

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

División de Ciencias e Ingenierías

Campus León



Proyecto Sistemas Lineales

Análisis Numérico de la Distribución de Temperatura de un
Reactor de Placa Plana

Métodos Numéricos - NELI06028

Fecha de Entrega: 16 de Noviembre del 2025

Profesor: Dra. Alma Xochitl González Morales

Estudiante:

Pablo Ignacio Zorrilla Romo - 427762

Introducción

En este proyecto se abordará un problema fundamental en la ingeniería de los procesos químicos. La determinación de la distribución de temperatura en estado estacionario en 2D. Este escenario se presenta comúnmente en el diseño de reactores, aletas de intercambiadores de calor y sistemas de enfriamiento. El problema físico puede ser descrito mediante la ecuación de Laplace, una ecuación diferencial parcial lineal PDE por sus siglas en inglés. Mediante la aplicación del método de diferencias finitas.

La mayoría de los problemas relacionados con el flujo de fluidos, transferencia de calor o electromagnetismo pueden ser expresados en formas de una ecuación diferencial por sus siglas en inglés PDE. Estas PDEs describen el comportamiento de un fenómeno usando una función matemática. Esto se puede realizar utilizando métodos como el de las diferencias finitas. Que usualmente necesita de: (the, 2022)

- Construir una celda
- Realizar una aproximación diferencial
- Resolver las condiciones de frontera.

El problema diferencial continuo se transformará en un sistema de ecuaciones lineales algebraico de una dimensión alta, de la forma $Ax=b$.

Para cumplir con el objetivo de un sistema con dimensión mayor a 4, se va a modelar la placa, pero discretizándola con una rejilla que producirá un sistema de $n = 9$ ecuaciones simultáneas para nueve temperaturas en diferentes nodos. Estas temperaturas corresponden a los nodos internos y son desconocidas.

Esto se ejemplifica con una dimensión menor en la imagen de a continuación:

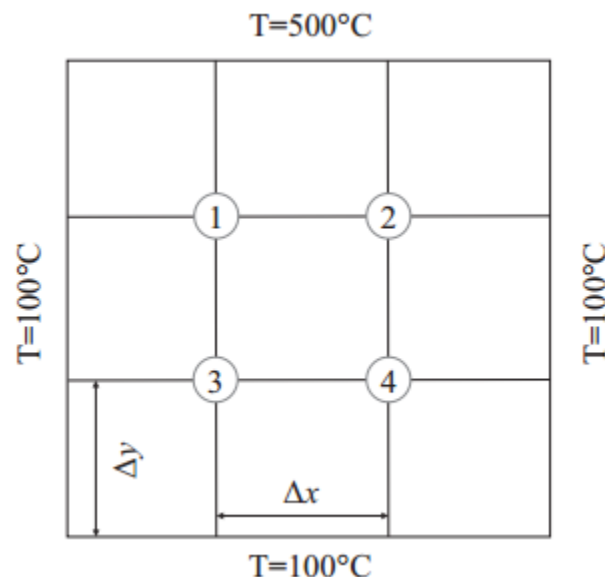


Ilustración 1. Rejilla para discretizar la pared de reactor plano (Navid Mostoufi & Constantinides, 2022)

Una vez derivadas las nueve ecuaciones lineales se va a resolver el sistema $Ax = b$ empleando tres métodos numéricos:

1. Eliminación de Gauss-Jordan
2. Factorización LU
3. Método de Gauss-Seidel

Objetivos

- Resolver un problema del área de ingeniería química que requiera la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dimensión mayor a 4.
- Comparar la solución usando el método de Gauss-Jordan, Gauss-Seidel y Factorización LU.
- Determinar el perfil de temperatura en toda la placa una vez alcanzado el estado estacionario.

Planteamiento del Problema

La ingeniería de calor es un pilar de la ingeniería química. En muchas ocasiones el rendimiento de los reactores químicos, la eficiencia de los intercambiadores de calor (incluso en torres de destilación con rehervidores y condensadores) dependen de la capacidad de predecir y controlar los perfiles de temperatura. Un fallo en la eliminación del calor de una reacción exotérmica, por ejemplo, puede llevar a un embalamiento térmico. (leyva, 2018)

El problema específico que se aborda es la conducción de calor en una placa metálica en dos dimensiones. Este escenario en la vida real permite modelar los siguientes componentes.

- Pared de un reactor de placa plana, que puede ser calentada o enfriada externamente
- Una aleta en un intercambiador de calor de coraza y tubos

Supuestos y Ecuación de Calor

Para la formulación de las ecuaciones, se aplica la ecuación general de conducción de calor. Pero para la simplificación del problema a un sistema de ecuaciones lineales, se toman las siguientes suposiciones:

- Estado Estacionario

La temperatura no cambiará con el tiempo por que se alcanzo el equilibrio térmico.

$$\delta T / \delta t = 0$$

- Conducción en dos dimensiones.

