

# Análisis y predicción de Series II:

## Modelos ARIMA

### TEMA 2. MODELOS ARIMA.

- 2.1.- Introducción.
- 2.2.- Función de autocorrelación simple y función de autocorrelación parcial.
- 2.3. El modelo ARMA(p,q).
  - 2.3.1. El modelo autorregresivo AR(p).
  - 2.3.2. El modelo de medias móviles MA(q).
- 2.4. El modelo ARIMA(p,d,q).
- 2.5.- El modelo ARIMA estacional..
- 2.6.- La metodología Box-Jenkins.,
- 2.7.- Transformaciones para estabilizar la varianza.
- 2.8.-Identificación y estimación del modelo ARIMA.
- 2.9.-Diagnóstico del modelo.
  - 2.9.1.- Significación estadística de los parámetros.
  - 2.9.2.- Análisis de los residuos.
  - 2.9.3.-. Medidas de la adecuación del modelo.
- 2.10. Cálculo de las predicciones

Autor: Juana María Alonso Revenga

## 2.1.- INTRODUCCIÓN.

Los fenómenos dinámicos que observamos como series temporales pueden clasificarse en dos clases. Los primeros son los que toman valores estables en el tiempo alrededor de un valor central, sin mostrar una tendencia o crecer o decrecer a lo largo del tiempo (estacionarios). Una segunda clase de procesos son los no estacionarios, que son aquellos que pueden mostrar tendencia, estacionalidad y otros efectos evolutivos en el tiempo. Una serie temporal de  $n$  datos es una muestra extraída del proceso estocástico que representa dicho fenómeno dinámico, por ello recordamos algunos conceptos básicos de procesos estocásticos.

Un **proceso estocástico es estacionario** en sentido estricto cuando las distribuciones marginales de cualquier conjunto de  $k$  variables son idénticas, en distribución y parámetros. Esta condición no es totalmente necesaria para desarrollar la metodología Box-Jenkins, nos basta con que el proceso sea **estacionario en sentido débil**, es decir la serie  $z_t$  cumple:

$$\begin{cases} \mu_t = \mu & \forall t \\ \sigma_t^2 = \sigma^2 & \forall t \\ Cov(x_t, x_{t+k}) = E[(x_t - \mu)(x_{t+k} - \mu)] = \gamma_k & \forall k \end{cases}$$

Las dos primeras condiciones nos dicen que la **media y la varianza permanecen constantes** con el tiempo y la tercera que la **covarianza** entre dos variables de la serie **depende sólo de su separación en el tiempo**. Esto se cumple entonces también para las autocorrelaciones

$$\rho_k = \frac{Cov(x_t, x_{t-k})}{\sqrt{Var(x_t)Var(x_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad \gamma_0 = \sigma_{x_t}^2 \quad \forall t$$

Y la matriz de correlaciones

$$R_k = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Una propiedad importante de los procesos estacionarios es que son **estables ante las combinaciones lineales**. En particular, la combinación lineal formada por los incrementos de un proceso estacionario es una serie estacionaria. Es decir si  $x_t$  es estacionaria entonces  $w_t = x_t - x_{t-1}$  es estacionaria.

Un proceso estacionario muy importante es el ruido blanco, diremos que  $X(t)$  es un **proceso de ruido blanco** si

$$E[X(t)] = 0, \quad V[X(t)] = \sigma^2 \quad \gamma_k = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Es decir, su **media es cero, varianza constante y todas las variables están incorreladas**.

Introduzcamos el operador de retardo que nos permitirá escribir de forma más compacta las expresiones anteriores. El operador de retardo  $B$  aplicado a un proceso retrasa una unidad de tiempo, es decir  $BX_t = X_{t-1}$ . De la misma forma  $B^2 X_t = X_{t-2}$ . En general

$$B^k X_t = X_{t-k}$$

El operador de retardo es lineal  $B(aX_t + bY_t) = aX_{t-1} + bY_{t-1}$ .  $B$  puede manejarse como si fuera un elemento algebraico cualquiera.

## 2.2. FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN SIMPLE (FAS) Y FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN PARCIAL (FAP).

Si de un proceso estacionario observamos  $x_1, x_2, \dots, x_T$ , podemos calcular los estimadores de los parámetros anteriores.

El estimador de la media es  $\hat{\mu} = \bar{x}$  y su varianza

$$Var(\bar{x}) = \frac{1}{T} \left[ \sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^{T-1} \left( 1 - \frac{i}{T} \right) \gamma_i \right] = \frac{\gamma_0}{T} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{T-1} \left( 1 - \frac{i}{T} \right) \rho_i \right]$$

Observemos que la varianza del estimador puede crecer si las autocovarianzas no decrecen cuando  $T$  aumenta.

El estimador de la autocovarianza de orden  $k$  es

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})$$

Es sesgado pero tiene menor error cuadrático medio que el dividido por  $T - k$ . El estimador del coeficiente de correlación lo calcularemos

$$r_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$$

Estos coeficientes de correlación muestrales expresados en función del retardo forman la **función de autocorrelación muestral** y su representación es el **correlograma**. Estas cantidades miden la relación lineal entre las variables de la serie separadas por  $k$  posiciones.

El error estándar de este coeficiente es

$$S_{r_k} = \sqrt{\frac{1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} r_j^2}{T}}$$

Dado que la distribución del coeficiente de correlación es asintóticamente Normal

podemos construir el estadístico  $T_{r_k} = \frac{r_k}{S_{r_k}}$  que nos ayudará a decidir cuando las

variables están incorreladas. También se construye o dibuja el intervalo de confianza bajo la hipótesis de  $\rho = 0$  ( $\pm 1.96 S_{r_k}$ ) y si nuestro valor muestral está fuera del intervalo rechazamos que la autocorrelación sea cero.

La función ACF nos servirá para identificar si la serie es o no estacionaria. Más adelante veremos que si representamos el correlograma ACF y decrece lentamente la serie no es estacionaria, y si el correlograma ACF se corta o decrece rápidamente podemos considerar la serie estacionaria. Esta función también nos va a indicar el tipo de modelo a ajustar y el orden.

Otro concepto muy útil en el análisis de series temporales es la **función de autocorrelación parcial (fap)** que representa  $(k, r_{kk})$ . El primer término  $r_{11} = r_1$  y representa la pendiente de la recta de regresión de  $\tilde{x}_t$  sobre  $\tilde{x}_{t-1}$ . El segundo valor

se estima mediante una regresión de  $\tilde{x}_t$  sobre  $\tilde{x}_{t-1}$  y  $\tilde{x}_{t-2}$ . El modelo sería  $\tilde{x}_t = r_{21}\tilde{x}_{t-1} + r_{22}\tilde{x}_{t-2} + a_t$  y el coeficiente de correlación parcial de segundo orden es  $r_{22}$ . De esta definición se deduce que un modelo AR(p) tiene los p primeros coeficientes de correlación parcial distintos de cero y esto nos servirá para identificar el modelo autorregresivo a utilizar.

### Ejemplo de correlogramas.

La observación y el análisis de los correlogramas nos sirve para detectar, la estacionariedad, el tipo de modelo y los retardos que son significativamente diferentes de cero.

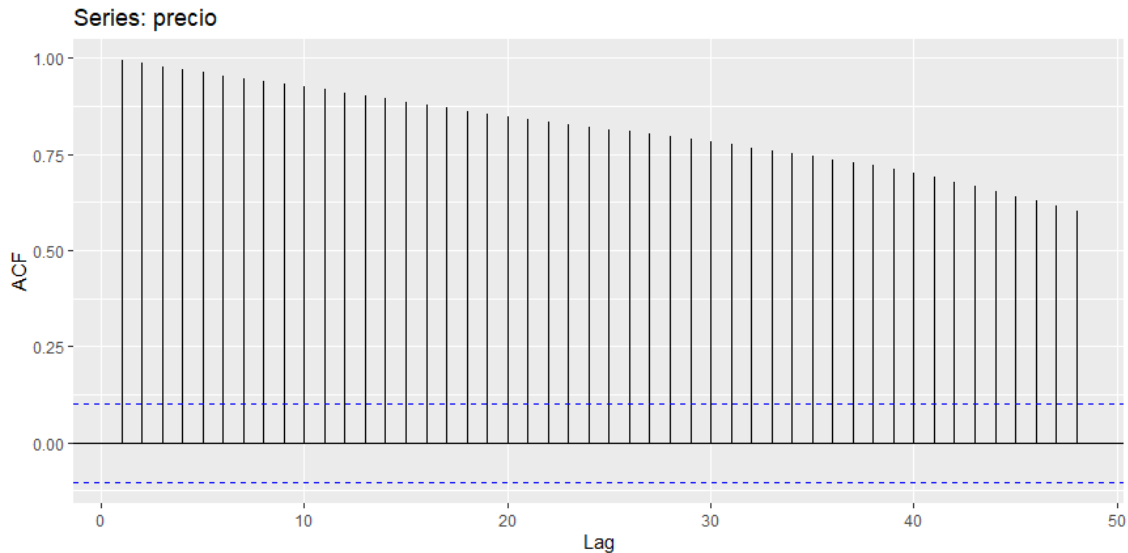
Con R, obtenemos la representación gráfica de sus autocorrelogramas mediante la siguiente sintaxis:

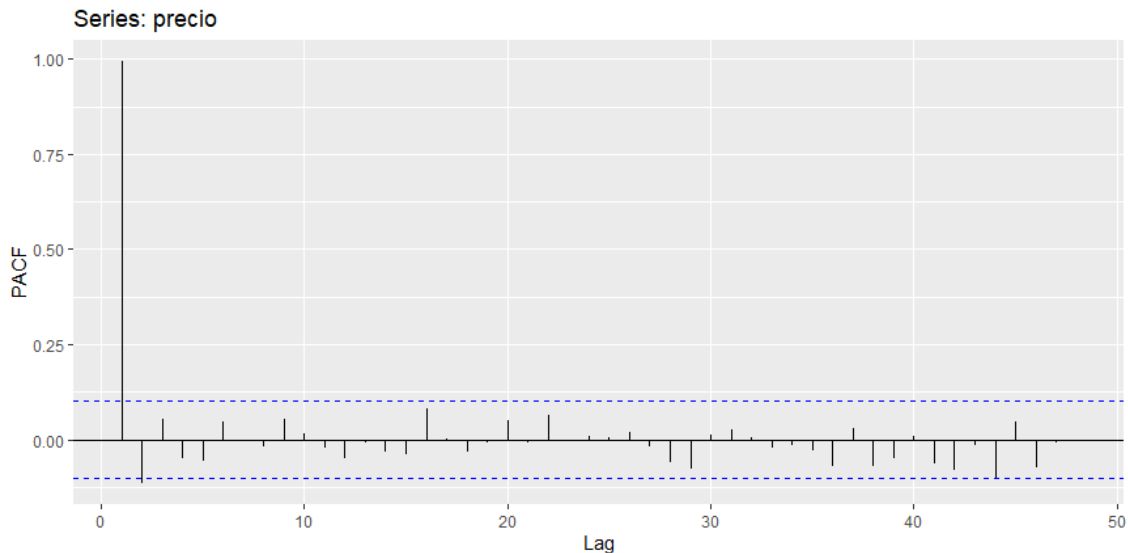
#Calculamos las autocorrelaciones simples hasta el retardo 48

ggAcf(precio, lag=48)

#Calculamos las autocorrelaciones parciales hasta el retardo 48

ggPacf(precio, lag=48)





Las autocorrelaciones simples (ACF) y las parciales (PACF) aparecen representadas con las bandas de confianza que se calculan utilizando el error Standard aproximado, como  $\pm \frac{2}{\sqrt{T}}$ . Observemos que estas bandas representan el intervalo de confianza en el que podría estar el coeficiente de autocorrelación calculado si el verdadero valor del poblacional fuera cero. Por esto, un coeficiente de correlación dentro de las bandas se considera cero.

Este es un claro ejemplo donde se puede ver el efecto acumulado que conservan los coeficientes de autocorrelación simple (ACF), puesto que la autocorrelación de todos los retardos es muy grande, mientras que si observamos las autocorrelaciones parciales (PACF) solo hay una diferente de cero. Esto significa que la única autocorrelación significativa es la de retardo uno.

