Ana Isabel Esquivel Castro 436578 25/09/2025 MN

Tarea.

Preparación para primer examen parcial

1) Describe los dif. tipos de error que pueden aparecer en la determinación de alguna cantidad cuando hay procedimientos experimentales y/o análisis numérico.

- **Error inherente/inicial:** presentes en datos de entrada por imperfecciones en las mediciones o en modelos, p. ej., errores en la medición de parámetros en un experimento.
- **Error de truncamiento:** Pasa cuando se aproxima un procedimiento matemático exacto por uno aproximado, p. ej. truncar una serie infinita (Taylor) a un núm. finito de términos
- **Error de redondeo:** Ocurre cuando un número se redondea hacia arriba o hacia abajo para ajustarse a un número fijo de dígitos significativos.
- **Error absoluto:** Dif. entre valor exacto y aproximado $E_a = |\text{valor exacto} - \text{valor aprox}|$ $E_a = |V_r - V_a|$
- **Error relativo:** Cociente entre error absoluto y el valor exacto $E_r = \frac{E_a}{|V_r|}$
- **Error porcentual:** Error relativo expresado en porcentaje. $E_p = E_r \times 100\%$

2) Use la expansión de la serie de Taylor de cero al cuarto orden para estimar $f(3)$ si $f(x) = \ln(x)$ utilizando $x=1$ como punto base.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \frac{f^4(a)(x-a)^4}{4!}$$

Para $f(x) = \ln(x)$, $a=1$.

- Calculamos derivadas:
- $f(1) = \ln(1) = 0$
- $f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = \underline{1}$
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2} = f''(1) = -1$
- $f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{2}{(1)^3} = \frac{2}{1} = \underline{2}$ //
- $f''''(x) = \frac{-6}{x^4} = \frac{-6}{(1)^4} = \frac{-6}{1} = \underline{-6}$ //

$f(x) = \ln(x) = \ln(1) = \underline{0}$ //

Sustituyendo:

$$\ln(x) \approx 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 - \frac{6}{24}(x-1)^4$$

$$\ln(x) \approx (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 - \frac{6}{24}(x-1)^4$$

Con $f(3) = \ln(3)$

$$\ln(3) \approx (3-1) - \frac{1}{2}(3-1)^2 + \frac{2}{6}(3-1)^3 - \frac{6}{24}(3-1)^4 = \_\_\_\_\_\_ //$$

* El error se debe a que $x=3$, está lejos de $a=1$ y la serie converge lentamente.

3) Para calcular las coordenadas espaciales de un planeta tenemos que resolver la función $f(x) = x - 1 - 0.5\sin(x)$. Sea $a = x_i = \frac{\pi}{2}$ en el intervalo $[0, \pi]$ el punto base. Det... la expresión expansión de la serie de Taylor de orden superior que da un error máximo ... 0.015 en el intervalo dado

Error máximo < 0.015 en $[0, \pi]$

$f(x) = x - 1 - 0.5\sin(x)$

$f'(x) = 1 - 0.5\cos(x)$

$f''(x) = 0.5\sin(x)$

$f'''(x) = 0.5\cos(x)$

$f''''(x) = 0.5\sin(x)$

$f'''''(x) = 0.5\cos(x)$

$f^6(x) = 0.5\sin(x)$

Evaluado en $a = x_i = \pi/2$

$f(\pi/2) = \frac{\pi}{2} - 1 - 0.5\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1.5$

$f'(\pi/2) = 1 - 0.5\cos(\frac{\pi}{2}) = 1$

$f''(\pi/2) = 0.5\sin(\pi/2) = 0.5$

$f'''(\pi/2) = 0.5\cos(\pi/2) = 0$

$f^4(\frac{\pi}{2}) = 0.5\sin(\frac{\pi}{2}) = -0.5$

$f^5(\frac{\pi}{2}) = 0.5\cos(\pi/2) = 0$

$f^6(\frac{\pi}{2}) = 0.5\sin(\pi/2) = 0.5$

Error de truncamiento

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Escaneado con CamScanner

Si

$f(x) = x - 1 - 0.5\sin(x) = 1 - 1 - 0.5\sin(1) = -0.0087$ //

Si $x_i = \frac{\pi}{2}$ en el intervalo $[0, \pi]$, $0 = \frac{\pi}{2}$ y π corresponde a x_{i+1}:

$\frac{\pi}{2} + 1$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1} = \frac{\pi + 2}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$R_n = \frac{f'(\frac{\pi}{2})(h)^1}{1!} =$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 1 - 0.5\cos(\frac{\pi}{2}) =$$

Error $= f$

4) Utilice aproximaciones en diferencias de $O(h)$ hacia atrás y hacia adelante y una aproximación diferencia central de $O(h^2)$ para estimar la primera derivada de la función $f(x)=25x^3-6x^2+7x-88$. Evalúe la derivada en $X=2$ usando un tamaño del incremento 0.2. Compare los resultados con el valor exacto de las derivadas. Interprete los resultados considerando el término residual de la expansión en la serie de Taylor.

