华中科技大学

人工智能与自动化学院

控制理论综合实验报告

实验项目：实验二、三

实验名称：二阶系统和高阶系统的动态性和稳态性

实验时间：2025/4/1 星期二

实验人员 1：

专业班级：人工智能 2304 班

学　　号：U202315285

姓　　名：许睿廷

实验人员 2：

专业班级：人工智能 2304 班

学　　号：U202315265

姓　　名：杜辰宇

一、实验目的

1、掌握二阶系统性能指标的测试技术；

2、研究二阶系统的阻尼比ζ 和无阻尼自振荡频率 ω 对系统动态性能的影响；

3、分析系统在不同输入信号作用下的稳态误差；

4、观察系统稳定和不稳定的运行状态，研究开环放大系数及时间常数对系统稳定性的影响。

二、实验设备

1、STAR ACT 教学模拟机

2、数字示波器

三、实验原理

本实验分成两部分：对二阶系统在不同反馈下的瞬态响应和稳态响应的测量和分析；观察0型系统、I型系统和II型系统在在不同放大系数和输入信号下稳态误差的变化。

下面列出了每个环节的实验原理图（并在每一个电路后面连接了一个反相器），并依据结构图求出对应传递函数，进行相关性能分析。

3.1、二阶系统的瞬态响应

实验原理图如图 3.1 所示。

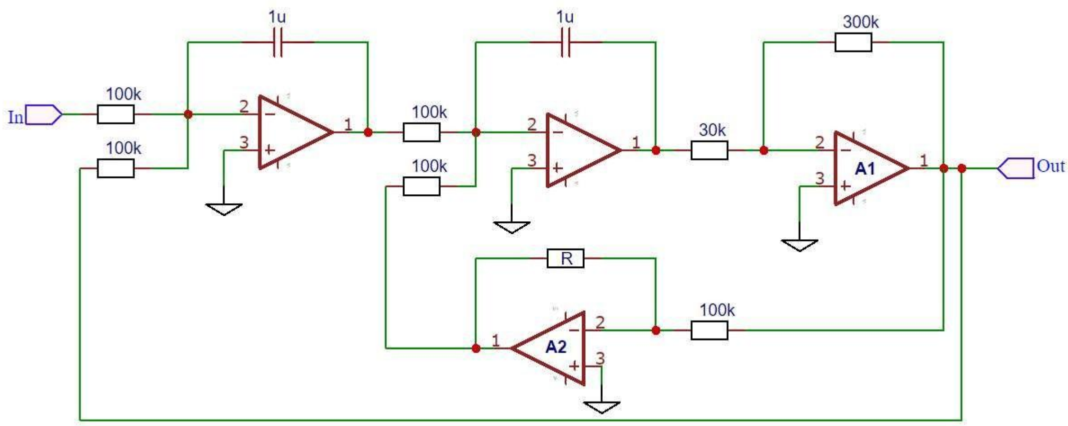


图 3.1 二阶系统原理图

由实验一中的结果可以得到：

积分环节的传递函数：$G(s)=\frac{U_C(s)}{U_R(s)}=-\frac{1}{R_0Cs}$

比例环节的传递函数：$G(s)=\frac{U_C(s)}{U_R(s)}=-\frac{R_1}{R_0}$

前向通路中有两个积分环节，一个比例环节，计算得到各自的传递函数分别为$-\frac{1}{0.1s}$、$-\frac{1}{0.1s}$、-10。

回路中有一个比例环节，计算得到传递函数为$-\frac{R}{100}k\Omega$，设$\alpha = R/100k\Omega$,传递函数化简为$-\alpha$。画出结构图如图 3.2，并计算最终的闭环传递函数为

$$G_B(s) = -\frac{-\frac{1}{0.1s}\cdot\left(\frac{\frac{1}{0.1s}\cdot 10}{1+\frac{1}{0.1s}\cdot 10\cdot\alpha}\right)}{1+\frac{1}{0.1s}\cdot\left(\frac{\frac{1}{0.1s}\cdot 10}{1+\frac{1}{0.1s}\cdot 10\cdot\alpha}\right)} = \frac{1000}{s^2+100\alpha s+1000}$$

对比二阶系统标准形式，可以求得：

$$\omega_n^2 = 1000\text{，}\zeta = \frac{\sqrt{10}}{2}\alpha \approx \frac{\alpha}{0.63}$$

当 $0 < \alpha < 0.63$，即$R<63\ k\Omega$时，$0 < \zeta < 1$，系统为欠阻尼状态，有振荡，且R越小，振荡越明显。相应瞬态指标的计算和分析如下：

（1）超调量$\sigma\%$：仅随ζ的增大而减小，与ω_n无关。

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%$$

（2）峰值时间t_p：随ω_n增大而增大（本实验中不变）、ζ的减小而减小。

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

（3）调整时间t_s：随$\zeta\omega_n$增大而减小。

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}\ （2\%）$$

当$\alpha = 0.63$，即$R = 63\ k\Omega$时，$\zeta = 1$，系统为临界阻尼状态，无超调，也无振荡。

当$\alpha > 0.63$，即$R > 63\ k\Omega$时，$\zeta > 1$，系统为过阻尼状态，无超调，也无振荡。

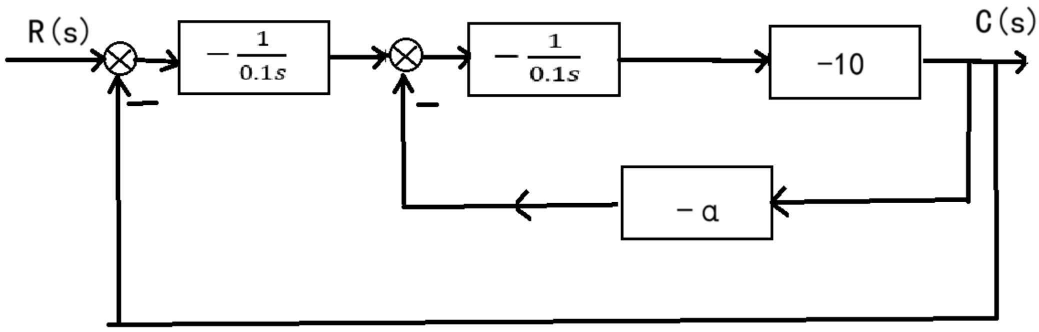


图 3.2 二阶系统结构图

3.2、 稳态响应

分 0 型，I型，II型系统进行讨论。令K = R/100 kΩ。

3.2.1、 0 型系统

原理图如图 3.3 所示。

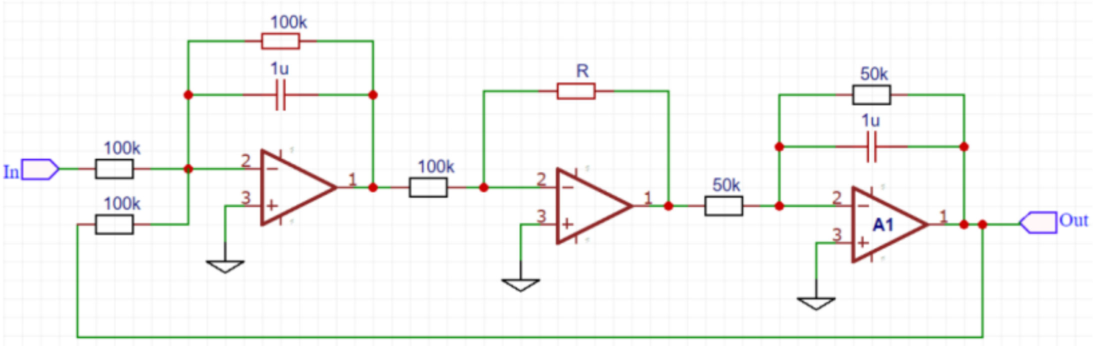


图 3.3 0 型系统原理图

由实验一中的结果可以得到：

惯性环节的传递函数：

$$G(s)=\frac{U_C(s)}{U_R(s)}=-\frac{R_1}{R_0(1+R_1Cs)}$$

比例环节的传递函数：

$$G(s)=\frac{U_C(s)}{U_R(s)}=-\frac{R_1}{R_0}$$

前向通路中有两个惯性环节，一个比例环节，计算得到各自的传递函数分别为$-\frac{1}{1+0.1s}$、$-\frac{1}{1+0.05s}$、−K。进而得到开环传递函数为：

$$G_K(s)=\frac{1}{1+0.1s}\cdot K\cdot\frac{1}{1+0.05s}=\frac{K}{(0.1s+1)(0.05s+1)}$$

