



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

**DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
LICENCIATURA EN INGENIERIA QUÍMICA SUSTENTABLE**

“PROYECTO FINAL MÉTODOS NUMÉRICOS”

LAURA IVETH MARTINEZ PRADO

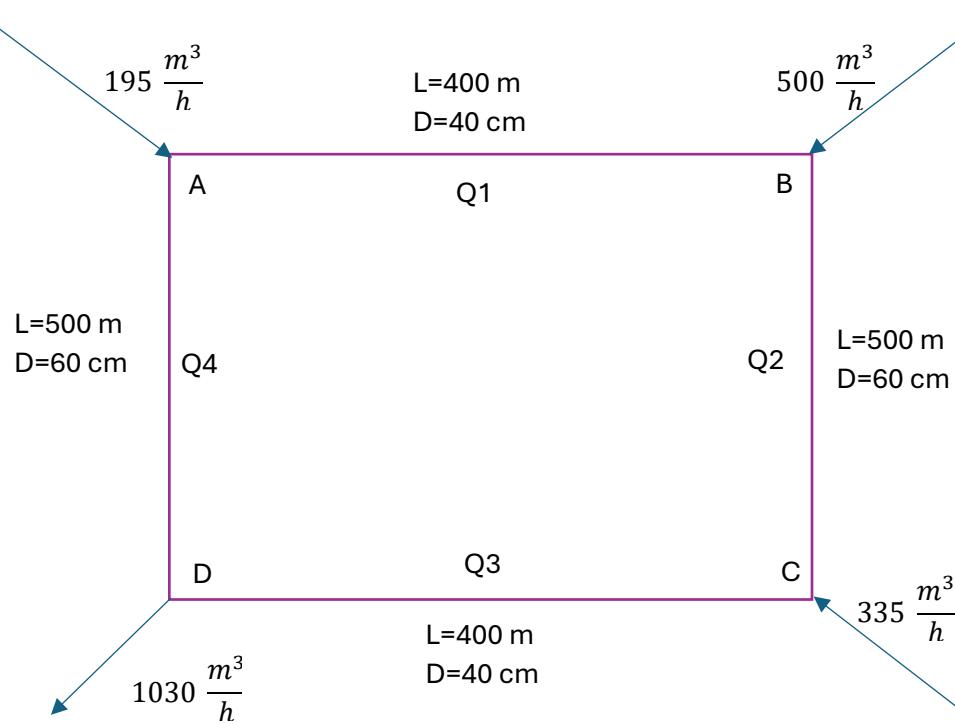
MÉTODOS NUMÉRICOS

ALMA XÓCHITL GONZALES MORALES

FECHA DE ENTREGA: 16 DE NOVIEMBRE DE 2025

Problema para resolver de ingeniería de fluidos

Determine los caudales que pasan por cada línea de la malla mostrada, si la tubería es de plástico.



Para simplificar el análisis, se considera que el flujo es lamina. Por lo tanto, se asume un número de Reynolds $Re=1000<2000$, y se calcula el factor de fricción como:

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1000} = 0.064$$

Con este valor de f , se determinan las resistencias hidráulicas de cada tramo, mediante:

$$R = \frac{8fL}{\pi^2 g D^5}$$

Por lo tanto, sustituyendo los datos correspondientes para cada tubo se tiene:

$$R_{AB=CD} = \frac{8(0.064)(400m)}{\pi^2(9.81)(0.4)^5} = 206.56$$

$$R_{BC=DA} = \frac{8(0.064)(500m)}{\pi^2(9.81)(0.6)^5} = 34$$

Para iniciar con el problema, se supone que todos caudales son positivos:

$$Q_1 = A \rightarrow B$$

$$Q_2 = B \rightarrow C$$

$$Q_3 = C \rightarrow D$$

$$Q_4 = D \rightarrow A$$

Si el resultado sale negativo significa que la dirección real es contraria a lo que se supuso en este punto.

Para encontrar las ecuaciones que conforman al sistema de ecuaciones se utiliza la conservación de masa en cada nodo

$$Lo\ que\ entra = lo\ que\ sale$$

Además de que este problema es un sistema lineal porque se basa en la Ley de pérdida de carga o Bernoulli simplificado linealizado

$$h = RQ$$

donde

- h = caída de presión o carga
- Q = caudal en la tubería
- R = resistencia hidráulica

