



UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

Universidad de Guanajuato

División de Ciencias e Ingenierías

Ingeniería Química Sustentable

“Métodos Numéricos”

**Proyecto Sistemas Lineales – Determinación de
temperaturas en sistema de calentadores en serie**

José Emilio Sierra Magaña - 827118

Docente: Dra. Alma Xóchitl González Morales

Fecha de entrega: 16/11/2025

OBJETIVO

Solucionar un problema relacionado a la ingeniería química mediante métodos de solución de sistemas lineales de 4 dimensiones.

INTRODUCCIÓN

En la industria, los sistemas de calentamiento son esenciales para llevar a cabo transformaciones físicas y químicas de forma controlada.

Para el calentamiento de diversas sustancias se tiene una amplia variedad de equipos y métodos, que transfieren energía a la sustancia objetivo haciendo uso de conceptos como la diferencia de calor, el efecto Joule, entre otros.

En este proyecto, se plantea un sistema de 4 calentadores conectados en serie, los cuales calientan un fluido mediante resistencias sumergidas. Este calentamiento está sujeto al calor aportado por cada calentador, por los calentadores vecinos y por la pérdida de calor al ambiente.

PLANTEAMIENTO DEL SISTEMA

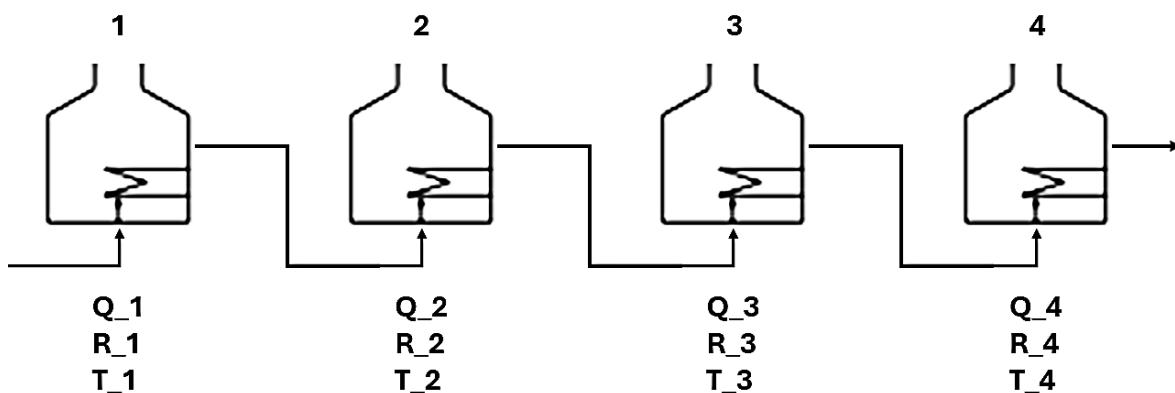


Figura 1. Diagrama ilustrativo de 4 calentadores dispuestos en serie.

El sistema en cuestión consiste en una serie de 4 calentadores, por los cuales fluye un fluido el cual recibe calor en diferente magnitud en cada nodo. La temperatura en cada nodo depende del calor que cada resistencia ejerce, el calor

que gana o pierde en relación con los nodos vecinos y el calor que pierde por la temperatura del medio.

La ecuación que rige el calor en cada nodo es la siguiente. [1]

$$Q_i = hA(T_i - T_\infty) + \frac{T_i - T_{i-1}}{R_i} + \frac{T_i - T_{i+1}}{R_i} \quad (1)$$

Donde el primer término representa la pérdida de calor al ambiente, y el segundo y tercero representan la aportación de los nodos vecinos. En el caso de que solo tenga un nodo vecino (para el primero y el último), uno de los términos de nodo vecino se elimina.

Por comodidad, definimos al producto del coeficiente de convección por el área superficial como K.

$$K = hA \quad (2)$$

Sustituyendo en la ecuación 1.

$$Q_i = K(T_i - T_\infty) + \frac{T_i - T_{i-1}}{R_i} + \frac{T_i - T_{i+1}}{R_i} \quad (3)$$

Partiendo de esta ecuación para cada nodo, se establecen valores arbitrarios de K, Q_i y R_i para cada nodo, por lo que las variables a determinar son las temperaturas dentro de cada nodo.