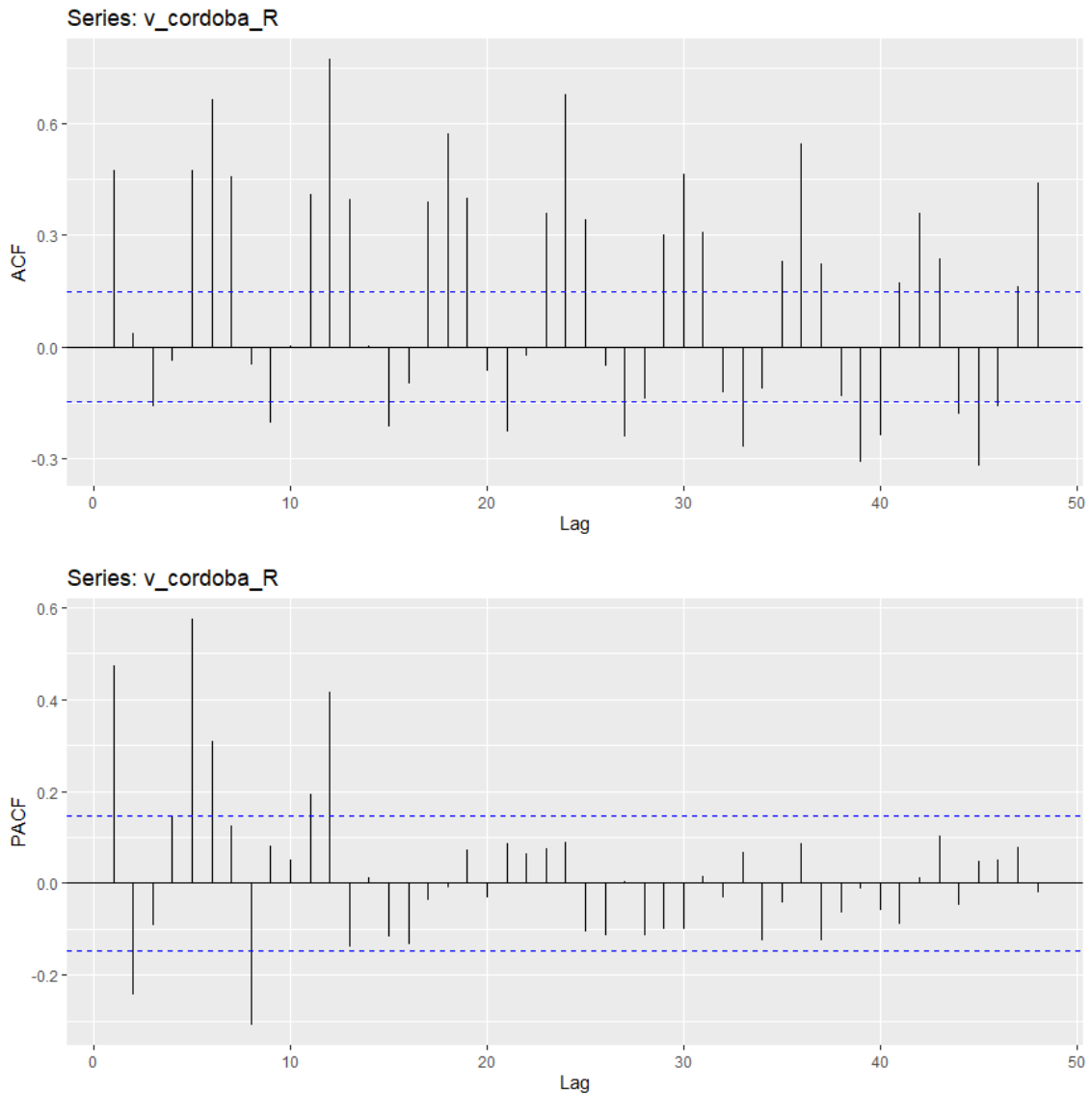
**Ejemplo:** Veamos ahora un ejemplo de una serie con comportamiento estacional.

#Calculamos las autocorrelaciones simples hasta el retardo 48

```
ggAcf(v_cordoba_R, lag=48)
```

#Calculamos las autocorrelaciones parciales hasta el retardo 48

```
ggPacf(v_cordoba_R, lag=48)
```



Como podemos ver en el autocorrelograma simple, se observa un comportamiento repetitivo de las autocorrelaciones cada 12 meses, observando como la autocorrelación más fuerte es el los retardos múltiplos de 12. Esto es debido a que las autocorrelaciones simples tienen un efecto acumulativo de retardos anteriores. Precisamente esto es lo que evitamos calculando las autocorrelaciones parciales en donde se mide la autocorrelación exacta de ese retardo eliminando el efecto de todos los retardos anteriores.

## 2.3. EL MODELO MIXTO ARMA(p,q).

### 2.3.1 EL MODELO AUTORREGRESIVO AR(P).

Comenzamos con el modelo autorregresivo que generaliza la idea de regresión para representar la relación entre una variable de la serie y las anteriores:

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + Z_t$$

Donde  $c$  y  $-1 < \phi < 1$  son constantes a determinar y  $Z_t$  es un proceso de ruido blanco con varianza  $\sigma^2$ . La condición  $-1 < \phi < 1$  es necesaria para que la serie sea estacionaria. A este modelo le llamamos proceso autorregresivo de primer orden AR(1). Este es un proceso de Markov donde el valor presente solo depende del anterior. Esta dependencia puede también extenderse a los  $p$  valores anteriores  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$  denominándose el proceso AR(p).

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

Si centramos la serie restando su media podemos suprimir la constante y el proceso autorregresivo se puede expresar

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

Utilizado el operador de retardo la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\phi_p(B)X_t = Z_t$$

Donde  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  (llamado polinomio autorregresivo).

Analicemos la estacionariedad de estos procesos. Estudiaremos con más detalle el **modelo AR(1)**.

#### El proceso AR(1).

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

O bien utilizando el operador de retardo

$$(1 - \phi_1 B)X_t = Z_t$$



Se puede demostrar que la función de autocorrelación de un proceso autoregresivo

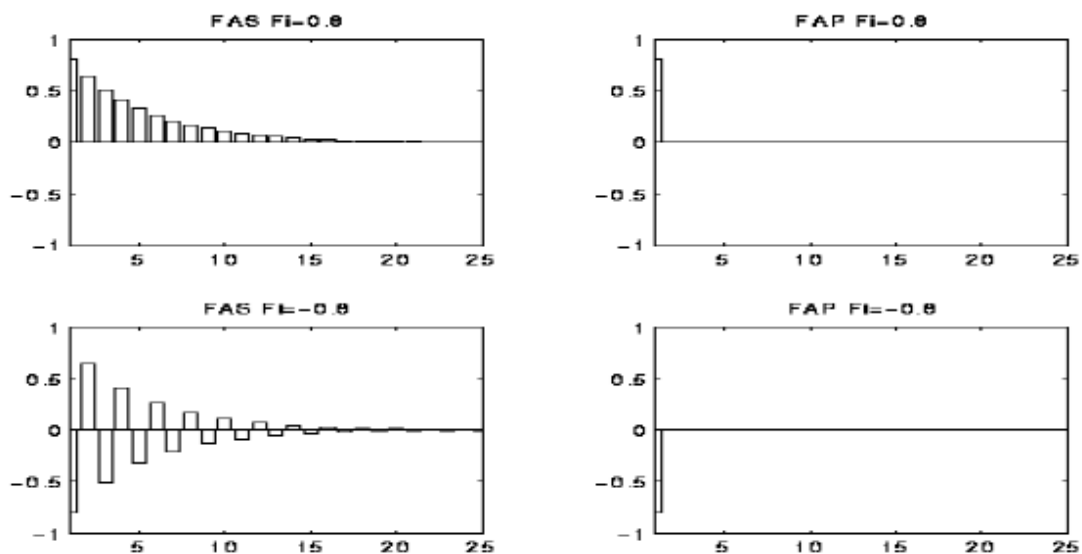
**Proceso AR(1)** es  $\rho_k = \phi^k$ , que va decreciendo de forma geométrica. Esto implica que la ACF de un proceso AR(1) pueda tener el siguiente aspecto:

- $\phi$  positivo: La FAS será una función positiva y decreciente.
- $\phi$  negativo: La FAS será una función alternada, y tendrá palos pares positivos, y palos impares negativos.

En cuanto a la PACF, como sólo existe influencia de primer orden, ya que si  $X_t$  depende de  $X_{t-2}$  es a través de  $X_{t-1}$ . La FAP será por tanto:

- $\phi$  positivo: La PACF tendrá un único palo, el primero. Este palo será positivo.
- $\phi$  negativo: La PACF tendrá un único palo y será negativo.

Ejemplo de funciones de autocorrelación para  $\phi = 0.8$

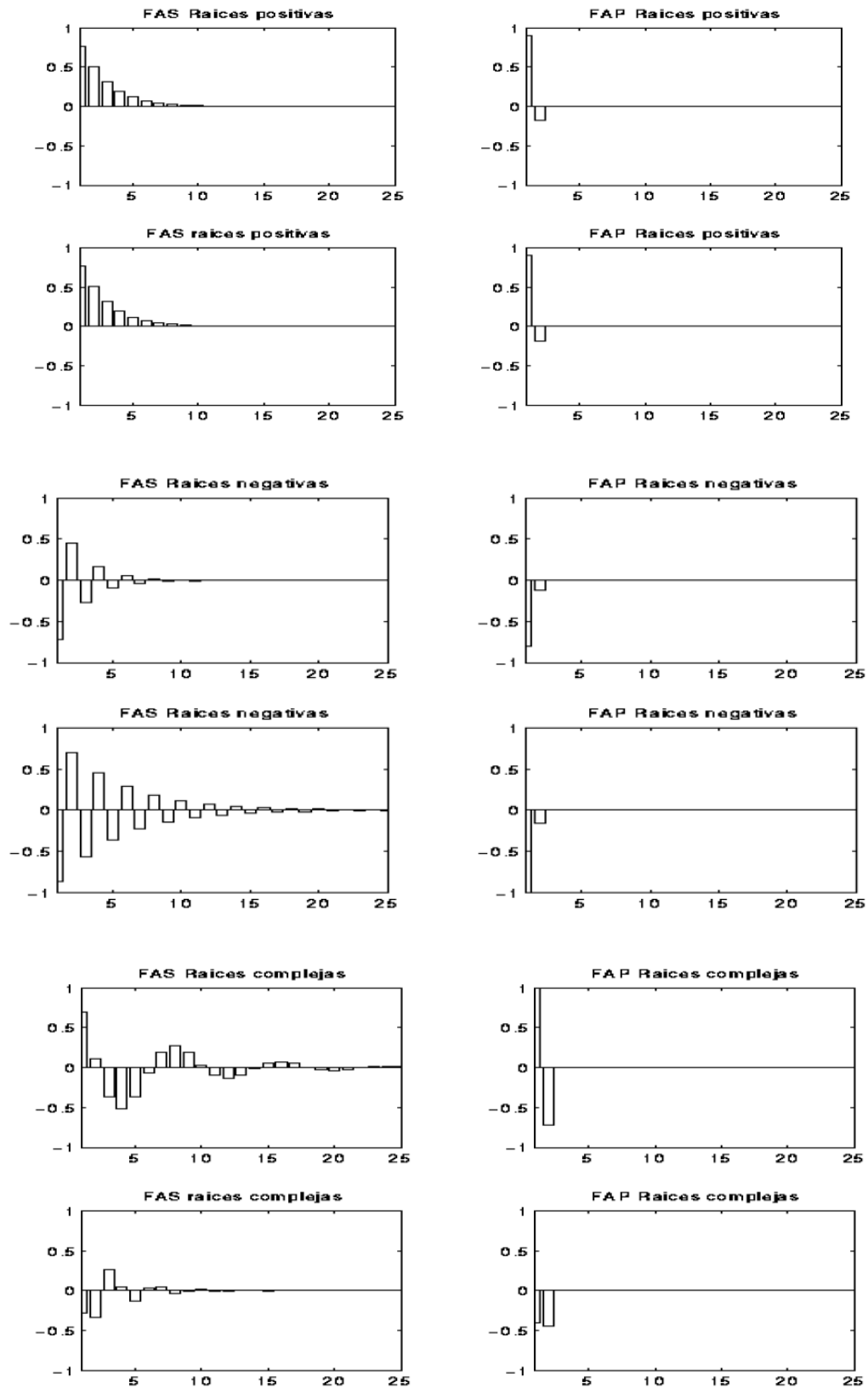


### El proceso AR(2).

El proceso autorregresivo de segundo orden tiene por ecuación

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t$$

La ACF decrece de forma exponencial mientras que la PACF del AR(2), tendrá únicamente dos barras. Las figuras muestran las ACFy PACF de los procesos AR(2) con diversos tipos de raíces.



### El proceso autoregresivo general AR(p).

Para el proceso autorregresivo de orden p esta dependencia puede también extenderse a los p valores anteriores:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

Si centramos la serie restando su media podemos suprimir la constante y el proceso autorregresivo se puede expresar

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

Utilizado el operador de retardo la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\phi_p(B) X_t = Z_t$$

Donde

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

Esta notación es muy importante puesto que simplifica la expresión de los modelos ajustados y es utilizada en la mayoría del software para series temporales.

### 2.3.2 EL MODELO DE MEDIAS MÓVILES MA(q).

Los procesos autoregresivos representan en series que tienen una memoria larga, ya que su función de autocorrelación FAS decrece de forma exponencial pero no se corta a partir de un determinado retardo. Para representar series de memoria corta crearemos los modelos de medias móviles cuya identificación es sencilla porque su función de autocorrelación se corta a partir de un determinado retardo. Estos procesos son una media de un número finito de innovaciones pasadas.