La caída de presión es proporcional al caudal, es decir, lineal en Q

Nodo A

En A entran

- $195 \frac{m^3}{h}$
- Anteriormente se supuso que $Q_4(D \rightarrow A)$

Salen de A

- $Q_1(A \rightarrow B)$

La ecuación nos queda

$$\begin{aligned} 195 + Q_4 - Q_1 &= 0 \\ Q_1 - Q_4 &= 195 \end{aligned}$$

Nodo B

En B entran

- Q_1
- $500 \frac{m^3}{h}$

Salen de B

- Q_2

La ecuación nos queda

$$\begin{aligned} Q_1 + 500 - Q_2 &= 0 \\ Q_1 - Q_2 &= -500 \end{aligned}$$

Nodo C

En C entran

- Q_2
- $335 \frac{m^3}{h}$

Salen de C

- Q_3

La ecuación nos queda

$$\begin{aligned} Q_2 + 335 - Q_3 &= 0 \\ Q_2 - Q_3 &= -335 \end{aligned}$$

Nodo D

Aquí no hay aporte extremo, sin embargo, se cuenta con una ecuación hidráulica

La caída de presión entre nodos alrededor del lazo debe sumar 0:

$$R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + R_3 Q_3 + R_4 Q_4 = 0$$

Donde se sustituyen los valores antes calculados de R

$$206.56Q_1 + 34Q_2 + 206.56Q_3 + 34Q_4 = 0$$

Así se arma por completo el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 - Q_4 = 195 \\ Q_1 - Q_2 = -500 \\ Q_2 - Q_3 = -335 \\ 206.56Q_1 + 34Q_2 + 206.56Q_3 + 34Q_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el problema con Gauss-Jordán

Utilizando el sistema de ecuaciones antes obtenido, tenemos:

$$\begin{aligned} Q_1 - Q_4 &= 195 \\ Q_1 - Q_2 &= -500 \\ Q_2 - Q_3 &= -335 \\ 206.56Q_1 + 34Q_2 + 206.56Q_3 + 34Q_4 &= 0 \end{aligned}$$

Matriz A y vector b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 206.56 & 34 & 206.56 & 34 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 195 \\ -500 \\ -335 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Restar la fila 2 de la 1

$$\begin{array}{r} -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad -500 \\ -1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 195 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad -695 \end{array}$$

Nueva matriz y vector b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 206.56 & 34 & 206.56 & 34 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 195 \\ -695 \\ -335 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para eliminar el valor de a_{41} se debe restar la fila 4, multiplicando a_{41} por la fila 1

$$a_{11} = 206.56 * 1 = 206.56$$

$$a_{12} = 206.56 * 0 = 0$$

$$a_{13} = 206.56 * 0 = 0$$

$$a_{14} = 206.56 * -1 = -206.56$$

$$b_1 = 206.56 * 195 = 40279.2$$

$$\begin{array}{r} -206.56 \quad 34 \quad 206.56 \quad 34 \quad 0 \\ -206.56 \quad 0 \quad 0 \quad -206.56 \quad 40279.2 \\ \hline 0 \quad 34 \quad 206.56 \quad 240.56 \quad -40279.2 \end{array}$$

Nueva matriz y vector b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 34 & 206.56 & 240.56 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 195 \\ -695 \\ -335 \\ -40279.2 \end{bmatrix}$$

Normalizar la fila 2 para que el pivote sea 1

$$\frac{-1 * [0 \ -1 \ 0 \ 1][-695]}{[0 \ 1 \ 0 \ -1][695]}$$

Reordenando la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 34 & 206.56 & 240.56 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 195 \\ 695 \\ -335 \\ -40279.2 \end{bmatrix}$$

Restar la fila 3 de la 2

$$\begin{array}{r} -0 \ 1 \ -1 \ 0 \ -335 \\ -0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 695 \\ \hline 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ -1030 \end{array}$$

Nueva matriz y vector b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 34 & 206.56 & 240.56 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 195 \\ 695 \\ -1030 \\ -40279.2 \end{bmatrix}$$

Para eliminar el valor de a_{42} se debe restar la fila 4, multiplicando a_{42} por la fila 2

$$a_{21} = 34 * 0 = 0$$

$$a_{22} = 34 * 1 = 34$$

$$a_{23} = 34 * 0 = 0$$

$$a_{24} = 34 * -1 = -34$$

$$b_2 = 34 * 695 = 23630$$

$$\begin{array}{r} -0 \ 34 \ 206.56 \ 240.56 \ -40279.2 \\ -0 \ 34 \ 0 \ -34 \ 23630 \\ \hline 0 \ 0 \ 206.56 \ 274.56 \ -63800 \end{array}$$

Nueva matriz y vector b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 206.56 & 274.56 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 195 \\ 695 \\ -1030 \\ -63800 \end{bmatrix}$$

