

cuu duong than cong . com

REVIEW

- Bài toán: Cho một tập các số nguyên $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, và một giá trị đích T . Tìm một tập con của S sao cho tổng các số trong tập con đó đúng bằng T . Ví dụ, Tồn tại một tập con trong $S = \{1, 2, 5, 9, 10\}$ mà tổng là $T = 22$ nhưng lại không tồn tại với $T = 23$.

Tìm phản ví dụ cho các thuật toán sau

REVIEW

- (a) Lần lượt chọn các phần tử trong S theo thứ tự từ trái qua phải nếu chúng phù hợp (thuật toán first-fit).
- (b) Lần lượt chọn các phần tử trong S theo thứ tự từ nhỏ đến lớn (thuật toán best-fit).
- (c) Lần lượt chọn các phần tử trong S theo thứ tự từ lớn nhất đến nhỏ nhất.

cuu duong than cong . com

NỘI DUNG

- Phân tích thuật toán
- Mô hình RAM
- Tốt nhất, tồi nhất, trung bình
- Ký hiệu O-lớn
- Phân tích tiệm cận
- Tốc độ tăng và tính thống trị
- Một số tính chất của phân tích O-lớn

PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN?

Bài toán: tìm phần tử lớn nhất thứ k

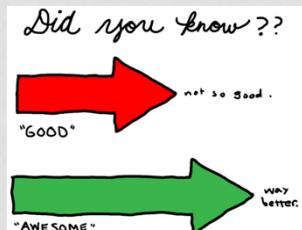
- Đầu vào: Dãy số gồm n số nguyên a_1, a_2, \dots, a_n , và số nguyên k ($0 < k \leq n$)
- Đầu ra: Giá trị phần tử lớn nhất thứ k trong dãy.

Có 2 thuật toán A, B để giải bài toán.

Với $n = 100,000$, $k=100$

- A cài đặt bằng C chạy mất 12 s
- B cài đặt bằng java chạy mất 19 s

Thuật toán A tốt hơn B ?



PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN?

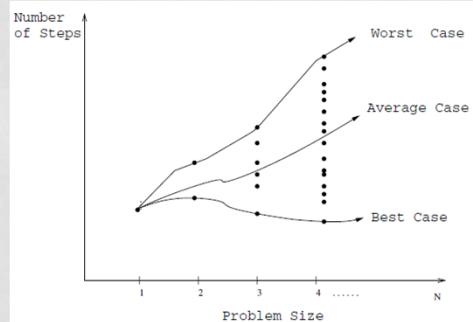
- Đánh giá hiệu quả của thuật toán mà không cần cài đặt.
- 2 mô hình :
 - Mô hình RAM (**Random Access Machine**)
 - Phân tích tiệm cận độ phức tạp trong trường hợp tồi nhất
- Đánh giá thuật toán:** dự đoán các tài nguyên mà thuật toán cần.
- Tài nguyên:** Thời gian CPU, bộ nhớ, băng thông, phần cứng...

MÔ HÌNH RAM

- Thực hiện thuật toán trên một máy tính giả định gọi là *Random Access Machine* hoặc RAM.
- Mỗi phép tính đơn giản (+, *, -, =, if, call) thực hiện trong 1 đơn vị thời gian (hoặc 1 bước).
- Vòng lặp, hàm, thủ tục: là kết hợp của nhiều phép tính đơn lẻ
- Mỗi bước truy cập bộ nhớ mất 1 đơn vị thời gian
- Luôn có đủ bộ nhớ cần thiết để thực hiện thuật toán
- Đánh giá thời gian thực hiện thuật toán bằng cách đếm số đơn vị thời gian cần.