如图 3.4 所示，误差的定义为参考输入信号和反馈信号的差值：

$$e_{ss}=e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}[r(t)-b(t)]$$

利用拉氏变换的终值定理，我们可以得到稳态误差的计算式：

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

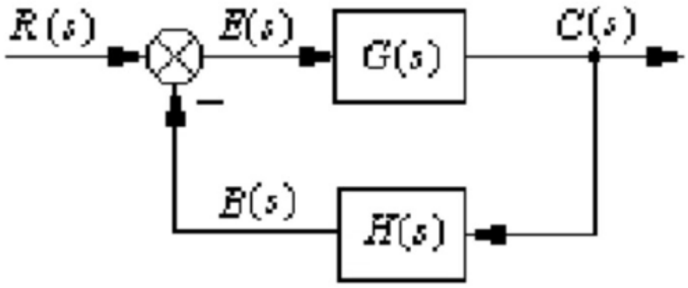


图 3.4 计算稳态误差系统结构图

带入 0 型系统的开环传递函数，我们可以得到单位阶跃输入的稳态误差为

$$e_{ss0} = \frac{1}{1+K}$$

随K增大，e_{ss0}减小，而单位斜坡输入的稳态误差为

$$e_{ss0} = \infty$$

3.2.2、I型系统

原理图如图 3.5 所示。

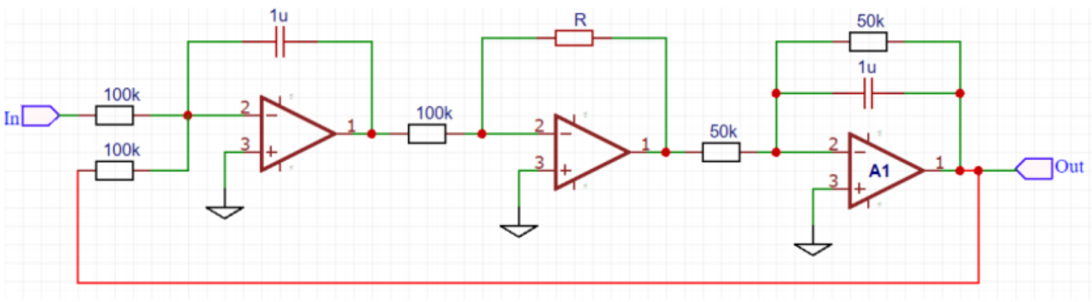


图 3.5 I型系统原理图

由实验一中的结果可以得到：

积分环节的传递函数：

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{U_R(s)} = -\frac{1}{R_0 Cs}$$

比例环节的传递函数：

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{U_R(s)} = -\frac{R_1}{R_0}$$

惯性环节的传递函数：

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{U_R(s)} = -\frac{R_1}{R_0(1 + R_1 Cs)}$$

I型系统前向通路中有一个积分环节、一个比例环节、一个惯性环节，计算得到各自的传递函数分别为$-\frac{1}{0.1s}$、$-\mathrm{K}$、$-\frac{1}{1+0.05s}$。进而得到开环传递函数为：

$$G_K(s)=\frac{1}{0.1s}\cdot K\cdot\frac{1}{1+0.05s}=\frac{10K}{s(0.05s+1)}$$

按照 0 型系统中的运算，我们可以得到单位阶跃输入下的稳态误差为

$$e_{ss1}=0$$

，单位斜坡输入下的稳态误差为

$$e_{ss1}=\frac{1}{10K}$$

随着开环放大系数K的增大，稳态误差 不断减小。

3.2.3、II型系统

原理图如图 3.6 所示。

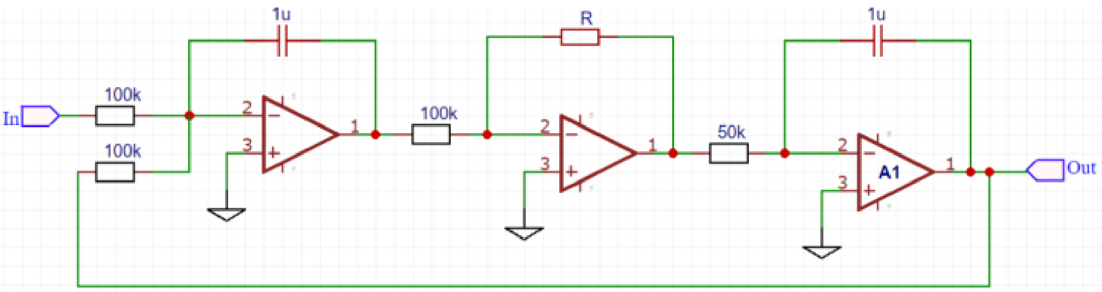


图 3.6 II型系统原理图

由实验一中的结果可以得到：

积分环节的传递函数：

$$G(s)=\frac{U_C(s)}{U_R(s)}=-\frac{1}{R_0Cs}$$

比例环节的传递函数：

$$G(s)=\frac{U_C(s)}{U_R(s)}=-\frac{R_1}{R_0}$$

I型系统前向通路中有两个积分环节、一个比例环节计算得到各自的传递函数分别为$-\frac{1}{0.1s}$、$-K$、$-\frac{1}{0.05s}$。进而得到开环传递函数为：

$$G_K(s)=\frac{1}{0.1s}\cdot K\cdot\frac{1}{0.05s}=\frac{K}{0.005s^2}$$

按照 0 型系统中的运算，单位阶跃输入和单位斜坡输入的稳态误差均$e_{ss}=0$，但计算得到其闭环传递函数为$G_B(s)=\frac{K}{0.005s^2+K}$, 我们发现此时特征根为一对共轭纯虚根$s_{1,2}=\pm j\sqrt{200K}$，系统不稳定。

四、实验内容与步骤

1.断开电源，按参考电路组成二阶系统；

2.检查连线，确诊无误后闭合电源，使K= 10（A1 放大器的放大系数），并保持输入矩形波幅值不变，依照要求逐次改变$\alpha=R/100\ k\Omega$，记录σ%，tp，ts数据（注意：α = 0 情况下的意思是内反馈不接入电路）。

3. 断开电源依次按参考电路组成 0 型，I型，II型系统（R使用D5 区阻容元件，$R \geqslant 100\ k\Omega$）。

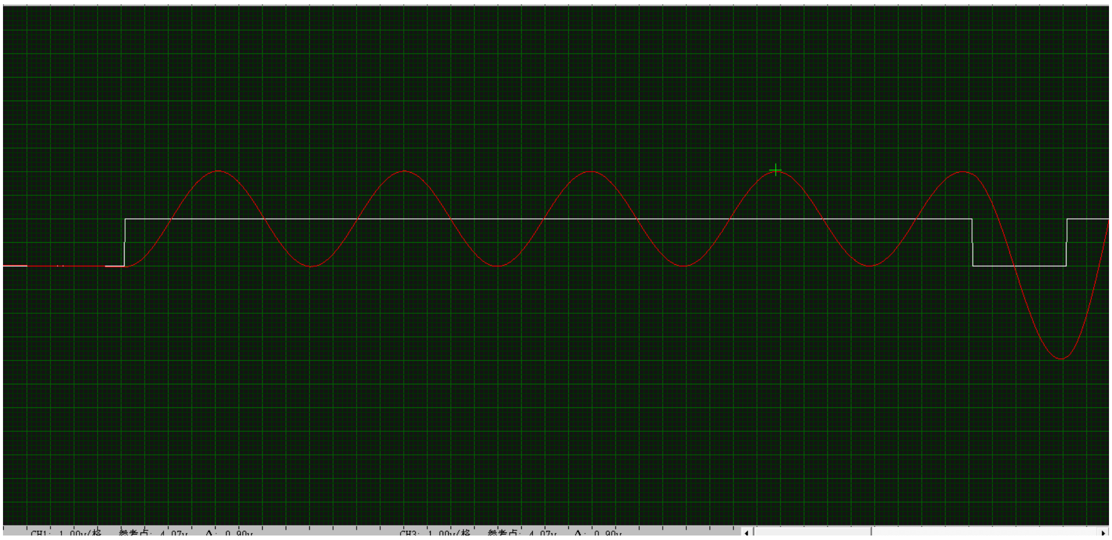
4.分别改变 0，I型系统的放大系数（即改变电位器的电阻值），观察 0、I、II型系统在阶跃信号和斜坡信号输入时的稳态误差有何变化，并记录在表中。

