Sistemas Lineales: Redes de tuberías

Luis Alejandro Durán-Hernández
División de Ciencias e Ingenierías Campus León, Universidad de Guanajuato
Loma del Bosque 103, 37150 León Guanajuato, México
Licenciatura en Ingeniería Química Sustentable
(Fecha: 16 de noviembre de 2025)

Resumen

Se analizó y resolvió un problema de ingeniería química (redes de tuberías) usando métodos de resolución de ecuaciones lineales (G-J,G-S,LU), donde se obtuvieron resultados satisfactorios usando G-J y LU, mientras que con G-S no se pudo llegar a un resultado satisfactorio debido a las condiciones del problema.

I Planteamiento del problema

Determine los caudales que pasan por cada línea de la malla mostrada, así como la presión en el nodo B. El líquido es agua y lleva un flujo laminar.

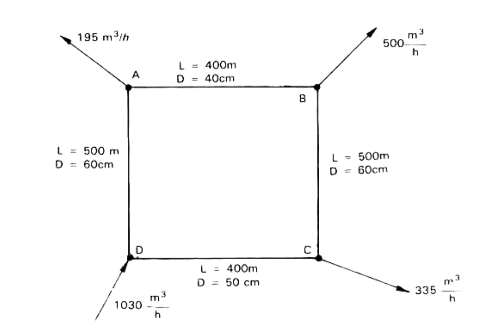

Figura 1: Red de tuberías a resolver.

Para resolver este problema, se puede usar una relación linear entre la diferencia de presiones (o pérdida de carga) y el caudal.

$$\Delta P = RQ^n \tag{1}$$

En este caso, como el flujo es laminar, $n = 1$, por lo que la ecuación está linealizada y, usando la definición de resistencia hidráulica (R) establecida por Hagen-Poiseuille

$$R = \frac{128\mu L}{\pi D^4} \tag{2}$$

se puede encontrar el valor de los caudales (Q_i), ya que la pérdida de carga en una malla cerrada debe ser 0, por lo que

$$h_{AB} + h_{BC} + h_{CD} + h_{DA} = 0 \tag{3}$$

Usando las propiedades del agua a T_{amb}

$$\mu = 1x10^{-3} Pa \cdot s$$

Por lo que primero, se deben conocer los diámetros y longitudes de cada tramo o rama"dentro de la red.

Sección	Longitud (L) [m]	Diámetro (D) [m]
AB	400	0.4
BC	500	0.6
CD	400	0.5
DA	500	0.6

Usando estos valores de D y L

Sección	R $[Pa \cdot s/m^3]$
AB	636.6198
BC	157.1901
CD	260.7595
DA	157.1901

Y se procede a hacer el balance de materia en cada uno de los nodos.

Balance en A

$$Q_A = Q_{DA} - Q_{AB} = -195m^3/h$$

Balance en B

$$Q_B = Q_{AB} - Q_{BC} = -500m^3/h$$

Balance en C

$$Q_C = Q_{BC} - Q_{CD} = -335m^3/h$$

Balance en D

$$Q_D = Q_{CD} - Q_{DA} = 1030m^3/h$$

Pero,se deben tomar los flujos en m^3/s, por lo que se deben multiplicar los caudales por el factor de conversión $\frac{1h}{3600s}$

Balance en A

$$Q_A = Q_{DA} - Q_{AB} = -0{,}0541667m^3/h \tag{4}$$

Balance en B

$$Q_B = Q_{AB} - Q_{BC} = -0{,}138889 m^3/h \tag{5}$$

Balance en C

$$Q_C = Q_{BC} - Q_{CD} = -0{,}0930556 m^3/h \tag{6}$$

Balance en D

$$Q_D = Q_{CD} - Q_{DA} = 0{,}286111 m^3/h \tag{7}$$

También se puede usar la pérdida entre A-B

$$P_A - P_B = R_{AB} Q_{AB}$$

Y

$$P_D - P_A = R_{DA} Q_{DA}$$

Por lo que

$$P_A = P_D - R_{DA} Q_{DA}$$

Si se toma P_D como la presión atmosférica ($101{,}325x10^3 Pa$), ya que es la del flujo de entrada, entonces podemos asirgnarle un valor de 0, ya que al trabajar con fluidos se toma en cuenta la presión manométrica ($P_{bar} = Pabs - Patm$), por lo que $P_D = 0$. Así que:

$$P_A = -R_{DA} Q_{DA}$$

Entonces

$$P_B = P_A - R_{AB} Q_{AB}$$

$$P_B = -R_{DA} Q_{DA} - R_{AB} Q_{AB}$$

$$-P_B - R_{DA} Q_{DA} - R_{AB} Q_{AB} = 0 \tag{8}$$

Y se puede hacer algo análogo usando P_C

$$P_B - P_C = R_{BC} Q_{BC}$$

$$P_C - P_D = R_{CD} Q_{CD} \therefore P_C = R_{CD} Q_{CD}$$

Entonces

$$P_B = R_{BC} Q_{BC} + P_C \therefore P_B = R_{BC} Q_{BC} + R_{CD} Q_{CD}$$

$$P_B - R_{BC} Q_{BC} - R_{CD} Q_{CD} = 0 \tag{9}$$

Entonces, ya se tienen 5 variables, por lo que el vector $\vec{x}$ queda:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{AB} \\ Q_{BC} \\ Q_{CD} \\ Q_{DA} \\ P_B \end{bmatrix}$$