#### El proceso de media móvil de orden 1 MA(1).

Suponiendo el proceso  $X_t$  centrado, es decir con media cero definiremos el modelo:

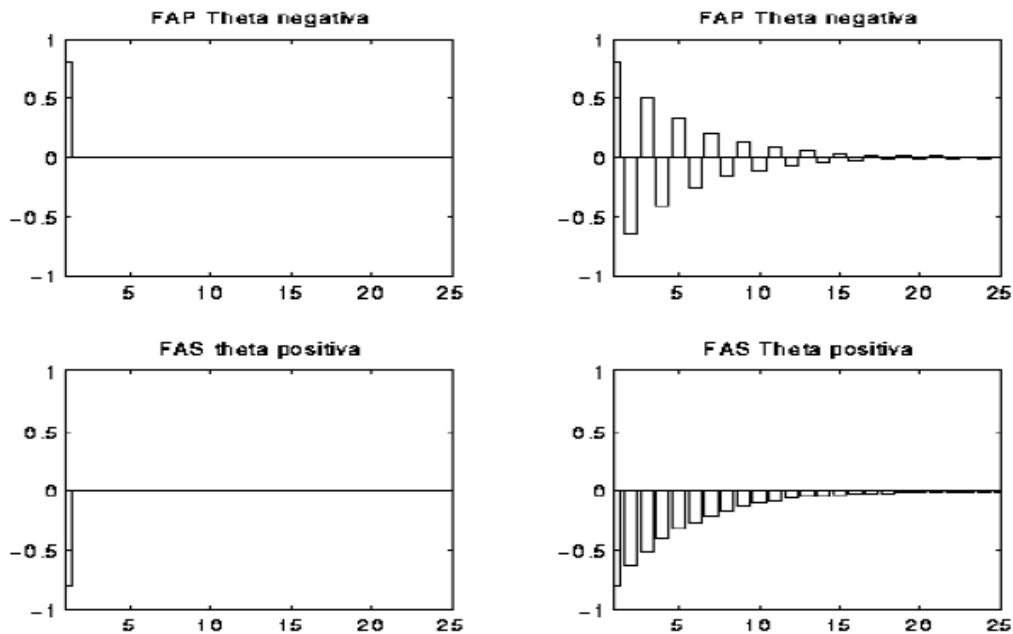
$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1}$$

Este proceso es la suma de dos procesos estacionarios y por lo tanto sea cual sea el valor del parámetro es estacionario a diferencia de los modelos AR. El modelo puede escribirse con la notación de operadores como:

$$X_t = (1 + \theta_1 B) Z_t$$

Las funciones de autocorrelación ACF y PACF tienen un comportamiento simétrico al de las mismas funciones para los modelos autorregresivos. Es decir, la ACF solo

tendrá una barra diferente de cero y la PACF decrece de forma exponencial y, dependiendo del signo de  $\theta_1$  tiene valor negativo o signos alternos.



### El proceso MA(q).

Generalizando la idea podemos escribir procesos cuyo valor actual no sólo dependa de la última innovación, sino de las q últimas innovaciones. Se obtiene entonces el proceso MA(q) cuya expresión general es.

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$$

Introduciendo la notación del operador de retardo:

$$X_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) Z_t$$

Puede escribirse de forma más compacta  $X_t = \theta_q(B) Z_t$

Una extensión natural de los modelos anteriores es aquella que incluye términos autorregresivos y términos de medias móviles. Se representan por la ecuación:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$$

Expresado en función del operador de retardo sería

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) X_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) Z_t$$

Las funciones de autocorrelación simple y parcial son complicadas de calcular, por esto solo comentaremos que su comportamiento es la superposición de los correlogramas de ambos modelos por lo que los dos, el simple y el parcial tendrán un decrecimiento constante.

## 2.6.- PROCESOS INTEGRADOS: EL MODELO ARIMA(p,d,q).

Hasta ahora hemos estudiado modelos de series para procesos estacionarios, sin embargo, en la realidad la mayoría de las series tienen un comportamiento no estacionario. Un proceso puede ser no estacionario en la media, en la varianza, en las autocorrelaciones, o en otra característica de la distribución de las variables.

Cuando el nivel de la serie no es constante en el tiempo, pudiendo en particular tener tendencia creciente o decreciente, diremos que la serie es no estacionaria en la media.

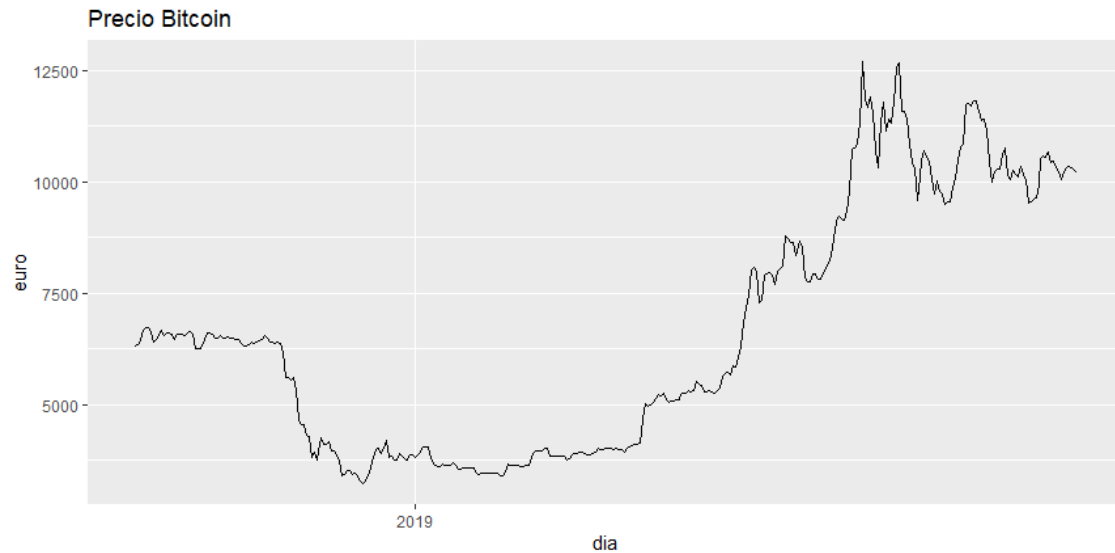
Cuando la variabilidad o las autocorrelaciones se modifican en el tiempo, diremos que la serie es no estacionaria en la varianza o en las autocorrelaciones.

Los procesos no estacionarios más importantes son los procesos integrados, que tienen la propiedad fundamental de que al diferenciarlos se obtienen procesos estacionarios.

Una propiedad importante que diferencia a los procesos integrados de los estacionarios es la forma en que desaparece la dependencia en el tiempo. En los procesos estacionarios ARMA las autocorrelaciones disminuyen geométricamente, y se hacen prácticamente cero a los pocos retardos. En los procesos integrados las autocorrelaciones disminuyen linealmente con el tiempo y es posible encontrar coeficientes de autocorrelación distintos de cero hasta para retardos muy altos.

Frecuentemente las series económicas no son estacionarias pero sus diferencias relativas, o las diferencias cuando medimos la variable en logaritmos, son estacionarias. Por ejemplo la serie precio de Bitcoin no es estacionaria en media

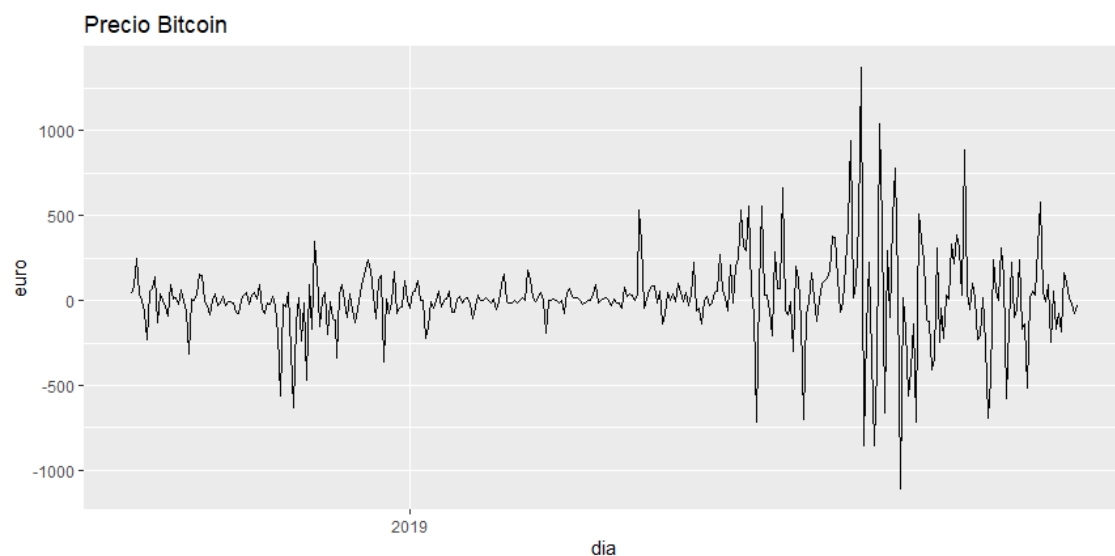
```
autoplot(precio)+ ggtitle("Precio Bitcoin") + xlab("dia") + ylab("euro")
```



Si calculamos la serie de diferencias  $\omega_t = X_t - X_{t-1}$  obtenemos una serie que ya sí es estacionaria.

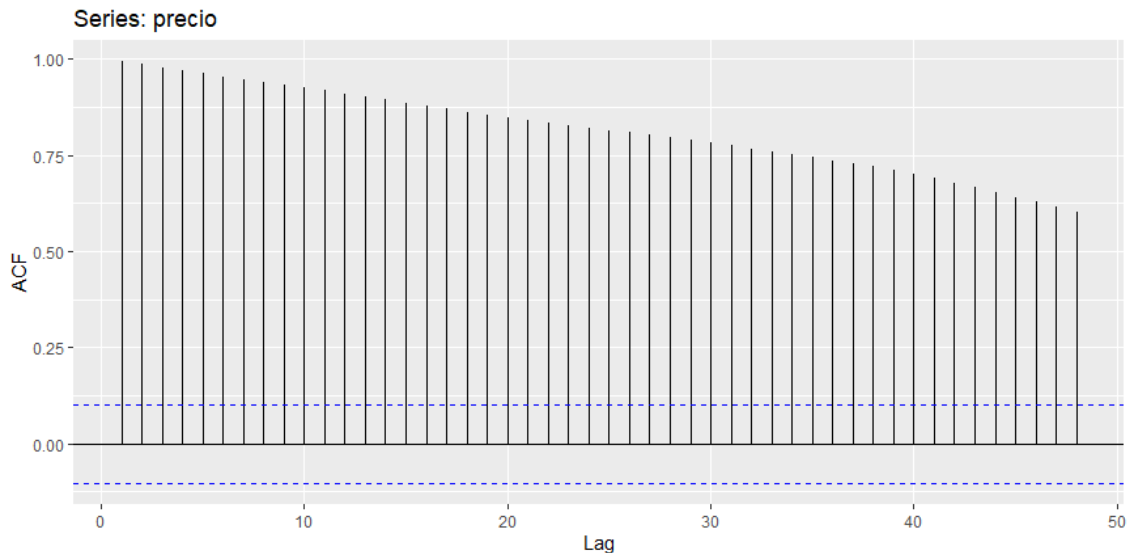
#Serie diferenciada

```
autoplot(diff(precio))+ ggtitle("Precio Bitcoin") + xlab("dia") + ylab("euro")
```



Como vemos, la serie ya tiene media constante aunque podría ser que la varianza no lo fuera.

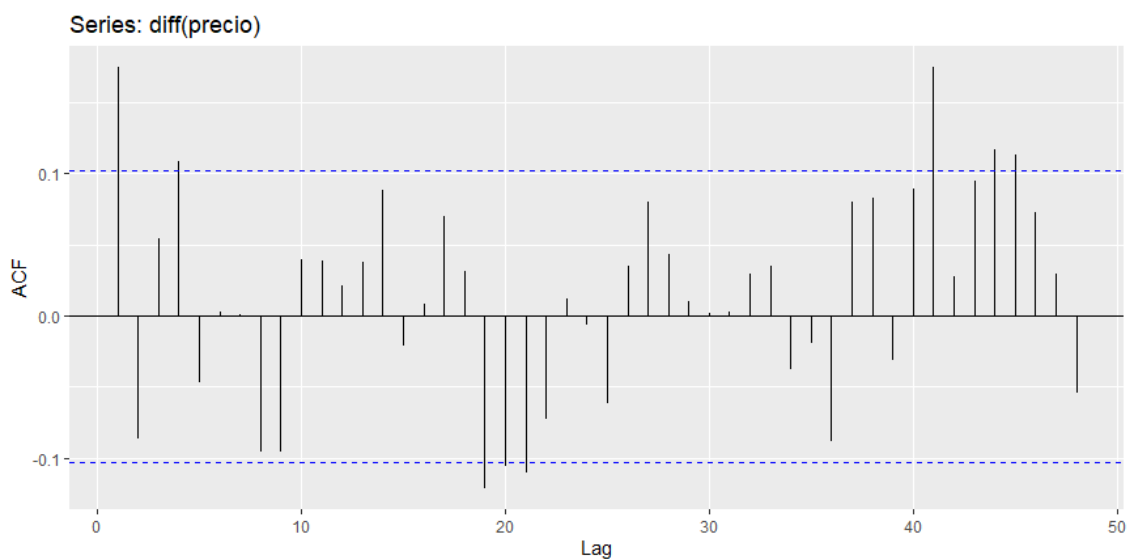
Si estudiamos el correlograma de la serie no estacionaria vemos que decrece muy lentamente y de forma lineal.