五、实验结果和分析

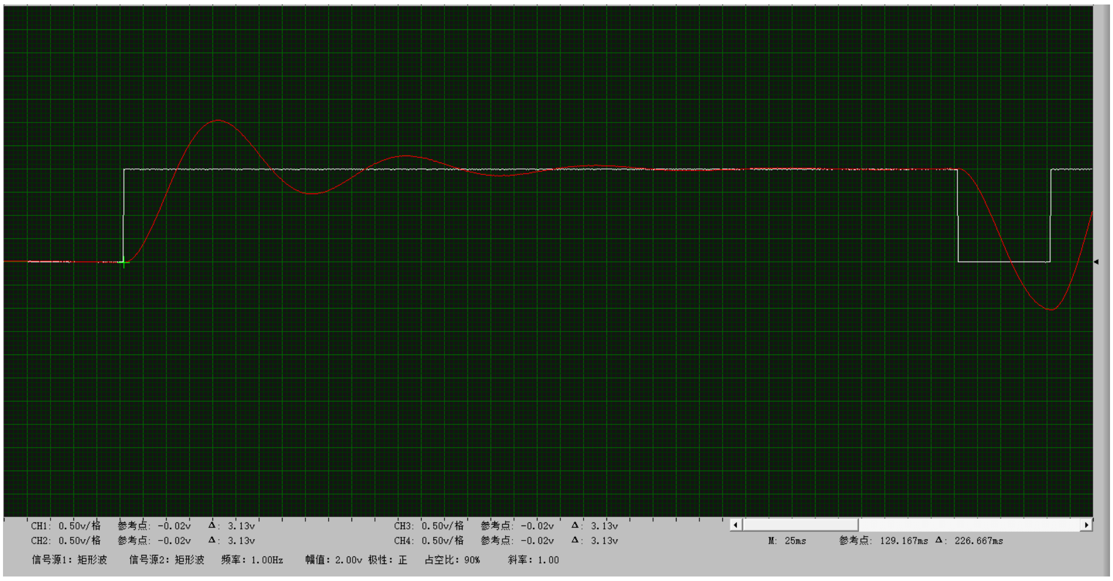
给出不同环节的输入（白色）、输出（红色）波形。

5.1、二阶系统的瞬态响应

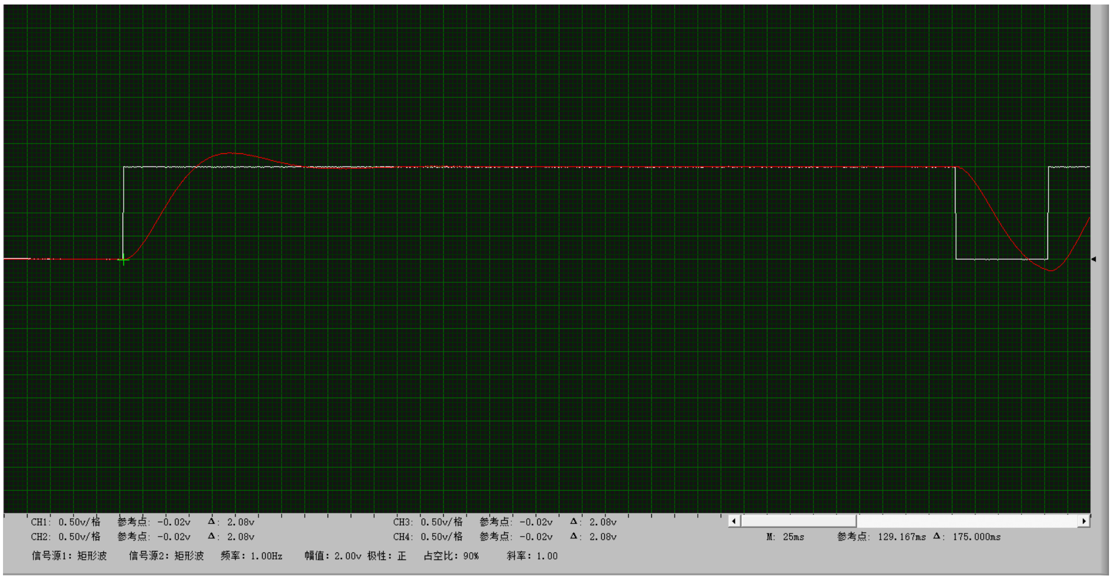
α变化时，输出波形如图 5.1 所示。



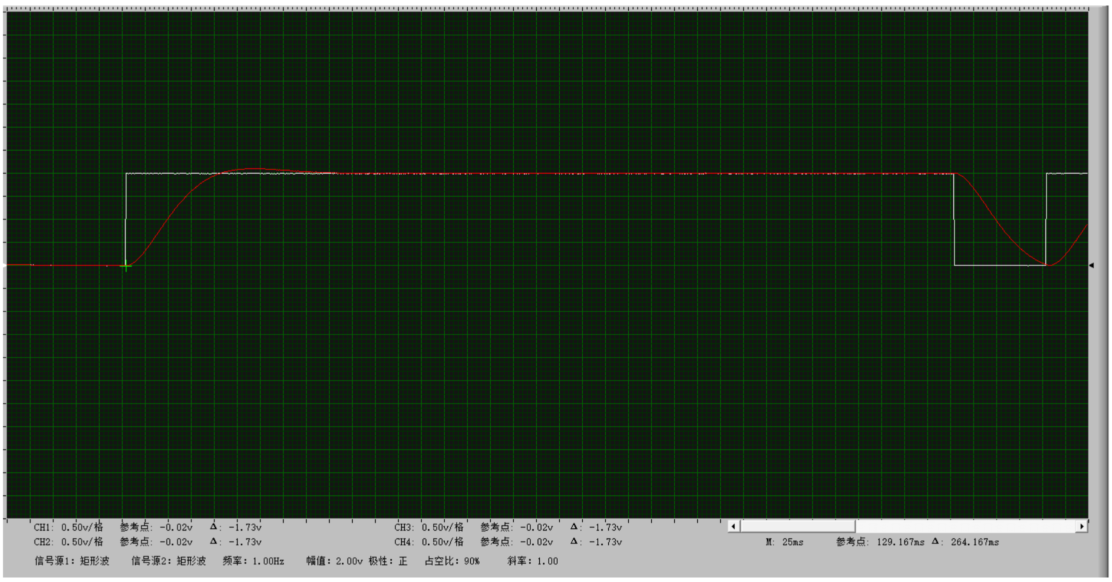
（a）α=0



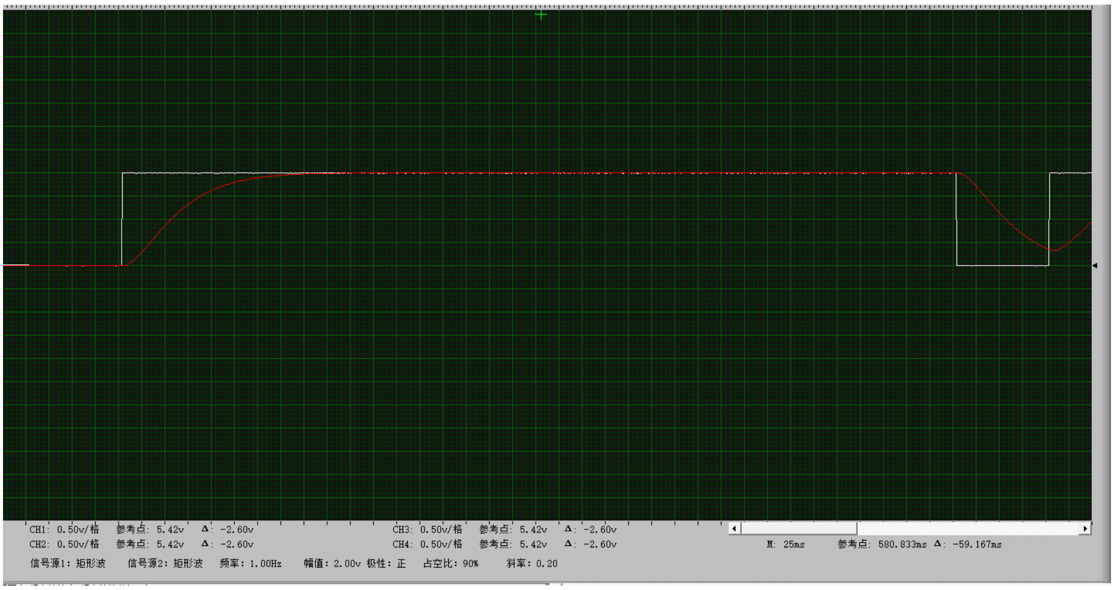
（b）α=0.13



（c）α=0.33



（d）α=0.44



（e）α=0.63

图 5.1 二阶系统瞬态响应曲线

由图可测得系统瞬态响应的相关指标，并与计算出来的结果一并列在表 5.1 中。

表 5.1 二阶系统瞬态响应指标测量

α		ω_n	ζ	ω_d	$\sigma\%$	t_p/ms	t_s/ms
0	计算值	31.632	0	31.632	/	/	/
	实验值	/		/			
0.13	计算值	31.632	0.206	30.945	51.62	101.52	461.54
	实验值	/	/	/	48.5	100.00	352.10
0.33	计算值	31.632	0.524	26.934	14.47	116.64	181.82
	实验值	/	/	/	15.20	110.0	175.00
0.44	计算值	31.632	0.698	22.645	4.68	138.73	136.36
	实验值	/	/	/	6.0	135.8	164.1
0.63	计算值	/	1	0	0	/	/
	实验值	/	/	/	0	/	152

