Tarea: 28 de noviembre de 2025

Luis Alejandro Durán-Hernández
División de Ciencias e Ingenierías Campus León, Universidad de Guanajuato
Loma del Bosque 103, 37150 León Guanajuato, México
Licenciatura en Ingeniería Química Sustentable
(Fecha: 24 de noviembre de 2025)

I Ecuación a resolver

Para fines de esta tarea, se tomó la ecuación de órbita de un satélite alrededor de la Tierra tomando en cuenta distintas complicaciones al momento de calcularla, como, por ejemplo: la forma no esférica de la tierra, atracción de otros objetos como la Luna, o cuando la órbita no es circular. Si se considera este satélite orbitando la Tierra, entonces $M_{tierra} \gg m_{satelite}$ y, tomando en cuenta la segunda Ley de Newton y la Ley de Gravitación se obtiene:

$$m_{satelite}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{M_{tierra}m_{satelite}}{r^3}\vec{r} \tag{1}$$

Por lo que:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM_{tierra}}{r^3}\vec{r} \tag{2}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
&\vec{r}(t) = [x(t) \quad y(t)]^T \\
&r = ||\vec{r}|| = \sqrt{x^2+y^2} \\
&M_{tierra} = 5{,}972x10^{24}kg \\
&G = 6{,}67x10^{-11}Nm^2/kg^2
\end{aligned}$$

Por lo que el estado del satélite depende de las velocidades y posiciones en x y y, quedando el vector de estado de la siguiente forma:

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

Por lo que el sistema completo es:

$$\frac{d\Upsilon}{dt} = F(t,\Upsilon) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ -GMx/r^3 \\ -GMy/r^3 \end{bmatrix}$$

Como condiciones iniciales, se tomarán las de perigeo y apogeo (distancia más cercana y lejana a la Tierra respectivamente), las cuales pueden tomarse como $400km$ y $1100km$ respectivamente, a los cuales se les debe sumar el radio terrestre ($6371km$), arrojando un valor de $6771km$ y $7431km$ respectivamente, con lo que se puede obtener un valor para el semieje:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = 7101km$$

Para obtener la velocidad en el perigeo ($v_y(0)$)

$$v_p = \sqrt{GM(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a})} = 8122{,}68m/s$$

$$\begin{aligned}
&x(0) = r_p = 6{,}771x10^6m \\
&y(0) = 0 \\
&v_x(0) = 0 \\
&v_y(0) = v_p = 8122{,}68m/s
\end{aligned}$$

II Resultados usando Euler

Iteracion	t_i+1	r_i+1	v_i+1
1	1.00	6771000.00	-8.69
2	2.00	6770991.31	-17.38
3	3.00	6770973.93	-26.07
4	4.00	6770947.87	-34.75
5	5.00	6770913.12	-43.44
6	6.00	6770869.67	-52.13
7	7.00	6770817.54	-60.82
8	8.00	6770756.72	-69.51
9	9.00	6770687.21	-78.20
10	10.00	6770609.02	-86.89

III Resultados usando Runge-Kutta de segundo orden

Iteracion	t_i+1	r_i+1	v_i+1
1	1.00	6770995.66	-8.69
2	2.00	6770982.62	-17.38
3	3.00	6770960.90	-26.07
4	4.00	6770930.49	-34.75
5	5.00	6770891.39	-43.44
6	6.00	6770843.61	-52.13
7	7.00	6770787.13	-60.82
8	8.00	6770721.97	-69.51
9	9.00	6770648.11	-78.20
10	10.00	6770565.57	-86.89

IV Resultados usando Runge-Kutta de cuarto orden

Iteracion	t_i+1	r_i+1	v_i+1
1	1.00	6770995.66	-8.69
2	2.00	6770982.62	-17.38
3	3.00	6770960.90	-26.07
4	4.00	6770930.49	-34.75
5	5.00	6770891.39	-43.44
6	6.00	6770843.61	-52.13
7	7.00	6770787.13	-60.82
8	8.00	6770721.97	-69.51
9	9.00	6770648.11	-78.20
10	10.00	6770565.57	-86.89

V CONCLUSIONES

Usando tanto Runge-Kutta grado 2 como el grado4, obtuvimos los mismos resultados a grandes rasgos, esto ya que, a pesar de que el Runge-Kutta de cuarto grado es más exacto, en este caso estamos hablando de un halo de h grande (1), además de usar un modelo o problema de grandes magnitudes, mientras que en Euler sí que se pueden ver unas pequeñas diferencias en los resultados en r_i, pero la velocidad sigue siendo practicamente la misma.

Referencias

[1] Bate, R. R., Mueller, D. D., & White, J. E. (1971).*Fundamentals of Astrodynamics* . Courier Corporation. ISBN: 978-0-486-60061-1