

Programación básica

Proyecto 1: Órbita de un planeta entorno a una estrella.

Guillermo Segura Gómez

01 de octubre de 2018

1 Introducción

Antes de de 1687, se había reunido una gran cantidad de información sobre los movimientos de la luna y los planetas, sin embargo, no había un conocimiento claro de las fuerzas relacionadas con estos movimientos. Isaac Newton, el padre de la gravitación, fue el que dio con la clave que reveló los secretos del cielo, unificó la física de la tierra y el cielo, desarrollando su ley de la gravitación universal. En este proyecto estudiaremos el movimiento de los planetas alrededor del sol utilizando dicha ley. Analizaremos y calcularemos las órbitas de nueve cuerpos celestes que se encuentran orbitando a nuestra estrella, utilizando nuestros conocimientos adquiridos hasta ahora en programación.

2 Teoría

La segunda ley de Newton, aplicada a un planeta nos dice que:

$$\vec{F} = m_p \vec{a}_p. \quad (1)$$

en donde la fuerza que actua sobre un objeto gracias a su aceleración, en este caso un planeta es igual a la masa del planeta por la aceleración del mismo.

La fuerza que siente el planeta debido a la presencia de una estrella es la fuerza de atracción gravitacional, que esta dada por:

$$\vec{F} = -\frac{GM_* m_p}{r^3} \vec{r}, \quad (2)$$

donde $G = 4\pi^2 yr^{-2} AU M_\odot^{-1}$ es la constante de Gravitación Universal, pero esta esta dada, en masas solares, unidades astronómicas y años, para que puedan hacerse mas prácticos y faciles los cálculos de este proyecto. Combinando las ecuaciones 1 y 2 se obtiene la ecuación de movimiento:

$$m_p \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_* m_p}{r^3} \vec{r}. \quad (3)$$

en donde \vec{r} es el vector distancia entre la estrella y el planeta y r es su magnitud. Gracias a que la ecuación 3 es vectorial, podemos separarla en componentes, en donde el centro del plano cartesiano corresponderia a la estrella:

$$\ddot{x} = -\frac{GM_*x}{r^3}, \quad (4)$$

$$\ddot{y} = -\frac{GM_*y}{r^3}, \quad (5)$$

$$\ddot{z} = -\frac{GM_*z}{r^3}, \quad (6)$$

y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Las ecuaciones anteriores, son ecuaciones diferenciales de segundo orden, y para que sea mas sencillo resolverlas, podemos separar una ecuación diferencial de segundo orden en dos ecuaciones diferenciales de primer orden de la siguiente manera:

$$\dot{v}_x = -\frac{GM_*x}{r^3} \quad (7)$$

$$\dot{x} = v_x \quad (8)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{GM_*y}{r^3} \quad (9)$$

$$\dot{y} = v_y \quad (10)$$

$$\dot{v}_z = -\frac{GM_*z}{r^3} \quad (11)$$

$$\dot{z} = v_z \quad (12)$$

Entonces, para encontrar la órbita de un planeta podemos resolver las ecuaciones anteriores, y así encontrar todos los puntos que satisfacen la misma, $x(t), y(t), z(t)$, sin embargo, durante el cálculo es necesario calcular también $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales, podemos utilizar el método de Euler, que es uno de los mas sencillos pero también menos confiables. Este método consiste en establecer un conjunto de posiciones y velocidades iniciales así como un tiempo inicial, y a partir de ahí ir aumentando pasos de tiempo muy pequeños hasta llegar a un límite de tiempo final, siguiendo las siguientes ecuaciones:

$$x_i = x_0 + v_{x_0} * h \quad (13)$$

$$y_i = y_0 + v_{y_0} * h \quad (14)$$

$$z_0 = x_0 + v_{z_0} * h \quad (15)$$

$$v_{x,i} = v_{x,0} - h * \frac{GM_*x_0}{r_{t_0}^3} \quad (16)$$

$$v_{y,i} = v_{y,0} - h * \frac{GM_*y_0}{r_{t_0}^3} \quad (17)$$

$$v_{z,i} = v_{z,0} - h * \frac{GM_*z_0}{r_{t_0}^3} \quad (18)$$

donde h es el paso de tiempo muy pequeño, que permanece constante durante todo el cálculo. A cada paso de tiempo se irán reemplazando las velocidades y posiciones iniciales, y así calcular unas nuevas, en donde cada uno de los puntos de las posiciones corresponden a la órbita del planeta. Cabe mencionar que se tiene que cambiar el valor de h para cada planeta, ya que el tiempo que tarda cada uno en dar una vuelta al sol, es variado, por lo tanto si se tiene un planeta con un periodo muy grande y un paso de tiempo muy pequeño, se obtendrán demasiados puntos, aunque el resultado será mas exacto. Para este programa se obtendrán entre 500 y 1000 puntos por planeta.

3 Código

Una vez que entendemos como vamos a realizar los cálculos y que ecuaciones vamos a usar, es necesario saber como funciona el código. Se tiene un archivo llamado "base.txt" en el que estan los datos para realizar el programa, en la base se encuentra primero que nada el número de planetas que vamos a graficar, esto para saber cuantas veces el ciclo *for*, en el que se realiza el programa se hace; también se encuentra el nombre de cada planeta, con la extensión ".txt", esto se explicará mas adelante; también estan las posiciones y velocidades iniciales de cada planeta, y por último se encuentra la masa del planeta, la masa de la estrella, el tiempo total en años que se realizará el cálculo y el paso de tiempo. El tiempo total para mercurio, venus, tierra y marte, es de 5 años, que es un tiempo suficiente para que estos planetas orbiten completamente a la estrella. El tiempo de júpiter, saturno, urano, neptuno y plutón, aumenta, ya que estos planetas tardan mucho mas en orbitar al Sol, por lo tanto se usa para Júpiter 22 años, para Saturno 60 años, para Urano 168 años, para Neptuno 328 años y para Plutón 500 años. Estos valores se obtienen a partir de el tiempo en años que tardan en orbitar al sol multiplicado por dos, por lo tanto se estarían evaluando dos órbitas. El paso de tiempo h , se calcula, teniendo en cuenta que no sean tantos puntos, y así poder graficar mas fácil, los puntos obtenidos por el programa son entre 500 y 1000.

Lo primero que se hace es inicializar las variables, se utilizan variables de tipo *double* para las posiciones y velocidades iniciales, la masa de la estrella, la masa del planeta, el tiempo total, y el paso de tiempo. Se utiliza una variable de tipo *char* para guardar el nombre del planeta en un arreglo de caracteres. Y finalmente se utiliza una variable tipo *int* para guardar el número de planetas. Después, se inicializa una variable tipo FILE para leer el archivo "base.txt". Inmediatamente se declara un ciclo *for*, que se realizará n veces, donde n es el número de planetas. Adentro del ciclo se leen las variables de cada planeta, el nombre del planeta se guarda en una variable *char*, con la extensión ".txt" para posteriormente inicializar una nueva variable tipo FILE, pero esta vez para escribir, y el nombre del archivo será la variable *char*.

La velocidad de los planetas se encuentra en unidades de días, por lo tanto para tener todos los datos en las mismas unidades se realiza la conversión a años inmediatamente después de leerlas.

El paso siguiente es declarar la variable FILE para escribir, el nombre del archivo será la variable *char* previamente creada. La variable se declara dentro del ciclo, para así cuando el ciclo se reinicie se inicialice dicha variable y cree un nuevo archivo, en total se crean nueve archivos, uno por cada planeta.

Para realizar los cálculos declaramos un ciclo *for*, que esta adentro del previamente creado; el ciclo se realiza desde un contador $j = 0.0$, hasta un tiempo t , y al contador se le va sumando el paso de tiempo h ; se calcula el valor del radio r y se calculan las nuevas posiciones, con las ecuaciones 13, 14 y 15. Para calcular las nuevas velocidades, se utilizan las ecuaciones 16, 17 y 18; los resultados obtenidos para las posiciones y velocidades se imprimen en un archivo y después se reinicia el ciclo de los cálculos, hasta que finalmente tiene una infinidad de puntos que forman una elipse, la órbita del planeta.