TỐT NHẤT, TỒI NHẤT VÀ TRUNG BÌNH

- Phân tích thuật toán trong trường hợp tổng quát, với một đầu vào bất kỳ thỏa mãn
- Phân tích trường hợp: tốt nhất, tồi nhất và trung bình



TỐT NHẤT, TỒI NHẤT VÀ TRUNG BÌNH

- Độ phức tạp trong trường hợp tồi nhất (worst-case complexity):** Là số lượng bước **lớn nhất** thuật toán cần thực hiện với bất cứ đầu vào kích thước n nào.
- Độ phức tạp trong trường hợp tốt nhất (best-case complexity):** Là số lượng bước **nhỏ nhất** thuật toán cần thực hiện với bất cứ đầu vào kích thước n nào.
- Độ phức tạp trong trường hợp trung bình (average-case complexity):** Là số lượng bước **trung bình** thuật toán cần thực hiện trên tất cả các trường hợp đầu vào kích thước n .
- Mỗi độ phức tạp là một hàm của **thời gian** và **kích thước** đầu vào

$$T(n) = 120n^3 + 12.4n^2 - 43n\log n + 9n$$

KÝ HIỆU O LỚN

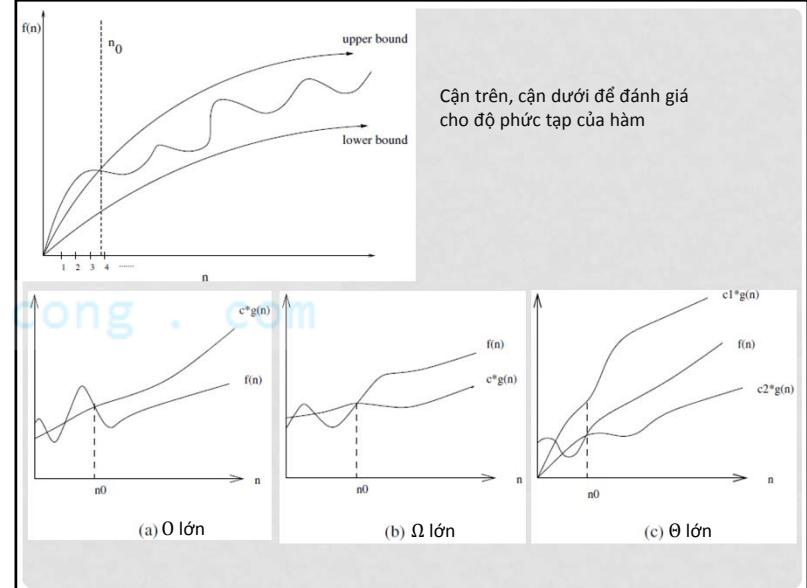
- Khó xác định chính xác các hàm đánh giá độ phức tạp trong trường hợp tốt nhất, tồi nhất, trung bình
 - Có rất nhiều điểm lồi: thời gian thực hiện biến đổi trong một số trường hợp đầu vào đặc biệt. VD tìm kiếm nhị phân nếu đầu vào $n = 2^k - 1$
 - Để chính xác thì cần phân tích rất tì mì.
- Ký hiệu O lớn:** đơn giản phân tích, bỏ qua những thành phần mà không ảnh hưởng đến khi so sánh các thuật toán
Trong phân tích O lớn $f(n) = 2n^2$ và $g(n) = 3n^2 + 5n$ là tương đương
- Các ký hiệu tiệm cận (O, Θ, Ω) dùng để phân tích độ phức tạp trong thực tế

PHÂN TÍCH TIÊM CẬN

Định nghĩa O lớn chính thức:

- $f(n) = O(g(n))$: nghĩa là $c \cdot g(n)$ là giới hạn trên của $f(n)$. Do vậy tồn tại hằng số c sao cho $f(n) \leq c \cdot g(n)$ luôn đúng với mọi $n \geq n_0$
- $f(n) = \Omega(g(n))$: nghĩa là $c \cdot g(n)$ là giới hạn dưới của $f(n)$. Do vậy tồn tại hằng số c sao cho $f(n) \geq c \cdot g(n)$ luôn đúng với mọi $n \geq n_0$
- $f(n) = \Theta(g(n))$: nghĩa là $c_1 \cdot g(n)$ là giới hạn trên, và $c_2 \cdot g(n)$ là giới hạn dưới của $f(n)$. Do vậy tồn tại hằng số c_1 và c_2 sao cho $f(n) \leq c_1 \cdot g(n)$ và $f(n) \geq c_2 \cdot g(n)$ luôn đúng với mọi $n \geq n_0$. Nói cách khác $g(n)$ là giới hạn chặt của $f(n)$