误差分析：

当α=0.13时，

超调量σ的误差：$\frac{|\sigma_{实验值}-\sigma_{计算值}|}{\sigma_{计算值}} * 100\% = 6.0\%$;

峰值时间t_P的误差：$\frac{|t_{P实验值}-t_{P计算值}|}{t_{P计算值}}*100\%=1.5\%$；

调节时间t_s的误差：$\frac{|t_{s实验值}-t_{s计算值}|}{t_{s计算值}}*100\%=23.7\%$，

其中，调节时间的误差较大。

当α=0.33时，

超调量σ的误差：$\frac{|\sigma_{实验值}-\sigma_{计算值}|}{\sigma_{计算值}}*100\%=5.0\%$；

峰值时间t_P的误差：$\frac{|t_{P实验值}-t_{P计算值}|}{t_{P计算值}}*100\%=5.7\%$；

调节时间t_s的误差：$\frac{|t_{s实验值}-t_{s计算值}|}{t_{s计算值}}*100\%=3.7\%$，

其中，三项指标的误差均在5%左右。

当α=0.44时，

超调量σ的误差：$\frac{|\sigma_{实验值}-\sigma_{计算值}|}{\sigma_{计算值}}*100\%=28.2\%$；

峰值时间t_P的误差：$\frac{|t_{P实验值}-t_{P计算值}|}{t_{P计算值}}*100\%=2.1\%$；

调节时间t_s的误差：$\frac{|t_{s实验值}-t_{s计算值}|}{t_{s计算值}}*100\%=20.3\%$，

其中，超调量和调节时间的误差均很大。

分析可知，随着α值的增大，超调现象愈发的不明显同时，超调量的误差越大。这是由于理论值的减小下，测量所产生的误差相近下，权重会增加。针对调节时间的误差一直很大的情况进行分析，可能是由于电路连接中所用的原件与标识的大小不符，或者接线不良，导致误差一直很大。

实验结果分析：

通过图示可以观察到系统瞬态响应的相关指标。当自然频率ω_n保持不变时，α的增大仅仅带动阻尼比 ξ 的增大。随着阻尼比 ξ 的逐渐增大，系统从无阻尼状态逐渐过渡到欠阻尼、临界阻尼，最终进入过阻尼状态。随着阻尼比 ξ 的增大，系统响应的振荡现象逐渐减弱：当 α=0.13 时，响应曲线（b）表现出明显的振荡；而随着 α 的进一步增大，响应曲线（c）和（d）的振荡现象逐渐减弱直至消失。同时，根据定义，超调量 σ 随 ξ 的增大而减小，峰值时间 tp 随 ξ 的增大而增大，而调节时间 ts 则随 ξ 的增大而减小。

无阻尼状态（ξ=0）

当 ξ=0 时，系统处于无阻尼状态。此时系统的输出响应表现为无阻尼的等幅振荡，振荡频率为 ω_n。由于振幅恒定，系统无法收敛到稳态值，因此在这种情况下没有稳态性能指标。

欠阻尼状态（0<ξ<1）

当 0<α<0.63 时，系统处于欠阻尼状态。根据超调量 σ、峰值时间 t_p 和调节时间 t_s 的定义，可以推导出以下关系：

超调量 σ：仅与阻尼比 ξ 有关，α 越大，ξ 越大，超调量σ越小。

峰值时间 t_p：根据所学公式有$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$。因此峰值时间$t_p$与阻尼振荡频率成反比。当$\omega_n$固定时，α 越大，ξ 越大，$\omega_d$ 越大，峰值时间t_p越短。

调节时间 t_s：定义为响应曲线从零开始进入稳态值 ±5% 误差带所需的时间。通过输出响应方程可得：

$$t_s = -\frac{1}{\zeta\omega_n}\ln(0.05\sqrt{1-\zeta^2})$$

当 0<ξ<0.9 时，可近似为 $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$（5%）。因此，$t_s$与 ξ 成反比，α 越大，ξ 越大，调节时间 t_s 越短。

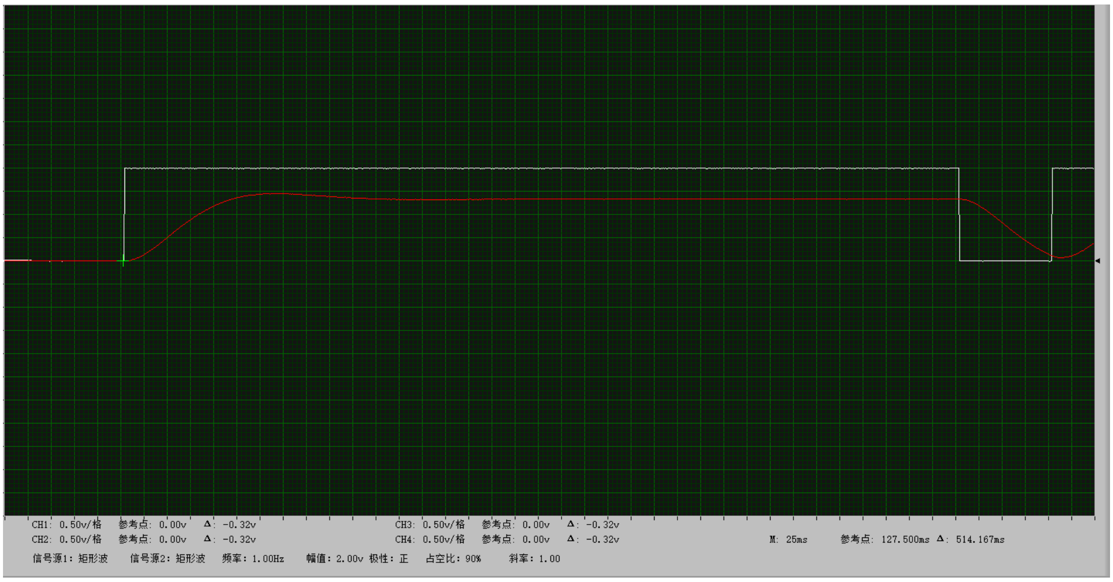
临界阻尼状态（ξ=1）

当 α=0.63 时，阻尼比 ξ=1，系统处于临界阻尼状态。此时系统的输出响应无超调、无振荡，表现为从零开始的单调上升过程，最终收敛到稳态值 1，且不存在稳态误差。由于临界阻尼状态下系统无振荡，无法分析。