Cuando el ciclo de los cálculos termina, se cierra la variable FILE de escritura antes de que termine el ciclo principal, para que cuando el ciclo principal se reinicie se abra una nueva variable FILE y se imprima en un nuevo archivo como se explico antes.

Finalmente, ya tenemos los cálculos y los datos obtenidos impresos en un archivo, por lo tanto, el ciclo principal termina y se reinicia, esto se realiza nueve veces, una vez para cada planeta.

4 Resultados

Para graficar los resultados se utilizó el graficador online "GeoGebra", el cual nos muestra la gráfica de manera tridimensional. A continuación se mostrará la gráfica obtenida de cada planeta.

La gráfica de mercurio presenta unas leves variaciones, ya que al estar tan cerca del Sol, su órbita cambia constantemente.

Por otro lado la gráfica de plutón al estar tan alejada del sol, también presenta leves variaciones.

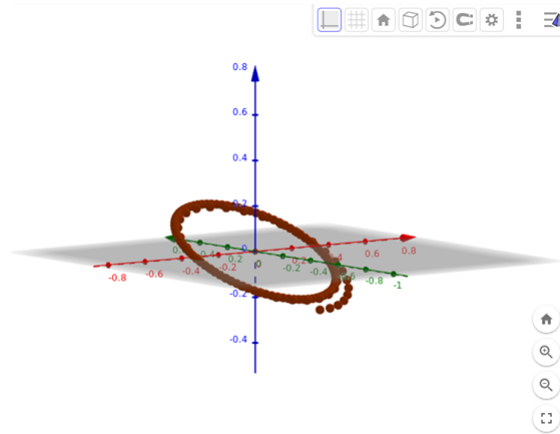


Figure 1: Gráfica de Mercurio

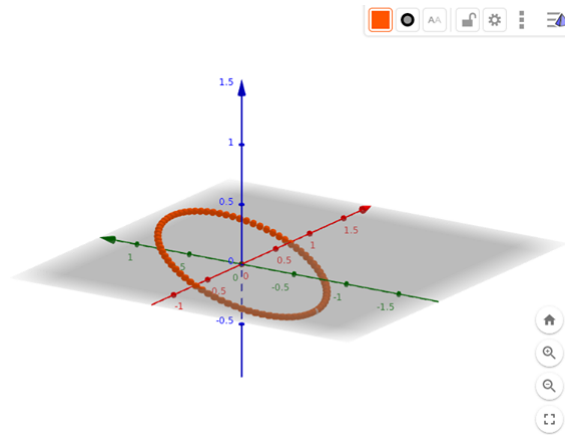


Figure 2: Gráfica de Venus

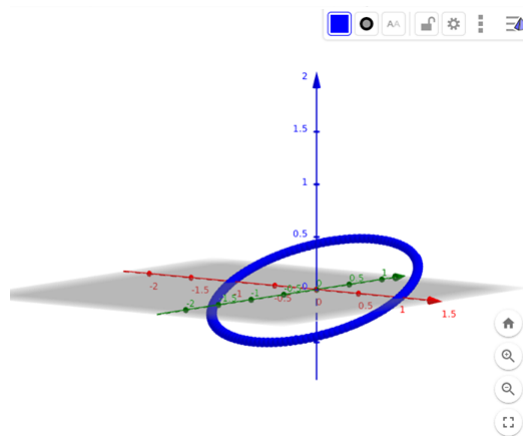


Figure 3: Gráfica de la Tierra

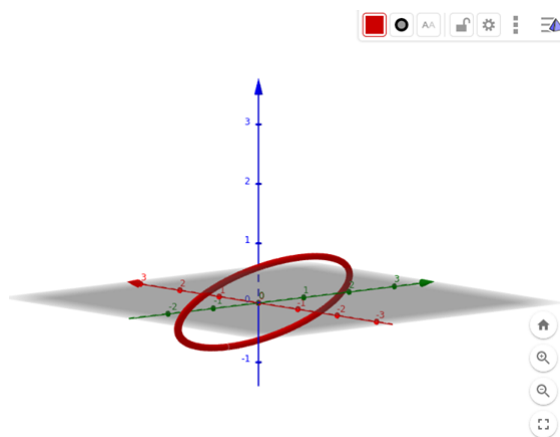


Figure 4: Gráfica de Marte

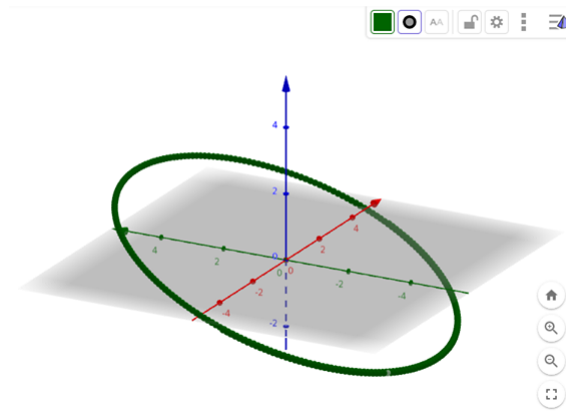


Figure 5: Gráfica de Júpiter

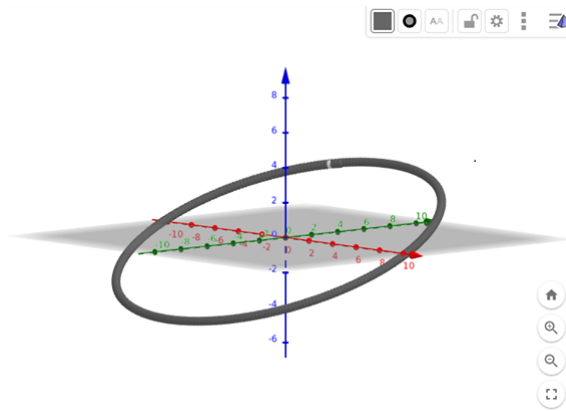


Figure 6: Gráfica de Saturno

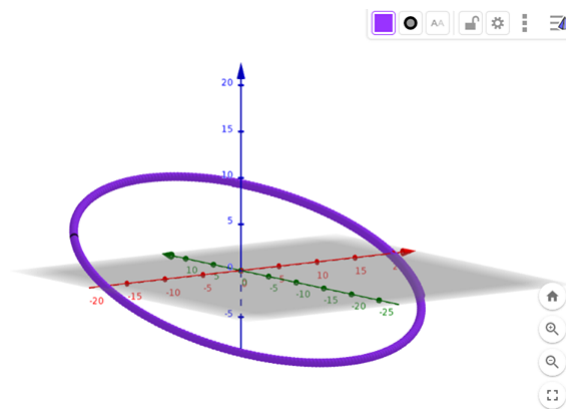


Figure 7: Gráfica de Urano

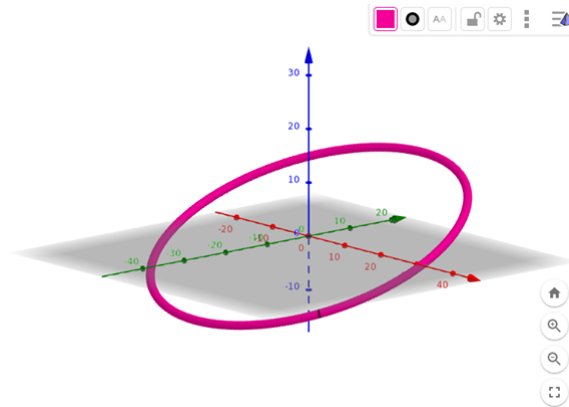


Figure 8: Gráfica de Neptuno

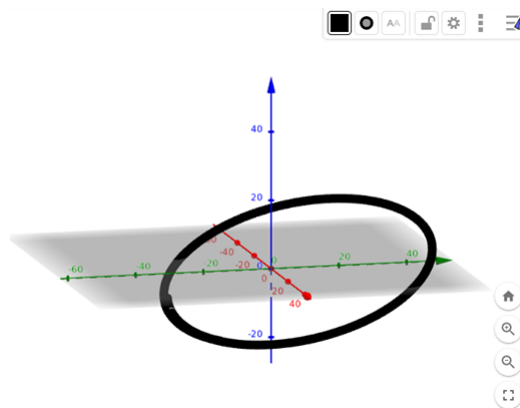


Figure 9: Gráfica de Plutón