Segundo reporte: Aplicación de cadenas de Markov en datos de supernovas

Universidad de Guanajuato, División de Ciencias e Ingenierías

Uriel Chávez Flores

Teoría

En un universo plano con una constante cosmológica, mediante la observación y análisis de supernovas tipo Ia se puede obtener una medición precisa de la densidad de materia reducida Ω_m.[1] Siguiendo un procedimiento simplificado de lo que se describe en la referencia 1, se calculó este valor usando cadenas de Markov.

Se usó un estimador de distancia basado en supernovas de tipo Ia. Esta estimación se basa en asumir que este tipo de supernovas son un evento en el que dadas las mismas características de color, tamaño y entorno, en promedio, tienen la misma luminosidad intrínseca.[1] El estimador tiene la siguiente forma:

$$\mu = m_{\mathrm{B}}^{\star} - (M_B - \alpha \times X_1 + \beta \times C) \tag{1}$$

donde $m_{\mathrm{B}}^{\star}$ es la magnitud del pico observado con filtro el filtro B band, X_1 describe el estiramiento en el tiempo de la curva de luz, C describe el color de la supernova durante el brillo máximo y, α, β y M_B son parámetros relacionados con el ruido en la estimación. Los primeros 3 parámetros son datos que se miden y están en las bases de datos que se usaron, el resto son parámetros libres o a determinar. El estimador está estandarizado a

$$\mu = 5 \log_{10} (d_L / 10\mathrm{pc}) \tag{2}$$

La función a minimizar es:

$$\chi^2 = (\hat{\mu} - \mu_{\Lambda CDM}(z; \Omega_m))^{\dagger} C^{-1} (\hat{\mu} - \mu_{\Lambda CDM}(z; \Omega_m)) \tag{3}$$

donde $\hat{\mu}$ es el estimador, $\mu_{\Lambda CDM} = 5 \log_{10}(d_L(z; \Omega_m)/10\mathrm{pc})$ y C es la matriz de covarianza.

La matriz de covarianza se determinó de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Cov = {} & Diag + Cov_{mag} + \alpha^2 Cov_{strech} + \beta^2 Cov_{color} \\ & + 2\alpha Cov_{mag-strech} - 2\beta Cov_{mag-color} - 2\alpha\beta Cov_{strech-color} \end{aligned} \tag{4}$$

donde

$$Diag = \sigma_m^2 + \alpha^2\sigma_s^2 + \beta^2\sigma_c^2 + 2\alpha cov_{ms} - 2\beta cov_{mc} - 2\alpha\beta cov_{sc} \tag{5}$$

Si usamos una matriz de covarianza diagonal podemos reducir la ecuación 3 a

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\hat{\mu} - \mu_{\Lambda CDM})^2}{\sigma_i^2} \tag{6}$$

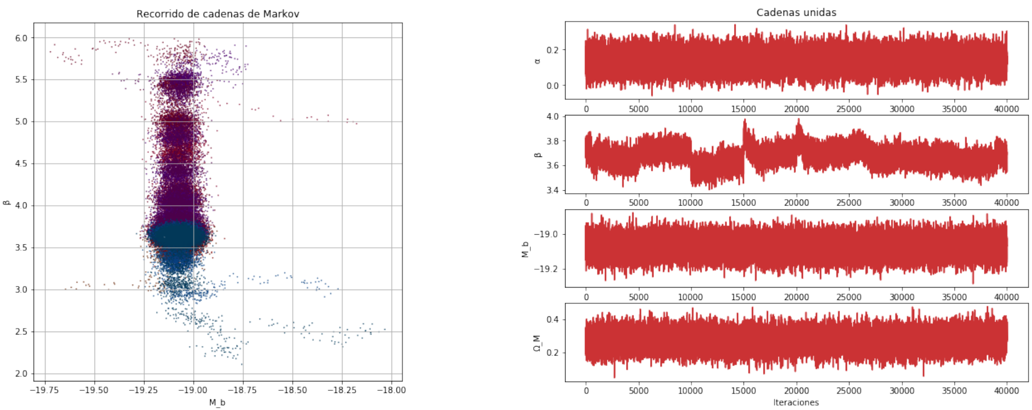
Los parámetros libres de la función a minimizar son Ω_m, α, β y M_B, estos fueron aproximados con 8 cadenas de Markov. La función proporcional al logaritmo del likelihood usada fue:

$$ln(L) = ln\left(\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\tilde{y})^2}{2\sigma^2}}\right) \propto -\chi^2 \tag{7}$$

Se uso prior plano en un espacio 4D en el que se buscaron los parámetros libres.

Resultados

Se hicieron 8 cadenas de 10000 pasos cada una para después unirlas. La figura 1a muestra el recorrido de las cadenas de Markov en el plano $M_b\beta$, en la figura 1b se muestran las uniones de las 8 cadenas de Markov sin burn, se eliminaron los primeros 5000 pasos de la cadena.



(a) Recorrido de las cadenas de Markov en el plano $M_b\beta$.

(b) Visualización de parámetros a lo largo de las cadenas unidas.

Figura 1: Resultados de cadenas de Markov

Con los datos de las cadenas unidas se generó una gráfica triangular que se muestra en la figura 2.

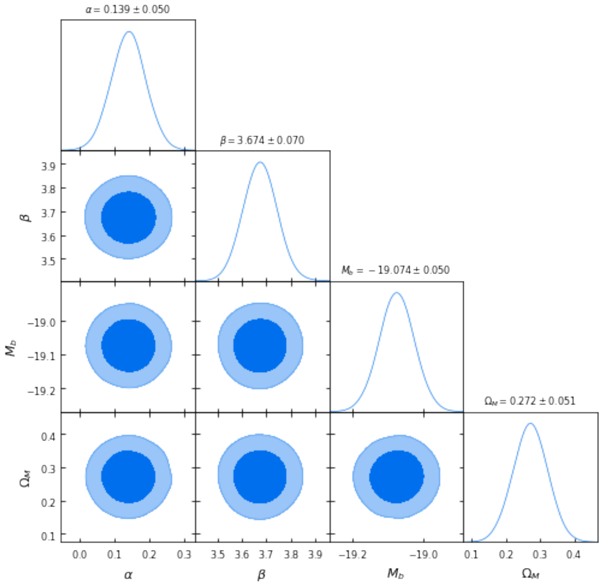


Figura 2: Gráfica triangular como resultado de las cadenas de Markov.

Se calcularon los intervalos de confianza al 68 % y el criterio de convergencia de Gelman-Rubin, se muestran en la tabla 1 y 2 respectivamente.

Parámetro	Media	Intervalo de confianza
α	0.13921	-0.04978 , 0.04919
β	3.67398	-0.06954 , 0.06847
M_b	-19.07449	-0.04960 , 0.04989
Ω_M	0.27157	-0.05082 , 0.05059

Tabla 1: Intervalos de confianza y media de cada parámetro.

Parámetro	R
α	1.00006
β	1.23353
M_b	1.00159
Ω_M	1.00479

Tabla 2: Criterio de convergencia de Gelman-Rubin para cada parámetro.

Referencias

[1] M. Betoule, R. Kessler, J. Guy, and et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples. jan 2014.