Normalizar la fila 3 para que el pivote sea 1

$$\frac{-1 * [0 \ 0 \ -1 \ 1][-1030]}{[0 \ 0 \ 1 \ -1][1030]}$$

Reordenando la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 206.56 & 274.56 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 195 \\ 695 \\ 1030 \\ -63800 \end{bmatrix}$$

Para eliminar el valor de a_{43} se debe restar la fila 4, multiplicando a_{43} por la fila 3

$$a_{31} = 206.56 * 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 a_{32} &= 206.56 * 0 = 0 \\
 a_{33} &= 206.56 * 1 = 206.56 \\
 a_{34} &= 206.56 * -1 = -206.56 \\
 b_3 &= 206.56 * 1030 = 212756.8
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 -0 & 0 & 206.56 & 274.56 & -63800 \\
 0 & 0 & 206.56 & -206.56 & 212754.8 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 481.12 & -276554.8
 \end{array}$$

Nueva matriz y vector b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 481.12 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 195 \\ 695 \\ 1030 \\ -276554.8 \end{bmatrix}$$

Normalizar la fila 4 para que el pivote sea 1

$$\begin{array}{c}
 [0 \ 0 \ 0 \ 481.12] [-276554.8] / 481.12 \\
 \hline
 [0 \ 0 \ 0 \ 1] [-574.81]
 \end{array}$$

Resordenando la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 195 \\ 695 \\ 1030 \\ -574.81 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para eliminar los valores de -1 que se encuentran del lado superior derecho se tiene que sumar la fila 1, 2 y 3 a la fila 4:

$$\text{Fila 1} = [1 \ 0 \ 0 \ -1][195] + [0 \ 0 \ 0 \ 1][-574.81] = [1 \ 0 \ 0 \ 0][-379.81]$$

$$\text{Fila 2} = [0 \ 1 \ 0 \ -1][695] + [0 \ 0 \ 0 \ 1][-574.81] = [0 \ 1 \ 0 \ 0][120.19]$$

$$\text{Fila 3} = [0 \ 0 \ 1 \ -1][1030] + [0 \ 0 \ 0 \ 1][-574.81] = [0 \ 0 \ 1 \ 0][455.19]$$

Reordenando la matriz final:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -379.81 \\ 120.19 \\ 455.19 \\ -574.81 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los caudales que pasan por la red son los siguientes:

$$Q = \begin{bmatrix} -379.812763 \\ 120.195349 \\ 455.197128 \\ -574.812763 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el problema con Gauss Seidel

Matriz A y vector b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 206.56 & 34 & 206.56 & 34 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 195 \\ -500 \\ -335 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iniciando las iteraciones con los caudales en 0, $Q_1^0 = 0, Q_2^0 = 0, Q_3^0 = 0, Q_4^0 = 0$

Primera iteración

$$\begin{aligned} Q_1^{k=1} &= \frac{-(a_{12}Q_2^0 + a_{13}Q_3^0 + a_{14}Q_4^0) + b_1}{a_{11}} = \frac{-((0)(0) + (0)(0) + (-1)(0)) + 195}{1} = 195 \\ Q_2^{k=1} &= \frac{-(a_{21}Q_1^{k=1} + a_{23}Q_3^0 + a_{24}Q_4^0) + b_2}{a_{22}} = \frac{-((1)(195) + (0)(0) + (0)(0)) + (-500)}{-1} \\ &= 695 \\ Q_3^{k=1} &= \frac{-(a_{31}Q_1^{k=1} + a_{32}Q_2^{k=1} + a_{34}Q_4^0) + b_3}{a_{33}} = \frac{-((0)(195) + (1)(695) + (0)(0)) + (-335)}{-1} \\ &= 1030 \\ Q_4^{k=1} &= \frac{-(a_{41}Q_1^{k=1} + a_{42}Q_2^{k=1} + a_{43}Q_3^0) + b_4}{a_{44}} \\ &= \frac{-((206.56)(195) + (34)(695) + (206.56)(1030)) + 0}{34} = -8120.27 \end{aligned}$$