Với c, c_1, c_2 là các hằng số dương không phụ thuộc vào n , và $n_0 > 0$



KÝ HIỆU O LỚN

Ví dụ

- $2n^2 - 4n + 5 = O(n^2)$ vì chọn $c = 2$ thì $2n^2 > 2n^2 - 4n + 5$
- $2n^2 - 4n + 5 = O(n^3)$ vì chọn $c = 1$ thì $n^3 > 2n^2 - 4n + 5$ khi $n > 1$
- $2n^2 - 4n + 5 \neq O(n)$ vì với bất kỳ hằng số c nào thì $cn < 2n^2 - 4n + 5$ khi $n > c$

OMEGA LỚN

- $2n^2 - 4n + 5 = \Omega(n^2)$ vì chọn $c = 1.5$ thì $1.5n^2 < 2n^2 - 4n + 5$ khi $n > 50$
- $2n^2 - 4n + 5 \neq \Omega(n^3)$ vì với bất kỳ giá trị c thì $cn^3 > 2n^2 - 4n + 5$ khi n đủ lớn ($n > 100c$ nếu $c > 1$, $n > 10/c$ nếu $c < 1$)
- $2n^2 - 4n + 5 = \Omega(n)$ vì với bất kỳ hằng số c nào thì $cn < 2n^2 - 4n + 5$ khi $n > 5c$

cuu duong than cong . com

THETA LỚN

- $2n^2 - 4n + 5 = \Theta(n^2)$ vì cả O, Ω đều đúng
- $2n^2 - 4n + 5 \neq \Theta(n^3)$ vì chỉ O đúng
- $2n^2 - 4n + 5 \neq \Theta(n)$ vì chỉ Ω đúng

Để chứng minh $f(n) = \Theta(g(n))$ thì cần chỉ ra

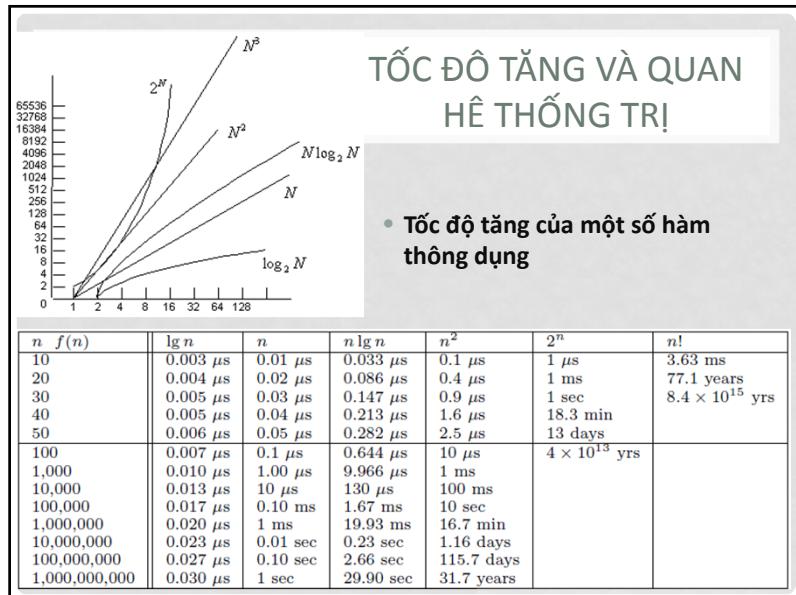
- $f(n) = O(g(n))$
- $f(n) = \Omega(g(n))$



VÍ DỤ

Khẳng định sau đúng hay sai? Tại sao?

