

## 1. Teorema de Bayes

Si tenemos dos eventos llamados  $A$  y  $B$  la probabilidad condicional entre ellos es:

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B), \quad \text{where } P(B) \neq 0 \quad (1)$$

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A), \quad \text{where } P(A) \neq 0 \quad (2)$$

La probabilidad conjunta de  $P(A \cap B)$  y  $P(B \cap A)$  es igual, por lo que:

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) \quad (3)$$

por la definición de probabilidad condicional tenemos:

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A), \quad (4)$$

o escrito de la manera que es conocido como el Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (5)$$

## 2. Monty Hall (o las catafixias de Chabelo)

Considerando que el presentador siempre abre una puerta y no abre aquella que tiene el mejor premio, podemos hacer el siguiente cálculo usando teorema de Bayes.

Consideremos que elegimos la puerta  $A$  y Chabelo abre la puerta  $B$ .

- $P(A|B)$  es la probabilidad de que  $A$  sea la puerta correcta si Chabelo abre la puerta  $B$ ,
- $P(C|B)$  es la probabilidad de que  $C$  sea la puerta correcta si Chabelo abre la puerta  $B$ .

La probabilidad de que cualquier puerta sea correcta es de  $1/3$ , antes de que abra otra. Así que el prior es que  $P(A) = P(C) = 1/3$ .

Si el premio grande está detrás de la puerta que elegimos, en este caso la puerta  $A$ , entonces la probabilidad de que abra cualquiera de las otras dos es de  $1/2$ . Si la puerta que elegimos no tiene el premio, no puede abrir una de las puertas porque ahí está el premio, así que si  $A$  es la puerta correcta la probabilidad de que abra  $B$  es:

$$P(B|A) = \frac{1}{2}, \quad (6)$$

mientras que si C es correcta, la probabilidad de que abra B es:

$$P(B|C) = 1 \quad (7)$$

Si consideramos el teorema de Bayes tenemos

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \quad (8)$$

$$P(C|B) = \frac{P(C)P(B|C)}{P(B)} \quad (9)$$

Donde  $P(B)$  es:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(C)P(B|C) \quad (10)$$

Esto nos da las probabilidades respectivas de

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad (11)$$

$$P(C|B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad (12)$$

por lo que tenemos una mayor probabilidad de ganar si cambiamos de puerta si Chabelo abre una de ellas.