Sin embargo, si representamos el ACF de la serie diferenciada tenemos:

#Calculamos las autocorrelaciones simples de la serie diferenciada hasta el retardo 48

```
ggAcf(diff(precio), lag=48)
```



Diremos que un proceso es integrado de orden 1 si la serie de las primeras diferencias  $\omega_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-1}$  ya es estacionaria. Si esta serie no fuera estacionaria seguiremos diferenciando  $\nabla \omega_t = \omega_t - \omega_{t-1} = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} = \nabla^2 X_t$ . En general si necesitamos realizar “d” diferencias diremos que es un proceso integrado de orden d.

Así el modelo ARIMA(p,d,q) se expresa:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d X_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) Z_t$$

#### 2.4.- EL MODELO ARIMA ESTACIONAL.

Hemos visto que podemos convertir series no estacionarias en estacionarias tomando diferencias regulares, es decir, entre periodos consecutivos. En el tema de métodos descriptivos vimos que podíamos eliminar la estacionalidad mediante diferencias con los índices estacionales. Uniendo ambos resultados, concluimos que podemos convertir una serie con estacionalidad en estacionaria mediante las diferencias de orden  $s$ , siendo  $s$  el periodo de la serie.

Consideremos por ejemplo las temperaturas medias mensuales durante varios años. Es razonable pensar que cada uno de los eneros debería aproximadamente tener la misma temperatura media, cada uno de los febreros y así sucesivamente. En este caso podríamos modelizar la temperatura media mensual,  $X_t$ , como

$$X_t = S_t^{(s)} + N_t$$

Donde  $S_t^{(s)}$  es la componente estacional determinista fija, es decir, toma un valor distinto fijo para cada componente de la estación (mes), satisfaciendo

$$S_t^{(s)} = S_{t-ks}^{(s)} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Y  $N_t$  es un proceso estacionario (la serie desestacionalizada). El proceso  $X_t$  es no estacionario en media claramente. Definimos el operador diferencia de periodo  $s$  o diferencia estacional de orden 1 como

$$\nabla_s X_t = X_t - X_{t-s} = (1 - B^s) X_t$$

Así, una diferencia estacional, es la diferencia entre una observación y la anterior de su mismo periodo (Enero 97- Enero 96). Debemos darnos cuenta de la diferencia entre

$\nabla^d = (1 - B)^d$  y  $\nabla_d$ . Al tomar diferencias de observaciones separadas  $s$  periodos, tenemos que  $\nabla_s X_t = \nabla_s N_t$ , y por lo tanto el proceso transformado es estacionario.

En general se define el operador diferencia estacional de orden  $D$



$$\nabla_s^D X_t = (1 - B^s)^D X_t$$

En los modelos estacionales además no solo están relacionadas entre si las observaciones de los mismos periodos, sino que también puede haber una estructura ARMA entre todas las observaciones, los modelos que mezclan este tipo de relaciones generales son los modelos estacionales generales, también denominados modelos estacionales multiplicativos.

Un modelo estacional general será de la forma  $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$  donde  $(p, d, q)$  son los parámetros de parte no estacional y  $(P, D, Q)$  son los parámetros de parte estacional. Su ecuación general puede expresarse en términos del operador diferencias de la siguiente forma:

$$(1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps})(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(1 - B^s)^D (1 - B)^d X_t = (1 + \Theta_1 B + \Theta_2 B^{2s} + \dots + \Theta_Q B^{Qs})(1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) Z_t$$

Veamos algunos ejemplos de este modelo:

Para un modelo  $ARIMA(1, 0, 0)(1, 0, 0)_{12}$  su expresión es

$$(1 - \Phi_1 B^{12})(1 - \phi_1 B) X_t = Z_t$$

Para un modelo  $ARIMA(1, 0, 0)(0, 0, 1)_{12}$  su expresión es

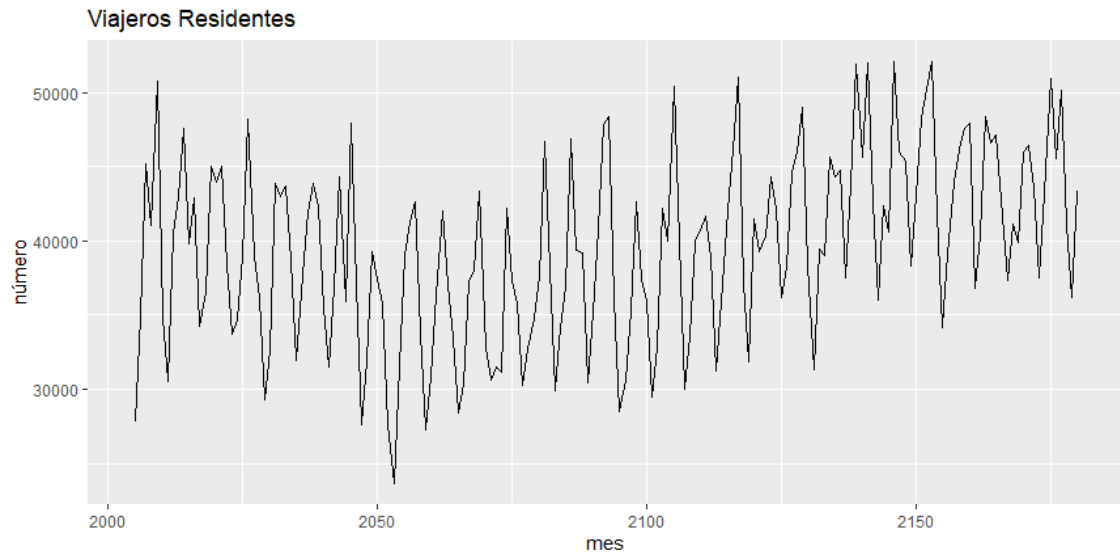
$$(1 - \phi_1 B) X_t = (1 + \Theta_1 B^{12}) Z_t$$

Para un modelo  $ARIMA(2, 0, 0)(1, 0, 0)_{12}$  su expresión es

$$(1 - \Phi_1 B^{12})(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = Z_t$$

**Ejemplo:** La serie de viajeros en Córdoba es claramente estacional. La siguiente sintaxis nos permite ver la gráfica de la serie y los autocorrelogramas

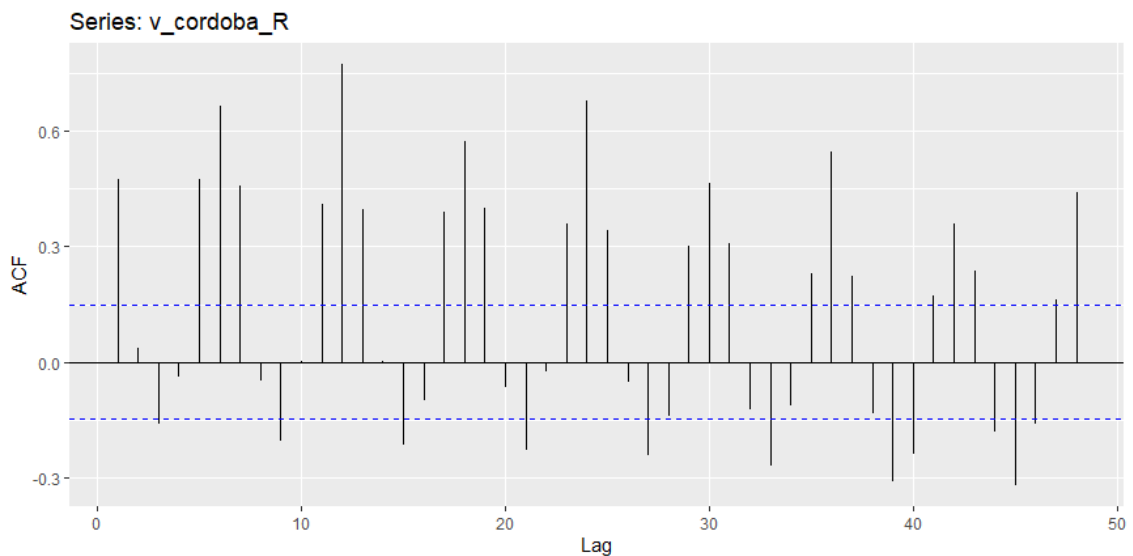
```
autoplot(v_cordoba_R)+ ggtitle("Viajeros Residentes") + xlab("mes") +  
ylab("número")
```



Si representamos sus correlogramas se observa la estructura estacional y la no estacionariedad en media que se refleja en el gráfico de la serie.

#Calculamos las autocorrelaciones simples hasta el retardo 48

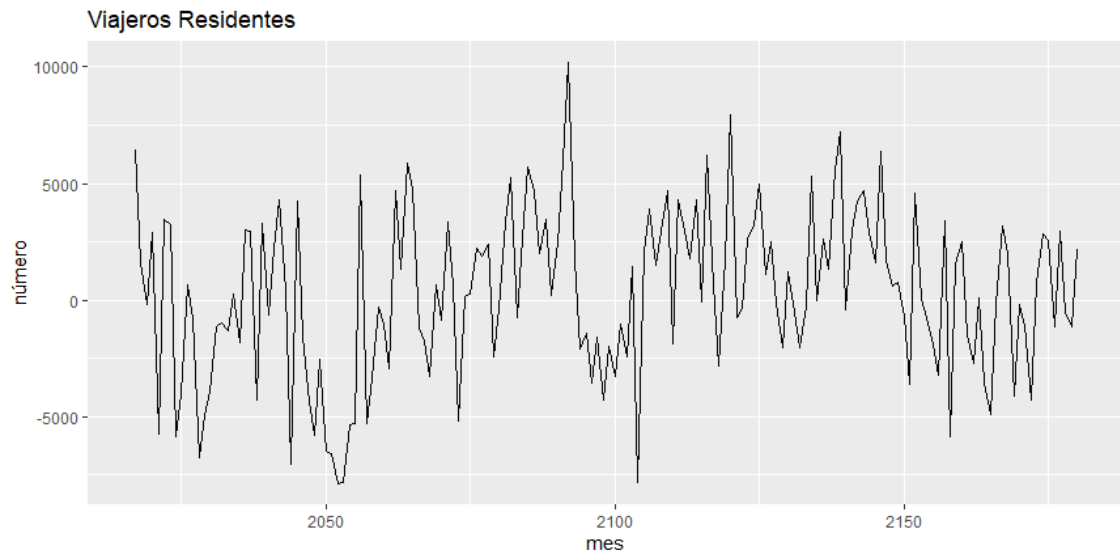
```
ggAcf(v_cordoba_R, lag=48)
```



Si diferenciamos la serie, mediante una diferenciación de orden estacional, y calculamos sus funciones de autocorrelación tenemos

#Serie diferenciada estacionalmente

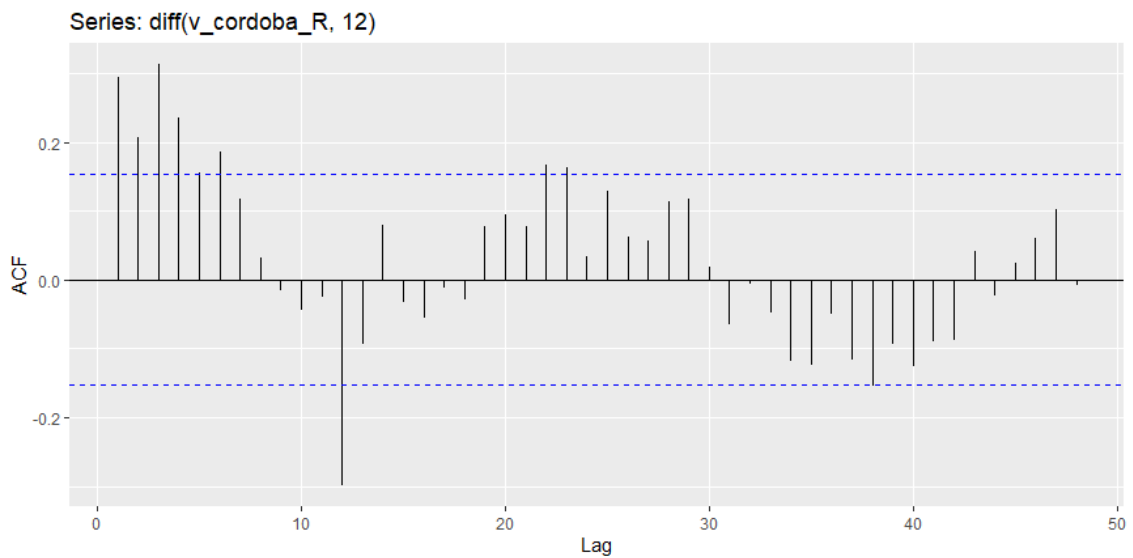
```
autoplot(diff(v_cordoba_R,12))+ ggtitle("Viajeros Residentes") + xlab("mes") +  
ylab("número")
```



Observemos que la nueva serie toma valores alrededor de cero y ya parece constante en media y varianza.

