 \;+\; \frac{1.575701\times10^5}{T} \;-\; \frac{6.642309\times10^7}{T^2} \;-\; \frac{8.621949\times10^{11}}{T^4} \;-\; \ln(o^\star) = 0$$

En aguas dulces templadas $T \in [273.15,\, 313.15]$ K (0–40 °C) y o_{sf} decrece en función de T (son inversamente proporcionales).

La raíz está en ese rango: $o^\star \in [6.413,\ 14.621]$ mg/L.
Entonces, tenemos que fijar un valor objetivo para poder iterar, por ende para efectos prácticos tomamos: $o^\star = 10\ mg/L$

Ahora, procedemos a emplear el método de bisección, donde primero tomamos el intervalo inicial $[T_L, T_U] = [273.15,\, 313.15]$ K

$$T_M = \frac{T_L + T_U}{2}, \qquad g_M = g(T_M).$$

Iter	T_L (K)	$g(T_L)$	T_U (K)	$g(T_U)$	T_M (K)	$g(T_M)$	ϵ_a (%)
1	273.15	0.379862	283.15	-0.095143	293.15	-0.095143	—
2	283.15	0.121150	293.15	-0.095143	288.15	0.121150	3.531697%
3	288.15	0.008351	293.15	-0.095143	290.65	0.008351	1.737325%
4	288.15	0.008351	290.65	-0.043159	289.4	-0.043159	0.861115%
5	288.15	0.008351	289.4	-0.018341	288.775	-0.018341	0.431928%
6	288.15	0.008351	288.775	-0.005066	288.4625	-0.005066	0.216431%

8. El balance de masa de un contaminante en un lago bien mezclado se expresa así:

$V\frac{dc}{dt} = Q - Qc - kV\sqrt{c}$

Dados los valores de parámetros $V = 1 \times 10^6 m^3$, $Q = l \times 10^5 m^3/ano$ y $W = l \times 10^6 g/ano$, y $k = 0.25 m^{0.5}/ano$, use el método de la secante modificado para resolver para la concentración de estado estable. Emplee un valor inicial $c = 4 g/m^3$ y $d = 0.5$. Realice tres iteraciones y determine el error relativo porcentual después de la tercera iteración.

$$\text{Secante modificado:} \quad c_{i+1} = c_i - \frac{f(c_i)\,\delta c}{f(c_i + \delta c) - f(c_i)}, \qquad \delta c = 0.5$$

Para que esté en estado estable o estacionario, no debe cambiar con el tiempo:

$$f(c) = W - Q\,c - k\,V\,\sqrt{c} = 0, \quad V = 10^6,\ Q = 10^5,\ W = 10^6,\ k = 0.25,\ c_0 = 4.$$

Iter	c_i (g/m^3)	δc	$f(c_i)$	$c_i + \delta c$	$f(c_i + \delta c)$	c_{i+1}	ϵ_a (%)
1	4	0.5	100000	4.5	19669.9141	4.622432	—
2	4.622432	0.5	260.7850	5.122432	-78062.9283	4.624097	0.0360%
3	4.624097	0.5	-2.4760	5.124097	-78321.3455	4.624081	0.000342%

$$\boxed{c \approx 4.624081\ \text{g/m}^3, \qquad \epsilon_a^{(3)} \approx 0.000342\%}$$

9. Para el ejercicio anterior proponga dos o 3 funciones $g(c)$ y determine para que funciones la iteración de punto fijo debería converger.

En estado estable, $f(c) = W - Qc - kV\sqrt{c} = 0$. Usamos $V = 10^6$ m^3, $Q = 10^5$ m^3/ano, $W = 10^6$ g/ano, $k = 0.25$ m$^{0.5}$/ano y la raíz física $c^\star \approx 4.624081$ g/m^3. L a iteración de punto fijo $c_{n+1} = g(c_n)$ *converge* si $|g'(c^\star)| < 1$.

Opción 1 (convergente).

$$g_1(c) \;=\; \frac{W - kV\sqrt{c}}{Q} \quad \Rightarrow \quad g_1'(c) = -\frac{kV}{2Q\sqrt{c}}.$$

En $c^\star$: $|g_1'(c^\star)| = \dfrac{0.25 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^5\sqrt{4.624081}} = \dfrac{1.25}{\sqrt{4.624081}} \approx 0.582 < 1 \;\Rightarrow\;$ converge.

Opción 2 (diverge).

$$g_2(c) \;=\; \left(\frac{W - Qc}{kV}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad g_2'(c) = -\frac{2Q\,(W - Qc)}{(kV)^2}.$$

Como $W - Qc^\star = kV\sqrt{c^\star}$, resulta $|g_2'(c^\star)| = \dfrac{2Q\sqrt{c^\star}}{kV} = \frac{2\cdot 10^5\sqrt{4.624081}}{0.25\cdot 10^6} \approx 1.72 > 1 \;\Rightarrow\;$ diverge.

10. Para el ejercicio 6, haga tres iteraciones del método de Newton- Raphson para determinar la respuesta. Encuentre el error relativo aproximado después de cada iteración, y compare con lo obtenido en dicho ejercicio

$$h_{i+1} = h_i - \frac{f(h_i)}{f'(h_i)}, \qquad f(h) = \frac{\pi}{3}(9h^2 - h^3) - 30, \quad f'(h) = \pi(6h - h^2), \quad h_0 = 2 \text{ m}.$$

Iter	x_n (m)	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1} (m)	ϵ_a (%)
1	2	-0.6784685665	25.132741229	2.026995406	1.331794
2	2.026995406	0.0022688404	25.300068928	2.026905729	0.004424
3	2.026905729	2.4583×10^{-8}	25.299520655	2.026905728	4.794×10^{-8}

$$\boxed{h \approx 2.026905728 \text{ m (tras 3 iteraciones)}}$$

Comparación con falsa posición: en el ejercicio 6 se obtuvo $h \approx 2.0269$ con ϵ_a de 0.091% (iter. 2) y 0.006615% (iter. 3). Newton–Raphson converge más rápido: 0.004424% (iter. 2) y 4.79×10^{-8}% (iter. 3).