Y la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -R_{AB} & 0 & 0 & -R_{DA} & -1 \\ 0 & -R_{BC} & -R_{CD} & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -636{,}6198 & 0 & 0 & -157{,}1901 & -1 \\ 0 & -157{,}1901 & -260{,}7595 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y el vector $\vec{b}$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0541667 \\ -0{,}138889 \\ -0{,}0930556 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

II RESULTADOS

2.1. Usando Gauss-Jordan

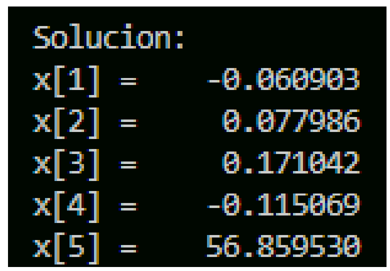

Figura 2: Resultados obtenidos con Gauss-Jordan.

Por lo que, los resultados obtenidos son

$$Q_{AB} = -0{,}060903 m^3/s = -219{,}2508 m^3/h$$
$$Q_{BC} = 0{,}077986 m^3/s = 280{,}7496 m^3/h$$
$$Q_{CD} = 0{,}171042 m^3/s = 615{,}7512 m^3/h$$
$$Q_{DA} = -0{,}115069 m^3/s = -414{,}2484 m^3/h$$
$$P_B = 56{,}859530 Pa$$

En este caso, los signos negativos en los flujos no son incorrectos, ya que en problemas de redes de tuberías, un signo negativo indica la dirección en la que se mueve el flujo, por ejemplo, si se asumió que en el balance en el nodo A, el caudal Q_{AB} salía (signo negativo), pero en los resultados se obtiene una cantidad negativa, esto nos indica que entonces este va en dirección contraria a la que habíamos supuesto, por lo que estaría entrando al nodo A.

Mientras que el resultado obtenido para P_B, si lo expresamos en términos de la P_{abs} sería

$$P_{abs_B} = P_B + P_{atm}$$

$$P_{abs_B} = 56{,}859530 Pa + 101325 Pa = 101381{,}86 Pa$$

Para comprobar los resultados, resolveremos las ecuaciones de balance y de pérdida.

Balance en A

$$Q_A = Q_{DA} - Q_{AB} = -195 m^3/h$$

$$Q_A = -414{,}2484 - (-219{,}2508) = -194{,}9976 m^3/h$$

Balance en B

$$Q_B = Q_{AB} - Q_{BC} = -500 m^3/h$$

$$Q_B = -219{,}2508 - 280{,}7496 = -500{,}0004 m^3/h$$

Balance en C

$$Q_C = Q_{BC} - Q_{CD} = -335 m^3/h$$

$$Q_C = 280{,}7496 - 615{,}7512 = -335{,}0016 m^3/h$$

Balance en D

$$Q_D = Q_{CD} - Q_{DA} = 1030 m^3/h$$

$$Q_C = 615{,}7512 - (-414{,}2484) = 1029{,}9996 m^3/h$$

Y para la pérdida

$$-P_B - R_{DA}Q_{DA} - R_{AB}Q_{AB} = 0$$

$$[-56{,}859530 - 157{,}1901(-0{,}115069)$$

$$-636{,}6198(-0{,}060903)]Pa = 0{,}00023 Pa$$

$$P_B - R_{BC}Q_{BC} - R_{CD}Q_{CD} = 0$$

$$[56{,}859530 - 260{,}7595(0{,}171042)$$

$$-157{,}1901(0{,}077986)]Pa = 0{,}00008 Pa$$

2.2. Usando factorización LU

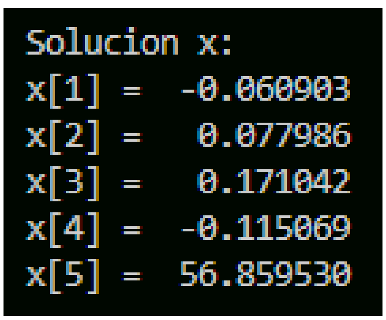
Solucion x:
x[1] = -0.060903
x[2] = 0.077986
x[3] = 0.171042
x[4] = -0.115069
x[5] = 56.859530

Figura 3: Resultados obtenidos con factorización LU.