Segunda iteración

$$\begin{aligned} Q_1^{k=2} &= \frac{-(a_{12}Q_2^{k=1} + a_{13}Q_3^{k=1} + a_{14}Q_4^{k=1}) + b_1}{a_{11}} \\ &= \frac{-((0)(695) + (0)(1030) + (-1)(-8120.27)) + 195}{1} = -7925.27 \\ Q_2^{k=2} &= \frac{-(a_{21}Q_1^{k=1} + a_{23}Q_3^{k=1} + a_{24}Q_4^{k=1}) + b_2}{a_{22}} \\ &= \frac{-((1)(-7925.27) + (0)(1030) + (0)(-8120.27)) + (-500)}{-1} = -7425.27 \\ Q_3^{k=2} &= \frac{-(a_{31}Q_1^{k=1} + a_{32}Q_2^{k=1} + a_{34}Q_4^{k=1}) + b_3}{a_{33}} \\ &= \frac{-((0)(-7925.27) + (1)(-7425.27) + (0)(-8120.27)) + (-335)}{-1} \\ &= -7090.27 \\ Q_4^{k=2} &= \frac{-(a_{41}Q_1^{k=1} + a_{42}Q_2^{k=1} + a_{43}Q_3^{k=1}) + b_4}{a_{44}} \\ &= \frac{-((206.56)(-7925.27) + (34)(-7425.27) + (206.56)(-7090.27)) + 0}{34} \\ &= 98532.32 \end{aligned}$$

Simplemente con dos iteraciones basta para observar que hay un crecimiento muy alto de los caudales requeridos, así que se propone hacer un cambio de columnas y de filas de la matriz A.

Intercambiar la fila 1 por la 2 no es una buena idea ya que a_{22} queda siendo 0, y para realizar las iteraciones, no se puede dividir entre 0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 206.56 & 34 & 206.56 & 34 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} -500 \\ 195 \\ -335 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Intercambiar la fila 1 con la 3 tampoco es la solución al problema, ya que igualmente que el caso anterior, a_{11} es igual y también a_{33} es igual a 0, por lo tanto, tampoco se pueden realizar las iteraciones

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 206.56 & 34 & 206.56 & 34 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} -335 \\ -500 \\ 195 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por último, la fila 1 se intercambia con la fila 4, en este caso si se puede resolver porque la matriz no contiene ningún 0

$$A = \begin{bmatrix} 206.56 & 34 & 206.56 & 34 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0 \\ -500 \\ -335 \\ 195 \end{bmatrix}$$

Primera iteración

$$\begin{aligned} Q_1^{k=1} &= \frac{-(a_{12}Q_2^0 + a_{13}Q_3^0 + a_{14}Q_4^0) + b_1}{a_{11}} = \frac{-((34)(0) + (206.56)(0) + (34)(0)) + 0}{1} = 0 \\ Q_2^{k=1} &= \frac{-(a_{21}Q_1^{k=1} + a_{23}Q_3^0 + a_{24}Q_4^0) + b_2}{a_{22}} = \frac{-((1)(0) + (0)(0) + (0)(0)) + (-500)}{-1} = 500 \\ Q_3^{k=1} &= \frac{-(a_{31}Q_1^{k=1} + a_{32}Q_2^{k=1} + a_{34}Q_4^0) + b_3}{a_{33}} = \frac{-((0)(0) + (1)(500) + (0)(0)) + (-335)}{-1} \\ &= 835 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_4^{k=1} &= \frac{-(a_{41}Q_1^{k=1} + a_{42}Q_2^{k=1} + a_{43}Q_3^0) + b_4}{a_{44}} = \frac{-((1)(0) + (0)(500) + (0)(835)) + 195}{-1} \\ &= -195 \end{aligned}$$

Segunda iteración

$$\begin{aligned} Q_1^{k=2} &= \frac{-(a_{12}Q_2^{k=1} + a_{13}Q_3^{k=1} + a_{14}Q_4^{k=1}) + b_1}{a_{11}} \\ &= \frac{-((34)(500) + (206.56)(835) + (34)(-195)) + 0}{206.56} = -885.20 \\ Q_2^{k=2} &= \frac{-(a_{21}Q_1^{k=1} + a_{23}Q_3^{k=1} + a_{24}Q_4^{k=1}) + b_2}{a_{22}} \\ &= \frac{-((1)(-885.20) + (0)(835) + (0)(-195)) + (-500)}{-1} = -385.20 \end{aligned}$$

$$Q_3^{k=2} = \frac{-(a_{31}Q_1^{k=1} + a_{32}Q_2^{k=1} + a_{34}Q_4^{k=1}) + b_3}{a_{33}} \\ = \frac{-((0)(-885.20) + (1)(-385.20) + (0)(-195)) + (-335)}{-1} = -50.20$$

$$Q_4^{k=2} = \frac{-(a_{41}Q_1^{k=1} + a_{42}Q_2^{k=1} + a_{43}Q_3^{k=1}) + b_4}{a_{44}} \\ = \frac{-((1)(-885.20) + (0)(-385.20) + (0)(-50.20)) + 195}{-1} = -1080.20$$

En este caso si se pudo realizar iteraciones debido a que en la diagonal no se encontraban 0 presentes, sin embargo, como cambian las iteraciones se puede observar que no se están estabilizando, además de que no se observan valores cercanos a los obtenidos con Gauss-Jordán o factorización LU.

