Tarea

Primer Examen Parcial

Métodos Numéricos

Durán Hernández Luis Alejandro

1- Describe los diferentes tipos de error que pueden aparecer en la determinación de alguna cantidad cuando hay procedimientos experimentales y/o de análisis numérico.

E_T : error rel. verdadero $\rightarrow \frac{\text{error verdadero}}{\text{valor verdadero}} \times 100\,\%$

E_a : error aprox porc. $\rightarrow \frac{\text{error aprox}}{\text{valor aprox}} \times 100\,\%$

Están también los errores sistemáticos, asociados al instrumento o método de medición

Errores aleatorios: variables impredecibles

Errores humanos: relacionados a la habilidad del que hace las mediciones

Error de truncamiento: se da al hacer un método infinito a uno finito

Error de redondeo: surgen al limitar los dígitos de números decimales

Error numérico total: suma del error de truncamiento y el de redondeo

E_a : error aprox $\rightarrow$ valor nuevo − valor anterior (Iteraciones)

2- Usa la expansión de la serie de Taylor de cero al cuarto orden para estimar $f(3)$ si $f(x) = \ln(x)$ usando $x = 1$ como punto base.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)(x_{i+1}-x_i)}{1!} + \frac{f''(x_i)(x_{i+1}-x_i)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x_i)(x_{i+1}-x_i)^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x_{i+1}-x_i)^4}{4!} + O(h)$$

$$\Rightarrow f(3) = \ln(1) + \left(\frac{1}{1}\right)(3-1) + \left(-\frac{1}{1^2}\right)\left(\frac{(3-1)^2}{2}\right) + \left(\frac{2}{1^3}\right)\left[\frac{(3-1)^3}{6}\right] + \left(\frac{-6}{1^4}\right)\left[\frac{(3-1)^4}{24}\right] = 0 + 2 - 2 + \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3} = -1.3333$$

$$f(3)_{real} = \ln(3) = 1.0986$$

$$\text{Error} = \left|\frac{1.0986 - (-1.3333)}{1.0986}\right| \times 100 = 221.36\,\%$$

3- Para calcular las coordenadas espaciales de un planeta tenemos que resolver la función $f(x) = x - 1 - 0.5\sin(x)$. Sea $a = x_i = \pi/2$ en el intervalo $[0, \pi]$ el punto base. Determine la expansión de la serie de Taylor de orden superior que dé un error máximo de 0.015 en el intervalo dado.

$f'(x) = 1 - 0.5\cos x$ $\quad f^{(3)}(x) = 0.5\cos x$

$f''(x) = 0.5 \operatorname{sen} x$ $\quad f^{(4)}(x) = -0.5 \operatorname{sen} x$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1}-x_i)^2}{2} + \frac{f^{(3)}(x_i)(x_{i+1}-x_i)^3}{3!}$$

$$+ \frac{f^{(4)}(x_0)(x_{i+1}-x_i)^4}{4!} + \dots + \frac{f^n(x_i)(x_{i+1}-x_i)^n}{n!}$$

Orden cero

$f(\pi) = f(\pi/2) = \frac{\pi}{2} - 1 - 0.5 \operatorname{sen}(\pi/2) = 0.0708 \rightarrow E = 2.0708$

$f(0) = f(\pi/2) = \pi/2 - 1 - 0.5 \operatorname{sen}(\pi/2) = 0.0708 \rightarrow E = -1.0708$

Valor real

$f(\pi) = \pi - 1 - 0.5 \operatorname{sen}(\pi) = 2.1416$

$f(0) = 0 - 1 - 0.5 \operatorname{sen}(0) = -1$

Orden uno

$f(\pi) = 0.0708 + (1 - 0.5\cos(\pi/2))(\pi - \pi/2) = 1.6416 \rightarrow E = 0.5$

$f(0) = 0.0708 + (1 - 0.5\cos(\pi/2))(-\pi/2) = -1.4999 \rightarrow E = 0.2854$

~~Ea = 1.5708~~ $\quad E_a = 1.5708$

$E_a = 1.5708$

Orden dos

$$f(\pi) = 1.6416 + \frac{[0.5 \operatorname{sen}(\pi/2)](\pi/2)^2}{2} = 2.2584 \rightarrow E = 0.1168$$

$$f(0) = -1.5000 + \frac{[0.5 \operatorname{sen}(\pi/2)](-\pi/2)^2}{2} = -0.8831 \rightarrow E = 0.1169$$

