

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
División de Ciencias e Ingenierías
Campus León



Proyecto Sistemas Lineales
Análisis Numérico de la Distribución de Temperatura de un
Reactor de Placa Plana

Métodos Numéricos - NELI06028

Fecha de Entrega: 16 de Noviembre del 2025

Profesor: Dra. Alma Xochitl González Morales

Estudiante:

Pablo Ignacio Zorrilla Romo – 427762

Introducción

En este proyecto se abordará un problema fundamental en la ingeniería de los procesos químicos. La determinación de la distribución de temperatura en estado estacionario en 2D. Este escenario se presenta comúnmente en el diseño de reactores, aletas de intercambiadores de calor y sistemas de enfriamiento. El problema físico puede ser descrito mediante la ecuación de LaPlace, una ecuación diferencial parcial lineal PDE por sus siglas en inglés. Mediante la aplicación del método de diferencias finitas.

La mayoría de los problemas relacionados con el flujo de fluidos, transferencia de calor o electromagnetismo pueden ser expresados en formas de una ecuación parcial diferencial por sus siglas en inglés PDE. Esta PDEs describen el comportamiento de un fenómeno usando una función matemática. Esto se puede realizar utilizando métodos como el de las diferencias finitas. Que usualmente necesita de: (the, 2022)

- Construir una celda
- Realizar una aproximación diferencial
- Resolver las condiciones de frontera.

El problema diferencial continuo se transformará en un sistema de ecuaciones lineales algebraico de una dimensión alta, de la forma $Ax=b$.

Para cumplir con el objetivo de un sistema con dimensión mayor a 4, se va a modelar la placa, pero discretizándola con una rejilla que producirá un sistema de $n = 9$ ecuaciones simultáneas para nueve temperaturas en diferentes nodos. Estas temperaturas corresponden a los nodos internos y son desconocidas.

Esto se ejemplifica con una dimensión menor en la imagen de a continuación:

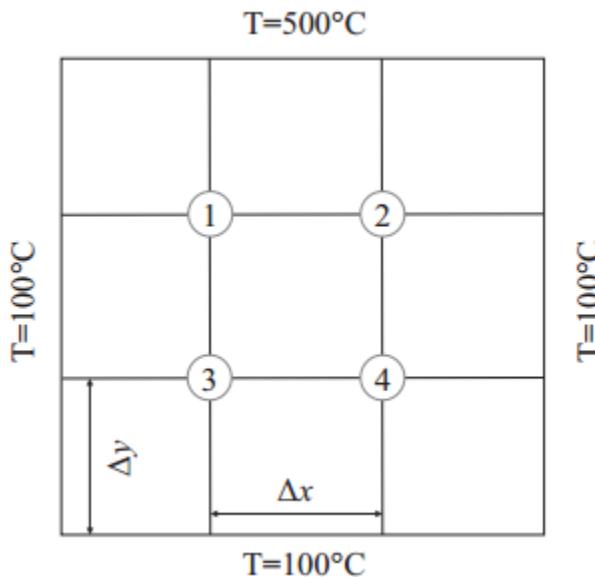


Ilustración 1. Rejilla para discretizar la pared de reactor plano (Navid Mostoufi & Constantinides, 2022)

Una vez derivadas las nueve ecuaciones lineales se va a resolver el sistema $Ax = b$ empleando tres métodos numéricos:

1. Eliminación de Gauss-Jordan
2. Factorización LU
3. Método de Gauss-Seidel

Objetivos

- Resolver un problema del área de ingeniería química que requiera la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dimensión mayor a 4.
- Comparar la solución usando el método de Gauss-Jordan, Gauss-Seidel y Factorización LU.
- Determinar el perfil de temperatura en toda la placa una vez alcanzado el estado estacionario.

Planteamiento del Problema

La ingeniería de calor es un pilar de la ingeniería química. En muchas ocasiones el rendimiento de los reactores químicos, la eficiencia de los intercambiadores de calor (incluso en torres de destilación con rehervidores y condensadores) dependen de la capacidad de predecir y controlar los perfiles de temperatura. Un fallo en la eliminación del calor de una reacción exotérmica, por ejemplo, puede llevar a un embalamiento térmico. (leyva, 2018)

El problema específico que se aborda es la conducción de calor en una placa metálica en dos dimensiones. Este escenario en la vida real permite modelar los siguientes componentes.