CÁLCULOS E IMPLEMENTACIÓN DE CÓDIGO

Se definen como valores arbitrarios:

$$\begin{array}{lll} R_1 = 4 \frac{\text{°C}}{\text{W}} & R_4 = 1 \frac{\text{°C}}{\text{W}} & Q_4 = 30 \text{ W} \\ R_2 = 2 \frac{\text{°C}}{\text{W}} & Q_1 = 90 \text{ W} & K = 0.5 \frac{\text{W}}{\text{°C}} \\ R_3 = 3 \frac{\text{°C}}{\text{W}} & Q_2 = 50 \text{ W} & T_\infty = 23^\circ\text{C} \\ & Q_3 = 10 \text{ W} & \end{array}$$

Antes de asignar los valores a nuestras expresiones, es conveniente definir las ecuaciones de modo que se despejen los coeficientes que se agregarán a la matriz final.

Partiendo de la ecuación (3), despejamos todos los términos de temperatura.

$$(K + R_1^{-1})T_1 - R_1^{-1}T_2 = Q_1 + KT_\infty \quad (4)$$

$$-R_2^{-1}T_1 + (K + R_2^{-1})T_2 - R_2^{-1}T_3 = Q_2 + KT_\infty \quad (5)$$

$$-R_3^{-1}T_2 + (K + R_3^{-1})T_3 - R_3^{-1}T_4 = Q_3 + KT_\infty \quad (6)$$

$$-R_4^{-1}T_3 + (K + R_4^{-1})T_4 = Q_4 + KT_\infty \quad (7)$$

A partir de este sistema de ecuaciones, se pueden escribir los vectores $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

$$\begin{pmatrix} K + R_1^{-1} & -R_1^{-1} & 0 & 0 \\ -R_2^{-1} & K + R_2^{-1} & -R_2^{-1} & 0 \\ 0 & -R_3^{-1} & K + R_3^{-1} & -R_3^{-1} \\ 0 & 0 & -R_4^{-1} & K + R_4^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 + KT_\infty \\ Q_2 + KT_\infty \\ Q_3 + KT_\infty \\ Q_4 + KT_\infty \end{pmatrix} \quad (8)$$

Así, sustituyendo los valores definidos al principio en la ecuación (8).

$$\begin{pmatrix} 0.75 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.33 & 0.83 & -0.33 \\ 0 & 0 & -1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101.5 \\ 61.5 \\ 21.5 \\ 41.5 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Este sistema es el que se escribe en un archivo de texto, el cual será leído por los códigos para el método de Gauss-Jordan, Gauss-Seidel y factorización LU.

Estos códigos se encuentran en el repositorio de GitHub.[2]

RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Gauss – Jordan

A continuación, se muestra el mensaje de la terminal luego de ejecutar el código con los datos de la ecuación (9).

Primero, el programa pide ingresar el número de filas y columnas, así el programa define límites para la lectura del archivo de texto.

Posteriormente despliega la matriz, y, de ser necesario, la modifica para evitar divisiones entre cero.

Se muestran los factores de multiplicación para la transformación con el método de Gauss simple, y luego el de Gauss – Jordan.

Ambas matrices se muestran para verificar que el método está avanzando de forma correcta.

Finalmente, cuando tenemos la matriz linealizada, se evalúa el determinante para así definir si el sistema está bien condicionado.

Finalmente, se muestran los resultados, en este caso las temperaturas dentro de cada calentador.