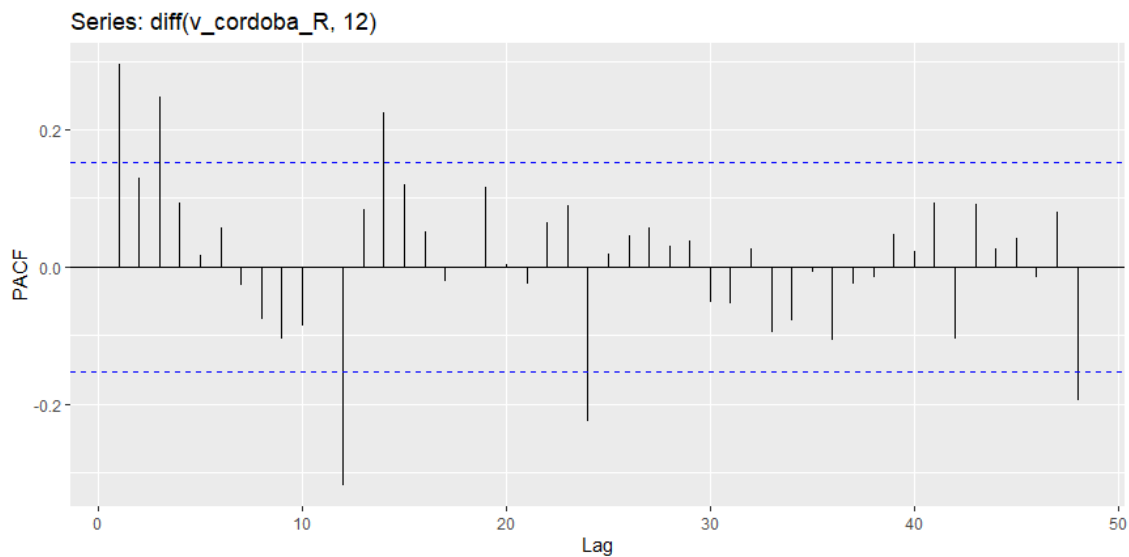
#Calculamos las autocorrelaciones simples de la serie diferenciada

```
ggAcf(diff(v_cordoba_R,12), lag=48)
```



#Calculamos las autocorrelaciones parciales de la serie diferenciada

```
ggPacf(diff(v_cordoba_R,12),lag=48)
```



En donde podemos ver que el proceso ya es estacionario y teniendo en cuenta las correlaciones distintas de cero tanto en las correlaciones simples como en las parciales podría ajustarse a un modelo  $ARIMA(3,0,0)(0,1,1)_{12}$ .

## 2.5.- LA METODOLOGÍA BOX-JENKINS.

Hasta ahora hemos estudiado las propiedades teóricas de los modelos ARIMA, a continuación vamos a analizar como ajustar dichos modelos a series reales. Box y Jenkins propusieron utilizar una metodología que se resume en cuatro etapas.

- **Paso 1. Identificación del modelo:** Utilizamos los datos históricos de la serie para encontrar el modelo apropiado.
- **Paso 2. Estimación:** Estimamos los parámetros del modelo escogido utilizando los datos históricos.
- **Paso 3. Pruebas del modelo:** Realizamos distintos contrastes para decidir si el modelo construido es adecuado. Si no lo es, volveríamos al paso 1.
- **Paso 4. Predicción:** Una vez que el modelo ha sido construido y comprobada su adecuación lo utilizamos para hacer predicciones.

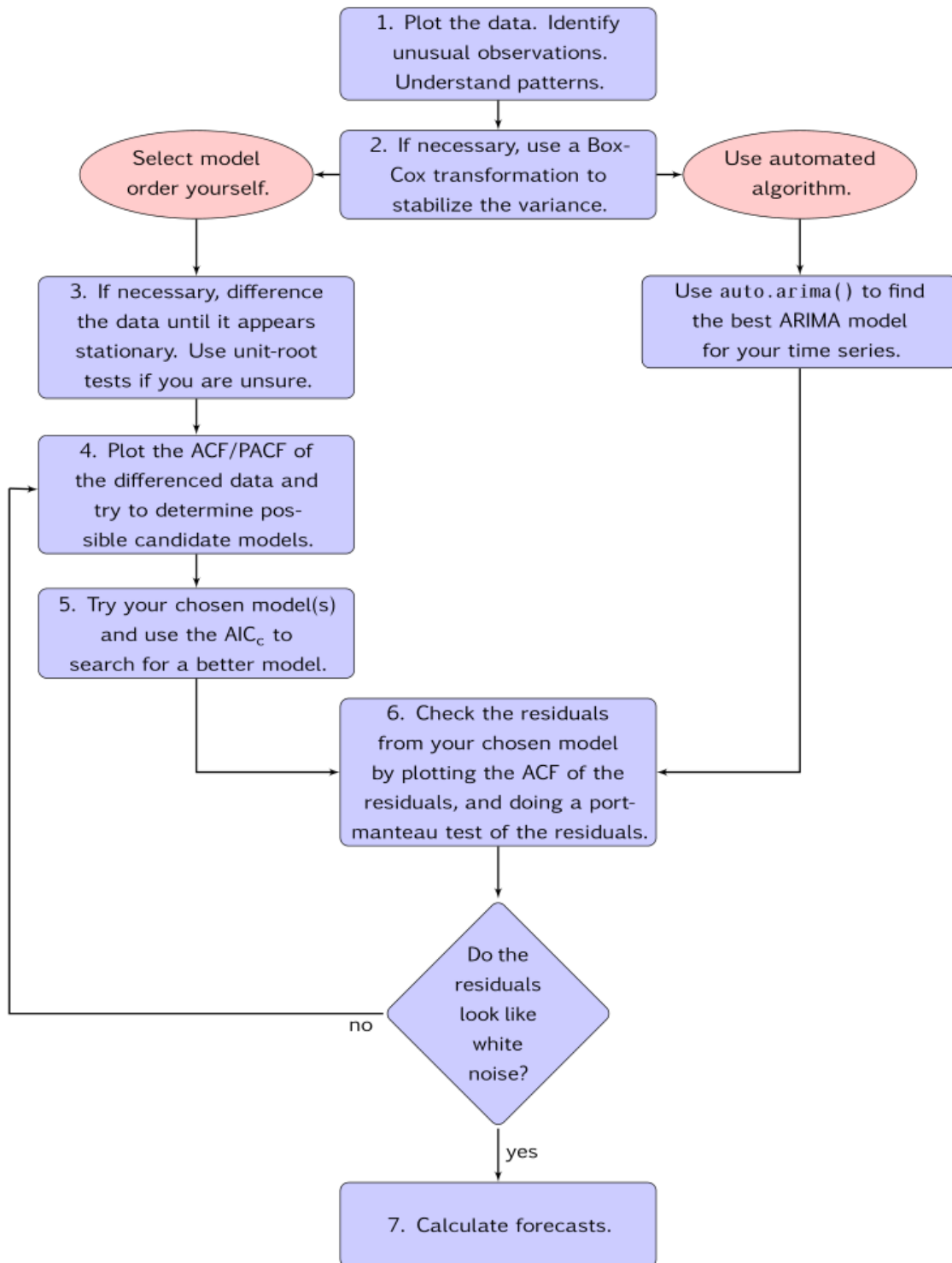
La primera etapa consiste en identificar el posible modelo ARIMA que sigue la serie, lo que requiere:

- Decidir que transformaciones aplicar para convertir la serie observada en una serie estacionaria.
- Determinar un modelo ARMA para la serie estacionaria, es decir, los órdenes  $p$  y  $q$  de su estructura autorregresiva y de media móvil.

Una vez seleccionado provisionalmente un modelo para la serie estacionaria, pasaremos a la segunda **etapa de estimación**, donde los parámetros AR y MA del modelo se estiman por máxima verosimilitud y se obtienen sus errores estándar y los residuos del modelo.

**La tercera etapa es la de diagnosis**, donde se comprueba que los residuos no tienen estructura de dependencia y siguen un proceso de ruido blanco. Si los residuos no contienen información aceptamos el modelo como adecuado y lo utilizaremos para el cálculo de predicciones. Si los residuos muestran estructura modificaremos el modelo para incorporarla y repetiremos las etapas anteriores hasta obtener un modelo adecuado con el que poder realizar predicciones.

A continuación mostramos en un esquema esta metodología.



## 2.6. TRANSFORMACIONES PARA ESTABILIZAR LA VARIANZA.

Cuando el proceso no es estacionario por cambios en la media, podemos conseguir que esta sea constante calculando diferencias entre los valores de la serie. Cuando la falta de estacionariedad además viene dada por una varianza que aumenta o disminuye con la media de la serie, podemos utilizar las transformaciones Box-Cox para estabilizarla. Dichas transformaciones tienen la expresión general:

$$\begin{cases} w = \log y \\ w = \frac{y^\lambda - 1}{\lambda} \end{cases}$$

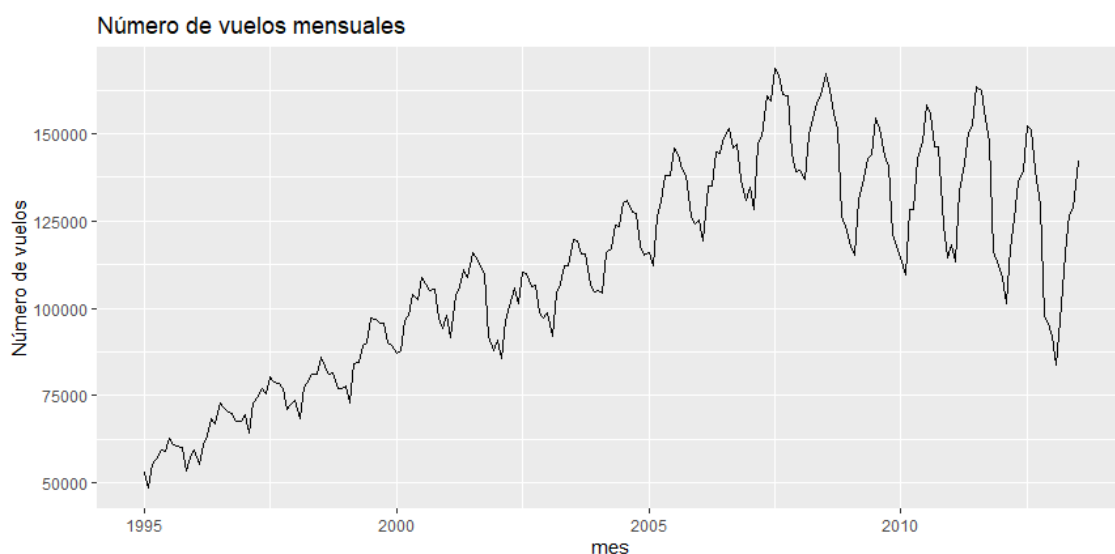
Esta familia se utiliza para valores de  $y$  mayores que cero, pero se puede expresar de forma más general utilizando el valor de  $c$  para que  $y$  sea positivo. En SAS por defecto  $c=0$  y  $g=1$ .

$$\begin{cases} w = \log(y + c) / g \\ w = \frac{(y + c)^\lambda - 1}{\lambda g} \end{cases}$$

Por ejemplo, la serie número de vuelos España desde Enero de 1995 tiene la siguiente representación gráfica:

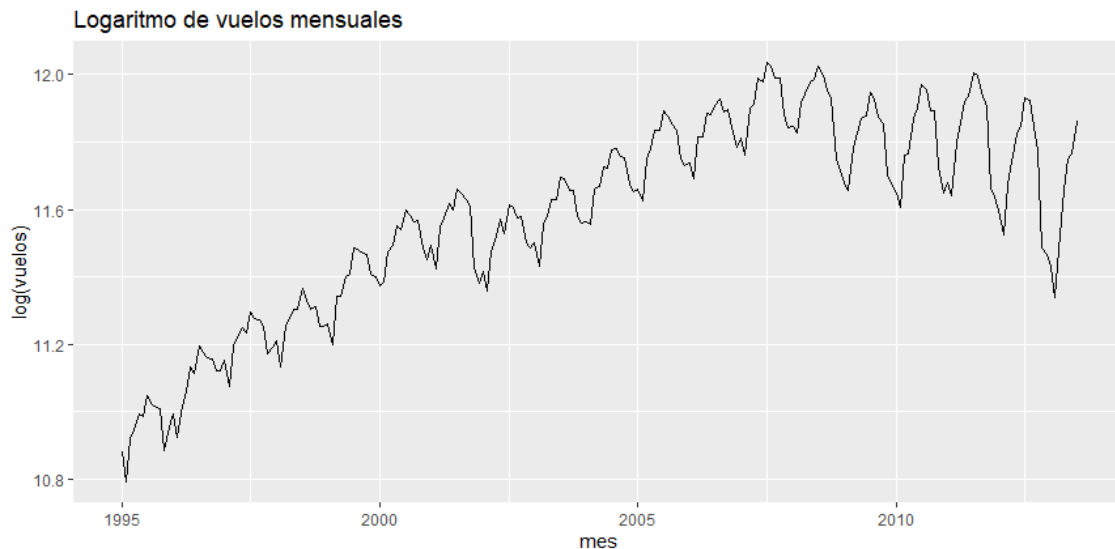
#Número de vuelos en España

```
vuelos <- ts(VUELOS[,-1], start=c(1995,1), frequency=12)
autoplot(vuelos)+ ggtitle("Número de vuelos mensuales") +
  xlab("mes") + ylab("Número de vuelos")
```



