Notación:

$t_i$ : tiempo i-esimo → cualquier tiempo dentro del intervalo.

$t_{i+1}$: tiempo i-esimo más uno $\quad * h = x_{i+1} - x_i$

$x_i = x(t_{i+1})$ coordenada x al tiempo $t_i$

$x_{i+1} = x(t_{i+1})$ coordenada x al tiempo $t_{i+1}$

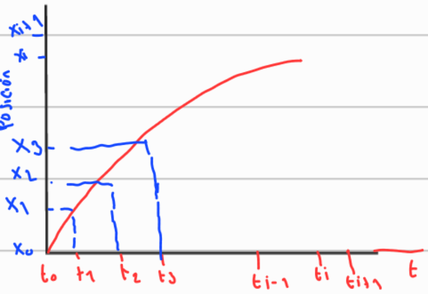
$$\frac{df}{dt} \overset{\text{Aproximación}}{\cong} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

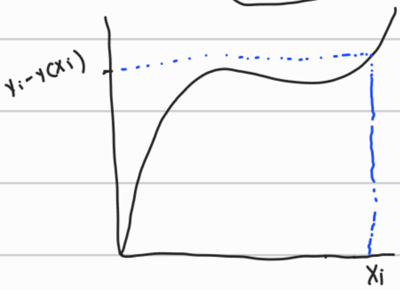
para que no sea aprox y sea igualdad

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Lo expresamos solo como la función.

$$= \frac{f_{i+1} - f_i}{t_{i+1} - t_i}$$



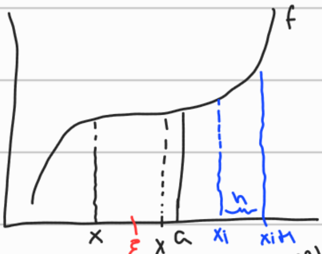




## Serie de taylor

Aproximar una función

$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$

$f(x) \approx f(c)$




$$f(x) = f(a) + \overbrace{\underbrace{f'(a)}_{\text{pendiente}}(x-a)}^{\text{es una recta } y=mx+b} + f''(a)\underbrace{\frac{(x-a)^2}{2!}}_{\text{ahora lo aproximamos como una parabola}} + \frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

la función evaluada en x, en torno a "a"

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \overbrace{R_n}^{\text{residuo}}$$

Si no agregamos la $R_n$ asumimos que n es infinita

$R_n$ = Residuo → todos los terminos que hacen falta en una suma infinita

medida del error de truncamiento en la función.

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-a')^n f^{(n+1)}(a')}{n!} \, da'$$

$a'$ = variable muda

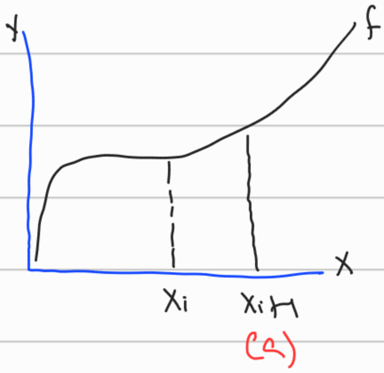
Teorema de valor medio.

Otra expresión para el residuo es:

Chi → punto intermedio entre x y a

$$\underbrace{R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x-a)^{n+1}}_{\text{Forma de Lagrange del residuo.}}$$

## * Serie de Taylor con puntos continuos $x_i$




$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + f''(x_i)\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!} + f^3(x_i)\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(x_i)\frac{(x_{i+1}-x_i)^n}{n!}$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{n+1}(\xi)(x_{i+1}-x_i)^n}{(n+1)!}}_{\text{residuo ó Error de truncamiento}}$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2!} + \frac{f^3(x_i)h^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)h^{(n)}}{n!} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_i)\, h^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n}$$

$$\underbrace{f_{i+1} = f_i + f'_i \cdot h + f''_i \frac{h^2}{2} + \frac{f_i^3 h^3}{3!} \dots\dots}_{\text{la forma mas simplificada}}$$

* Se usa un valor anterior para aproximar, en este caso $x_i$ para aprox a $x_{i+1}$

## Ejemplo del uso

Tomemos el siguiente polinomio.

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

Predecir el valor en $x=1$ $h=1$ usando la serie de Taylor de orden cero hasta 4, y calculando el residuo en cada caso.

$$f(1) = 0.2$$

| n | f(X=1) (aproximación) | $R_n$ | E = f(1) - aprox |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.2 | -0.91 | -1 = 0.2 - 1.2 |
| 1 | 0.95 | $f''\frac{(0.5)}{2!} = -0.87$ | -0.75 |
| 2 | 0.45 | -0.35 | -0.25 |
| 3 | 0.3 | -0.1 | -0.1 |
| 4 | 0.2 | 0 | 0 |

$X_{i+1} = 1$

$X_i = 0$

para n = 0

→ punto entre 0 y 1

$$\frac{f^{(0+1)}(0.5)(1)^0}{1!} = f'(x)\,0.5$$

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - x - 0.25$$

$f'(x)\,0.5 = -0.91$ $\quad f'(x) = -0.4(0.5)^3 - 0.45(0.5)^2 - 0.5 - 0.25 = 0.91$

n = 1

$$\overset{0}{f'(x_i)}\ \overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{h}$$

$1.2 - 0.25$

$$f''\frac{(0.5)}{2!} = f''(x) = -1.2x^2 - 0.9x - 1$$

n = 2

$$\underset{\downarrow\ 0}{f''(x_i)}\ \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}$$

$$-1.2(0)^2 - 0.9(0) - 1 \left(\frac{(1)^2}{2!}\right) = -1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2}+0.95=\underline{0.45}$

$$R_n=\frac{f^{(2+1)}(0.5)(1)^2}{(2+1)!}=\frac{f'''(0.5)}{3!}=\frac{-2.4(0.5)-0.9}{3!}=$$

$$f'''=-2.4x-0.9$$

---

$n=3$

$$f'''(x_i)\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{3!}$$

$\downarrow$ 0

$$-2.4(0)-0.9\left(\frac{(1)^3}{3!}\right)=-0.9\left(\frac{1}{3!}\right)=-0.15$$

$$-0.15+0.45=0.3$$

Ejercicio.

$f(x) = \cos x$

predecir el valor en $x = \frac{\pi}{3}$ usando la serie de taylor en torno a $x = \frac{\pi}{4}$, de orden cero hasta 4, y calculando el residuo en cada caso. Usando.

$$\xi = \frac{\pi/3 - \pi/4}{2} = \frac{\pi}{24}$$

$$h = \frac{\pi}{12} \qquad x_{i+1} = \frac{\pi}{3}$$

$$x_i = \frac{\pi}{4}$$

| | $R_n$ | $E = f(\frac{\pi}{3}) - \text{aprox}$ |
|---|---|---|
| $\cos \pi/4 = 0.71$ | $\frac{f'(\pi/24)(1)}{1} = \operatorname{sen} \pi/24$ | |