- $2^{n+3} = \Theta(2^n)$
- $3^{2n} = \Theta(3^n)$
- $(x + y)^2 = O(x^2 + y^2)$



TỐC ĐỘ TĂNG VÀ QUAN HỆ THỐNG TRỊ

- O lớn nhóm các hàm thành các **lớp hàm**.
 $n + 4$ và $100.3n - 3$ là thuộc lớp hàm $\Theta(n)$
- Hai hàm f, g thuộc hai lớp khác nhau có quan hệ theo các ký hiệu tiệm cận Ω, O khác nhau
- Các lớp hàm thông dụng:
 - Hàm hằng $f(n) = 1$. Thời gian thực hiện là hằng số VD hàm tính tổng 2 số
 - Hàm loga $f(n) = \log n$. VD tìm kiếm nhị phân
 - Hàm tuyến tính $f(n) = n$. VD Tìm giá trị lớn nhất trong dãy số
 - Hàm siêu tuyến tính $f(n) = n \log n$. VD QuickSort, MergeSort
 - Hàm bậc hai $f(n) = n^2$. VD Sắp xếp nổi bọt (bubble sort)
 - Hàm bậc ba $f(n) = n^3$.
 - Hàm mũ $f(n) = c^n$, c là hằng số > 1 .
 - Hàm giai thừa $f(n) = n!$

TỐC ĐỘ TĂNG VÀ QUAN HỆ THỐNG TRỊ

- Quan hệ thống trị:
 $n! \gg c^n \gg n^3 \gg n^2 \gg n \log n \gg n \log n \gg \log n \gg 1$
- Giới hạn và quan hệ thống trị của các hàm
 - $f(n)$ thống trị $g(n)$ nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$

VD.

$$f(n) = n^2 \text{ không thống trị } g(n) = 3n^2 + 5 \text{ vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 3$$

$$f(n) = n^2 \text{ thống trị } g(n) = n^{1.999999} \text{ vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

$$\begin{aligned} n! &\gg c^n \gg n^3 \gg n^2 \gg n^{1+\epsilon} \gg n \log n \gg n \gg \sqrt{n} \gg \log^2 n \\ &\gg \log n \gg \log n / \log \log n \gg \log \log n \gg 1 \end{aligned}$$

CÁC PHÉP TÍNH VỚI O LỚN

- Cộng hai hàm
 - $O(f(n)) + O(g(n)) \rightarrow O(\max(f(n), g(n)))$
 - $\Omega(f(n)) + \Omega(g(n)) \rightarrow \Omega(\max(f(n), g(n)))$
 - $\Theta(f(n)) + \Theta(g(n)) \rightarrow \Theta(\max(f(n), g(n)))$
 - Nhân hàm
 - $O(c \cdot f(n)) \rightarrow O(f(n))$
 - $\Omega(c \cdot f(n)) \rightarrow \Omega(f(n))$
 - $\Theta(c \cdot f(n)) \rightarrow \Theta(f(n))$
- c là một hằng số dương bất kỳ

CÁC PHÉP TÍNH VỚI O LỚN

- Nhân hai hàm

- $O(f(n)) * O(g(n)) \rightarrow O(f(n) * g(n))$
- $\Omega(f(n)) * \Omega(g(n)) \rightarrow \Omega(f(n) * g(n))$
- $\Theta(f(n)) * \Theta(g(n)) \rightarrow \Theta(f(n) * g(n))$

MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Tính truyền ứng – transitivity

- Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(h(n))$ thì $f(n) = O(h(n))$
- Nếu $f(n) = \Omega(g(n))$ và $g(n) = \Omega(h(n))$ thì $f(n) = \Omega(h(n))$
- Nếu $f(n) = \Theta(g(n))$ và $g(n) = \Theta(h(n))$ thì $f(n) = \Theta(h(n))$

Tính đối xứng – symmetry

- $f(n) = \Theta(g(n))$ khi và chỉ khi $g(n) = \Theta(f(n))$

Tính đối xứng chuyển vị - transpose symmetry

- $f(n) = O(g(n))$ khi và chỉ khi $g(n) = \Omega(f(n))$

MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Chứng minh

Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(h(n))$ thì $f(n) = O(h(n))$