- Pared de un reactor de placa plana, que puede ser calentada o enfriada externamente
- Una aleta en un intercambiador de calor de coraza y tubos

Supuestos y Ecuación de Calor

Para la formulación de las ecuaciones, se aplica la ecuación general de conducción de calor. Pero para la simplificación del problema a un sistema de ecuaciones lineales, se toman las siguientes suposiciones:

- Estado Estacionario

La temperatura no cambiará con el tiempo por que se alcanzo el equilibrio térmico.

$$\frac{\delta T}{\delta t} = 0$$

- Conducción en dos dimensiones.

Gradiente de temperatura en la dirección Z, debe volverse despreciable.

- Sin generación de calor interna-
- Propiedades Homogéneas.

Con estos supuestos la ecuación general de balance de energía se simplifica a la Ecuación de Laplace, una ecuación diferencial parcial y lineal.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Ilustración 2. Ecuación de Calor (LaPlace) (FINITE-DIFFERENCE METHOD 2-D STEADY STATE CONDUCTION, n.d.)

Geometría Física y Condiciones de Frontera

La geometría de este problema se está suponiendo como una placa cuadrada de 1 metro por 1 metro.

Para poder resolver la ecuación de LaPlace se necesitan especificar unas condiciones de frontera.

Para esto siguiendo el método se emplean Condiciones de Frontera de Dirichlet. En estas condiciones la temperatura se fija en los cuatro bordes. Estos valores posteriormente darán forma al vector b en el sistema. (Rickman, 2024)

Se suponen las siguientes condiciones de frontera en los cuatro bordes

- Borde Superior ($y = 1$): 100 °C
- Borde Inferior ($y = 0$): 20 °C
- Borde Izquierdo ($x = 0$): 50 °C
- Borde Derecho ($x = 1$): 50 °C

Método de Diferencias Finitas.

Como la ecuación de LaPlace no se podría resolver analíticamente, se emplea el método de diferencias finitas. Que discretiza la continuidad de la placa por puntos discretos llamados nodos. La temperatura se calculará en estos nodos. (FINITE-DIFFERENCE METHOD 2-D STEADY STATE CONDUCTION, n.d.)

Para cumplir con el objetivo de la dimensión mayor a 5 se seleccionará una rejilla de 5x5 nodos totales. Esto crea 16 nodos de frontera que pueden ser conocidos por las condiciones definidas anteriormente y una rejilla interna de 9 nodos con temperaturas desconocidas.

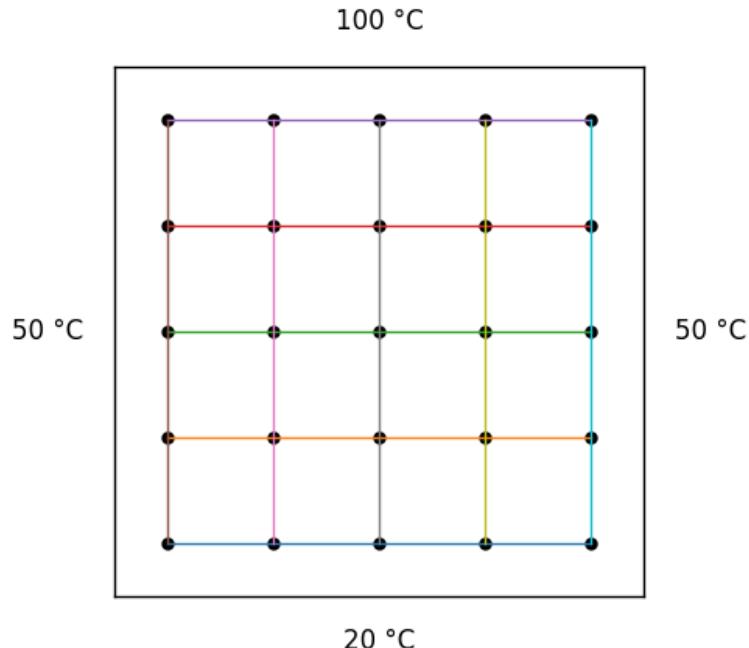


Ilustración 3. Diagrama de la Rejilla para el modelo

Con esto se tienen como incógnitas las temperaturas de los nodos internos dejando un total de **9** incógnitas.