$\Delta = h$

1 Calcular derivada exacta

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(25x^3) - \frac{d}{dx}(6x^2) + \frac{d}{dx}(7x) - 88$$

$$= \underline{75x^2 - 12x + 7}$$

Evaluando en $x=2$

$$= 75(2)^2 - 12(2) + 7 = \underline{283}$$

→ Valor exacto de $f'(2)$

2 Aprox. hacia adelante

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para $x=2$ en $f(x)$

$$f(2) = 25(2)^3 - 6(2)^2 + 7(2) - 88 = 102$$

Para $f = (2.2) = (x+h)$

$$f(2.2) = 25(2.2)^3 - 6(2.2)^2 + 7(2.2) - 88 = 164.56$$

$$f'(x) = \frac{164.56 - 102}{0.2} = \underline{312.8}$$

3
$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$x - h = 2 - 0.2 = 1.8$$

$$f(1.8) = 25(1.8)^3 - 6(1.8)^2 + 7(1.8) - 88 = 50.96$$

$$f'(x) = \frac{102 - 50.96}{(0.2)} = 255.25$$

Escaneado con CamScanner

④ $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

$$f'(x) = \frac{164.56 - 50.96}{2(0.2)} = \underline{284.00} \;//$$

⑤ Comparación

Método	Estimado	Error verdadero = estim − estim. exacta
Exacto	283.0	0
Adelante	312.8	312.8 − 283 = 29.8
Centrada	284.0	312.8 − 284 = 28.8
Atrás	255.25	312.8 − 255.25 = 57.5

5) Determine las raíces reales de $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$:

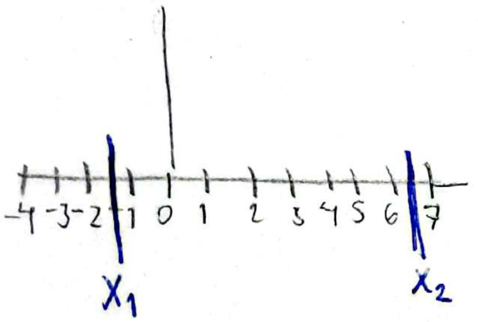
a) Gráficamente b) Empleando la fórmula cuadrática

c) Usando el método de bisección con tres iteraciones para determinar la raíz más grande

d) Calcule el error estimado de ε_a y el error verdadero ε_v para cada iteración

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4(-0.5)(4.5)}}{2(-0.5)} = \frac{-2.5 \pm 3.9}{-1} \begin{cases} x_1 = -1.4 \\ x_2 = 6.4 \end{cases}$$

b) //



a) //

c) // Método bisección para raíz más gde (6.4)

→ Buscamos raíz en intervalo con $f(6.4)$

$f(6.4) = -0.5(6.4)^2 + 2.5(6.4) + 4.5 = \underline{0.02}$ //

$f(6) = 1.5$

→ Establecemos $[6, 7]$ porque aquí está el cambio de signo

Iteración 1

$x_l = 6 \quad x_u = 7$

$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{6+7}{2} = 6.5$

$f(6.5) = -3.75 \times 10^{-1}$

-0.375

Iteración 2

$x_l = 6 \quad x_u = 6.5$

$x_r = \frac{6 + 6.5}{2} = 6.25$

$f(6.25) = 0.59375$

Iteración 3

$x_l = 6.5 \quad x_u = 6.25$

$x_r = 6.375$

$f(6.375) = 0.117187$ //

d) $\varepsilon_a = \frac{|x_l - x_r|}{2}$

It. ①

$\varepsilon_a = \frac{6.5 - 6}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25$

It ②

$\varepsilon_a = \frac{6.5 - 6.25}{2} = 0.1125$

It ③

$\varepsilon_a = \frac{6.5 - 6.375}{2} = 0.0625$

$\varepsilon_v = |x_v - x_r|$

① $= 6.4 - 6.5 = -0.1$

② $6.4 - 6.25 = 0.15$

③ $6.4 - 6.375 = 0.025$

6) Suponga que está diseñando un tanque esférico para almacenar agua para un poblado pequeño en un país en desarrollo. El volumen de líquido que puede contenerse se calcula con $V = \pi h^2 \frac{3R-h}{3}$ donde V es el volumen [m^3], h la profundidad del agua en el tanque [m] y R el radio del tanque [m]

Si R = (3m) ¿a qué profundidad debe llenarse el tanque de modo que contenga 30 m^3?

