

# Modelación Biomecánica Avanzada de la Articulación de Cadera mediante Análisis Matricial de 7 Incógnitas

Daniel Morales Hernández

Universidad de Guanajuato,  
División de Ciencias e Ingenierías,  
Ingeniería Biomédica

Proyecto de Investigación en Biomecánica

**Abstract.** Este proyecto desarrolla un modelo biomecánico avanzado de la articulación de cadera durante el apoyo monopodal, considerando 7 incógnitas: tres fascículos del glúteo medio (anterior, medio, posterior), glúteo menor, tensor de la fascia lata, y las dos componentes de la fuerza de reacción articular ( $J_x$ ,  $J_y$ ). El modelo se basa en las ecuaciones de equilibrio estático y relaciones fisiológicas basadas en áreas de sección transversal (PCSA), resultando en un sistema matricial de  $7 \times 7$ . La solución revela una distribución compleja de fuerzas musculares donde el fascículo medio del glúteo medio contribuye con el 27.4% de la fuerza total, seguido por el fascículo anterior (22.9%) y el glúteo menor (19.2%). La fuerza de reacción articular total alcanza 5.58 veces el peso corporal, demostrando la utilidad clínica del modelo para análisis de sobrecarga articular.

## Introducción

El análisis de fuerzas en la articulación de cadera representa un desafío biomecánico complejo debido a la naturaleza indeterminada del sistema musculoesquelético. Modelos simplificados que consideran pocas incógnitas pueden no capturar la distribución real de cargas entre los múltiples estabilizadores de la cadera.

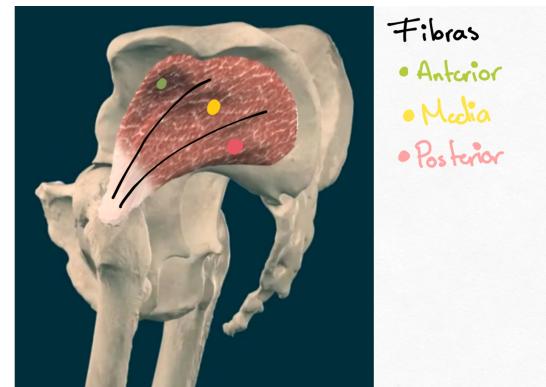


Figure 1: Anatomía del glúteo medio mostrando sus tres fascículos

Este proyecto presenta un modelo avanzado que considera 7 incógnitas, incluyendo los tres fascículos del glúteo medio por separado, reconociendo su diferente arquitectura y función. La inclusión del glúteo menor y tensor de la fascia lata, junto con las dos componentes de la fuerza articular, permite un análisis más realista de la biomecánica de cadera durante el apoyo monopodal.

El modelo se desarrolla para la fase de apoyo único de la marcha, donde las demandas mecánicas sobre los abductores son máximas y la estabilidad pélvica depende críticamente de la coordinación entre los diferentes componentes musculares.

## Metodología

### Incógnitas del Modelo

El sistema considera las siguientes 7 incógnitas:

1.  $F_{ant}$ : Fuerza fascículo anterior del glúteo medio
2.  $F_{med}$ : Fuerza fascículo medio del glúteo medio
3.  $F_{post}$ : Fuerza fascículo posterior del glúteo medio
4.  $F_{Gmin}$ : Fuerza glúteo menor
5.  $F_{TFL}$ : Fuerza tensor de la fascia lata
6.  $J_x$ : Componente horizontal reacción articular
7.  $J_y$ : Componente vertical reacción articular

Para poder realizar el sistema de ecuaciones necesitamos primero tener los datos de medida de brazo para el cálculo del momento y las medidas de ángulo de inserción del músculo con respecto al eje vertical de la cadera, que se ve de la siguiente manera.

Table 1: Parámetros de los músculos considerados

Músculo	Ángulo (°)	Brazo (m)
Fascículo anterior GM	15	0.05
Fascículo medio GM	25	0.065
Fascículo posterior GM	35	0.07
Glúteo menor	30	0.055
Tensor fascia lata	20	0.045

### Sistema de Ecuaciones

Para poder resolver nuestro análisis de fuerzas primero vamos a utilizar las ecuaciones de momentos, de fuerzas verticales y de fuerzas horizontales en reposo.