Ahora se propone hacer un cambio de columnas

Iniciando con el intercambio de la columna 1 por la columna 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 34 & 206.56 & 206.56 & 34 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 195 \\ -500 \\ -335 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así simplemente no se puede resolver porque el pivote a_{11} es igual a 0, pero intercambiando ahora la fila 1 con la 2, puede hacer alguna posibilidad:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 34 & 206.56 & 206.56 & 34 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} -500 \\ 195 \\ -335 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Primera iteración

$$Q_1^{k=1} = \frac{-(a_{12}Q_2^0 + a_{13}Q_3^0 + a_{14}Q_4^0) + b_1}{a_{11}} = \frac{-((1)(0) + (0)(0) + (0)(0)) + (-500)}{-1} = 500$$

$$Q_2^{k=1} = \frac{-(a_{21}Q_1^{k=1} + a_{23}Q_3^0 + a_{24}Q_4^0) + b_2}{a_{22}} = \frac{-((0)(-195) + (0)(0) + (-1)(0)) + 195}{1} \\ = 195$$

$$Q_3^{k=1} = \frac{-(a_{31}Q_1^{k=1} + a_{32}Q_2^{k=1} + a_{34}Q_4^0) + b_3}{a_{33}} = \frac{-((1)(500) + (0)(195) + (0)(0)) + (-335)}{-1} \\ = 835$$

$$Q_4^{k=1} = \frac{-(a_{41}Q_1^{k=1} + a_{42}Q_2^{k=1} + a_{43}Q_3^0) + b_4}{a_{44}} \\ = \frac{-((34)(500) + (206.56)(195) + (206.56)(835)) + 0}{34} = -6757.55$$

Segunda iteración

$$\begin{aligned}
 Q_1^{k=2} &= \frac{-(a_{12}Q_2^{k=1} + a_{13}Q_3^{k=1} + a_{14}Q_4^{k=1}) + b_1}{a_{11}} \\
 &= \frac{-((1)(195) + (0)(835) + (0)(-6757.55)) + (-500)}{-1} = 695 \\
 Q_2^{k=2} &= \frac{-(a_{21}Q_1^{k=1} + a_{23}Q_3^{k=1} + a_{24}Q_4^{k=1}) + b_2}{a_{22}} \\
 &= \frac{-((0)(695) + (0)(835) + (-1)(-6757.55)) + 195}{-1} = -6562.55 \\
 Q_3^{k=2} &= \frac{-(a_{31}Q_1^{k=1} + a_{32}Q_2^{k=1} + a_{34}Q_4^{k=1}) + b_3}{a_{33}} \\
 &= \frac{-((1)(695) + (0)(6562.55) + (0)(-6757.55)) + (-335)}{-1} = 1030 \\
 Q_4^{k=2} &= \frac{-(a_{41}Q_1^{k=1} + a_{42}Q_2^{k=1} + a_{43}Q_3^{k=1}) + b_4}{a_{44}} \\
 &= \frac{-((34)(695) + (206.56)(-6562.55) + (206.56)(1030)) + 0}{34} = 32916.88
 \end{aligned}$$

Nuevamente se observa un comportamiento creciente de los caudales, por lo cual tampoco converge.

Ahora intercambiando la columna 1 y 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 206.56 & 34 & 206.56 & 34 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 195 \\ -500 \\ -335 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una vez más no se puede resolver así de simple, por lo que se intercambia ahora la fila 1 con la 3

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 206.56 & 34 & 206.56 & 34 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} -335 \\ -500 \\ 195 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iniciando con la primera iteración

$$\begin{aligned}
 Q_1^{k=1} &= \frac{-(a_{12}Q_2^0 + a_{13}Q_3^0 + a_{14}Q_4^0) + b_1}{a_{11}} = \frac{-((1)(0) + (0)(0) + (0)(0)) + (-335)}{-1} = 335 \\
 Q_2^{k=1} &= \frac{-(a_{21}Q_1^0 + a_{23}Q_3^0 + a_{24}Q_4^0) + b_2}{a_{22}} = \frac{-((0)(335) + (1)(0) + (0)(0)) + (-500)}{-1} \\
 &= 500 \\
 Q_3^{k=1} &= \frac{-(a_{31}Q_1^0 + a_{32}Q_2^0 + a_{34}Q_4^0) + b_3}{a_{33}} = \frac{-((0)(335) + (0)(500) + (-1)(0)) + 195}{1} \\
 &= 195
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_4^{k=1} &= \frac{-(a_{41}Q_1^0 + a_{42}Q_2^0 + a_{43}Q_3^0) + b_4}{a_{44}} \\
 &= \frac{-((206.56)(335) + (34)(500) + (206.56)(195)) + 0}{34} = -3719.91
 \end{aligned}$$