Ingresar numero de filas y columnas:

4
4

Matriz leída exitosamente desde: matriz.txt

Matriz inicial:

0.7500	-0.2500	0.0000	0.0000	101.5000
-0.5000	1.0000	-0.5000	0.0000	61.5000
0.0000	-0.3333	0.8333	-0.3333	21.5000
0.0000	0.0000	-1.0000	1.5000	41.5000

Matriz modificada:

0.7500	-0.2500	0.0000	0.0000	101.5000
-0.5000	1.0000	-0.5000	0.0000	61.5000
0.0000	-0.3333	0.8333	-0.3333	21.5000
0.0000	0.0000	-1.0000	1.5000	41.5000

Factores de multiplicación:

-0.666667
0.000000
0.000000
-0.399960
0.000000
-1.578981

Matriz diagonal resultante (Gauss):

0.7500	-0.2500	0.0000	0.0000	101.5000
0.0000	0.8333	-0.5000	0.0000	129.1667
0.0000	0.0000	0.6333	-0.3333	73.1615
0.0000	0.0000	0.0000	0.9737	157.0206

Factores de multiplicación:

-0.342294
0.000000
0.000000
-0.789490
0.000000
-0.300000

Matriz diagonal resultante (Gauss-Jordan):

0.7500	0.0000	0.0000	0.0000	170.3080
0.0000	0.8333	0.0000	0.0000	229.3598
0.0000	0.0000	0.6333	0.0000	126.9086
0.0000	0.0000	0.0000	0.9737	157.0206

El sistema está bien condicionado, $\det(A) = 0.385$

Resultados:

$x[1] = 227.0773$
 $x[2] = 275.2318$
 $x[3] = 200.3863$
 $x[4] = 161.2575$

Gauss – Seidel

El inicio del programa es similar al de Gauss – Jordan, se solicita el número de filas y columnas, y se muestra la matriz inicial y modificada en caso de que los primeros coeficientes sean cero. En este caso no es necesaria una modificación.

Posteriormente se definen las matrices N y P.

Finalmente, se llevan a cabo las iteraciones del vector x, las cuales convergen después de 23 iteraciones, cuando alcanza un error menor a 0.0001.

Ingresar numero de filas y columnas:
4
4
Matriz leída exitosamente desde: matriz.txt
Matriz inicial:
$\begin{array}{rrrr r} 0.7500 & -0.2500 & 0.0000 & 0.0000 & 101.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & -0.5000 & 0.0000 & 61.5000 \\ 0.0000 & -0.3333 & 0.8333 & -0.3333 & 21.5000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 1.5000 & 41.5000 \end{array}$
Matriz modificada:
$\begin{array}{rrrr r} 0.7500 & -0.2500 & 0.0000 & 0.0000 & 101.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & -0.5000 & 0.0000 & 61.5000 \\ 0.0000 & -0.3333 & 0.8333 & -0.3333 & 21.5000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 1.5000 & 41.5000 \end{array}$
Matriz N:
$\begin{array}{rrrr} 0.7500 & -0.2500 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.5000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.8333 & -0.3333 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.5000 \end{array}$
Matriz P:
$\begin{array}{rrrr} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{array}$
Iteraciones Gauss-Seidel
Iter Error x1 x2 x3 x4
0 79.309731 135.333328 129.166656 77.464592 79.309731
1 37.216370 178.388870 189.426727 133.289154 116.526100
2 20.044685 198.475586 227.382370 163.356171 136.570786
3 11.040436 211.127457 248.741821 179.916824 147.611221
4 6.101135 218.247269 260.582031 189.068542 153.712357
5 3.373230 222.194016 267.131287 194.128387 157.085587
6 1.865143 224.377090 270.752747 196.926086 158.950729
7 1.031281 225.584244 272.755157 198.473022 159.982010
8 0.570236 226.251709 273.862366 199.328369 160.552246
9 0.315308 226.620789 274.474579 199.801331 160.867554
10 0.174332 226.824875 274.813110 200.062836 161.041885
11 0.096405 226.937698 275.000275 200.207443 161.138290
12 0.053299 227.000076 275.103760 200.287384 161.191589
13 0.029465 227.034592 275.160980 200.331589 161.221054
14 0.016296 227.053665 275.192627 200.356033 161.237350
15 0.009018 227.064209 275.210114 200.369553 161.246368
16 0.004974 227.070023 275.219788 200.377014 161.251343
17 0.002747 227.073257 275.225128 200.381134 161.254089
18 0.001526 227.075027 275.228088 200.383423 161.255615
19 0.000839 227.076035 275.229736 200.384689 161.256454
20 0.000488 227.076584 275.230652 200.385406 161.256943
21 0.000244 227.076889 275.231140 200.385788 161.257187
22 0.000137 227.077042 275.231415 200.385986 161.257324
23 0.000092 227.077148 275.231567 200.386124 161.257416