Gradiente de temperatura en la dirección Z, debe volverse despreciable.

- Sin generación de calor interna-
- Propiedades Homogéneas.

Con estos supuestos la ecuación general de balance de energía se simplifica a la Ecuación de Laplace, una ecuación diferencial parcial y lineal.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Ilustración 2. Ecuación de Calor (LaPlace) (FINITE-DIFFERENCE METHOD 2-D STEADY STATE CONDUCTION, n.d.)

Geometría Física y Condiciones de Frontera

La geometría de este problema se esta suponiendo como una placa cuadrada de 1 metro por 1 metro.

Para poder resolver la ecuación de LaPlace se necesitan especificar unas condiciones de frontera.

Para esto siguiendo el método se emplean Condiciones de Frontera de Dirichlet. En estas condiciones la temperatura se fija en los cuatro bordes. Estos valores posteriormente darán forma al vector b en el sistema. (Rickman, 2024)

Se suponen las siguientes condiciones de frontera en los cuatro bordes

- Borde Superior ($y = 1$): 100 °C
- Borde Inferior ($y = 0$): 20 °C
- Borde Izquierdo ($x = 0$): 50 °C
- Borde Derecho ($x = 1$): 50 °C

Método de Diferencias Finitas.

Como la ecuación de LaPlace no se podría resolver analíticamente, se emplea el método de diferencias finitas. Que discretiza la continuidad de la placa por puntos discretos llamados nodos. La temperatura se calculará en estos nodos. (FINITE-DIFFERENCE METHOD 2-D STEADY STATE CONDUCTION, n.d.)

Para cumplir con el objetivo de la dimensión mayor a 5 se seleccionará una rejilla de 5x5 nodos totales. Esto crea 16 nodos de frontera que pueden ser conocidos por las condiciones definidas anteriormente y una rejilla interna de 9 nodos con temperaturas desconocidas.

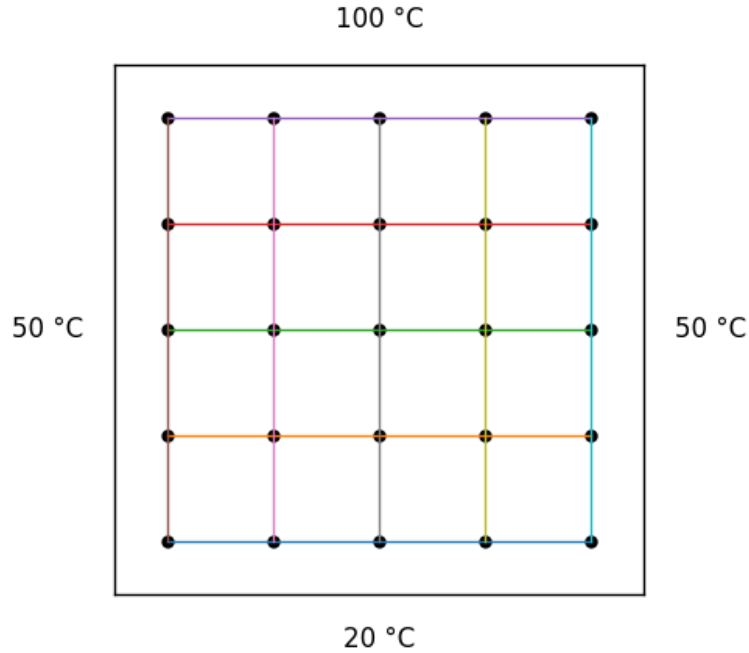


Ilustración 3. Diagrama de la Rejilla para el modelo

Con esto se tienen como incógnitas las temperaturas de los nodos internos dejando un total de **9** incógnitas.

Diferencias Finitas Modelado

Para el método de diferencias finitas se aproximan las derivadas parciales empleando expansiones de Taylor

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{6}(x - x_i)^3$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + h^2 \frac{f''(x_i)}{2} + h^3 \frac{f'''(x_i)}{6} \dots$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + h^2 \frac{f''(x_i)}{2} - h^3 \frac{f'''(x_i)}{6} \dots$$

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \frac{h^4}{4!} (f''''(x_i)) + \dots$$

Ilustración 4. Aproximación de Derivadas Serie de Taylor (Taylor & Krasny, 2022)

Pero cuando las x_{is} están muy cerca y h es muy pequeña, la siguiente es una muy buena aproximación:

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

Ilustración 5. (Taylor & Krasny, 2022)

Que para los dos ejes la forma general queda así:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_m \approx \frac{T_{n-1} - 2T_n + T_{n+1}}{\Delta y^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_m \approx \frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2}$$

Ilustración 6. (FINITE-DIFFERENCE METHOD 2-D STEADY STATE CONDUCTION, n.d.)

Sustituyendo estas aproximaciones en la ecuación de Laplace

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{h^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{h^2} = 0$$

Multiplicando por h^2 se puede obtener la ecuación para cualquier nodo interno:

$$T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1} = 0$$

Simplificando...

