David Canal | Probabilidad y Estadística para IA | 1

Trabajo práctico Nº 1: "Normal multivariada"

Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$$f_{XY} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4{,}56}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-1 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix}\right\} \quad (1)$$

(a) ¿Qué distribución sigue el vector (X,Y)? Especificar de forma completa.

Respuesta

Sabemos que una función de distribución normal multivariada es:

$$f_X(\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{\bar{X}}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\bar{X}-\bar{\mu})^T \Sigma^{-1} (\bar{X}-\bar{\mu})\right\}$$

donde:

- $\bar{X} = [x_1,\dots,x_n]^T$ es una V.A de dimensión n
- Σ: es la matriz de covarianza $\longrightarrow$ Matriz $\mathbb{R}$ def. positivamente de dimensión $n\times n$
- $\bar{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$

Para el caso particular de $\bar{X} = [X, Y]^T$ (2 dim.):

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{2/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-\mu_x & y-\mu_y \end{bmatrix}^T \Sigma^{-1}\begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}\right\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-\mu_x & y-\mu_y \end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}\right\}} \quad (2)$$

donde de la comparación de (1) y (2), tenemos:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6-1{,}44}\begin{bmatrix} 3 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\cong \boxed{0{,}22\begin{bmatrix} 3 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & 2 \end{bmatrix}}$$

Recordando que:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

* $|\Sigma| = 6 - 1{,}44 = \boxed{4{,}56}$

* $\bar{\mu} = [1 \quad 0]^T$

$\underset{\text{comparando (1) y (2)}}{\Longrightarrow}$ (1) es una distribución Normal bivariada.

(b) Hallar las distribuciones marginales de X e Y.

Respuesta

Tenemos:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & \rho_{xy}\sigma_{xx}\sigma_{yy} \\ \rho_{xy}\sigma_{xx}\sigma_{yy} & \sigma_{yy}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2\sigma_{yy}^2 - \rho_{xy}^2\sigma_{xx}^2\sigma_{yy}^2}\begin{bmatrix} \sigma_{yy}^2 & -\rho_{xy}\sigma_{xx}\sigma_{yy} \\ -\rho_{xy}\sigma_{xx}\sigma_{yy} & \sigma_{xx}^2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}} \Rightarrow \sigma_{xy} = \rho_{xy}\sqrt{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}$$

Por la siguiente propiedad vista en clase:

Si el vector $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ tiene una distribución normal mult. variada ($X \sim N(\bar{\mu}, \Sigma)$), entonces X_i tiene una distrib. normal $\forall i = 1, \dots, n$. Es decir:

$$X \sim N(\bar{\mu}, \Sigma) \Rightarrow X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

donde:

$$\bar{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & cov(x_1,x_2) & \dots & cov(x_1,x_n) \\ cov(x_2,x_1) & \sigma_2^2 & \dots & cov(x_2,x_n) \\ \vdots & & \ddots & \\ cov(x_n,x_1) & cov(x_n,x_2) & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Entonces:

- $X \sim N(\mu_x, \sigma_{xx}^2) \Rightarrow \boxed{X \sim N(1, 2)}$
- $Y \sim N(\mu_y, \sigma_{yy}^2) \Rightarrow \boxed{Y \sim N(0, 3)}$

Luego:

- $$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{xx}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_{xx}^2}\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2}\right\}$$
$$= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{4}(x-1)^2\right\}}$$

- $$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{yy}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_{yy}^2}\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{3}\right\}$$
$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{6}y^2\right\}}$$

(c) Calc. $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ y $cov(X,Y)$

Resolución

Por propiedades vistas en clases:

$E(X) = \mu_x = 1 \rightarrow$ dado que $X \sim N(1,2)$

$E(Y) = \mu_y = 0 \rightarrow$ dado que $Y \sim N(0,3)$

$Var(X) = \sigma_{xx}^2 = 2 \rightarrow$ " " $X \sim N(1,2)$

$Var(Y) = \sigma_{YY}^2 = 3 \rightarrow$ dado que $Y \sim N(0,3)$

$Cov(X,Y) = \rho_{XY}\,\sigma_{XX}\,\sigma_{YY} = -1/2 \rightarrow$ dado que $\bar{X} \sim N(\bar{\mu},\Sigma)$

(d) Dado un valor específico para la variable aleatoria X, expresar de forma analítica la función de densidad condicional $f_{X|Y}(x,y)$ de la variable aleatoria Y dado que $X = a$.

Resultado

Durante la clase 3 se vio lo siguiente:

$$\text{Sea } X = [X_1\ X_2]^T \sim N(\bar{\mu},\Sigma)$$

Entonces:

$$X_1|X_2 = x_2 \sim N\left(\mu_1 + \frac{cov(X_1,X_2)}{\sigma_2^2}(x_2-\mu_2),\ \left(1-\frac{cov(X_1,X_2)^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\sigma_1^2\right)$$

$$X_2|X_1 = x_1 \sim N\left(\mu_2 + \frac{cov(X_1,X_2)}{\sigma_1^2}(x_1-\mu_1),\ \left(1-\frac{cov(X_1,X_2)^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\sigma_2^2\right)$$

Para nuestro caso particular tenemos que:

$$\bar{X} = [X\ Y]^T \sim N(\bar{\mu},\Sigma)$$

Luego:

$$Y|X = a \sim N\left(\mu_y + \frac{cov(X,Y)}{\sigma_{XX}^2}(x-\mu_x),\ \left(1-\frac{cov(X,Y)^2}{\sigma_{XX}^2\sigma_{YY}^2}\right)\sigma_{YY}^2\right)$$

donde:

- $\dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_{XX}^2} = \dfrac{-1{,}2}{2} = -0{,}6$

- $\dfrac{cov(X,Y)^2}{\sigma_{XX}^2\,\sigma_{YY}^2} = \dfrac{1{,}44}{2\cdot 3} = \dfrac{1{,}44}{6} = 0{,}24$

$$\Rightarrow Y|X = a \sim N\left(0 - 0{,}6(\overset{=a}{X} - 1),\ (1-0{,}24)\cdot 3\right)$$

$$\boxed{Y|X = a \sim N\left(-0{,}6(a-1),\ 2{,}28\right)}$$

David Canal	Probabilidad y Estadística para IA TP N°1	3

$$\boxed{f_{Y|X=a}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2{,}28}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(y+0{,}6(a-1))^2}{2{,}28}\right\}}$$

David Canal