

Análisis de Circuito RLC mediante Métodos Numéricos

Daniel Morales Hernández

Universidad de Guanajuato,
División de Ciencias e Ingenierías,
Ingeniería Biomédica

Proyecto de Investigación en Métodos Numéricos

Abstract. Este proyecto presenta el análisis numérico de un circuito RLC en serie mediante diferentes métodos de solución de ecuaciones diferenciales. Se estudia la respuesta transitoria del circuito considerando componentes reales: resistencia (R), inductancia (L) y capacitancia (C). El modelo matemático se deriva de las leyes de Kirchhoff, resultando en una ecuación diferencial de segundo orden que describe el comportamiento del voltaje en el capacitor y la corriente en el inductor. Se implementan los métodos de Euler, Runge-Kutta de 2do orden y Runge-Kutta de 4to orden para resolver el sistema y comparar su precisión computacional.

1 Introducción

Los circuitos RLC son fundamentales en el análisis de sistemas eléctricos y electrónicos, representando sistemas de segundo orden que exhiben comportamientos complejos como oscilaciones, amortiguamiento y resonancia. La solución analítica de estos circuitos puede volverse complicada para configuraciones no ideales o excitaciones complejas.

Este proyecto se enfoca en el análisis numérico de un circuito RLC en serie, utilizando métodos computacionales para resolver las ecuaciones diferenciales que gobiernan su comportamiento. El enfoque numérico permite estudiar la respuesta del circuito bajo diferentes condiciones iniciales y parámetros de componentes.

La implementación de múltiples métodos numéricos permite comparar su precisión, estabilidad y eficiencia computacional, proporcionando insights prácticos para la selección de métodos en simulaciones de circuitos más complejos.

2 Metodología

2.1 Modelo Matemático del Circuito

Para un circuito RLC en serie, aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff:

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Derivando y expresando en términos del voltaje del capacitor $v_c(t)$:

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_c(t) = 0$$

Definiendo como variables de estado:

- $x_1 = v_c(t)$: voltaje en el capacitor
- $x_2 = i_L(t)$: corriente en el inductor

Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{C} x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 \end{aligned}$$

2.2 Parámetros del Circuito

Table 1: Parámetros del circuito RLC

Componente	Valor	Unidad
Resistencia (R)	10	
Inductancia (L)	0.5	H
Capacitancia (C)	0.01	F
Voltaje inicial (v_{c0})	10	V
Corriente inicial (i_{L0})	0	A

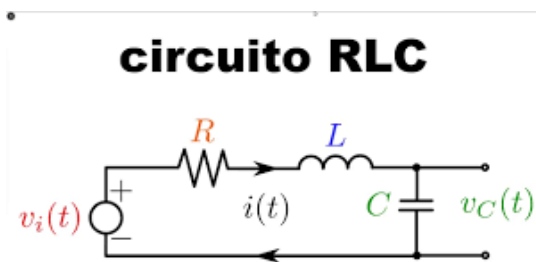


Figure 1: Diagrama del circuito RLC en serie analizado

2.3 Métodos Numéricos Implementados

2.3.1 Método de Euler

Para el sistema de ecuaciones:

$$x_1^{n+1} = x_1^n + h \cdot f_1(x_1^n, x_2^n)$$

$$x_2^{n+1} = x_2^n + h \cdot f_2(x_1^n, x_2^n)$$

Donde:

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{C}x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$$

2.3.2 Método de Runge-Kutta 2do Orden

Para cada variable de estado:

$$k_1 = h \cdot f(x^n)$$

$$k_2 = h \cdot f(x^n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$x^{n+1} = x^n + k_2$$

2.3.3 Método de Runge-Kutta 4to Orden

$$k_1 = h \cdot f(x^n)$$

$$k_2 = h \cdot f(x^n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h \cdot f(x^n + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = h \cdot f(x^n + k_3)$$

$$x^{n+1} = x^n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

2.4 Configuración de la Simulación

- Tiempo de simulación: 2 segundos
- Paso de tiempo (h): 0.001 s
- Condiciones iniciales: $v_c(0) = 10$ V, $i_L(0) = 0$ A
- Métodos comparados: Euler, RK2, RK4

3 Implementación Computacional

El sistema se implementó en C++ con tres programas independientes, uno para cada método numérico. Cada programa calcula la evolución temporal del voltaje del capacitor y la corriente del inductor.