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

Reordenando para nuestra temperatura deseada...

$$T_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}}{4}$$

La representación gráfica de esto sería la siguiente:

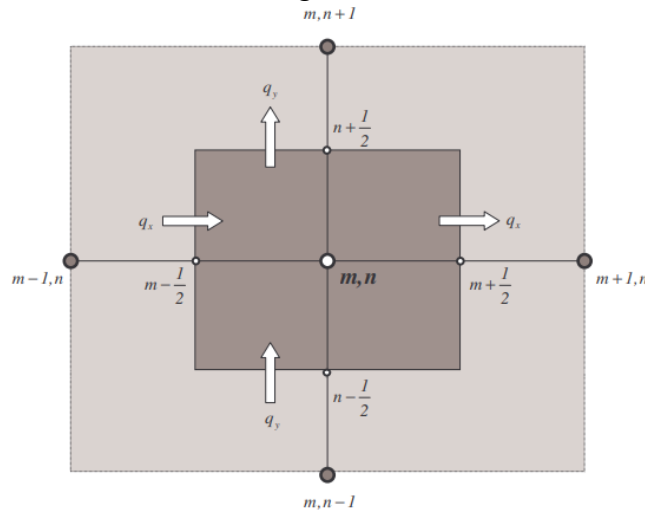


Ilustración 7. Representación Gráfica Nodos (FINITE-DIFFERENCE METHOD 2-D STEADY STATE CONDUCTION, n.d.)

Construcción de la Matriz

Por conveniencia vamos a denominar a los nodos internos de la siguiente manera...

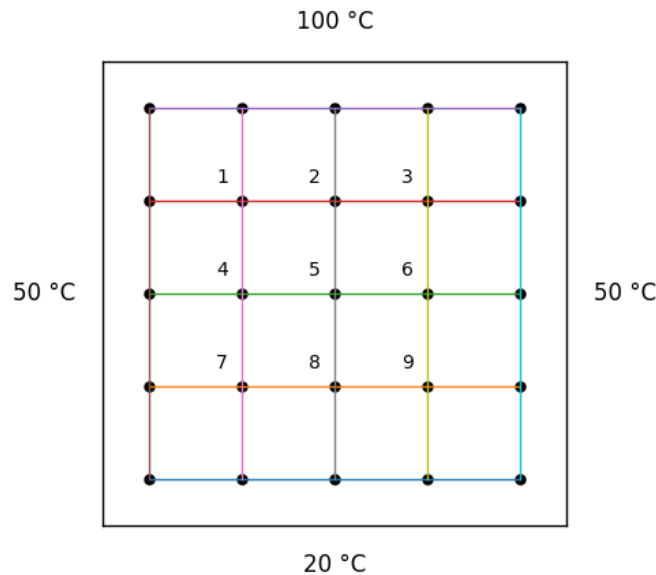


Ilustración 8. Diagrama nodos internos

Esto con el fin de simplificar la apariencia de nuestras ecuaciones.

Con esto procedemos a generar una ecuación para cada uno de los nodos internos y posteriormente reordenándolo para su posterior uso como matriz $Ax = b$ (Todas las incógnitas T_i del lado izquierdo, y todas las constantes del lado derecho)

Nodo 1

$$T_1 = \frac{T_2 + 50 + 100 + T_4}{4} \rightarrow 4T_1 - T_2 - T_4 = 150$$

Nodo 2

$$T_2 = \frac{100 + T_5 + T_3 + T_1}{4} \rightarrow 4T_2 - T_1 - T_3 - T_5 = 100$$

Nodo 3

$$T_3 = \frac{100 + T_6 + 50 + T_2}{4} \rightarrow 4T_3 - T_2 - T_6 = 150$$

Nodo 4

$$T_4 = \frac{T_1 + T_7 + T_5 + 50}{4} \rightarrow 4T_4 - T_1 - T_5 - T_7 = 50$$

Nodo 5

$$T_5 = \frac{T_2 + T_8 + T_6 + T_4}{4} \rightarrow 4T_5 - T_2 - T_4 - T_6 - T_8 = 0$$

Nodo 6

$$T_6 = \frac{T_3 + T_9 + 50 + T_5}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_6 - T_3 - T_5 - T_9 = 50$$

Nodo 7

$$T_7 = \frac{T_4 + 20 + T_8 + 50}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_7 - T_4 - T_8 = 70$$

Nodo 8

$$T_8 = \frac{T_5 + 20 + T_9 + T_7}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_8 - T_5 - T_7 - T_9 = 20$$

Nodo 9

$$T_9 = \frac{T_6 + 20 + 50 + T_8}{4} \quad \rightarrow \quad 4T_9 - T_6 - T_8 = 70$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 150 \\ 50 \\ 0 \\ 50 \\ 70 \\ 2070 \end{bmatrix}$$

Metodología

Datos y Supuestos del Proceso

Resultados de Simulación

Discusión

Conclusión