Como podemos observar la varianza de la serie aumenta con el tiempo debido a un aumento en la estacionalidad del número de vuelos. Para estabilizar la varianza tomamos logaritmos y representamos la serie para observar el efecto de esta transformación.

```
autoplot(log(vuelos))+ ggtitle("Logaritmo de vuelos mensuales") +  
  xlab("mes") + ylab("log(vuelos)")
```



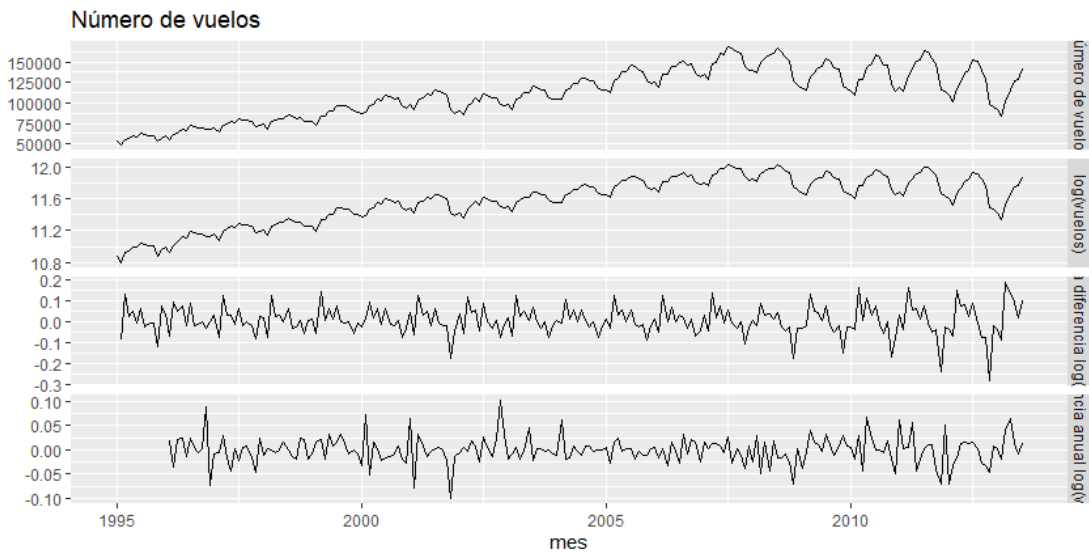
Observemos que ya no hay tanta diferencia en la variabilidad de la serie de los primeros años a los últimos, especialmente si tenemos en cuenta la escala del eje y. Por otra parte, esta serie no tiene la media constante, tanto porque presenta tendencia creciente como por el comportamiento estacional. Por esto, necesitaría una diferenciación de orden 1 para estabilizar la tendencia y una diferenciación de orden 12 para eliminar el efecto estacional.

Mediante la función `cbind` creamos un dataframe con la serie original, el logaritmo de la serie, el logaritmo diferenciado una vez y sobre esta la diferenciación estacional. Estas cuatro series son representadas juntas utilizando el operador pipe de la librería `dplyr`.

```
#Podemos representar a la vez la serie transformada por log y diferenciada  
#la función cbind crea un data frame con las columnas de las series  
#el operador %>% nos facilita la comprensión de funciones anidadas cambiando el  
#orden  
#En este caso la función autoplot se aplica al resultado de cbind
```



```
cbind("número de vuelos" = vuelos,  
      "log(vuelos)" = log(vuelos),  
      "primera diferencia log(vuelos)" = diff(log(vuelos)),  
  
      "diferencia anual log(vuelos)" = diff(diff(log(vuelos)),12)) %>%  
autoplot(facets=TRUE) +  
xlab("mes") + ylab("") +  
ggtitle("Número de vuelos")
```



## 2.7. IDENTIFICACIÓN Y ESTIMACIÓN DEL MODELO ARIMA

La identificación de los órdenes  $p$  y  $q$  del modelo ARMA se realiza comparando las funciones de autocorrelación estimadas simple y parcial con las teóricas. La identificación puede ser una tarea difícil. Con tamaños muestrales grandes y procesos puros AR o MA, la estructura del FAS o FAP muestrales suele mostrar el orden requerido. Sin embargo, para procesos mixtos ARMA, la estructura de las funciones de autocorrelación es complicada. Afortunadamente no es necesario decidir en la etapa de identificación quedarnos con un solo modelo sino que podemos probar con varios.

La identificación puede hacerse siguiendo las siguientes reglas:

- 1.- Decidir cual es el orden máximo de las partes AR y MA a la vista de las funciones de autocorrelación muestrales.
- 2.- Evitar la identificación inicial de modelos mixtos ARMA y comenzar con modelos AR o MA, preferiblemente de orden bajo (*principio de parsimonia*). En la práctica la

mayoría de las series reales pueden representarse con modelos ARMA con  $p$  y  $q$  menores que 3.

**3.- Intentar identificar la estructura de los valores separados por  $s$  periodos** en el caso de series con componente estacional.

En la práctica, la mayoría de las series reales pueden ajustarse a modelos ARMA con  $p, q \leq 3$  y  $P, Q \leq 2$ . Además del orden del modelo, debemos decidir si ajustaremos un modelo con media no nula,  $\mu$ , o lo que es lo mismo con término independiente,  $\delta$ .

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{t=1}^n X_t}{n}$$

Donde  $n$  es el número de observaciones que tenemos después de las diferenciaciones. Para series ARMA  $\bar{X}_n$  se distribuye (para  $n$  suficientemente grande) como una Normal con media  $\mu$  y varianza  $n^{-1} \sum_{|k| < \infty} \gamma_k$ . Estos valores de las autocovarianzas se sustituyen por sus estimaciones quedando, por tanto la varianza de la media aproximada por:

$$V(\bar{X}_n) \simeq \frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} (1 + 2\hat{\rho}_1 + \dots + 2\hat{\rho}_k)$$

Esta aproximación es válida siempre que esta cantidad sea positiva, siendo  $\hat{\sigma}_X^2$  la varianza muestral de la serie y suponiendo que los  $k$  primeros coeficientes de autocorrelación son significativos. Si

$$|\bar{X}_n| > z_{\alpha/2} \sqrt{V(\bar{X}_n)}$$

rechazaremos que la media es nula y la incluiremos en el modelo como un parámetro más a estimar. También se puede incluir directamente el término independiente en el modelo y luego descartarlo si su estimación no sale significativamente distinta de cero.

Supongamos que tenemos un modelo  $ARMA(p, q) \times ARMA(P, Q)_s$  estacionario e invertible, la estimación de sus parámetros es compleja, por lo que daremos una idea general de cada uno de los métodos más utilizados sin entrar en detalles complejos de cálculo.

Comenzaremos con un modelo sin parte estacional  $ARMA(p, q)$

$$Z_t = \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q} + (X_t - \mu) - \phi_1 (X_{t-1} - \mu) - \dots - \phi_p (X_{t-p} - \mu)$$

Se trata de estimar  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma^2$  y  $\mu$ , donde  $\sigma^2$  es la varianza del ruido blanco.

**Una forma sencilla de calcular los parámetros es minimizar lo que se conoce como la suma de cuadrados de los residuos condicionales (CLS)** que utiliza también métodos iterativos como el de Gauss-Newton, pero que alcanza el máximo con menos iteraciones y sin necesidad de valores iniciales. Este método es el más utilizado en el software de series.

Además se puede demostrar que **si el modelo ARMA es estacionario e invertible, los procedimientos de estimación máximo verosímil y estimación por mínimos cuadrados condicionales o no condicionales conducen a estimadores óptimos** y cuando  $n$  es lo suficientemente grande podemos aproximar la distribución de los estimadores por una Normal multivariante. Veamos a continuación **algunas de las distribuciones asintóticas de los estimadores para los modelos más sencillos.**

Ejemplo:

Vamos a estudiar las series de tasa de paro en España, en Cataluña y en la Comunidad de Madrid. Estas series las tenemos en el fichero Paro que tiene por columnas el paro por comunidades autónomas.

Arima1.R* x															Paro x															bitcoin.R x															fitprecio1 x															VUELOS x																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
-------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	-------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

#Tasa de paro por comunidades

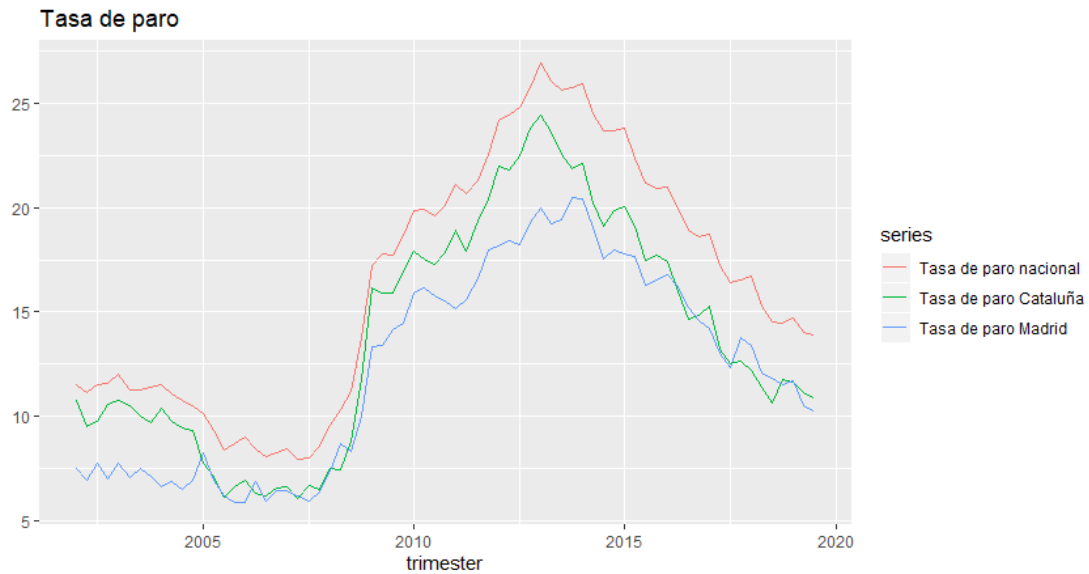
```
Paro_T <- ts(Paro[,1], start=c(2002,1), frequency=4)
```

```
Paro_N <- ts(Paro[,2], start=c(2002,1), frequency=4)
```

```
Paro_C <- ts(Paro[,11], start=c(2002,1), frequency=4)
```

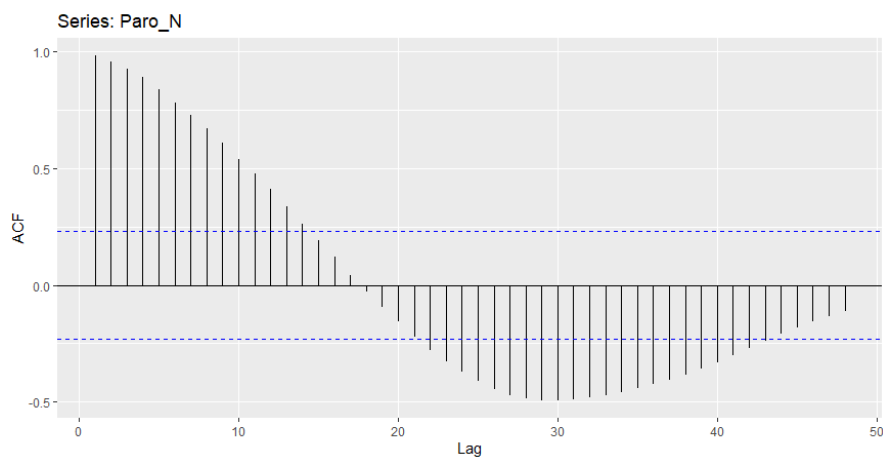
```
Paro_Ma <- ts(Paro[,15], start=c(2002,1), frequency=4)
```

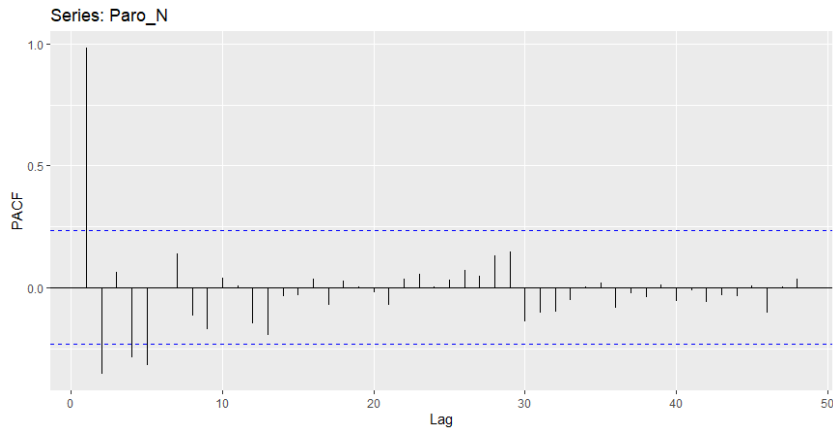
```
cbind("Tasa de paro nacional" = Paro_N,  
      "Tasa de paro Cataluña" = Paro_C,  
      "Tasa de paro Madrid" = Paro_Ma) %>%  
autoplot() +  
xlab("trimester") + ylab("") +  
ggtitle("Tasa de paro")
```