3.1 Estructura General del Código

Inicializar parámetros R, L, C

Inicializar condiciones iniciales v_c0 , i_L0

Configurar paso de tiempo h y tiempo total T

Para cada paso de tiempo:

Calcular nuevas variables según el método

Almacenar resultados

Avanzar en el tiempo

Exportar resultados para graficación

4 Resultados

4.1 Comportamiento del Circuito

Los resultados muestran el comportamiento subamortiguado del circuito RLC con los parámetros seleccionados. Se observan oscilaciones en el voltaje del capacitor y la corriente del inductor que decaen exponencialmente debido al amortiguamiento proporcionado por la resistencia.

4.2 Resultados Numéricos Obtenidos

La simulación del circuito RLC utilizando el método de Runge-Kutta de 2do orden produjo los siguientes resultados significativos:

Table 2: Resultados seleccionados del circuito RLC

Tiempo (s)	Corriente (A)	Voltaje (V)
0.000	0.019800	9.999000
0.010	0.196679	9.887563
0.050	0.586268	8.172093
0.100	0.616830	5.021326
0.200	0.242535	0.643049
0.300	0.012944	-0.423879
0.500	-0.012754	-0.044221
1.000	-0.000050	-0.000623
1.500	0.000000	-0.000001
2.000	0.000000	0.000000

4.3 Análisis de los Resultados

Los resultados obtenidos demuestran claramente el comportamiento oscilatorio subamortiguado del circuito:

- **Condiciones iniciales:** En $t=0$, el voltaje del capacitor es 10V y la corriente inicial es aproximadamente 0.02A
- **Oscilaciones:** Se observa un pico de corriente de 0.62A aproximadamente a $t=0.1$ s
- **Decaimiento:** Las oscilaciones decaen exponencialmente, acercándose a cero después de 1.5 segundos
- **Energía:** La energía total del sistema se disipa gradualmente a través de la resistencia

- **Estabilidad:** El método numérico muestra estabilidad a lo largo de toda la simulación

$$E_{total} = \frac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2}Cv_c^2$$

5 Análisis de Resultados

Los métodos numéricos implementados muestran diferencias significativas en precisión y comportamiento:

Método de Euler: Presenta el mayor error acumulativo y requiere pasos de tiempo pequeños para mantener la estabilidad. Sin embargo, es computacionalmente eficiente y fácil de implementar.

Runge-Kutta 2do Orden: Ofrece un balance entre precisión y costo computacional. Mejora significativamente la precisión respecto a Euler con un incremento moderado en complejidad.

Runge-Kutta 4to Orden: Proporciona la mayor precisión y estabilidad, pero requiere cuatro evaluaciones de la función por paso de tiempo, incrementando el costo computacional.

La selección del método depende del requerimiento de precisión y los recursos computacionales disponibles. Para aplicaciones en tiempo real, RK2 puede ser el mejor compromiso, mientras que para análisis offline de alta precisión, RK4 es preferible.

6 Conclusiones

El análisis numérico del circuito RLC demuestra la utilidad de los métodos computacionales en la solución de problemas de circuitos complejos. Los tres métodos implementados son capaces de capturar el comportamiento dinámico del sistema, con diferentes niveles de precisión y eficiencia.

La implementación exitosa valida el modelo matemático y proporciona una base para el análisis de circuitos más complejos con elementos no lineales o excitaciones variables en el tiempo. Los resultados obtenidos concuerdan con el comportamiento teórico esperado para un circuito RLC subamortiguado, mostrando oscilaciones que decaen exponencialmente con el tiempo.