$E_a = 0.6168$

$E_a = 0.6169$

Orden tres

$$f(\pi) = 2.2584 + \frac{[0.5\cos(\pi/2)](\pi/2)^3}{6} = 2.2584 \rightarrow E = 0.1168$$

$$f(0) = -0.8831 + \frac{[0.5\cos(\pi/2)](-\pi/2)^3}{6} = -0.8831 \rightarrow E = 0.1169$$

$E_a = 0$

$E_a = 0$

Orden cuatro

$$f(\pi) \approx 2.2584 + \frac{[-0.5 \sin(\pi/2)](\pi/2)^4}{24} \approx 2.1316 \rightarrow E \approx 0.01$$

$$f(0) \approx -0.8831 + \frac{[-0.5 \sin(\pi/2)](\pi/2)^4}{24} = -1.0099 \rightarrow E = 0.0099$$

En la 4ª iteración tenemos errores de 0.010 aprox, los cuales son menores a 0.015.

4 - Utilice aproximaciones en diferencias de $O(h)$ hacia atrás y hacia adelante y una aproximación de diferencia central de $O(h^2)$ para estimar la primera derivada de la función $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$. Evalúe la derivada en $x = 2$ usando un incremento de 0.2. Compare los resultados con el valor real de las derivadas. Interprete los resultados considerando el término residual de la expansión de la serie de Taylor.

$x_i = 2$ y $h = 0.2$ ∴ $x_{i+1} = 2.2$ y $x_{i-1} = 1.8$

Derivada real

$$f'(x) = 25(3)x^2 - 6(2)x + 7 = 75x^2 - 12x + 7$$

~~Hacia~~ Función (x_{i+1})

$$f(2.2) = 25(2.2)^3 - 6(2.2)^2 + 7(2.2) - 88 = 164.56$$

Función (x)

$$f(2) = 25(2)^3 - 6(2)^2 + 7(2) - 88 = 102$$

Función (x_{i-1})

$$f(1.8) = 25(1.8)^3 - 6(1.8)^2 + 7(1.8) - 88 = 50.96$$

Derivada evaluada en x

$$f'(2) = 75(2)^2 - 12(2) + 7 = 283$$

Hacia adelante

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(h) \Rightarrow f'(2) \approx \frac{164.56 - 102}{2.2 - 2} = 312.8$$

Error o residuo $= |312.8 - 283| = 29.8$

Hacia atrás

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} + O(h) \Rightarrow f'(2) \approx \frac{50.96 - 102}{1.8 - 2} = 255.2$$

Error o residuo $= |255.2 - 283| = 27.8$

Centrada

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2(x_{i+1} - x_i)} + O(h^2) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow f'(2) \approx \frac{164.56 - 50.96}{2(2.2 - 2.0)} = 284$$

5- Determine las raíces reales de $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$

a) De forma gráfica

$x_1 = -1.40512484$
$x_2 = 6.40512484$ (Imagen anexa)

b) Empleando la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4(-0.5)(4.5)}}{2(-0.5)} = \frac{-2.5 \pm \sqrt{15.25}}{-1}$$

$$x_1 = \frac{-2.5 + \sqrt{15.25}}{-1} = 6.40512484$$

$$x_2 = \frac{-2.5 - \sqrt{15.25}}{-1} = -1.40512484$$

c) Usando el método de bisección para 3 iteraciones y determinar la raíz más grande

Usando un intervalo de $[6, 8]$

$\Rightarrow f(a) = f(6) = -0.5(6)^2 + 2.5(6) + 4.5 = 1.5$

$\Rightarrow f(b) = f(8) = -0.5(8)^2 + 2.5(8) + 4.5 = -7.5$

$f(a) \cdot f(b) = -11.25 < 0$ ∴ sí cumple

$$k = \frac{b+a}{2} = \frac{8+6}{2} = 7$$

$f(k) = f(7) = -0.5(7)^2 + 2.5(7) + 4.5 = -2.5$

$f(a) \cdot f(k) = -3.75 < 0$ ∴ $b = k$

Iteración 2

$$k = \frac{b+a}{2} = \frac{7+6}{2} = 6.5$$

$f(k) = f(6.5) = -0.5(6.5)^2 + 2.5(6.5) + 4.5 = -0.375$

$f(a) \cdot f(k) = -0.5625 < 0$ ∴ $b = k$

Iteración 3

$$k = \frac{b+a}{2} = \frac{6+6.5}{2} = 6.25$$

$$f(k) = f(6.25) = -0.5(6.25)^2 + 2.5(6.25) + 4.5 = 0.59375$$

d) Calcule el error estimado y el error verdadero para cada iteración

Iteración 1:

$Ea = Nan$; no hay estimación previa

$Ev = |6.4051 - 7| = 0.5949$

Iteración 2:

$Ea = |7.5 - 7| = 0.5000$

$Ev = |6.4051 - 6.5| = 0.0949$

Iteración 3:

$Ea = |6.5 - 6.25| = 0.2500$

$Ev = |6.4051 - 6.25| = 0.1551$

6.- Suponga que está diseñando un tanque esférico para almacenar agua para un poblado pequeño en un país en desarrollo. El volumen puede calcularse con:

$$V = \pi h^2 \frac{3R-h}{3}$$

V es el vol $[m^3]$, h es la profundidad $[m]$ y R el radio $[m]$

Si: $R = 3m$; ¿A qué profundidad debe llenarse para tener un $V = 30\ m^3$?

Haga tres iteraciones con falsa posición para obtener la respuesta. Obtenga el error relativo aproximado en cada iteración.

Usando un intervalo de ~~[0, 3]~~ $[1.5, 2.5]$

Y la función tiene que cambiar

a $30m^3 = \pi h^2 \frac{3(3)-h}{3} \Rightarrow 30m^3 = \pi h^2 \frac{9-h}{3}$

$$\therefore \pi h^2 \frac{9-h}{3} - 30 = 0$$

$f(a) = \pi(1.5)^2\left(\frac{9-1.5}{3}\right) - 30 = -12.3285$

$f(b) = \pi(2.5)^2\left(\frac{9-2.5}{3}\right) - 30 = 12.5424$

$f(a)\cdot f(b) = -154.6289 < 0 \therefore$ sí está en el intervalo

$$K = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1.5(12.5424) - (2.5)(-12.3285)}{+12.5424 - (-12.3285)} = 1.9957$$

$$f(K) = \pi(1.9957)^2\left(\frac{9 - 1.9957}{3}\right) - 30 = -0.7865$$

$f(K) \cdot f(b) = -9.8644 \therefore a = K$

Iteración 2 / $[1.9957, 2.5]$

$$K = \frac{(1.9957)(12.5424) - (2.5)(-0.7865)}{12.5424 - (-0.7865)} = 2.0255$$

$$f(K) = \pi(2.0255)^2\left(\frac{9 - 2.0255}{3}\right) - 30 = -0.0356$$

$f(K) \cdot f(b) = -0.4460 < 0 \therefore a = K$

Iteración 3 / $[2.0255, 2.5]$

$$K = \frac{(2.0255)(12.5424) - (2.5)(-0.0356)}{12.5424 - (-0.0356)} = 2.0268$$

$$f(K) = \pi(2.0268)^2\left(\frac{9 - 2.0268}{3}\right) - 30 = -0.0027$$

Errores

$Ea_1 = Nan \Rightarrow$ no hay valor previo

$$Ea_2 = \left|\frac{2.0255 - 1.9957}{2.0255}\right| \times 100 = 1.47\%$$

$$Ea_3 = \left|\frac{2.0268 - 2.0255}{2.0268}\right| \times 100 = 0.06\%$$

7 - La concentración de saturación de oxígeno disuelto en agua dulce se calcula con la ecuación

$$\ln(O_{sf}) = -139.34 + \frac{1.575701 \times 10^5}{Ta} - \frac{6.642309 \times 10^7}{Ta^2} - \frac{8.621949 \times 10^{11}}{Ta^4}$$

La conc. de Oxígeno varía de 14.621 mg/L a 0°C y 6.413 mg/L a 40°C. Dado un valor de conc. de Oxígeno, emplee esta fórmula y el método de bisección para resolver para la T en °C.

Para una $O_{sf} = 10$ mg/L se obtiene

$$\frac{1.575701 \times 10^5}{Ta} - \frac{6.642309 \times 10^7}{Ta^2} - \frac{8.621949 \times 10^{11}}{Ta^4} - 139.34 - \ln(10) = 0$$

En un rango de $[273.15, 313.15]$

$f(a) = -609.9212$

$f(b) = -405.0317$

$f(a) \cdot f(b) > 0 \therefore$ la raiz no está en este intervalo

8 - El balance de masa de un contaminante en un lago bien mezclado se expresa

$$V\frac{dc}{dt} = Q - Qc - kV\sqrt{c}$$

Dados $V = 1\times10^6\ m^3$, $Q = 1\times10^5\ m^3/año$ y $W = 1\times10^6\ g/año$ y $K = 0.25\ m^{0.5}/año$; use el método de secante modificado para resolver la concentración en estado estable. Emplee $C_0 = 4\ g/m^3$ y $d = 0.5$. Realice tres iteraciones y determine el error relativo después de la 3ª iteración

$$\frac{dc}{dt} = 0 \quad (\text{Estable})$$

$$\therefore\ 1\times10^5\ m^3/año - 1\times10^5\ m^3/año\ (c) - 0.25\ m^{0.5}/año\ (1\times10^6\ m^3)\sqrt{c} = 0$$