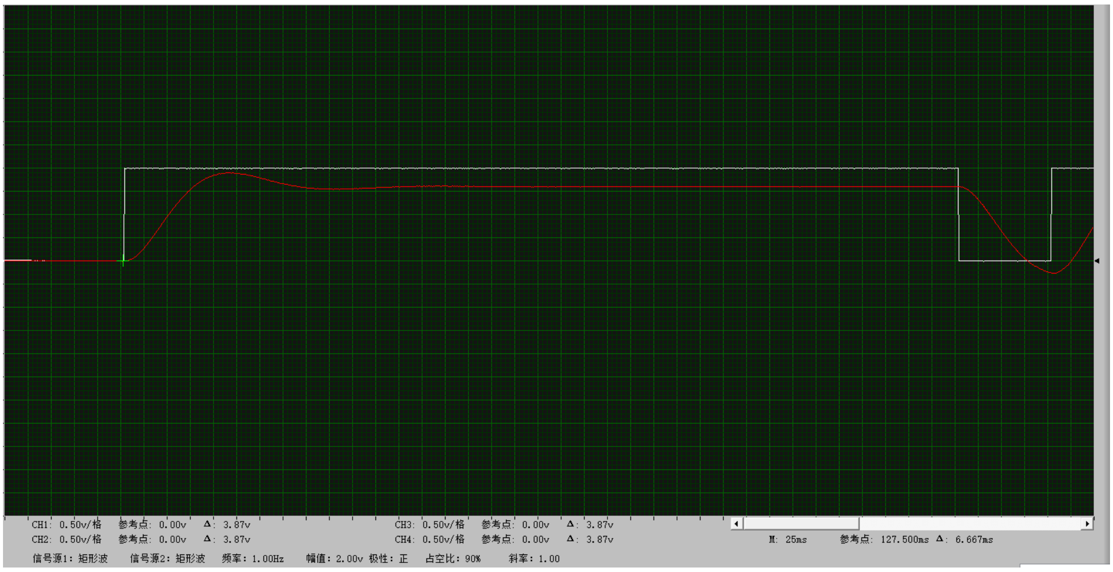
5.2、 稳态响应

测量出三种系统对阶跃、斜坡输入信号的输出波形。阶跃信号输入的幅值为 $2V$。

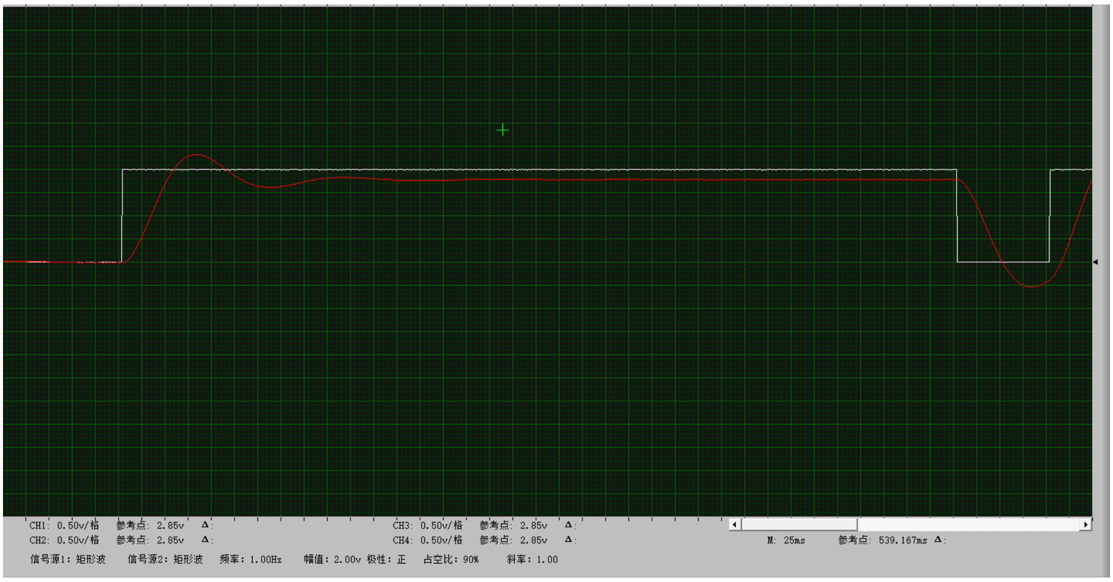
➢ **0 型系统**。改变R及输入时，波形如图 5.2 所示。



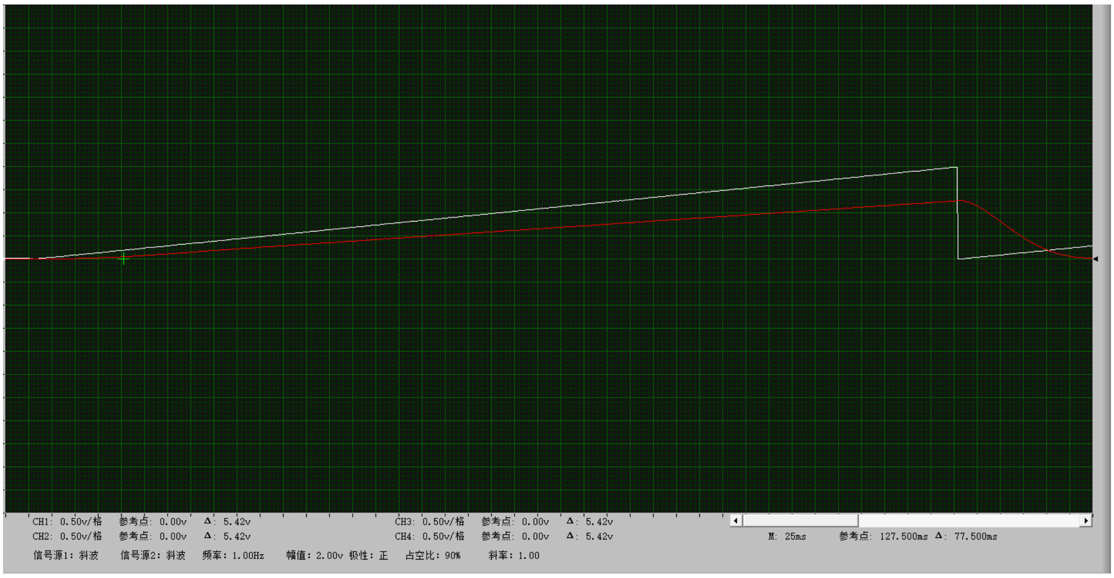
（a）阶跃输入 ，R = 200 $k\Omega$



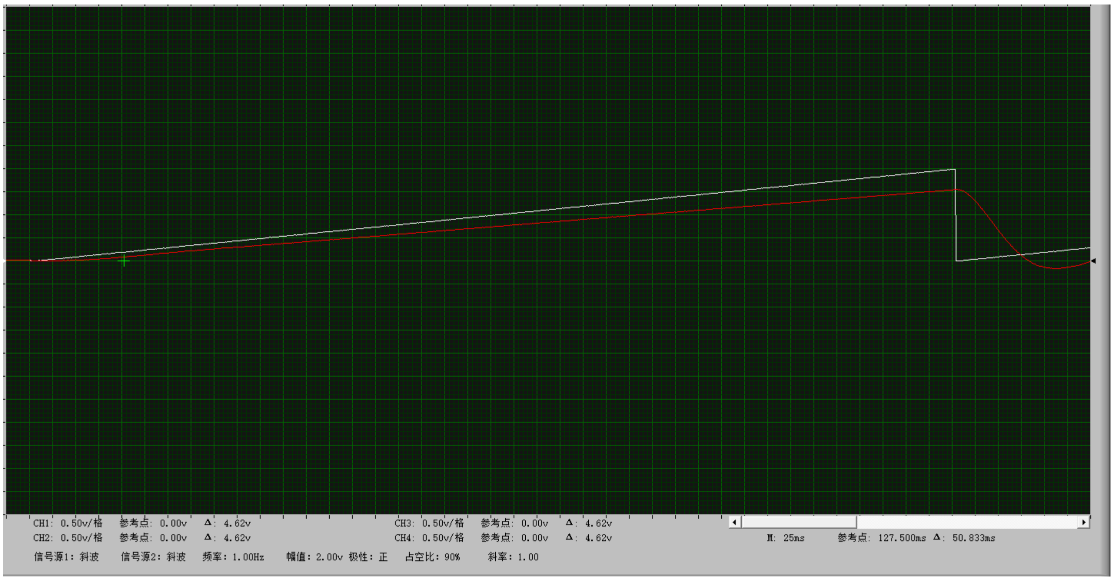
（b）阶跃输入 ，R = 400 $k\Omega$



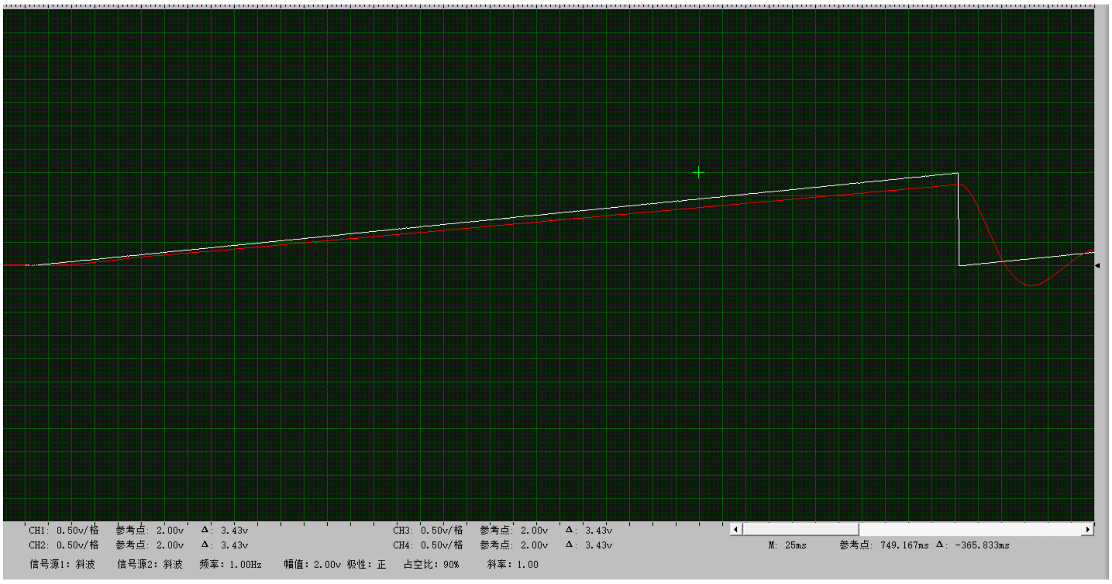
（c）阶跃输入 ，R = 800 $k\Omega$



（d）斜坡输入 ，R = 200 $k\Omega$



（e）斜坡输入 ，R = 400 $k\Omega$



（f）斜坡输入 ，R = 800 $k\Omega$

图 5.2 0 型系统稳态曲线

记录0型系统下的数据如下表所示：

表 5.2 0 型系统稳态误差e_{ss0}

R（$k\Omega$）	开环放大系数 K	阶跃输入稳态误差		斜坡输入稳态误差	
		测量值	理论值	测量值	理论值
200	2	0.7	0.67	∞	∞
400	4	0.4	0.2	∞	∞
800	8	0.22	0.111	∞	∞

