Fabián Hernández Gutiérrez
NUA: 102439

Inferencia

1. Distribución de Poisson

Sea x una variable aleatoria discreta. Se dice que ésta tiene una distribución de Poisson con parametro $\lambda > 0$, si, para $k = 0, 1, 2, ...$ su función de probabilidad está dada por

$$f(k;\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \tag{1}$$

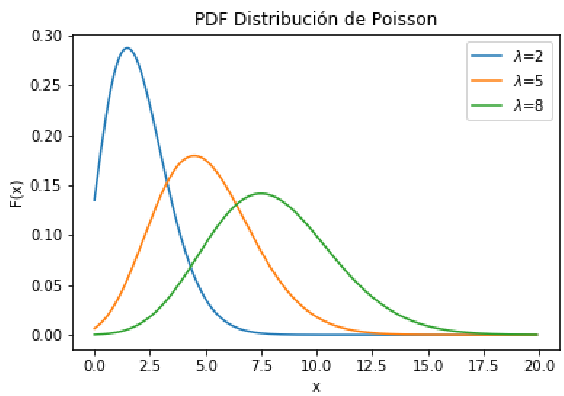

Figura 1: Función de distribución de probabilidad de Poisson para diferentes valores de λ.

A su vez, podemos definir la función de distribución acumulativa asociada a (1) como

$$F(x_k) \equiv P(\leq x_k) = \sum_{x_i \leq x_k} f(x_i) \tag{2}$$

con propiedades

$$F(-\infty) = 0, \tag{3}$$

$$F(\infty) = 1. \tag{4}$$

Usando (1) en (2) tenemos que la CDF está dada por

$$F = e^{\lambda} \sum_{k=0} \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{5}$$

La definición de varianza está dado por:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2, \tag{6}$$

donde $E[X]$ es el valor de expectación de x. Para calcular el valor de expectación tenemos que:

$$E[X] = \sum_{x=o}^{\infty} x e^{\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda, \tag{7}$$

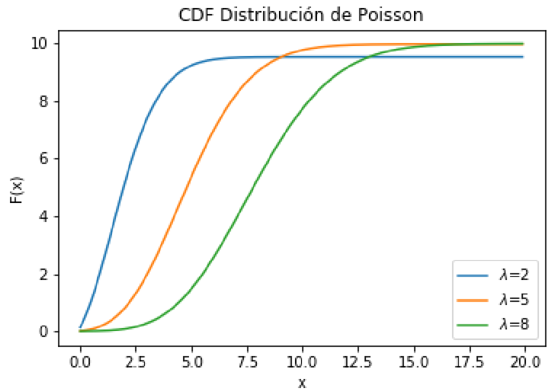

Figura 2: Función de distribución acumulada de Poisson para diferentes valores de λ.

donde $y = x - 1$ e identificando la sumatoria de y como e^{λ}.

Tomando la propiedad de:

$$E[X^2] = E[X(X-1)] + E[X], \tag{8}$$

podemos calcular el otro término de la varianza. Haciendo el valor de expectación $E[X(X-1)]$:

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=o}^{\infty} x(x-1)e^{\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty}(x-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \sum_{x=2}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{(x-2)!}, \tag{9}$$

sacando los factores que son constantes y haciendo el cambio de variable $y = x - 2$

$$\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!} = \lambda^2. \tag{10}$$

Con esto podemos ver que la varianza es

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 = \lambda, \tag{11}$$

por lo que la distribución de Poisson tiene una desviación estandar de $\sigma = \sqrt{\lambda}$
La distribución (1) cumple con la propiedad de que su media y su varianza son iguales

$$\mathbf{E[X]} = \mathbf{Var[X]} = \lambda. \tag{12}$$

2. Distribución Binomial

La distribución binomial se usa cuando hay exactamente dos resultados mutuamente excluyentes de un ensayo. Estos resultados se denominan **éxito** y **fracaso**. La distribución binomial se utiliza para obtener la probabilidad de observar X éxitos en N ensayos, con la probabilidad de éxito en un único ensayo denotado por p. La distribución binomial supone que p es fijo para todos los ensayos. La función de distribución de probabilidad binoial está dada por

$$f(x;p,n) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{(n-x)} \tag{13}$$

para $x = 0, 1, 2, ...n$.

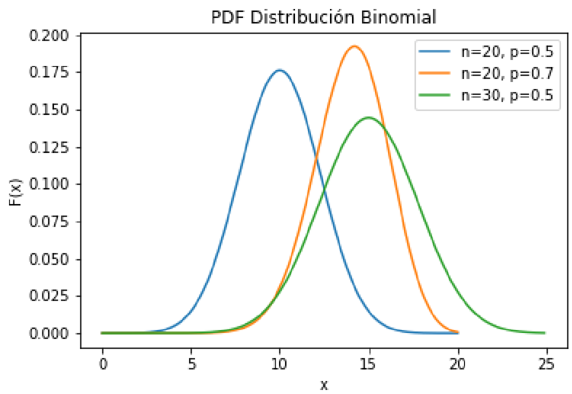

Figura 3: Función de distribución de probabilidad de Binomial para diferentes valores de p y n.