Ta có

- $f(n) = O(g(n))$ tức là $f(n) \leq c_1 g(n)$ với $n > n_1$
- $g(n) = O(h(n))$ tức là $g(n) \leq c_2 h(n)$ với $n > n_2$

Suy ra

- $f(n) \leq c_1 g(n) \leq c_1 c_2 h(n)$ với $n > \max(n_1, n_2)$

Chọn $c_3 = c_1 c_2$ và $n_3 = \max(n_1, n_2)$ thì $f(n) \leq c_3 h(n)$ khi $n > n_3$

Vậy $f(n) = O(h(n))$

MỘT SỐ VÍ DỤ

Thuật toán sắp xếp lựa chọn – Selection Sort

```
selection_sort(int s[], int n)
{
    int i,j; /* counters */
    int min; /* index of minimum */
    for (i=0; i<n; i++) {
        min=i;
        for (j=i+1; j<n; j++)
            if (s[j] < s[min]) min=j;
        swap(&s[i],&s[min]);
    }
}
```

MỘT SỐ VÍ DỤ

- Lệnh được lặp lại nhiều nhất chính là lệnh if

Phân tích trong trường hợp tồi nhất

- Vòng lặp ngoài lặp n lần (từ 0 tới n-1)
- Vòng lặp trong lặp n lần ứng với mỗi lần lặp của vòng ngoài
- Vậy số lượng bước (thời gian) cần thực hiện trong trường hợp tồi nhất là $n \times n \rightarrow O(n^2)$

MỘT SỐ VÍ DỤ

Phân tích chi tiết hơn

- $i = 0$ lệnh if lặp $n - 2$ lần (từ 1 tới n-1)
- $i = 1$ lệnh if lặp $n - 3$ lần (từ 2 tới n-1)
...
- $i = n - 2$ lệnh if lặp 1 lần (từ n-1 tới n-1)
- $i = n - 1$ lệnh if lặp 0 lần
- Số lần lặp của if sẽ là

$$T(n) = (n - 2) + (n - 3) + \dots + 1 + 0 = (n - 2)(n - 1)/2$$
- Vậy $T(n) = \Theta(n^2)$

cuu duong than cong . com

MỘT SỐ VÍ DỤ

- Sắp xếp chèn – Insertion Sort

```
for (i=1; i<n; i++) {
    j=i;
    while ((j>0) && (s[j] < s[j-1])) {
        swap(&s[j],&s[j-1]);
        j = j-1;
    }
}
```

- Lệnh được lặp nhiều nhất là 2 lệnh bên trong while : lệnh cơ sở

MỘT SỐ VÍ DỤ

Phân tích trong trường hợp tồi nhất

- $i = 1$ lệnh cơ sở lặp 1 lần
- $i = 2$ lệnh cơ sở lặp 2 lần
...
- $i = n - 2$ lệnh cơ sở lặp $n - 2$ lần
- $i = n - 1$ lệnh cơ sở lặp $n - 1$ lần
- Số lần lặp của lệnh cơ sở sẽ là

$$T(n) = 1 + 2 + \dots + (n - 2) + (n - 1) = (n - 1)n/2$$
- Vậy $T(n) = O(n^2)$

Một số công thức hay dùng

- $\sum_{a=1}^b 1 = b - a + 1$
- $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{j=i}^n j = i + (i+1) + \dots + n = \sum_{i=1}^n i - \sum_{j=1}^{i-1} j = \frac{(n^2+n-i^2+i)}{2}$
- $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n^3+3n^2+n)}{6}$
- $a^0 + a^1 + \dots + a^n = \frac{(a^{n+1}-1)}{(a-1)}$ với $a \neq 1$
- $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ nếu $|x| < 1$
- $\sum_{i=1}^n i c^i = c + 2c^2 + \dots + nc^n = \frac{(n-1)c^{n+1}-nc^n+c}{(c-1)^2}$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com