Segunda iteración

$$\begin{aligned}
 Q_1^{k=2} &= \frac{-(a_{12}Q_2^{k=1} + a_{13}Q_3^{k=1} + a_{14}Q_4^{k=1}) + b_1}{a_{11}} \\
 &= \frac{-((1)(500) + (0)(195) + (0)(-3719.91)) + (-335)}{-1} = 835 \\
 Q_2^{k=2} &= \frac{-(a_{21}Q_1^{k=1} + a_{23}Q_3^{k=1} + a_{24}Q_4^{k=1}) + b_2}{a_{22}} \\
 &= \frac{-((0)(835) + (1)(195) + (0)(-3719.91)) + (-500)}{-1} = 695 \\
 Q_3^{k=2} &= \frac{-(a_{31}Q_1^{k=1} + a_{32}Q_2^{k=1} + a_{34}Q_4^{k=1}) + b_3}{a_{33}} \\
 &= \frac{-((0)(835) + (0)(695) + (-1)(-3719.91)) + 195}{1} = -3524.91 \\
 Q_4^{k=2} &= \frac{-(a_{41}Q_1^{k=1} + a_{42}Q_2^{k=1} + a_{43}Q_3^{k=1}) + b_4}{a_{44}} \\
 &= \frac{-((206.56)(835) + (34)(695) + (206.56)(3524.91)) + 0}{34} = 15646.99
 \end{aligned}$$

Volvemos a observar lo mismo en los casos anteriores que crecen mucho los caudales, por lo tanto, está divergiendo.

Por último, intercambiando la columna 1 por la 4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 34 & 34 & 206.56 & 206.56 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 195 \\ -500 \\ -335 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso no hay necesidad de hacer un cambio de filas porque en la matriz no existe ningún 0
Iniciando con la primera iteración

$$\begin{aligned}
 Q_1^{k=1} &= \frac{-(a_{12}Q_2^0 + a_{13}Q_3^0 + a_{14}Q_4^0) + b_1}{a_{11}} = \frac{-((0)(0) + (0)(0) + (1)(0)) + 195}{-1} = -195 \\
 Q_2^{k=1} &= \frac{-(a_{21}Q_1^{k=1} + a_{23}Q_3^0 + a_{24}Q_4^0) + b_2}{a_{22}} = \frac{-((0)(-195) + (0)(0) + (1)(0)) + (-500)}{-1} \\
 &= 500 \\
 Q_3^{k=1} &= \frac{-(a_{31}Q_1^{k=1} + a_{32}Q_2^{k=1} + a_{34}Q_4^0) + b_3}{a_{33}} \\
 &= \frac{-((0)(-195) + (1)(500) + (0)(0)) + (-335)}{-1} = 835 \\
 Q_4^{k=1} &= \frac{-(a_{41}Q_1^{k=1} + a_{42}Q_2^{k=1} + a_{43}Q_3^0) + b_4}{a_{44}} \\
 &= \frac{-((34)(-195) + (34)(500) + (206.56)(835)) + 0}{206.56} = -885.21
 \end{aligned}$$

Segunda iteración

$$Q_1^{k=2} = \frac{-(a_{12}Q_2^{k=1} + a_{13}Q_3^{k=1} + a_{14}Q_4^{k=1}) + b_1}{a_{11}} = \frac{-((0)(-195) + (0)(835) + (1)(-885.21)) + 195}{-1} = -1080.21$$

$$Q_2^{k=2} = \frac{-(a_{21}Q_1^{k=1} + a_{23}Q_3^{k=1} + a_{24}Q_4^{k=1}) + b_2}{a_{22}} = \frac{-((0)(-1080.21) + (0)(835) + (1)(-885.21)) + (-500)}{-1} = -385.21$$

$$Q_3^{k=2} = \frac{-(a_{31}Q_1^{k=1} + a_{32}Q_2^{k=1} + a_{34}Q_4^{k=1}) + b_3}{a_{33}} = \frac{-((0)(-1080.21) + (1)(-385.21) + (0)(-885.21)) + (-335)}{-1} = -50.21$$

$$Q_4^{k=2} = \frac{-(a_{41}Q_1^{k=1} + a_{42}Q_2^{k=1} + a_{43}Q_3^{k=1}) + b_4}{a_{44}} = \frac{-((34)(-1080.21) + (34)(-385.21) + (206.56)(-50.21)) + 0}{206.56} = 291.42$$

Haciendo cada uno de los cambios, ya se comprobó que no hay una solución para este problema, porque no está bien condicionado, al tener tantos 0 implicados en la matriz, hace que el método sea más sensible para su resolución.