Diferencias Finitas Modelado

Para el método de diferencias finitas se aproximan las derivadas parciales empleando expansiones de Taylor

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{6}(x - x_i)^3 \\
 f(x_{i+1}) &= f(x_i + h) = f(x_i) + h f'(x_i) + h^2 \frac{f''(x_i)}{2} + h^3 \frac{f'''}{6} \dots \\
 f(x_{i-1}) &= f(x_i - h) = f(x_i) - h f'(x_i) + h^2 \frac{f''(x_i)}{2} - h^3 \frac{f'''}{6} \dots \\
 f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) &= 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \frac{h^4}{4!} (f''') + \dots
 \end{aligned}$$

Ilustración 4. Aproximación de Derivadas Serie de Taylor (Taylor & Krasny, 2022)

Pero cuando las x_i s están muy cerca y h es muy pequeña, la siguiente es una muy buena aproximación:

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

Ilustración 5. (Taylor & Krasny, 2022)

Que para los dos ejes la forma general queda así:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_m \approx \frac{T_{n-1} - 2T_n + T_{n+1}}{\Delta y^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_m \approx \frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2}$$

Ilustración 6. (FINITE-DIFFERENCE METHOD 2-D STEADY STATE CONDUCTION, n.d.)

Sustituyendo estas aproximaciones en la ecuación de LaPlace

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{h^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{h^2} = 0$$

Multiplicando por h^2 se puede obtener la ecuación para cualquier nodo interno:

$$T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1} = 0$$

Simplificando...

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

Reordenando para nuestra temperatura deseada...

$$T_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}}{4}$$

La representación gráfica de esto sería la siguiente:

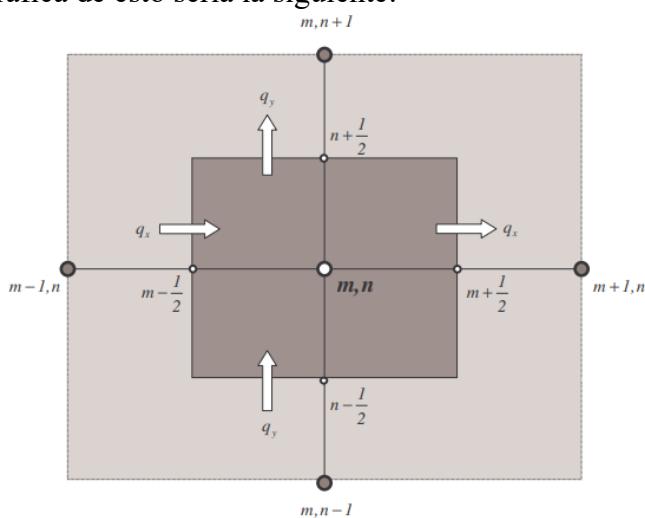


Ilustración 7. Representación Gráfica Nodos (FINITE-DIFFERENCE METHOD 2-D STEADY STATE CONDUCTION, n.d.)

Construcción de la Matriz

Por conveniencia vamos a denominar a los nodos internos de la siguiente manera...

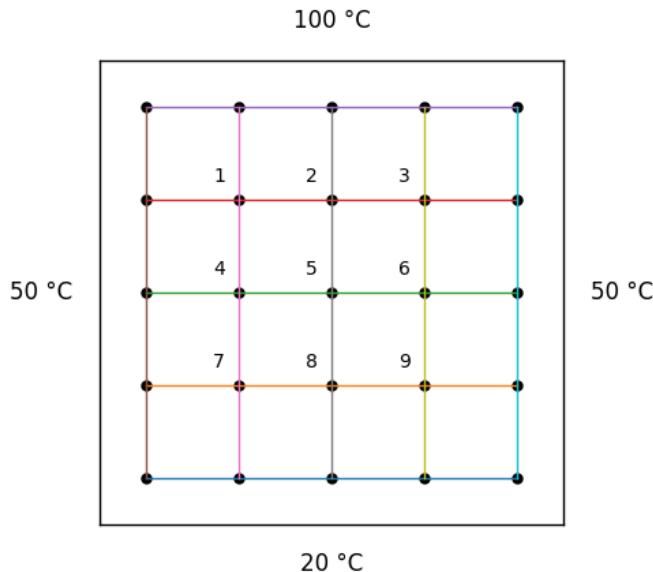


Ilustración 8. Diagrama nodos internos

Esto con el fin de simplificar la apariencia de nuestras ecuaciones.