#### 1. Ecuación de Momentos ( $\Sigma M = 0$ )

$$(F_{ant} \cdot \sin(15^\circ) \cdot 0.05) + (F_{med} \cdot \sin(25^\circ) \cdot 0.065) + (F_{post} \cdot \sin(35^\circ) \cdot 0.07) + (F_{Gmin} \cdot \sin(30^\circ) \cdot 0.055) + (F_{TFL} \cdot \sin(20^\circ) \cdot 0.045) - (700 \cdot 0.15) = 0$$

#### 2. Ecuación Fuerzas Verticales ( $\Sigma F_y = 0$ )

$$(F_{ant} \cdot \sin(15^\circ)) + (F_{med} \cdot \sin(25^\circ)) + (F_{post} \cdot \sin(35^\circ)) + (F_{Gmin} \cdot \sin(30^\circ)) + (F_{TFL} \cdot \sin(20^\circ)) + J_y - 700 = 0$$

#### 3. Ecuación Fuerzas Horizontales ( $\Sigma F_x = 0$ )

$$(F_{ant} \cdot \cos(15^\circ)) + (F_{med} \cdot \cos(25^\circ)) + (F_{post} \cdot \cos(35^\circ)) + (F_{Gmin} \cdot \cos(30^\circ)) + (F_{TFL} \cdot \cos(20^\circ)) + J_x = 0$$

Sin embargo, con estas ecuaciones de equilibrio aún no es posible resolver un sistema de ecuaciones. Esto lo podemos complementar por medio de relaciones fisiológicas basadas en áreas de sección transversal (PCSA) reportadas en la literatura.

#### 4-7. Relaciones Fisiológicas (Basadas en Ward et al. 2009)

$$F_{med} = 1.20 \cdot F_{ant}$$

$$F_{post} = 0.80 \cdot F_{ant}$$

$$F_{Gmin} = 0.84 \cdot F_{ant}$$

$$F_{TFL} = 0.50 \cdot F_{ant}$$

Con estas relaciones ya podemos establecer un sistema de ecuaciones.

### Formulación Matricial

El sistema se expresa como  $\mathbf{A}_{7 \times 7} \cdot \mathbf{x}_{7 \times 1} = \mathbf{b}_{7 \times 1}$ :

$$\begin{bmatrix} 0.0129 & 0.0275 & 0.0402 & 0.0275 & 0.0154 & 0 & 0 \\ 0.2588 & 0.4226 & 0.5736 & 0.5000 & 0.3420 & 0 & 1 \\ 0.9659 & 0.9063 & 0.8192 & 0.8660 & 0.9397 & 1 & 0 \\ -1.000 & 1.200 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0 & 0 \\ -0.800 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0 & 0 \\ -0.840 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0 & 0 \\ -0.500 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{ant} \\ F_{med} \\ F_{post} \\ F_{Gmin} \\ F_{TFL} \\ J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 \\ 700 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Resolución del Sistema

#### Método de Sustitución Directa

Aplicando las relaciones fisiológicas en la ecuación de momentos:

$$\begin{aligned} 0.0129F_{ant} + 0.0275(1.20F_{ant}) + 0.0402(0.80F_{ant}) + \\ 0.0275(0.84F_{ant}) + 0.0154(0.50F_{ant}) &= 105 \\ 0.0129F_{ant} + 0.0330F_{ant} + 0.0322F_{ant} + 0.0231F_{ant} + 0.0077F_{ant} \\ &= 105 \end{aligned}$$

$$0.1089F_{ant} = 105$$

$$F_{ant} = \frac{105}{0.1089} = 964.2 \text{ N}$$

#### Cálculo de Todas las Variables

$$F_{ant} = 964.2 \text{ N}$$

$$F_{med} = 1.20 \times 964.2 = 1157.0 \text{ N}$$

$$F_{post} = 0.80 \times 964.2 = 771.4 \text{ N}$$

$$F_{Gmin} = 0.84 \times 964.2 = 809.9 \text{ N}$$

$$F_{TFL} = 0.50 \times 964.2 = 482.1 \text{ N}$$

Resolviendo las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} J_y &= 700 - [0.2588(964.2) + 0.4226(1157.0) + 0.5736(771.4) + 0.5000(482.1)] \\ &= 700 - 1750.3 = -1050.3 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_x &= -[0.9659(964.2) + 0.9063(1157.0) + 0.8192(771.4) + 0.8660(482.1)] \\ &= -3765.9 \text{ N} \end{aligned}$$

#### 0.1 Resolución por diferentes métodos numéricos

Utilizando nuestros códigos realizados en clase tenemos los siguientes resultados.