Haga tres iteraciones con el método de la falsa posición con el fin de obtener la respuesta. Determine el error relativo aprox. después de cada iteración.

$$V = \pi h^2 \frac{3R-h}{3}$$

Si R = 3

$$V = \pi h^2 \frac{(3*3)-h}{3}$$

$$V = \pi h^2 \frac{9-h}{3}$$

* 3 y con V=30

$$= 30*9 = \left(\frac{\pi h^2(9-h)}{30}\right)*30$$

$$= 90 = \pi h^2(9-h)$$

$$\Rightarrow \pi h^2(9-h)-90=0 = f(h)$$

→ Al ser tanque esférico h está entre 0 y 2R = 0 a 6m

$$V = \pi(6)^2 \frac{(9-6)}{3} = 113.097 m^3$$

Pero solo debe ser de 30 m^3 ∴ $h<6$, p.ej. h=3, el intervalo queda [0,3]

Iteración 1

$$hr = \frac{hl\,f(hu) - hu\,f(hl)}{f(hu)-f(hl)}$$

$$\varepsilon_a = \left|\frac{hr^{new} - hr^{old}}{hr^{new}}\right| * 100$$

hl = 0
hu = 3

$$f(hl) = f(0) = -90$$

$$f(hu) = f(3) = 79.646$$

$$hr = (0*90) - (3*79.646) = -1.5929\times10^{-2}$$

$$= 1.5916$$

$$f(hr) = \pi(1.5916)^2(9-1.5916) - 90$$

$$= -31.04$$

Como hr<0, la raíz está en [hr, hu]

Iteración 2

hl = 1.5916 hu = 3

$$f(hl) = f(1.5916) = -31.05$$

$$f(hu) = f(3) = 79.64$$

$$hr = \frac{(1.5916)(79.64) - (3)(-31.05)}{79.64-(-31.05)}$$

$$= 1.9865$$

$$f(hr) = -3.04$$

Iteración 3

hl = 1.9865 hu = 3

$h_l =$

$f(h_l) = -3.04 \quad f(h_u) = 79.64$

$h_r = 2.023$

$$E_a = \left| \frac{2.023 - 1.98}{2.023} \right| * 100 = 1.838\%$$

7) La concentración de saturación de oxígeno disuelto en agua dulce se calcula con la ec. (APHA, 1992) $\ln(O_{sf}) = -139.34 + \frac{1.575701 \times 10^5}{T_a} - \frac{6.642309 \times 10^7}{T_a^2} - \frac{8.621949 \times 10^{11}}{T_a^4}$ donde O_{sf} es la concentración de saturación de oxígeno disuelto en agua dulce a 1 atm (mg/L) y Ta es la temp. absoluta (K). De acuerdo con esta ec. la saturación disminuye con el incremento de la temperatura. Para aguas naturales comunes en climas templados, la ec. se usa para determinar que la concentración de oxígeno varía de 14.621 mg/L a 0°C a 6.413 mg/L a 40°C. Dado un valor de concentración de oxígeno, puede emplearse esta fórmula y el método de bisección para resolver para la temperatura en °C. TIP: Usa las temp. en K

$$\ln O_{sf} = -139.34 + \frac{1.5757 \times 10^5}{T_a} - \frac{6.642309 \times 10^7}{T^2_a}$$