Factorización LU

Este código inicia de forma similar a los anteriores hasta la normalización de la matriz. Es entonces cuando define y despliega los vectores L y U, los cuales son el resultado de la descomposición de la matriz original.

Debido a que se define que $Ux=y$, se despliega el vector y, con el cual se obtienen los valores del vector x.

Ingresar numero de filas y columnas:

4

4

Matriz leída exitosamente desde: matriz.txt

Matriz inicial:

0.7500	-0.2500	0.0000	0.0000		101.5000
-0.5000	1.0000	-0.5000	0.0000		61.5000
0.0000	-0.3333	0.8333	-0.3333		21.5000
0.0000	0.0000	-1.0000	1.5000		41.5000

Matriz modificada:

0.7500	-0.2500	0.0000	0.0000		101.5000
-0.5000	1.0000	-0.5000	0.0000		61.5000
0.0000	-0.3333	0.8333	-0.3333		21.5000
0.0000	0.0000	-1.0000	1.5000		41.5000

Matriz U resultante:

0.7500	-0.2500	0.0000	0.0000
0.0000	0.8333	-0.5000	0.0000
0.0000	0.0000	0.6333	-0.3333
0.0000	0.0000	0.0000	0.9737

Matriz L resultante:

1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.6667	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.4000	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-1.5790	1.0000

Vector y:

y[1] = 101.5000
y[2] = 129.1667
y[3] = 73.1615
y[4] = 157.0206

Vector x:

x[1] = 227.0773
x[2] = 275.2318
x[3] = 200.3863
x[4] = 161.2575

Comparación de los resultados en cada método

Nodo	Gauss - Jordan	Gauss - Seidel	Factorización LU
1	227.0773	227.0771	227.0773
2	275.2318	275.2316	275.2318
3	200.3863	200.3861	200.3863
4	161.2575	161.2574	161.2527

Tabla 1. Comparación de los resultados para cada método.

Como se muestra en la tabla 1, los resultados apenas cambiaron entre métodos, lo que sugiere que el sistema es relativamente sencillo. Es por esto por lo que el determinante indica que el sistema está bien condicionado.

La variación entre resultados es de menos del 0.02%.

En cuanto a la interpretación, estos valores representan la temperatura en cada calentador expresada en grados centígrados, y son congruentes con el valor de calor suministrado (directamente proporcional) y resistencia térmica (inversamente proporcional), tanto del nodo en cuestión como con los nodos vecinos.

CONCLUSIÓN

El sistema lineal propuesto mostró ser numéricamente estable y bien condicionado, lo cual permitió que los tres métodos empleados —Gauss-Jordan, Gauss-Seidel y factorización LU— generaran soluciones prácticamente idénticas. Esto confirma que las características del modelo, como las diferencias suficientemente grandes entre magnitudes y la estructura casi diagonal dominante, favorecen la precisión y la robustez de los métodos.

Además, el comportamiento físico de la solución resultó completamente coherente con los principios de transferencia de calor aplicados: las temperaturas obtenidas siguen patrones esperados y reflejan adecuadamente la influencia del calor suministrado y de las resistencias térmicas del sistema.

BIBLIOGRAFIAS

[1] Çengel, Yunus. (2007) Transferencia de Calor y Masa, un enfoque práctico.

[2] <https://github.com/DCI-alxogm/me2025-clase-joseemiliosierra123/tree/main/Proyecto%20Sistemas%20Lineales>