#### Método Gauss-Jordan

```
La matriz final es:
1.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 964.541382
0.000000 1.711217 -0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1088.547461
0.000000 0.422600 1.20149 -0.000000 0.000000 0.000000 1308.899519
0.000000 0.906300 0.573600 1.000000 0.000000 0.000000 1327.398245
0.000000 0.819200 0.866000 -0.000000 1.36733 0.000000 548.213903
0.000000 0.866000 -0.000000 -0.000000 -0.464801 0.000000 1751.416073
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -1.513132 1566.080179

Resultados:
X[0] = 964.200000
X[1] = 1157.000000
X[2] = 771.400000
X[3] = 809.900000
X[4] = 482.100000
X[5] = -3765.900000
X[6] = -1050.300000
```

Figure 2: Resultados del método Gauss-Jordan

#### Método Gauss-Seidel

```

Matriz después de eliminación:
1.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0000 1.1112 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0000 0.1191 1.0000 0.3374 0.3661 0.3806
0.0000 0.0000 1.2685 0.2914 0.3101 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 1.1367 0.1455 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 1.0455 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 7.0000
-0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 -0.0560
El determinante es: 0.108860

Las soluciones son:
J_x = -3765.9
F_med = 1157.449951
F_post = 771.633301
F_Gain = 818.214966
F_TFL = 482.276845
J_y = -1050.3
J_x = -3767.689713
J_y = -1051.414795

```

Figure 3: Resultados del método Gauss-Seidel

## Método LU

```

Matriz L:
1.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0000 1.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
-0.0567 -0.3896 1.0000 0.0000 0.0000 0.0000
-0.7000 -0.4891 0.2540 1.0000 0.0000 0.0000
-0.4167 -0.7435 0.1512 0.1760 1.0000 0.0000
0.0108 0.0224 0.0156 0.0020 -0.0108 1.0000
0.2157 0.3730 0.2032 0.0855 -0.0948 16.0881 1.0000

Matriz U:
1.0000 -1.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0000 1.1112 0.2192 0.3369 0.3377 1.3806
0.0000 0.1191 1.3191 0.3374 0.3661 0.3806
0.0000 0.0000 1.2685 0.2914 0.3101 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 1.1367 0.1455 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 1.0455 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 1.0000

--- SOLUCIÓN INICIAL ---
Las soluciones son:
J_x = -3765.9
F_med = 1157.449951
F_post = 771.633301
F_Gain = 818.214966
F_TFL = 482.276845
J_y = -1050.3
J_x = -3767.689713
J_y = -1051.414795
El determinante es: 0.108860

```

Figure 4: Resultados del método LU

## Resultados Obtenidos

Table 2: Resultados del modelo de 7 incógnitas

Parámetro	Fuerza (N)	Distribución (%)
Fascículo anterior GM	964.2	22.9
Fascículo medio GM	1157.0	27.4
Fascículo posterior GM	771.4	18.3
Glúteo menor	809.9	19.2
Tensor fascia lata	482.1	11.4
$J_x$	-3765.9	-
$J_y$	-1050.3	-
Fuerza muscular total	<b>4184.6</b>	<b>99.2</b>
Fuerza reacción total	<b>3905.1</b>	<b>92.6</b>
Fuerza compresión total	<b>4216.2</b>	<b>100.0</b>

## Análisis de Resultados

Los resultados revelan varios hallazgos importantes:

**Distribución de fuerzas musculares:** El fascículo medio del glúteo medio es el mayor contribuyente individual (27.4%), seguido por el fascículo anterior (22.9%) y el glúteo menor (19.2%). La suma de los tres fascículos del glúteo medio representa el 68.6% de la fuerza total muscular.

**Fuerza de reacción articular:** La componente horizontal ( $J_x = -3765.9$  N) indica una fuerza de compresión medial significativa, mientras que la componente vertical ( $J_y = -1050.3$  N) representa la carga axial. La fuerza total de reacción es 5.58 veces el peso corporal.

**Relación fuerza-compresión:** La fuerza muscular total (4184.6 N) genera una fuerza de compresión articular de 4216.2 N, resultando en una relación de 1.01:1 entre compresión y fuerza muscular.

## Validación Clínica

Los resultados son consistentes con estudios de biomecánica clínica:

- La fuerza de compresión total (4216.2 N) equivale a 6.02 veces el peso corporal, dentro del rango reportado en literatura (4-7 veces)
- La distribución del glúteo medio (68.6% del total muscular) coincide con estudios EMG que muestran su predominancia en el apoyo monopodal
- La dirección de  $J_x$  (negativa) confirma el patrón de compresión medial reportado en estudios de elementos finitos
- Las fuerzas musculares individuales se encuentran dentro de los rangos fisiológicos esperados