

数学月考复习题

一. 选择题 (共 14 小题)

1. 设集合 $A = \{x | 3x+1 \leq 4\}$, $B = \{x | \log_2 x \leq 3\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $[0, 1]$ B. $(0, 1]$ C. $[-\frac{5}{3}, 8]$ D. $[-\frac{5}{3}, 8)$

2. 已知复数 z 满足: $zi = 4 - 2i$ (i 为虚数单位), 则 $\bar{z} =$ ()

- A. $-2 - 4i$ B. $2 + 4i$ C. $-2 + 4i$ D. $2 - 4i$

3. 已知直线 $m \perp$ 平面 α , 直线 $n \subset$ 平面 β , 则 “ $\alpha // \beta$ ” 是 “ $m \perp n$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ” 的否定是 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 \leq 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 < 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 < 0$

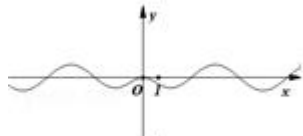
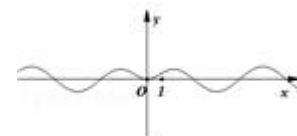
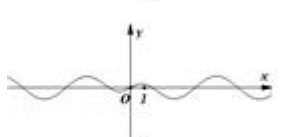
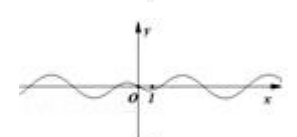
5. 下列函数中, 其定义域和值域分别与函数 $y = 2^{\frac{1}{x}}$ 的定义域和值域相同的是 ()

- A. $y = 3x$ B. $y = \ln x$ C. $y = 2^{\log_2 x}$ D. $y = 2^x$

6. 已知 $f(\sqrt{x}) = x^2 - 2x$, 则函数 $f(x)$ 的解析式为 ()

- A. $f(x) = x^4 - 2x^2 (x \geq 0)$ B. $f(x) = x^4 - 2x^2$
C. $f(x) = x - 2\sqrt{x} (x \geq 0)$ D. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

7. 函数 $f(x) = \cos x \cdot \sin(3x - \frac{1}{3^x})$ 的图象大致为 ()

- A.  B. 
C.  D. 

8. 函数 $f(x) = x^2 - bx + c$ 满足 $f(x+1) = f(1-x)$, 且 $f(0) = 3$, 则 $f(b^x)$ 与 $f(c^x)$ 的大小关系是 ()

- A. 与 x 有关, 不确定 B. $f(b^x) \geq f(c^x)$
C. $f(b^x) > f(c^x)$ D. $f(b^x) \leq f(c^x)$

9. 设 $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 10 \\ f[f(x+6)], & x < 10 \end{cases}$, 则 $f(5)$ 的值为 ()

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

10. 已知 $x \cdot \log_3 2 = 1$, 则 $4^x =$ ()

- A. 4 B. 6 C. $4^{\log_3 2}$ D. 9

11. 若 $a = 2^{0.3}$, $b = \log_2 0.3$, $c = \log_3 2$, 则实数 a, b, c 之间的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $b > a > c$

12. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 2)$, $f'(x)$ 为其导函数. 若 $(x-2)f'(x) + f(x) = \frac{1-x}{e^x}$ 且 $f(0) = 0$, 则

$f(x) < 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(0, 2)$

13. 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + t(\ln x - 2x - \frac{1}{x})$ 恰有两个极值点, 则实数 t 的取值范围是 ()

- A. $\{\frac{\sqrt{e}}{2}\} \cup (1, +\infty)$ B. $\{\frac{e}{3}\} \cup [1, +\infty)$
C. $\{\frac{\sqrt{e}}{2}, \frac{e}{3}\} \cup [1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

14. 已知如表所示数据的回归直线方程为 $\hat{y} = 5x + 6$, 则实数 m 的值为 ()

x	2	3	4	5	6
y	14	20	m	32	37

- A. 25 B. 26 C. 27 D. 28

二. 填空题 (共 4 小题)

15. 已知函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 则 $f'(3) =$ _____.

16. 随机变量 ξ 的所有可能取值为 1, 2, 3 且 $P(\xi = k) = \log_a k$ ($k = 1, 2, 3$), 则 $a =$ _____, $E(\xi) =$ _____.

17. 若曲线 $y = x^3 - x^2$ 在点 P 处的切线 l 与直线 $y = -x$ 垂直, 则切线 l 的方程为 _____.

18. 设 m 为实数, 若函数 $f(x) = x^2 - mx - 2$ 在区间 $(-\infty, 2)$ 上是减函数, 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, \frac{m}{2} + 1]$, 总有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4$, 则 m 的取值范围为 _____.

三. 解答题 (共 6 小题)

19. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且 $x < 0$ 时, $f(x) = (\frac{1}{2})^{(x+1)}$.

- (1) 求 $f(0), f(1)$;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (3) 若 $f(a-1) < 1$, 求实数 a 的取值范围.

20. 已知 2 件次品和 3 件正品混放在一起，现需要通过检测将其区分，每次随机一件产品，检测后不放回，直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时检测结束.

(I) 求第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品的概率；

(II) 已知每检测一件产品需要费用 100 元，设 X 表示直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时所需要的检测费用（单位：元），求 X 的分布列和均值（数学期望）

21. 设 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1-ax}{x-1}$ 为奇函数， a 为常数.

(1) 求 a 的值

(2) 判断函数 $f(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上的单调性，并说明理由；

(3) 若对于区间 $[2, 4]$ 上的每一个 x 值，不等式 $f(x) + x > \left(\frac{1}{3}\right)^x + m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

22. 2020 年春，新型冠状病毒在我国湖北武汉爆发并迅速蔓延，病毒传染性强并严重危害人民生命安全，国家卫健委果断要求全体人民自我居家隔离，为支援湖北武汉新型冠状病毒疫情防控工作，各地医护人员纷纷逆行，才使得病毒蔓延得到了有效控制. 某社区为保障居民的生活不受影响，由社区志愿者为其配送蔬菜、大米等生活用品，记者随机抽查了男、女居民各 100 名对志愿者所买生活用品满意度的评价，得到下面的 2×2 列联表.

	特别满意	基本满意
男	80	20
女	95	5

(1) 被调查的男性居民中有 5 个年轻人，其中有 2 名对志愿者所买生活用品特别满意，现在这 5 名年轻人中随机抽取 3 人，求至多有 1 人特别满意的概率.

(2) 能否有 99% 的把握认为男、女居民对志愿者所买生活用品的评价有差异？

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

23. 已知函数 $f(x) = x^2 + a \cos x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的奇偶性. 并证明当 $|a| \leq 2$ 时函数 $f(x)$ 只有一个极值点；

(2) 当 $a = \pi$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

24. 设函数 $f(x) = \frac{1+\ln(x+1)}{x}$ ($x > 0$).

(1) 设 $h(x) = (x+1)f(x)$, 求曲线 $y=h(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x) > \frac{k}{x+1}$ 恒成立, 求整数 k 的最大值.