Resolviendo el problema con factorización LU

Matriz A y vector b iniciales

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 206.56 & 34 & 206.56 & 34 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 195 \\ -500 \\ -335 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontrando los valores de L_{21}, L_{31}, L_{41} para la matriz L

$$L_{21} = \frac{1}{1} = 1 \quad L_{31} = \frac{0}{1} = 0 \quad L_{41} = \frac{206}{1} = 206$$

Restando la fila 2 a la multiplicación de L_{21} por la fila 1

$$\begin{array}{r} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Restar la fila 3 de la multiplicación de L_{31} a la fila 1

$$\begin{array}{r} -0 & 1 & -1 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Restar la fila 4 de la multiplicación de L_{41} a la fila 1

$$\begin{array}{r} -206.56 \quad 34 \quad 206.56 \quad 34 \\ 206.56 \quad 0 \quad 0 \quad -206.56 \\ \hline 0 \quad 34 \quad 206.56 \quad 240.56 \end{array}$$

Sustituyendo los nuevos valores de las matrices L y U

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 206.56 & - & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 34 & 206.56 & 240.56 \end{bmatrix}$$

Con la nueva matriz U, se obtienen los valores de L_{32} y L_{42}

$$L_{32} = \frac{1}{-1} = -1 \quad L_{42} = \frac{34}{-1} = -34$$

Restando la fila 3 de la multiplicación de L_{32} a la fila 2

$$\begin{array}{r} -0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \end{array}$$

Restando la fila 4 de la multiplicación de L_{42} a la fila 2

$$\begin{array}{r} -0 \quad 34 \quad 206.56 \quad 240.56 \\ 0 \quad 34 \quad 0 \quad -34 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 206.56 \quad 274.56 \end{array}$$

Sustituyendo los nuevos valores de las matrices L y U nuevamente

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 206.56 & -34 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 206.56 & 274.56 \end{bmatrix}$$

Finalmente, utilizando la nueva matriz de U, se obtiene el valor de L_{43}

$$L_{43} = \frac{206.56}{-1} = -206.56$$

Restar la fila 4 de la multiplicación de L_{43} a la fila 3

$$\begin{array}{r} -0 \quad 0 \quad 206.56 \quad 274.56 \\ 0 \quad 0 \quad 206.56 \quad -206.56 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 481.12 \end{array}$$

Sustituyendo los últimos valores en las matrices L y U

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 206.56 & -34 & -206.56 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 481.12 \end{bmatrix}$$

Comprobando que las matrices sean correctas, se multiplican L y U

Matriz A original

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 206.56 & 34 & 206.56 & 34 \end{bmatrix}$$