Para la serie Paro nacional comenzamos por calcular los autocorrelogramas

```
#Calculamos las autocorrelaciones simples hasta el retardo 48  
ggAcf(Paro_N, lag=48)  
#Calculamos las autocorrelaciones parciales hasta el retardo 48  
ggPacf(Paro_N, lag=48)
```





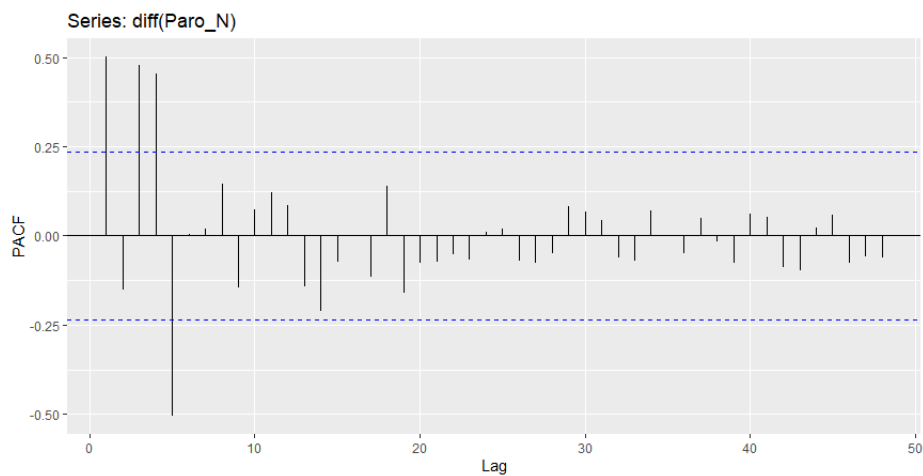
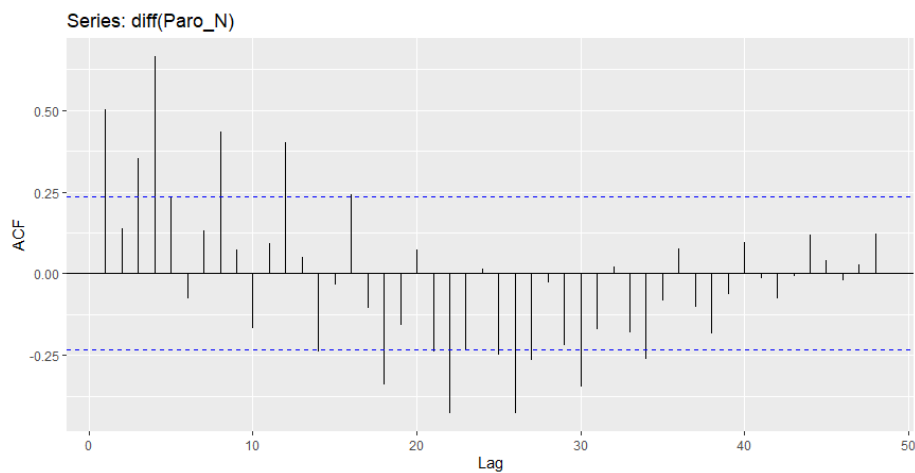
Puesto que en el gráfico de la serie hemos visto que la media no es constante porque la serie tiene tendencia y el ACF decrece de forma lenta es necesario hacer una diferenciación de orden 1.

#Calculamos las autocorrelaciones simples hasta el retardo 48

`ggAcf(diff(Paro_N), lag=48)`

#Calculamos las autocorrelaciones parciales hasta el retardo 48

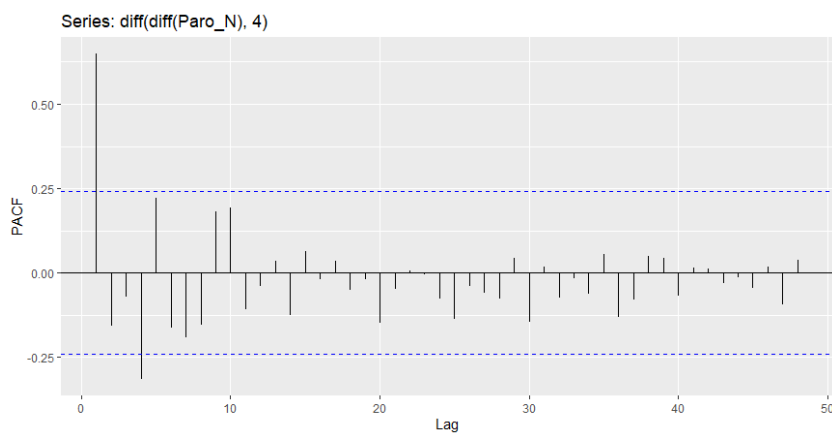
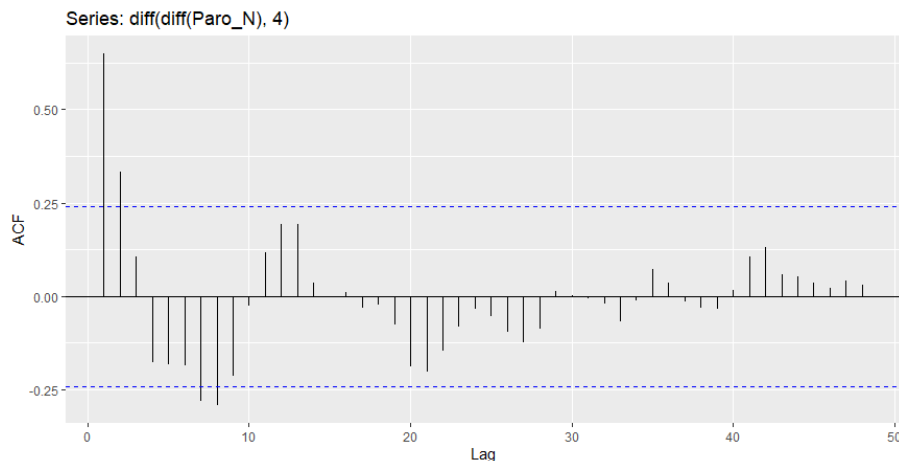
`ggPacf(diff(Paro_N), lag=48)`



Observamos que las autocorrelaciones ya decrecen de forma más rápida pero los retardos múltiplos de 4 siguen teniendo una correlación muy alta. Por esto, es necesario hacer una diferenciación de orden 4 sobre la de orden 1

```
ggAcf(diff(diff(Paro_N),4), lag=48)
```

```
ggPacf(diff(diff(Paro_N),4), lag=48)
```



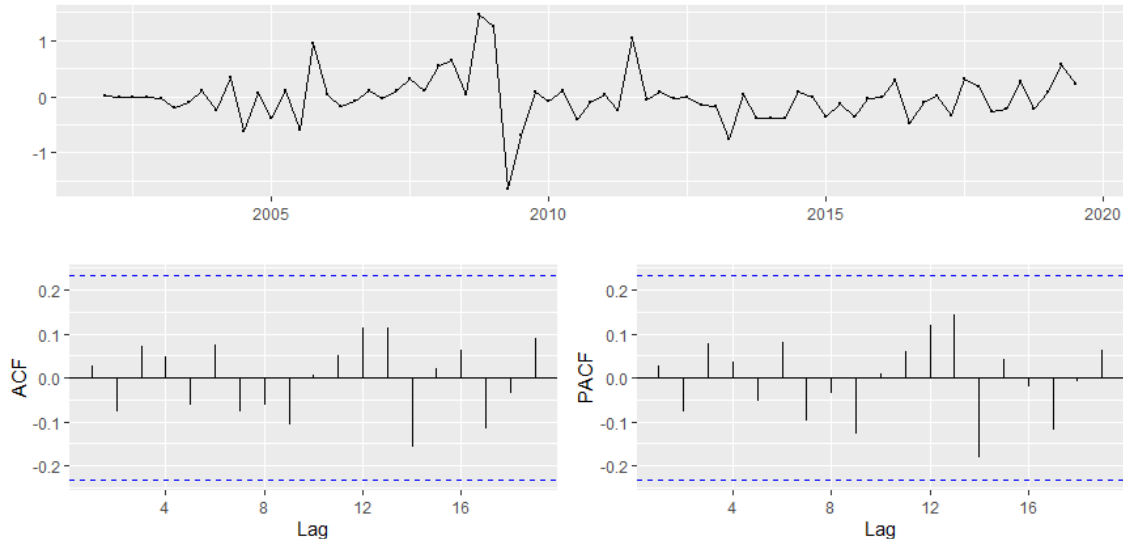
Con la serie doblemente diferenciada vemos, en el PACF, que la autocorrelación de orden 1 sigue siendo significativa y también la de orden 4. Por esto nuestro candidato a ajustar sería:  $ARIMA(1,1,0)(0,1,1)_4$ , o cualquiera de sus variaciones en las posiciones autoregresivas o de medias móviles.

```
#Ajuste manual
```

```
Paro_N %>% Arima(order=c(1,1,0), seasonal=c(0,1,1)) %>%
```

```
residuals() %>% ggtsdisplay()
```

Con esta sintaxis ajustamos el modelo ARIMA y directamente dibujamos el análisis de los residuos lo que nos permite comprobar de una forma rápida si el modelo ajustado es correcto. El resultado es el siguiente



Como vemos los residuos están casi todos entre -1 y 1, y lo más importante es que las autocorrelaciones hasta el retardo 20 son todas cero, lo que significa que el modelo explica toda la estructura de dependencia que hay en la serie.

Una función muy interesante es la función `auto.arima`, que encuentra el mejor modelo Arima ajustando todos los órdenes hasta que consigue que los residuos esten incorrelados.

#Ajuste con la función `auto.arima`

```
fitparon1 <- auto.arima(Paro_N,seasonal=TRUE)
```

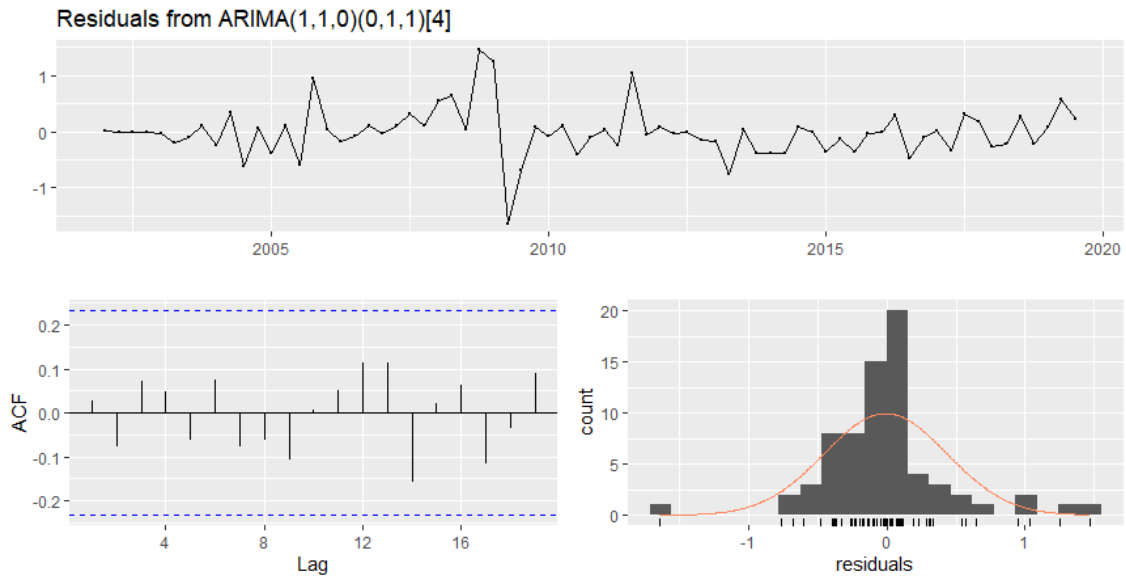
```
checkresiduals(fitparon1)
```

Esta función estudia el comportamiento de los residuales tanto gráficamente como mediante el contraste de Ljung-Box que veremos más adelante.