$$- \frac{8.621944 \times 10^{11}}{T_a^4}$$

Para un valor de O_{sf}, define la función como $f(T_a)$

$$f(T_a) = -139.34 + \frac{1.575701 \times 10^5}{T_a} \ldots$$

El objetivo es encontrar Ta tal que $f(T_a) = 0$

$a = 273.15\,K$ y $b = 40°C$ en $K = 313.15\,K$

Iteración 1

$x_1 = 273.15 \quad x_u = 313.15$

$$x_r = \frac{273.15 + 313.15}{2} = 293.15$$

$$E_a = \left| \frac{313.15 - 237.15}{2} \right| = 20K$$

$f(293.15) =$

Iteración ②

$x_i = 273.15 \quad x_u = 293.15$

$x_r = \frac{273.15 + 293.15}{2} = 283.15$

$f(x_r) =$

$E_a = |273.15 - 293.15| = 10\,K$

Iteración ③

$x_i = 288.15 \quad x_u = 293.15$

$x_r = \frac{288.15 + 293.15}{2} = 290.65$

$f(x_r) =$

$E_a = |288.15 - 293.15| = 5\,K$

8) El balance de masa de un contaminante en un lago bien mezclado se expresa así

$$V\frac{dc}{dt} = W - Qc - kV\sqrt{c}$$

Dados los valores de parámetros $V = 1\times10^6\,m^3$, $Q = 1\times10^5\,m^3/año$ y $W = 1\times10^6\,g/año$ y $K = 0.25\,m^{0.5}/año$, use el método de la secante modificado para resolver la concentración de estado estable. Emplee un valor inicial $c = 4\,g/m^3$ y $d = 0.5$. Realice tres iteraciones y determine el error relativo porcentual después de la tercera iteración.

$$V\frac{dc}{dt} = W - Qc - KV\sqrt{c}$$

• Para edo estable $\frac{dc}{dt} = 0$

∴ $W - Qc - KV\sqrt{c} = 0$

$1\times10^6 - 1\times10^5 c - 0.25(1\times10^6)\sqrt{c}$

Div todo $\div 10^5$

$= 10 - c - 2.5\sqrt{c} = 0$

$c + 2.5\sqrt{c} - 10 = 0 \Rightarrow F_{(c)}$

$$C_{n+1} = \frac{c_n - f(c_n)\cdot d}{f(c_n + d) - f c_n}$$

con $c = 4$
$d = 0.5$

$F(4) = 4 + 2.5\sqrt{4} - 10 = -1$

$F(4.5) = 4.5 + 2.5\sqrt{4.5} - 10 = -1.96\times10^{-1}$
$= -0.1966$ //

$$C_{n+1} = \frac{4 - (-1 * 0.5)}{-0.1966 - (-1)} = 4.62$$

② Iteración

$C_1 = 4.62 \quad d = 0.5$

//

③ Iteración

$C_2 = \_\_\_\_ \quad d = 0.5$

//

$$E_a = \left|\frac{C_3 - C_2}{C_3}\right| \times 100 = \_\_\_\_ \%$$ //

Escaneado con CamScanner

9) Para el ej anterior, proponga 2 o 3 funciones g(c) y determine para qué funciones la iteración de punto fijo debería converger

$W - Qc - KV\sqrt{c}$

$10 - c - 2.5\sqrt{c} = 0$

$-c = -2.5\sqrt{c} + 10$

$c = 2.5\sqrt{c} - 10$

$g_1(c) = 2.5\sqrt{c} - 10$

$g_2(c) = (10 - c - 2.5\sqrt{c})^2 = 0$

$g_2(c) = 100 - c^2 - 6.25c = 0$

$$c = \frac{100 - c^2}{6.25}$$

$$g_1'(c) = \frac{-1.25}{\sqrt{c}} = \frac{-1.25}{\sqrt{4.624}} = 0.5814 < 1 \therefore \text{converge}$$

$$g_2'(c) = \frac{100 - (4.624)^2}{6.25} = 12.57 > 1 \therefore \text{diverge}$$

10) Para el ejercicio 6, haga 3 iteraciones con NM para determinar la respuesta. Encuentre error relativo aprox. de cada iteración y compare con lo obtenido en dicho ejercicio.

NM resultó más eficiente que FP para este problema

$f(h) = \pi h^2 (9-h) - 90$

$f'(h) = \pi[2h(9-h) - h^2] =$

$\pi[18h - 3h^2] = 3\pi h(6-h)$

$h_{n+1} = h_n - \frac{f(h_n)}{f'(h_n)}$

① Elegí valores iniciales donde hay cambio de signo

$h_0 = 2m \quad (f(2) = -2.04 \text{ y } f(2.1) = 5.57$

$f(2) = \pi(2)^2(9-2) - 90 = -2.035$

$f'(2) = 3\pi(2)(6-2) = 75.39$

$h_{n+1} = 2 - \left(\frac{-2.035}{75.39}\right) = \underline{2.026}$ //

$E_a = N/A$ en I①

I②

$h_0 = 2.026$

$f(2.026) =$

$f'(2.026) =$

$E_a = \left|\frac{h_2 - h_1}{h_2}\right| * 100$

I③