Usando este método, los resultados obtenidos son:

$$Q_{AB} = -0{,}060903 m^3/s = -219{,}2508 m^3/h$$
$$Q_{BC} = 0{,}077986 m^3/s = 280{,}7496 m^3/h$$
$$Q_{CD} = 0{,}171042 m^3/s = 615{,}7512 m^3/h$$
$$Q_{DA} = -0{,}115069 m^3/s = -414{,}2484 m^3/h$$
$$P_B = 56{,}859530 Pa$$

Comprobando los resultados, al igual que en el método Gauss-Jordan

Balance en A

$$Q_A = Q_{DA} - Q_{AB} = -195 m^3/h$$

$$Q_A = -414{,}2484 - (-219{,}2508) = -194{,}9976 m^3/h$$

Balance en B

$$Q_B = Q_{AB} - Q_{BC} = -500 m^3/h$$

$$Q_B = -219{,}2508 - 280{,}7496 = -500{,}0004 m^3/h$$

Balance en C

$$Q_C = Q_{BC} - Q_{CD} = -335 m^3/h$$

$$Q_C = 280{,}7496 - 615{,}7512 = -335{,}0016 m^3/h$$

Balance en D

$$Q_D = Q_{CD} - Q_{DA} = 1030 m^3/h$$

$$Q_C = 615{,}7512 - (-414{,}2484) = 1029{,}9996 m^3/h$$

Y para la pérdida

$$-P_B - R_{DA}Q_{DA} - R_{AB}Q_{AB} = 0$$

$$[-56{,}859530 - 157{,}1901(-0{,}115069)$$

$$-636{,}6198(-0{,}060903)]Pa = 0{,}00023 Pa$$

$$P_B - R_{BC}Q_{BC} - R_{CD}Q_{CD} = 0$$

$$[56{,}859530 - 260{,}7595(0{,}171042)$$

$$-157{,}1901(0{,}077986)]Pa = 0{,}00008 Pa$$

Se obtuvieron practicamente los mismos resultados que con Gauss-Jordan, estos dos métodos funcionaron ya que no tienen la limitación que tiene Gauss-Seidel, ya que estos dos métodos solo necesitan estar bien condicionados y no tener 0 en las diagonales, por lo que ambos funcionaron y arrojaron los mismos resultados, practicamente sin ninguna diferencia entre ellos.

2.3. Usando Gauss-Seidel

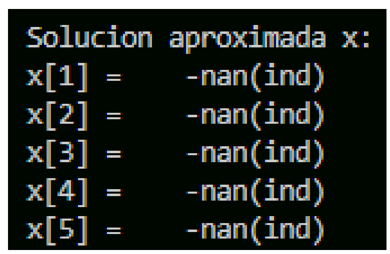
Solucion aproximada x:
x[1] = -nan(ind)
x[2] = -nan(ind)
x[3] = -nan(ind)
x[4] = -nan(ind)
x[5] = -nan(ind)

Figura 4: Resultados obtenidos con factorización LU.

Usando Gauss-Seidel no se obtuvieron resultados, ya que ninguna fila es diagonalmente dominante, lo que significa que el valor absoluto de los elementos diagonales no es mayor que la suma de los valores absolutos de los demás elementos de esa fila, lo que causa que método iterativos como Gauss-Seidel converjan lentamente o no converjan en este tipo de matrices, por lo que no se obtienen resultados para esta matriz, ya que

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1$$

$$a_{44} = -157{,}1901 \quad a_{55} = 1$$

Cuyos valores no son mayores que la suma de los otros valores de sus respectivas filas, por lo que el método no logró converjer usando esta matriz, mientras que con LU y G-J sí.

III CONCLUSIONES

Si bien los tres métodos funcionan generalmente, hay casos en los que un método puede converger o dar resultados, mientras que otro no, en este caso, se pudo observar que el método que tenía más restricciones"fue el de Gauss-Seidel, donde no solo se necesitaba no tener 0 en los diagonales, sino que también que fuera diagonalmente dominante, lo cual no era, sin embargo, con Gauss-Jordan y LU se obtuvieron resultados y fueron los mismos, ya que estos solo necesitan un problema bien condicionado y que no tenga 0 en las diagonales, por lo que estos dos métodos si pudieron arrojar resultados, al contrario que el de Gauss-Seidel.

Referencias

[1] White, F. M. (2004). *Mecánica de fluidos.* McGraw-Hill. España. ISBN: 84-481-4076-1.

[2] Mott, R. L. (2006). *Mecanica de Fluidos.* 6/e. Pearson Educación. México. ISBN: 970-26-0805-8.