Ljung-Box test

```
data: Residuals from ARIMA(1,1,0)(0,1,1)[4]  
Q* = 2.5993, df = 6, p-value = 0.8572
```

```
Model df: 2. Total lags used: 8
```



Los valores estimados para el modelo ARIMA ajustados los obtenemos con la función print:

```
print(fitparon1)
Series: Paro_N
ARIMA(1,1,0)(0,1,1)[4]
```

Coefficients:

	ar1	sma1
	0.7773	-0.7213
s.e.	0.0813	0.1333

sigma^2 estimated as 0.2138: log likelihood=-43.35

AIC=92.7 AICc=93.08 BIC=99.26

Observemos que los parámetros estimados son 0.7773 el coeficiente de la parte autoregresiva y -0.7213 el coeficiente de la parte de medias móviles. El modelo ha sido ajustado sin constante porque esta no ha sido significativa porque por defecto la función auto.arima intenta ajustar un modelo con constante. Teniendo en cuenta la diferenciación la expresión del modelo es

$$(1 - 0.7773B)(1 - B^4)(1 - B)X_t = (1 - 0.7213B^4)Z_t$$

Luego el modelo ajustado es,



$$\begin{aligned}
 (1-0.7773B)(1-B^4)(1-B)X_t &= (1-0.7213B^4)Z_t \\
 (1-0.7773B)(1-B^4)(X_t - X_{t-1}) &= -0.7213Z_{t-4} + Z_t \\
 (1-0.7773B)(X_t - X_{t-1} - X_{t-4} + X_{t-5}) &= -0.7213Z_{t-4} + Z_t \\
 X_t - X_{t-1} - X_{t-4} + X_{t-5} - 0.78X_{t-1} + 0.78X_{t-2} + 0.78X_{t-5} - 0.78X_{t-6} &= -0.7213Z_{t-4} + Z_t \\
 X_t - 1.78X_{t-1} + 0.78X_{t-2} - X_{t-4} + 1.78X_{t-5} - 0.78X_{t-6} &= -0.7213Z_{t-4} + Z_t \\
 X_t &= 1.78X_{t-1} - 0.78X_{t-2} + X_{t-4} - 1.78X_{t-5} + 0.78X_{t-6} - 0.7213Z_{t-4} + Z_t
 \end{aligned}$$

Observemos que la expresión final del modelo es,

$$X_t = 1.78X_{t-1} - 0.78X_{t-2} + X_{t-4} - 1.78X_{t-5} + 0.78X_{t-6} - 0.7213Z_{t-4} + Z_t,$$

a partir de la cual se calcularán las predicciones.

## 2.9.- DIAGNOSIS DEL MODELO

El objetivo perseguido al ajustar un modelo ARIMA es encontrar un modelo adecuado para representar la serie objeto del estudio. Después de que se han estimado los parámetros del modelo, en la etapa de diagnosis tenemos que evaluar la adecuación del modelo, estudiando la significación estadística de sus parámetros y comprobando que se satisfacen las hipótesis del mismo mediante el estudio de sus residuos.

### 3.5.1.- Significación estadística de los parámetros.

Sea  $\varphi$  uno cualquiera de los parámetros del modelo especificado. Entonces para realizar el contraste de hipótesis:

$$H_0 : \varphi = 0$$

$$H_1 : \varphi \neq 0$$

Utilizaremos el estadístico  $\frac{\hat{\varphi}}{S(\hat{\varphi})} \cong t_{T-k}$  donde k es el número de parámetros estimados.

Por supuesto, la presencia de parámetros no significativos debe conducir a su eliminación del modelo y a la nueva estimación del modelo más sencillo.

Además, altas correlaciones entre los estimadores de los parámetros del modelo pueden ser indicio de sobreparametrización. En general se considera que una

correlación es suficientemente alta para alertar cuando es superior a 0.6. La presencia de altas correlaciones suele estar acompañada de no significación de los coeficientes.

### 3.5.2. Análisis de los residuos.

La hipótesis básica es que  $\{Z_t\}$  es un proceso de ruido blanco gaussiano. Entonces llamaremos residuos del modelo a las estimaciones obtenidas para el ruido:

$$\hat{Z}_t = -\hat{\theta}_1 \hat{Z}_{t-1} - \dots - \hat{\theta}_q \hat{Z}_{t-q} + (X_t - \hat{\mu}) - \hat{\phi}_1 (X_{t-1} - \hat{\mu}) - \dots - \hat{\phi}_p (X_{t-p} - \hat{\mu})$$

Estas se obtendrán de forma recursiva utilizando como valores iniciales generalmente 0 para los ruidos y la media de la variable para  $X_t$

De esta forma **los residuos así estimados deben tener media cero, varianza constante y ausencia de correlación para cualquier retardo**. También hay que comprobar que tienen distribución Normal, en este caso la falta de correlación implicaría independencia.

**El procedimiento habitual para comprobar la incorrelación de los residuos es representar su correlograma con las bandas de confianza.** Una vez comprobado que los residuos cumplen las hipótesis del modelo, conviene llevar a cabo la técnica del “*sobreajuste*” que consiste en ajustar modelos de grado superior para comparar en que medida mejora el ajuste. Para elegir el más adecuado más tarde estudiaremos criterios de selección de modelos.

El primer contraste a realizar corresponde a la incorrelación de los residuos. Para ello se calculan su correlograma simple y parcial. Si los residuos son independientes, los coeficientes de autocorrelación simple estimados cumplen que

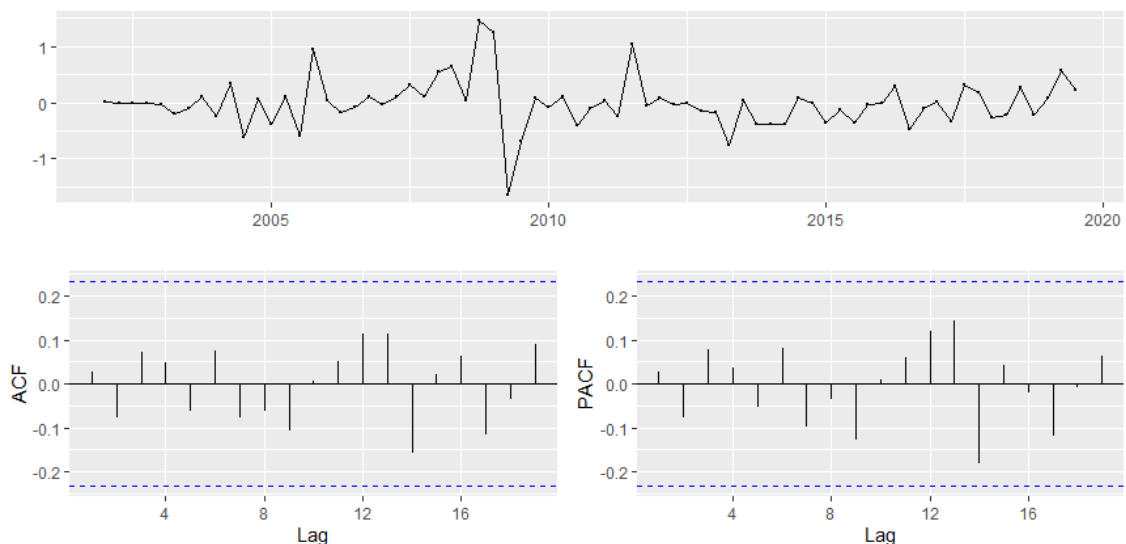
$$\hat{r}_k \cong N\left(0, \sqrt{\frac{T-k}{T(T+2)}}\right)$$

Y para  $k$  no muy pequeño se aproxima por

$$\hat{r}_k \cong N\left(0, \frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

Por esto, el procedimiento habitual de verificar la incorrelación de los residuos es dibujar dos líneas paralelas a distancia  $2/\sqrt{T}$  del origen en sus funciones de autocorrelación simple o parcial estimadas y comprobar si todos los coeficientes están dentro de los límites de confianza. Como estos intervalos son aproximadamente de un nivel de confianza del 95%, ( $2 \approx 1.96$ ) en promedio uno de cada 20 coeficientes de autorrelación estimados saldrá fuera, por lo que la aparición de un valor significativo en un retardo elevado es esperable. Sin embargo, para los retardos iniciales, estos límites de confianza sobrestiman la varianza real por lo que valores próximos a los límites en los coeficientes iniciales pueden ser signo de que los residuos no están incorrelados.

[checkresiduals\(fitparon1\)](#)



Si observamos los autocorrelogramas asociados vemos que todos están dentro de las bandas de confianza.

### El contraste Ljung-Box sobre las autocorrelaciones.

Un contraste global de que los primeros  $h$  coeficientes son cero ( $h$  debe ser grande) es el contraste de Ljung-Box. Si los residuos son realmente ruido blanco sabemos que

$$\hat{r}_k \cong N\left(0, \sqrt{\frac{T-k}{T(T+2)}}\right)$$

Por tanto si tipificamos, elevamos al cuadrado y sumamos tenemos una  $\chi^2$ . En concreto,

$$Q(h) = T(T+2) \sum_{j=1}^h \frac{\hat{r}_{\cdot j}^2}{T-j} \cong \chi_{h-n}^2$$

Donde  $n$  es el número de parámetros estimados. Para modelos no estacionales  $n = p + q + 1$ , o  $n = p + q$ , según que el modelo tenga o no constante, y para los estacionales que suelen no tener constante  $n = p + q + P + Q$ . Luego concluiremos que el modelo es inadecuado si  $Q(h) > \chi_{h-n}^2$ .

En el ejemplo del paro nacional el modelo  $AR(1,1,0)(0,1,1)_4$  es adecuado según este contraste puesto que aceptamos la aleatoriedad de los residuos ya que los p-valores son mayores de 0.05.

Ljung-Box test

data: Residuals from ARIMA(1,1,0)(0,1,1)[4]  
Q\* = 2.5993, df = 6, p-value = 0.8572

Model df: 2. Total lags used: 8

**Contrastes de normalidad.** Esta hipótesis se comprueba gráficamente con el histograma de los residuos con la curva normal ajustada.

### 3.5.3. Medidas de la adecuación del modelo.

Una vez aceptado un modelo como válido podemos, podemos compararlo con otros de orden superior calculando los errores cometidos con cada modelo para las  $T$  observaciones de que disponemos  $\varepsilon_t = X_t - \hat{X}_t$

El valor total de estos residuos se resume en diferentes estadísticos que presentamos a continuación y cuya comparación es más sencilla. En definitiva, buscamos el menor error total posible medido de diferentes formas.

El Error Absoluto Medio:

$$MAE = \sum_{t=1}^T \frac{|e_t|}{T}$$

La suma de cuadrados de los errores:

$$SSE = \sum_{t=1}^T e_t^2$$

Si dividimos por los grados de libertad de los errores tenemos la Media de los Errores al cuadrado:

$$MSE = \sum_{t=1}^T \frac{e_t^2}{T-k}$$

La desviación estándar del error también llamada raíz de la media de los errores al cuadrado.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{t=1}^T \frac{e_t^2}{T-k}}$$

Hay además una serie de medidas que recogen el tamaño proporcional del error en relación al valor de la serie que lo produce. El porcentaje de error para el instante t:

$$PE_t = \frac{e_t}{X_t} \times 100$$

Si queremos resumir este porcentaje para toda la serie tenemos las siguientes medidas:

$$MPE = \sum_{t=1}^T \frac{PE_t}{T}$$

Como los errores pueden ser positivos y negativos calcularemos la media anterior para los valores absolutos:

$$MAPE = \sum_{t=1}^T \frac{|PE_t|}{T}$$

Basadas en estas medidas absolutas definimos las medidas en términos relativos que **nos permitirán comparar varios modelos** de forma rápida.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T SSE}{\sum_{t=1}^T SST}$$

Si ajustamos por los grados de libertad, para tener en cuenta la mayor complejidad de los modelos tenemos el valor:

$$R^2 - Adj = \left(1 - \frac{k}{T}\right) R^2$$

En R podemos calcular todas estas medidas con la función `accuracy`.

# Accuracy

`round(accuracy(fitparon1),3)`

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
Training set	-0.009	0.439	0.283	0.153	1.969	0.142	0.028

El criterio de información de Akaike y el criterio bayesiano de Schwarz están basados en el logaritmo de la función de verosimilitud utilizada para calcular los estimadores de la serie bajo el supuesto de Normalidad de los residuos. Por esta razón si utilizamos estos criterios para comparar modelos o para medir la adecuación de uno **debemos asegurarnos de que los residuos tienen distribución Normal**.

$$AIC = -2\ln(L) + 2k$$

$$SBC(BIC) = -2\ln(L) + \ln(n)k$$

Donde  $L$  es la función de verosimilitud de la serie,  $k$  el número de parámetros y  $n$  el número de residuos calculados.

Resumimos a continuación algunas cuestiones sobre la interpretación y utilización de estos criterios:

- **El primer término de la definición del AIC es el que realmente mide el desajuste, su valor aumenta cuando peor es el ajuste;** mientras que el segundo, denominado de penalización, mide la complejidad del modelo a partir del número de parámetros.

- El AIC sigue el principio de parsimonia: Cuando el número de parámetros de un modelo  $k$  aumenta el AIC también, **por tanto escoger el modelo que tiene el mínimo AIC supone elegir el modelo con el menor número de parámetros posible.**
- Si el número de parámetros de un modelo  $k$  aumenta, el modelo gana complejidad y el término de penalización se incrementa, pero a la vez el desajuste disminuye, por tanto el valor final del AIC supone un equilibrio entre reducir la complejidad (principio de parsimonia) y mantener un valor mínimo de desajuste entre el modelo teórico y estimado.
- Finalmente queremos destacar que el AIC es una medida global de la bondad del ajuste del modelo, su cálculo se realiza desde un punto de vista predictivo lo que supone que los modelos identificados a partir de este criterio tienen un buen comportamiento respecto a la predicción.