Con esto procedemos a generar una ecuación para cada uno de los nodos internos y posteriormente reordenándolo para su posterior uso como matriz $Ax = b$ (Todas las incógnitas T_i del lado izquierdo, y todas las constantes del lado derecho)

Nodo 1

$$T_1 = \frac{T_2 + 50 + 100 + T_4}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_1 - T_2 - T_4 = 150$$

Nodo 2

$$T_2 = \frac{100 + T_5 + T_3 + T_1}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_2 - T_1 - T_3 - T_5 = 100$$

Nodo 3

$$T_3 = \frac{100 + T_6 + 50 + T_2}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_3 - T_2 - T_6 = 150$$

Nodo 4

$$T_4 = \frac{T_1 + T_7 + T_5 + 50}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_4 - T_1 - T_5 - T_7 = 50$$

Nodo 5

$$T_5 = \frac{T_2 + T_8 + T_6 + T_4}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_5 - T_2 - T_4 - T_6 - T_8 = 0$$

Nodo 6

$$T_6 = \frac{T_3 + T_9 + 50 + T_5}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_6 - T_3 - T_5 - T_9 = 50$$

Nodo 7

$$T_7 = \frac{T_4 + 20 + T_8 + 50}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_7 - T_4 - T_8 = 70$$

Nodo 8

$$T_8 = \frac{T_5 + 20 + T_9 + T_7}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_8 - T_5 - T_7 - T_9 = 20$$

Nodo 9

$$T_9 = \frac{T_6 + 20 + 50 + T_8}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_9 - T_6 - T_8 = 70$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 150 \\ 50 \\ 0 \\ 50 \\ 70 \\ 2070 \end{bmatrix}$$

Solución Numérica y Resultados

En esta sección se detallarán los resultados encontrados en cada uno de los códigos empleados. Para revisar los códigos es necesario seguir el enlace o ir directamente el repositorio en github en la carpeta “proyectos”.

Eliminación Gauss-Jordan

Link: https://github.com/DCI-alxogm/me2025-clase-PabloZR-ug/blob/main/Proyecto/metodo_gauss_jordan_proyecto.c

```
Matriz reducida (Gauss-Jordan)
[ 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 | 69.285714 ]
[ 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 | 73.392857 ]
[ 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 | 69.285714 ]
[ 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 | 53.750000 ]
[ 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 | 55.000000 ]
[ 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 | 53.750000 ]
[ 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000 | 40.714286 ]
[ 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 | 39.107143 ]
[ 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 | 40.714286 ]

Solucion:
x1 = 69.28571429
x2 = 73.39285714
x3 = 69.28571429
x4 = 53.75
x5 = 55
x6 = 53.75
x7 = 40.71428571
x8 = 39.10714286
x9 = 40.71428571
```

Factorización LU

Link: https://github.com/DCI-alxogm/me2025-clase-PabloZR-ug/blob/main/Proyecto/factorizacion_lu_proyecto.c

```
[ 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 0.000000 -1.000000 4.000000 -1.000000 ]
[ 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 0.000000 -1.000000 4.000000 ]

Vector Y (LY=B):
y1 = 150.000000
y2 = 137.500000
y3 = 186.666667
y4 = 100.000000
y5 = 78.708134
y6 = 125.351124
y7 = 106.956522
y8 = 86.338847
y9 = 136.119403

Vector X (UX=Y):
x1 = 69.285714
x2 = 73.392857
x3 = 69.285714
x4 = 53.750000
x5 = 55.000000
x6 = 53.750000
x7 = 40.714286
x8 = 39.107143
x9 = 40.714286
```