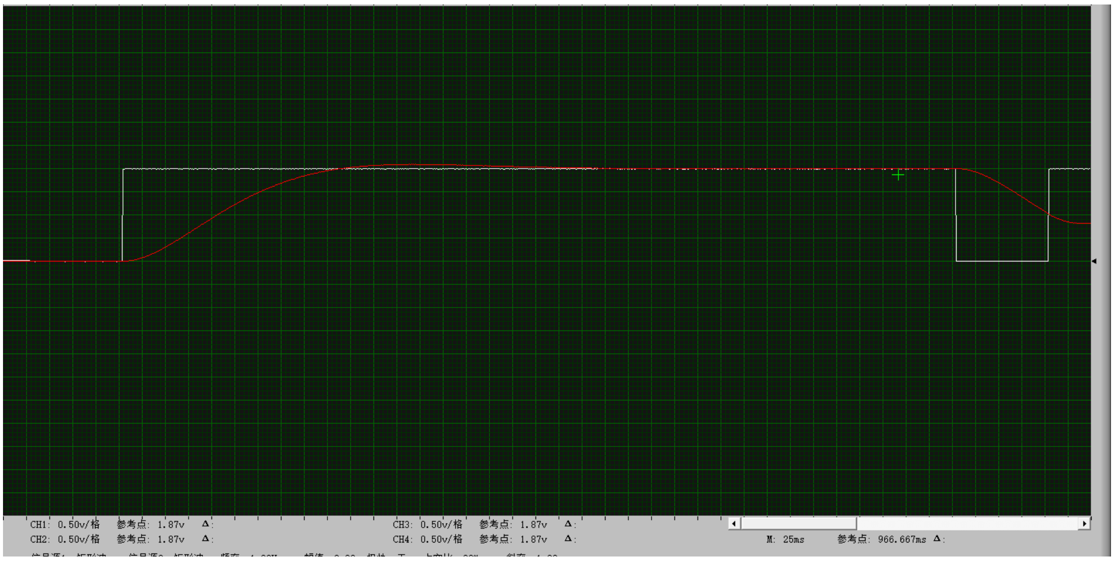
实验现象：

图 5.2 展示了 0 型系统在不同开环放大系数 K 和两种输入方式（阶跃输入和斜坡输入）下的响应波形。从图中可以看出：

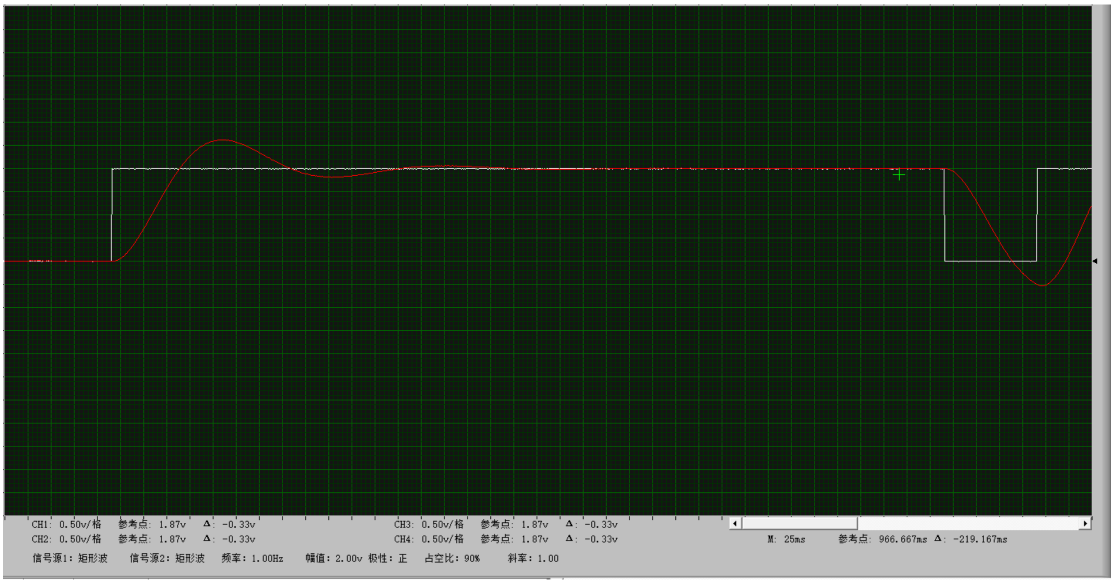
当输入信号是阶跃信号时，系统的稳态误差会随着 K 的增大而逐渐减小。这说明适当提高 K 值确实能在一定程度上改善系统的稳态性能，然而当输入信号是斜坡信号时，即使 K 不断增大，系统的稳态误差仍然保持无穷大。这表明，仅靠增大 K 值无法彻底解决稳态误差的问题。因此想要减小稳态误差，必须通过增加系统的积分环节来实现。