Multiplicar la fila 1 de L por todas las columnas de U

Columna 1 de U

$$1(1) + 0(0) + 0(0) + 0(0) = 1$$

Columna 2 de U

$$1(0) + 0(-1) + 0(0) + 0(0) = 0$$

Columna 3 de U

$$1(0) + 0(0) + 0(-1) + 0(0) = 0$$

Columna 4 de U

$$1(-1) + 0(1) + 0(1) + 0(481.12) = -1$$

Fila 1 del producto

$= [1 \ 0 \ 0 \ -1]$ es correcta, ya que coincide con la fila 1 de la matriz A

Multiplicar la fila 2 de L por todas las columnas de U

Columna 1 de U

$$1(1) + 1(0) + 0(0) + 0(0) = 1$$

Columna 2 de U

$$1(0) + 1(-1) + 0(0) + 0(0) = -1$$

Columna 3 de U

$$1(0) + 1(0) + 0(-1) + 0(0) = 0$$

Columna 4 de U

$$1(-1) + 1(1) + 0(1) + 0(481.12) = 0$$

Fila 2 del producto

$= [1 \ -1 \ 0 \ 0]$ es correcta, ya que coincide con la fila 2 de la matriz A

Multiplicar la fila 3 de L por todas las columnas de U

Columna 1 de U

$$0(1) + (-1)(0) + 1(0) + 0(0) = 0$$

Columna 2 de U

$$0(0) + (-1)(-1) + 1(0) + 0(0) = 1$$

Columna 3 de U

$$0(0) + (-1)(0) + 1(-1) + 0(0) = -1$$

Columna 4 de U

$$0(-1) + (-1)(1) + 1(1) + 0(481.12) = 0$$

Fila 3 del producto

$= [0 \ 1 \ -1 \ 0]$ es correcta, ya que coincide con la fila 3 de la matriz A

Multiplicar la fila 4 de L por todas las columnas de U

Columna 1 de U

$$206.56(1) + (-34)(0) + (-206.56)(0) + 1(0) = 206.56$$

Columna 2 de U

$$206.56(0) + (-34)(-1) + (-206.56)(0) + 1(0) = 34$$

Columna 3 de U

$$206.56(0) + (-34)(0) + (-206.56)(-1) + 1(0) = 206.56$$

Columna 4 de U

$$206.56(-1) + (-34)(1) + (-206.56)(1) + 1(481.12) = 34$$

Fila 4 del producto

$[206.56 \ 34 \ 206.56 \ 34]$ es correcta, ya que coincide con la fila 4 de la matriz A

Esto significa que todas las operaciones son correctas ya que al hacer la multiplicación de las matrices L y U, se obtuvo de nuevo la matriz A original

Continuando con la factorización LU, se procede a encontrar los valores de y

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 206.56 & -34 & -206.56 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 195 \\ -500 \\ -335 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = b_1 = 195$$

$$y_2 = b_2 - L_{21}y_1 = -500 - (1)(195) = -695$$

$$y_3 = b_3 - L_{32}y_2 - L_{31}y_1 = -335 - (-1)(-695) - (0)(195) = -1030$$

$$y_4 = b_4 - L_{41}y_1 - L_{42}y_2 - L_{43}y_3 = 0 - (206.56)(195) - (-34)(-695) - (-206.56)(-1030) \\ = -276666$$

Ahora para encontrar los caudales finales

$$UQ = y \rightarrow Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 481.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 195 \\ -695 \\ -1030 \\ -276666 \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \frac{y_4}{U_{44}} = \frac{-276666}{481.12} = -575.045726$$

$$Q_3 = \frac{y_3 - U_{34}Q_4}{U_{33}} = \frac{(-1030) - (1)(-575.045726)}{-1} = 454.954273$$

$$Q_2 = \frac{y_2 - U_{23}Q_3 - U_{24}Q_4}{U_{22}} = \frac{(-695) - (0)(454.954273) - (1)(-575.045726)}{-1} = 119.954274$$

$$Q_1 = \frac{y_1 - U_{12}Q_2 - U_{13}Q_3 - U_{14}Q_4}{U_{11}} \\ = \frac{195 - (0)(119.954274) - (0)(454.954273) - (-1)(-575.045726)}{1} \\ = -380.045726$$

Comparación de métodos

Los métodos de Gauss-Jordán y factorización LU, son métodos directos y estables por lo cual no hubo necesidad de hacer cambios en las filas para llegar al resultado esperado, sin embargo, Gauss-Jordán es un poco más tardado a comparación de LU ya que divide el proceso hacia delante y hacia atrás, además es ideal cuando solamente se quiere cambiar el vector b. Algunos resultados que fueron obtenidos con ambos métodos fueron negativos, esto no quiere decir que está mal, simplemente nos indica el comportamiento de los caudales, dentro de las tuberías el flujo de B va en dirección a A, además de que de B también va hacia C, C va hacia D, y de A hacia D, esto tiene sentido porque B es

mayor que A y también que C, así que genera una presión más grande que esos flujos por lo que es coherente que el caudal de B, vaya hacia los otros 2, asimismo para el cauda de C que va hacia D, es correcto porque D es una salida y lo mismo pasa con el cauda de A que va hacia D, porque es la misma salida. El método faltante que es Gauss-Seidel mostró un comportamiento poco preciso por la sensibilidad que tiene al orden original de la matriz lo que generó que el método divergiera de manera rápida, tan solo a 2 iteraciones ya estaban muy por encima los valores de los caudales (Q) esperados, se propuso además hacer un cambio de filas, con el objetivo de que convergiera de algún modo, aunque no tuvo éxito esto, dado a que todos los intentos fueron fallidos porque se alejaban de los valores correctos o simplemente eran muy inestables. Esto nos indica que Gauss-Jordán y factorización LU son los métodos que pueden garantizar una solución precisa y estable, mientras que Gauss-Seidel depende del orden de la matriz para poder llegar a converger.

Conclusiones

Los tres métodos permiten realizar un problema de sistemas de ecuaciones lineales, aunque sus resultados pueden ser distintos según las ecuaciones que se tengan. Los métodos Gauss-Jordán y factorización LU en este caso, resultaron ser los óptimos y precisos ya que proporcionaron una solución precisa sin depender del orden de las ecuaciones. En cambio, el método de Gauss-Seidel mostró una alta sensibilidad a la estructura del sistema inicial, llegando a divergir, aunque se haya hecho un cambio de filas.