Para

$$C_{i+1} = C_i + \frac{f(C_i)\,d}{f(C_i+d) - f(C_i)}$$

$$f(C_0) = 1\times10^5 - 1\times10^5(4) - 0.25(1\times10^6)\sqrt{4} = -8\times10^5$$

$$f(C_0+d) = 1\times10^5 - 1\times10^5(4.5) - 0.25(1\times10^6)\sqrt{4.5} = -880330.0859$$

$$C_1 = 4 - \frac{(-8\times10^5)(0.5)}{(-8.803\times10^5)-(-8.000\times10^5)} = -0.9813$$

C_1 es negativo y no hay $\sqrt{c} < 0$ $\therefore$ el método falla con este valor inicial

9- Para el geración anterior propenga dos o 3 funcions $g(c)$ y determine qué funcions la iteración va a converger

(1) $Q - Qc - KV\sqrt{c} = 0$

$$\therefore g_1(c) = c = \frac{Q - KV\sqrt{c}}{Q} \quad (1)$$

$$g'(c) \Rightarrow (Q - KV\sqrt{c})\, Q^{-1} \Rightarrow Q^{-1}\left[\frac{d}{dc}(Q) + \frac{d}{dc}(-KV\sqrt{c})\right]$$

$$\Rightarrow Q^{-1}(-KV)\left(\tfrac{1}{2}\right)(c)^{-1/2} = \frac{-KV}{2Q\sqrt{c}}$$

Evaluando en $c=4$

$$g'(c) = \left|\frac{-0.25(1\times10^{6})}{2(1\times10^{5})\sqrt{4}}\right| = 0.625 < 1 \Rightarrow \text{va a converger}$$

(2) $Q - Qc - KV\sqrt{c} = 0$

$$\therefore g_2(c) \Rightarrow c = \left(\frac{Q - Qc}{KV}\right)^2$$

$$g_2'(c) \Rightarrow \frac{1}{K^2V^2}\frac{d}{dc}\left[(\cancel{Q}^{0} - Qc)^2\right] = \frac{1}{K^2V^2}(2Q - Qc)(-Q)$$

$$g_2'(c) = \frac{2(Q - Qc)(-Q)}{K^2V^2}$$

Evaluando en $c=4$

$$g'(c) = \left|\frac{2(1\times10^{5} - 1\times10^{5}(4))(-1\times10^{5})}{(0.25)^2(1\times10^{6})^2}\right| = 0.96 < 1 \Rightarrow \text{va a converger}$$

10 - Para el geracao 6, haga tres iteraciones con N-R para determinar la respuesta. Encuentre el error relativo aproximado y compare.

$$\frac{dV}{dh} \Rightarrow \text{Tal que } 0 = \pi h^2 \frac{3R-h}{3} - V$$

$$\Rightarrow 2h\pi\left(\pi \frac{3R-h}{3}\right) + h^2 \pi \left(\frac{\cancel{3R}-1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2h\pi\left(\frac{3R-h}{3}\right) + h^2 \pi\left(\frac{\cancel{3R}-1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3}\left[2h(3R-h) + h^2(\cancel{3R}-1)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3}\left[(6Rh - 2h^2 + \cancel{3Rh^2} + h^2)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3}\left[6Rh + \cancel{3Rh^2} - h^2\right]$$

$$\Rightarrow \pi h(2R-h)$$

1- $X_0 = 1.5$

$$X_1 = 1.5 - \frac{V(1.5)}{V'(1.5)} = 1.5 - \frac{-12.3285}{21.2057} = 2.0814$$

$$E_a = \left|\frac{2.0184 - 1.5}{2.0184}\right| = 0.2568$$

2 - $X_2 = 2.0184 - \frac{-0.2150}{25.2473} = \underline{2.0269}$

$\underline{Ea_2} = \left| \frac{2.0269 - 2.0184}{2.0269} \right| = \underline{0.0042}$

3 - $\underline{X_3} = 2.0269 - \frac{-0.0001}{25.2995} = \underline{2.0269}$

$\underline{Ea_3} = \left| \frac{2.0269 - 2.0269}{2.0269} \right| = \underline{0}$

Se llegó más rápido a la respuesta (2.0269), q comparación que con falsa posición, donde llegamos a ~~0.22~~ 2.0268, obteniendo un error relativo de 0 en este último iteración