➢ ***I*型系统**

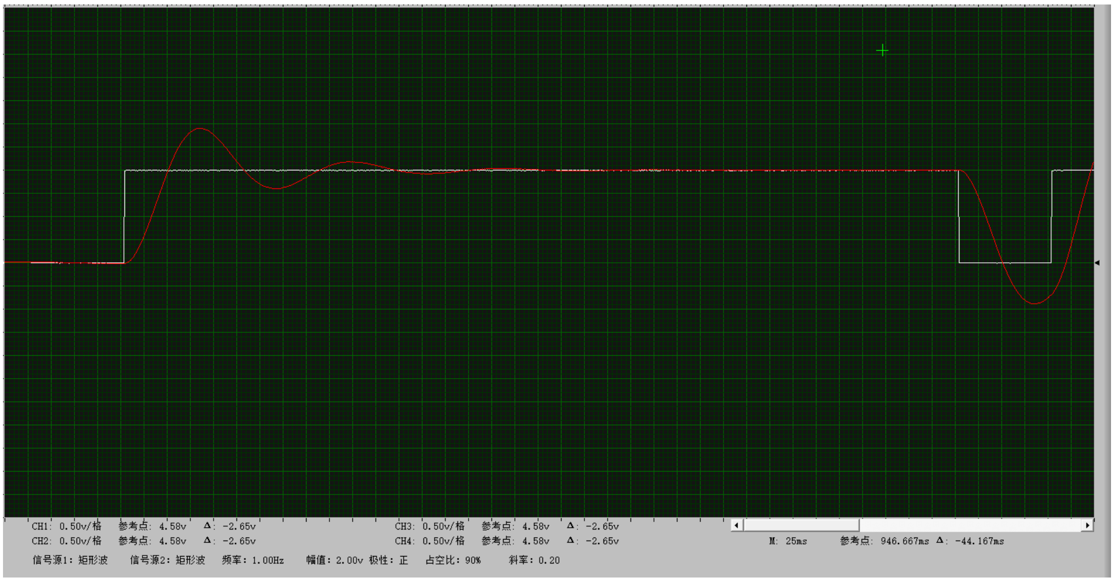
改变R及输入时，波形如图 5.3 所示。



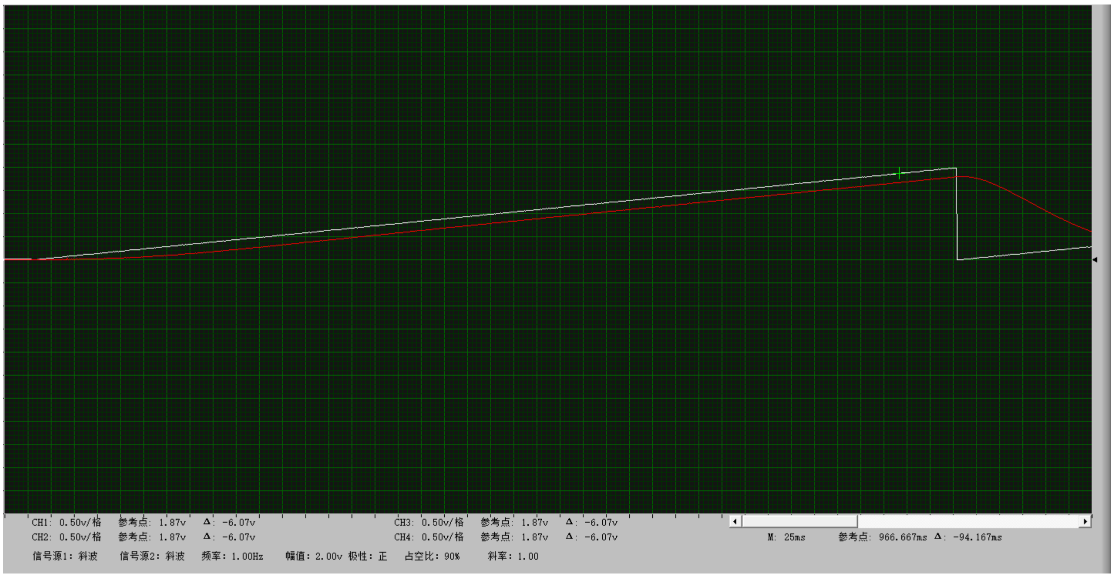
（a）阶跃输入 ，R = 100 $k\Omega$



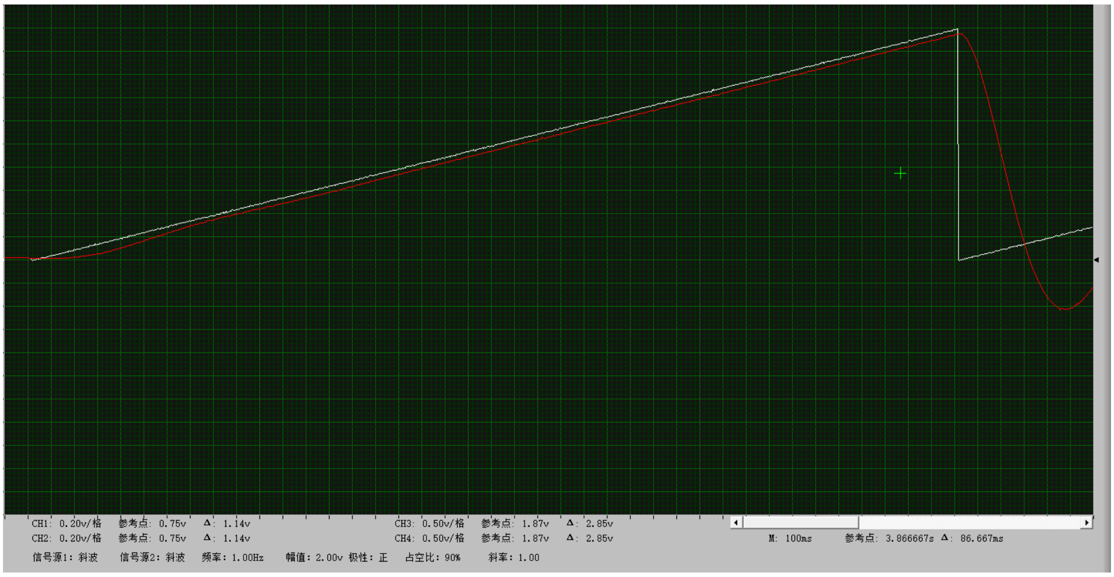
（b）阶跃输入 ，R = 400 $k\Omega$



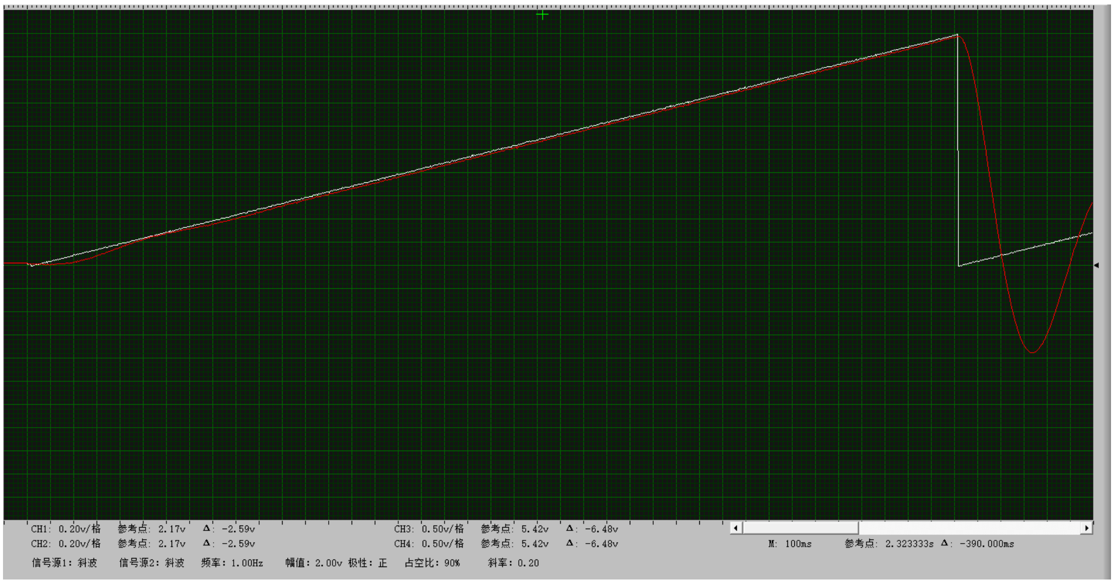
（c）阶跃输入 ，R = 800 $k\Omega$



（d）斜坡输入 ，R = 100 $k\Omega$



（e）斜坡输入 ，R = 400 $k\Omega$



（f）斜坡输入 ，R = 800 $k\Omega$

图 5.3 I型系统稳态曲线

记录I型系统下的数据如下表所示：

表 5.3 I 型系统稳态误差e_{ss0}

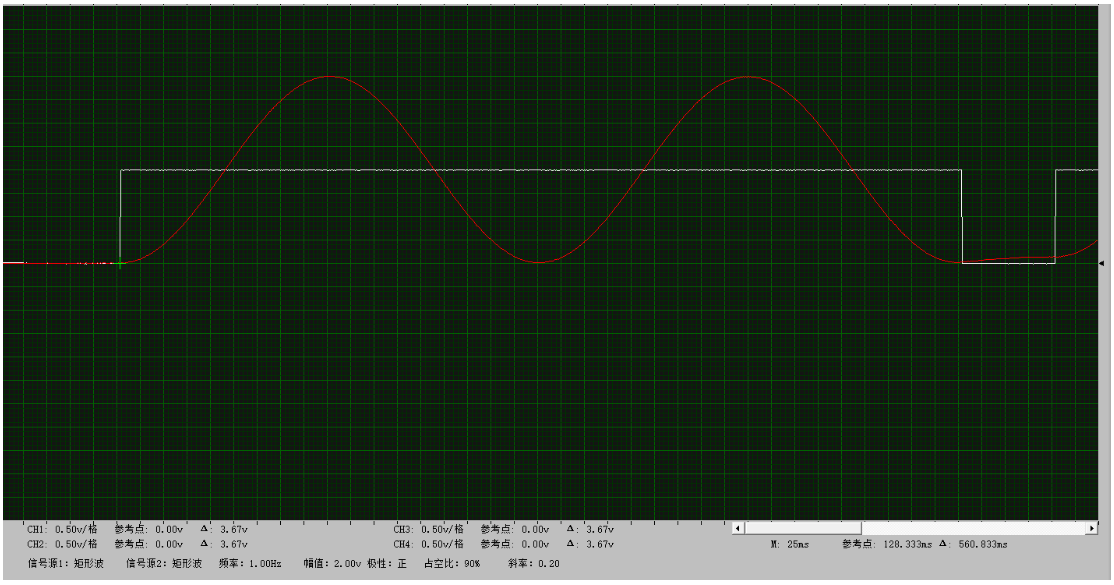
R（$k\Omega$）	开环放大系数 K	阶跃输入稳态误差		斜坡输入稳态误差	
		测量值	理论值	测量值	理论值
200	2	0	0	0.22	0.05
400	4	0	0	0.15	0.025
800	8	0	0	0.07	0.0125

