Trabajo Práctico 1

Mostrar que

$$\langle A, B \rangle = Tr(AB^H) \quad (*)$$

define un producto interno en $\mathbb{C}^{n \times m}$. A este p.i. se lo conoce como producto interno de Frobenius. (La operación A^H representa transpuesta y conjugada).

Demostración

Sean $A, B \wedge C \in \mathbb{C}^{n \times m}$
$\alpha \in \mathbb{C}$

(1) (a) $\langle A \pm B, C \rangle = Tr[(A \pm B)C^H]$

Por defin. de $(*)$

$= Tr[AC^H \pm BC^H]$

Por prop distrib. del prod. respecto a la suma:
$\forall A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}, C, D \in \mathbb{K}^{n \times p}$: $(A \pm B)C = AC \pm BC$ [1]

$= Tr[AC^H] \pm Tr[BC^H]$

Por A.1 (ver anexos)

$= \langle A, C \rangle \pm \langle B, C \rangle$

Por definición $(*)$

(1) (b) $\langle \alpha A, B \rangle = Tr[(\alpha A)B^H]$

Por def. de $(*)$

Por prop. asociativa: $= Tr[\alpha(AB^H)]$

$\lambda(BC) = (\lambda B)C = B(\lambda C) = (BC)\lambda$, $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{K}^{n \times p} \wedge \lambda \in \mathbb{K}$ [1]

$= \alpha \, Tr[AB^H]$

Por A.1 (ver anexos)

$= \alpha \langle A, B \rangle$

Por def. $(*)$

(2) $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB^H)$

Por def. (*)

$= \mathrm{Tr}[(A^H)^H B^H]$

Por (A.2) (ver anexos)

$= \mathrm{Tr}[(BA^H)^H]$

Por (A.3) (ver anexos)

$= \mathrm{Tr}[\overline{(BA^H)^t}]$

Por def. de transp conjugada

$= \overline{\mathrm{Tr}[(BA^H)^t]}$

Por (A.4) (ver anexos)

$= \overline{\mathrm{Tr}[(BA^H)]}$

$= \overline{\langle B, A \rangle}$

Por def. (*)

(3) $\langle A, A \rangle = \mathrm{Tr}(AA^H) = \sum_{i=1}^{n} [AA^H]_{ii}$

Por def. de (*)

Por def. de transp.

$\underbrace{\underset{n\times m}{A}\ \underset{m\times n}{A^H}}_{n\times n}$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{K=1}^{m} [A]_{iK} [A^H]_{Ki}$

def. de produc de matrices

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{K=1}^{m} [A]_{iK} \overline{[A^t]_{Ki}}$

Por def. de matriz transp. conjugada

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{K=1}^{m} [A]_{iK} \overline{[A]_{iK}}$

Por def. de matriz transpuesta

$[A^t]_{ij} = [A]_{ji}$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{K=1}^{m} \| [A]_{iK} \|^2$

Por def. de norma de números complejos:

$\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \Rightarrow \|z\|^2 = z\bar{z}$

$\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \| [A]_{ik} \|^2 \geq 0$$

def. de norma de un número complejo
$\|z\| \geq 0$
$\|z\| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

la suma de números no negativos es no negativo $\Longrightarrow$
$$\begin{cases} \langle A, A \rangle \geq 0 \\ \langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow A = \Theta \end{cases}$$

Luego por (1.a), (1.b), (2) y (3) $\Longrightarrow$ $\langle A, B \rangle = Tr(AB^H)$ es un prod. interno

por def. de Producto interno

$\square$

- Anexos

(A.1) Sean $A \wedge B \in \mathbb{K}^{n \times n}$
$\alpha \in \mathbb{K}$

(1) $Tr(A \pm B) = \sum_{i=1}^{n} [A \pm B]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} ([A]_{ii} \pm [B]_{ii})$

Por def de traza

por def. de Sum. de matrices

$= \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} \pm \sum_{i=1}^{n} [B]_{ii}$

Prop. asoc. de la suma en $\mathbb{K}$

$= Tr(A) \pm Tr(B)$

por def de traza

(2) $Tr(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} [\alpha A]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \alpha [A]_{ii}$

Por def. del Prod. de un escalar por una matriz

$= \alpha \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii}$

Por prop. distrib. del prod. resp. a la suma en $\mathbb{K}$

$= \alpha Tr(A)$

por def. de traza

Por (1) y (2) $\Rightarrow$ Tr es una Transf. lineal.

(A.2) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$

$$(A^H)^H = \left(\overline{\overline{A^t}}\right)^t = (A^t)^t = A$$

por def. de matriz transp conj

Por prop. de conjug. de numeros $\mathbb{C}$:

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{\overline{z}} = z$

por prop. de transp.

$\forall A \in \mathbb{K}^{n\times m} : (A^t)^t = A$

(A.3) Sean $A \wedge B \in \mathbb{C}^{n\times m}$

Por def. de transp. conjug.

$$B^H A^H = \overline{B^t}\ \overline{A^t} = \overline{B^t A^t} = \overline{(AB)^t} = (AB)^H$$

def. de matriz transp conjugada

por prop. de conj de $\mathbb{C}$:

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Por prop. de transp.

$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times m} \quad (AB)^t = B^t A^t$

(A.4) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$Tr(\overline{A}) = \sum_{i=1}^{n} [\overline{A}]_{ii}$$

por def. de traza

Por prop. de conjug. en $\mathbb{C}$:

$\forall z_1 \wedge z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$$= \overline{\sum_{i=1}^{n} [A]_{ii}}$$

$$= \overline{Tr(A)}$$

Por def. de transp.

Referencias

[1] Mathematics for Machine Learning. Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, Cheng Soon Ong.

Canal, José David

Jose.David.Canal.89@gmail.com