La función acumulada por definición toma la forma:

$$F(x;p,n) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} (p)^i(1-p)^{(n-i)}. \tag{14}$$

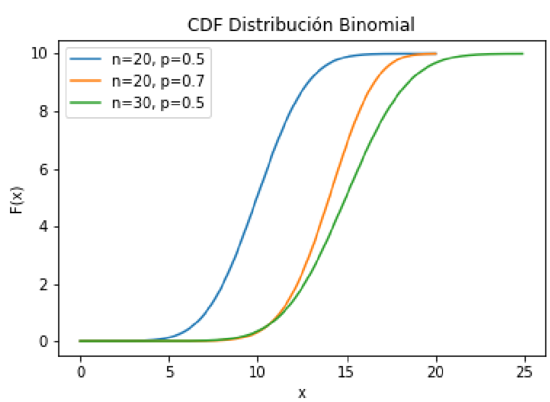

Figura 4: Función de distribución acumulada de Binomial para diferentes valores de p y n.

La función de probabilidad binomial tiene desviación estandar $\sqrt{np}$ y valor de expectación $\sqrt{np(1-p)}$.

3. Transformación de Variables

Sea x la variable de la cual obtenemos mediciones. Nos interesa, sin embargo, conocer $y(x)$. Si conocemos la PDF $p(x)$, podemos escribir

$$p(y) = p_x[\Phi^{-1}(y)]\left|\frac{d\Phi^{-1}(y)}{dy}\right|. \tag{15}$$

Ahora, si consideramos el caso particular en que $p(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$ y $y = \Phi(x) = exp(x)$. Podemos escribir $\Phi^{-1}(y) = \ln y$, talque

$$p(y) = \frac{d(\ln y)}{dy} = \frac{1}{y}. \tag{16}$$

donde hemos hecho $p_x(\Phi^{-1}(y)) = 1$.

4. Mínimos Cuadrados a partir de Chi cuadrada

La definición de Chi cuadrado es:

$$\chi^2 = \frac{\sum (y_i - y(x_i,\theta))^2}{\sigma^2}, \tag{17}$$

donde y_i y x_i son los datos que tenemos, y es la función que queremos ajustar y θ son los parámetros libres que dan forma a esa función. Para encontrar los parámetros libres que minimizan esta ecuación debemos hacer

$$\frac{\partial chi^2}{\partial \theta} = 0. \tag{18}$$

En el caso de una línea recta de la forma

$$y = ax + b \tag{19}$$

nuestros parámetros libres θ son a y b. Derivando tenemos

$$\frac{\partial chi^2}{\partial a} = \frac{2\sum (y_i - y(x_i,\theta)x_i)}{\sigma^2} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial chi^2}{\partial b} = \frac{2\sum (y_i - y(x_i,\theta))}{\sigma^2} = 0 \tag{21}$$

Esto nos da un sistema de ecuaciones con la forma:

$$\sum \left(y_i - ax_i - b\right) x_i = 0 \tag{22}$$

$$\sum \left(y_i - ax_i - b\right) = 0 \tag{23}$$

Si tomamos la segunda ecuación obtenemos

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - a\sum x_i\right) \tag{24}$$

Mientras que la segunda toma la forma

$$\sum y_i x_i - a\sum x_i^2 - b\sum x_i = 0 \tag{25}$$

sustituyendo en ella el valor de b se tiene

$$\sum y_i x_i - a\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_i - a\sum x_i\right)\sum x_i = 0 \tag{26}$$

$$n\sum y_i x_i - an\sum x_i^2 - \sum y_i \sum x_i + a\sum x_i \sum x_i = 0 \tag{27}$$

Despejando el valor de a encontramos una ecuación que sólo depende de los datos

$$a = \frac{n\sum y_i x_i - \sum y_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{28}$$

Si sustituimos esta expresión para a en b tenemos

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - \left[\frac{n\sum y_i x_i - \sum y_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}\right]\sum x_i\right) \tag{29}$$

Despejando b y reduciendo la expresión se tiene

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \frac{1}{n}\sum y_i \left(\sum x_i\right)^2 - \sum y_i x_i \sum x_i + \frac{1}{n}\sum y_i \left(\sum x_i\right)^2}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{30}$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum y_i x_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{31}$$

Las expresiones finales de a y b corresponden a las ecuaciones del método de mínimos cuadrados

$$a = \frac{n\sum y_i x_i - \sum y_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \quad b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum y_i x_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

5. Likelihood de Poisson

La verosimilitud para una distribución de Poisson tiene la forma

$$-\log \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \left(\log k_i! - k_i \log \lambda_i + \lambda_i \right), \tag{32}$$

donde k_i son los N puntos que se tienen de los datos y λ_i es un factor del modelo. Al minimizar el valor de λ_i se maximiza verosimilitud