Gauss/Seidel

Link: https://github.com/DCI-alxogm/me2025-clase-PabloZR-ug/blob/main/Proyecto/gauss_seidel_proyecto.c

```

Bienvenido al programa de resolución de matrices por el método de gauss-seidel
Se resolverá la matriz 9x9
Matriz aumentada ingresada
[ 4.000000 -1.000000 0.000000 -1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 | 150.000000 ]
[ -1.000000 4.000000 -1.000000 0.000000 -1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 | 100.000000 ]
[ 0.000000 -1.000000 4.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 | 150.000000 ]
[ -1.000000 0.000000 0.000000 4.000000 -1.000000 0.000000 -1.000000 0.000000 0.000000 | 50.000000 ]
[ 0.000000 -1.000000 0.000000 -1.000000 4.000000 -1.000000 0.000000 -1.000000 0.000000 | 0.000000 ]
[ 0.000000 0.000000 -1.000000 0.000000 -1.000000 4.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 | 50.000000 ]
[ 0.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 0.000000 0.000000 4.000000 -1.000000 0.000000 | 70.000000 ]
[ 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 0.000000 -1.000000 4.000000 -1.000000 | 20.000000 ]
[ 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 0.000000 -1.000000 4.000000 | 70.000000 ]

Solución:
x1 = 69.28571429
x2 = 73.39285714
x3 = 69.28571429
x4 = 53.75
x5 = 55
x6 = 53.75
x7 = 40.71428571
x8 = 39.10714286
x9 = 40.71428571

```

Discusión y Conclusión

Este proyecto permitió resolver satisfactoriamente un problema de ingeniería química relacionado con la distribución de temperatura en estado estacionario en una placa metálica, utilizando un sistema de ecuaciones lineales de dimensión mayor a 4. A través del método de diferencias finitas, se discretizó la ecuación de Laplace en una malla de 5x5 nodos, obteniendo un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. La solución de este sistema se realizó mediante tres métodos numéricos: Eliminación de Gauss-Jordan, Factorización LU y Gauss-Seidel, con resultados numéricamente idénticos, lo que valida la precisión y confiabilidad de las soluciones obtenidas para las temperaturas en los nodos internos.

La comparación entre los métodos destacó las ventajas y limitaciones de cada uno. Los métodos directos, como Gauss-Jordan y Factorización LU, ofrecieron soluciones exactas en un número finito de operaciones, siendo la Factorización LU especialmente eficiente para sistemas de este tipo. Por otro lado, el método iterativo de Gauss-Seidel demostró ser eficaz y convergente gracias a la dominancia diagonal de la matriz del sistema, mostrando su utilidad en escenarios donde la eficiencia computacional es crítica, especialmente en sistemas de mayor escala.

En conclusión, el proyecto no solo cumplió con el objetivo de modelar y resolver un problema real de transferencia de calor, sino que también proporcionó una valiosa comparación práctica entre métodos numéricos, resaltando su aplicabilidad en problemas de ingeniería. Los resultados reflejan la importancia de seleccionar el método adecuado según las características del sistema, reforzando así el entendimiento de las técnicas numéricas como herramientas fundamentales en el análisis y diseño de sistemas térmicos.

Referencias

FINITE-DIFFERENCE METHOD 2-D STEADY STATE CONDUCTION. (n.d.). Retrieved from <https://www.et.byu.edu/~vps/ME340/TABLES/4.4.pdf>

leyva, Y. (2018). Transferencia_de_Calor_en_Ingenier_ia_Qu.pdf. Retrieved November 14, 2025, from Scribd website: <https://es.scribd.com/document/392273140/Transferencia-de-Calor-en-Ingenier-ia-Qu-pdf>

Navid Mostoufi, & Constantinides, A. (2022). *Applied Numerical Methods for Chemical Engineers*. Academic Press.

Rickman, S. (2024). *Introduction to Numerical Methods in Heat Transfer*. Retrieved from <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20200006182/downloads/Introduction%20to%20Numerical%20Methods%20in%20Heat%20Transfer.pdf>

Taylor, S., & Krasny, R. (2022). *Numerical Methods for the Heat Equation*. Retrieved from <https://lsa.umich.edu/content/dam/math-assets/reu-su22/reu-2022/Taylor--Sofia-REU2022.pdf>

the, U. (2022, August 10). Using the 2D Finite Difference Method for Heat Transfer Analysis. Retrieved November 13, 2025, from Cadence.com website: <https://resources.system-analysis.cadence.com/blog/msa2022-using-the-2d-finite-difference-method-for-heat-transfer-analysis>