1 型系统在不同开环放大系数 K 和两种输入方式（阶跃输入和斜坡输入）下的响应波形。从图中可以观察到以下现象：

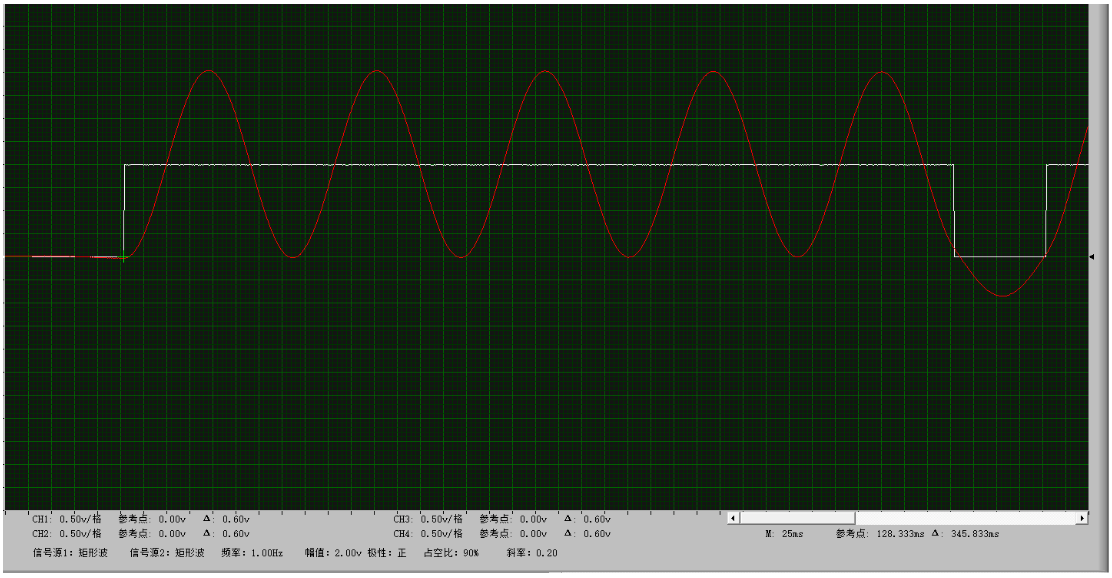
当输入信号为阶跃信号时，系统的稳态误差为零。这表明通过增加系统的积分环节，稳态性能得到了显著改善。但当输入信号为斜坡信号时，随着开环放大系数 K 的增加，稳态误差有所减小，但减小的幅度相对较小。这说明虽然增大 K 值可以在一定程度上改善稳态性能，但其效果有限。

- ***II*型系统**

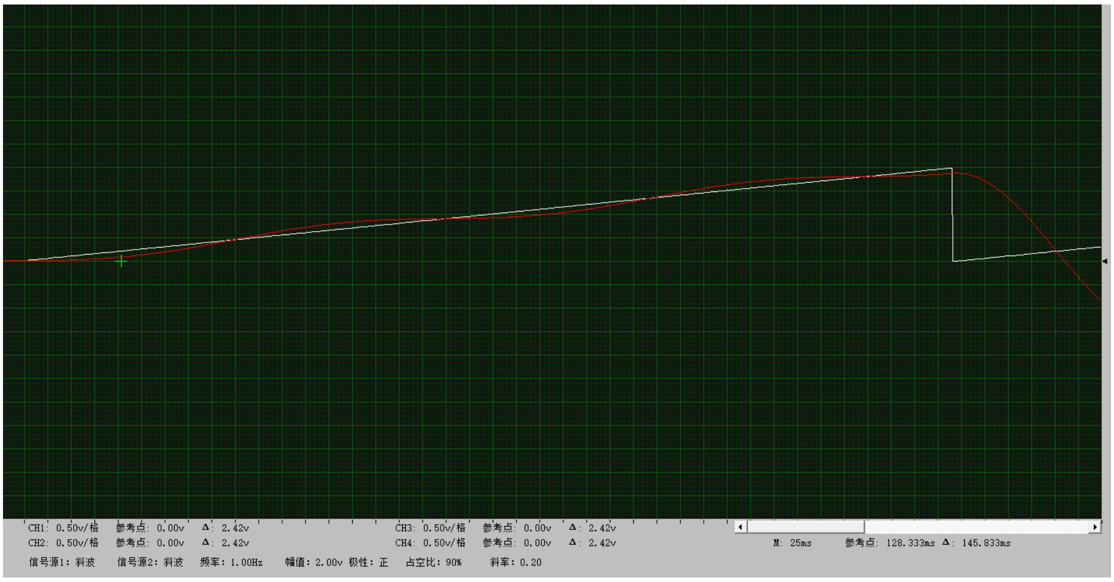
改变R及输入时，波形如图 5.4 所示。



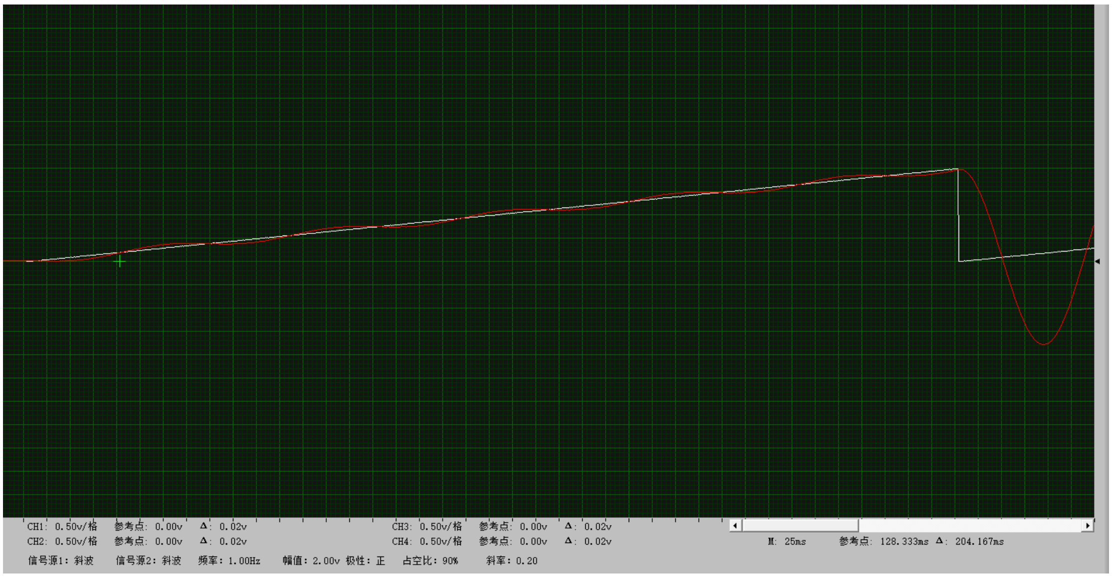
（a）阶跃输入，R=100 $k\Omega$



（b）阶跃输入，R=600 $k\Omega$



（c）斜坡输入，R=100 $k\Omega$



（d）斜坡输入，R=600 $k\Omega$

图 5.4 II型系统稳态曲线

二型系统是一个不稳定系统，由图像可知，在阶跃信号下，二型系统的输出响应为等幅振荡曲线，因此一味地增加积分环节为使得稳态误差减小会使系统变得不稳定，是不可行的。

综上，0 型系统在阶跃输入下，稳态误差由公式$e_{ss}=\frac{1}{1+K}$决定，其中 K 是开环放大系数。稳态误差与 K 成反比，K 越大，误差越小，但由于系统中没有积分环节，误差无法完全消除。在斜坡输入下，0 型系统无法跟踪输入信号，稳态误差为无穷大。

1 型系统在阶跃输入下，稳态误差为零，表明系统能够完全跟踪输入信号。但在斜坡输入下，稳态误差$e_{ss}=\frac{1}{K}$，与开环放大系数 K 成反比，存在一定的误差。通过增大 K 可以减小误差，但无法完全消除。

进一步推进，理论上，2 型系统应该能够消除阶跃和斜坡输入下的稳态误差。但事实是，任一信号，系统都会出现振荡且无法稳定。这表明，虽然增加积分环节可以消除稳态误差，但也可能破坏系统的稳定性。

五、实验小结

先谈谈实验中遇到的问题：

首先，在实验过程中，经常遇到线路原理相同，但更换线路形态时，无法得到输入输出图像无法呈现的情况。这个问题在多次调节幅值和频率后，我们选取了合适的值使得示波器能显示出我们想要的图像。

同时，我们也遇到了在斜坡输入条件下，输入输出曲线十分接近，无法测得误差的情况。经过多次调整幅值，我们才得到既能读出误差，又能使图像很好的展现在示波器上的值。

再来谈谈对系统，参数相互控制关系的理解：

实验一中，主要了解二阶系统的阻尼比 ζ 和无阻尼振荡系数 ω_n 对系统的稳态性能指标（超调量，峰值时间，调节时间）的影响。这些影响主要在欠阻尼情况下呈现，我们通过实验验证了规律：

(1) ω_n 不变时，ζ 越大，峰值时间 t_p 越大。

(2) 超调量 σ_p 是一个只与阻尼比 ζ 有关的函数。

(3) 调节时间 t_s 近似与 $\zeta\omega_n$ 成反比。

实验二中，我们进一步控制积分环节的数量，探究其与稳态误差的关系。得到增大开环放大系数 K 在一定程度上可以减小稳态误差，但不能完全消除；而增加积分环节的个数则可以消除一些输入信号下的稳态误差，但系统随着积分环节的增加，系统会变得不稳定。因此在实际的工程应用中，我们需要同时考虑误差的大小和系统的稳定性，以达到想要的结果。