David Canal	Análisis Matemático para Intelig. Artif.	1

Trabajo Práctico Nº 2

Leonardo Fibonacci fue el primer matemático en estudiar la serie de números 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... La secuencia de Fibonacci se puede expresar de forma recursiva como:

$$(*)\ f_{k+1} = f_k + f_{k-1}\ ,\ f_0 = 0;\ f_1 = 1$$

a) Sea $x^{(k)} = [f_{k+1}\ f_k]^T$. Escribir la relación de las variables de forma matricial, es decir:

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}\ ,\ k = 1, 2, \ldots;\ x^{(0)} = [1\ 0]^T$$

Resolución

Tenemos:
$$x^{(k)} = [f_{k+1}\ \ f_k]^T$$
$$x^{(k-1)} = [f_k\ \ f_{k-1}]^T$$

Sea
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{bmatrix}}_{x^{(k)}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{bmatrix}}_{x^{(k-1)}} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} af_k + bf_{k-1} \\ cf_k + df_{k-1} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

Por definición de igualdad de mat.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f_{k+1} = af_k + bf_{k-1} & (1) \\ f_k = cf_k + df_{k-1} & (2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

def. de igualdad de polinom.

En (1) (por def (*)):

$$f_k + f_{k-1} = af_k + bf_{k-1} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Verificación

$$A X^{(K-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_K \\ f_{K-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{f_K + f_{K-1}}^{= f_{K+1}} \\ f_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{K+1} \\ f_K \end{bmatrix} = X^{(K)}$$

b) Calcular los autovalores y autovectores de A. ¿Es A diagonalizable? En caso de serlo, hallar la diagonalización de la misma.

Resolución

$$|A - \lambda \mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \qquad \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Autovectores:

Asociado a λ_1: Sea $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a \\ \lambda_1 b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a \\ \lambda_1 b \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \lambda_1 a \\ a = \lambda_1 b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda_1)a + b = 0 & (1) \\ a - \lambda_1 b = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda_1)a + b = 0 & (1) \\ a = \lambda_1 b & (2) \end{cases}$$

reemplazo (2) en (1):

Quiero una soluc. ≠ de la trivial

$$-\lambda_1(1-\lambda_1)b + b = 0$$

$$b\left(1 - \lambda_1(1-\lambda_1)\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \; ✗ \\ \vee \\ 1 - \lambda_1(1-\lambda_1) = 0 \; ✓ \end{cases}$$

Se cumple $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ dado que λ_1 cumple con $(*)$

Entonces por (2): $a = +\lambda_1 b$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} +\lambda_1 b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall \ b \in \mathbb{R}$$

Ahora:

$$\|v_1\| = \sqrt{1 + \lambda_1^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{v_1' = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}} \text{ es el autovector asociado a } \lambda_1$$

Asociado a λ_2: Sea $v_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$A v_2 = \lambda_2 v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 c \\ \lambda_2 d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c + d \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 c \\ \lambda_2 d \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c + d = \lambda_2 c & (3) \\ c = \lambda_2 d & (4) \end{cases}$$

reemplazo (4) en (3): $\lambda_2 d + d = \lambda_2^2 d$

$$\lambda_2 (1 - \lambda_2) d + d = 0$$

$$d\left(\lambda_2(1-\lambda_2) + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \ \times \to \text{Solución trivial} \\ \vee \\ \lambda_2(1-\lambda_2) + 1 = 0 \ \checkmark \end{cases}$$

$\downarrow$

Se cumple $\forall \ c, d \in \mathbb{R}$ dado q' λ_2 es solución de $(*)$

Entonces por (4): $c = \lambda_2 d$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 d \\ d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall \ d \in \mathbb{R}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{1 + \lambda_2^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{v_2' = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es el autovector asociado a } \lambda_2}$$

Diagonalización

- **Teorema 4.12 [1]**

Los autovectores $x_1, \dots, x_n$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con n autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son linealmente independiente.

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 \text{ son } \neq \underset{\substack{\text{por el}\\ \text{teorema}\\ \text{anterior}}}{\Longrightarrow} v_1' \text{ y } v_2' \text{ son L.I} \underset{\substack{\text{por teorema}\\ \text{de clase}}}{\Longrightarrow} A \text{ es diagonalizable}$$

Ahora:

Sean $P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

Calculamos:

$$P^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2}} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}}$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

Sabemos P^{-1} para una matriz 2×2, tenemos:

con $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ab - cd} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Luego:

$$P^{-1} A P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 + 1 & \lambda_2 + 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1 + 1 - \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2 + 1 - \lambda_2^2 \\ -(\lambda_1 + 1) + \lambda_1^2 & -(\lambda_2 + 1) + \lambda_2\lambda_1 \end{bmatrix}$$

Ahora:

- $\lambda_1 + 1 - \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ diferencia de cuad

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 + 1 = \boxed{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

- $\lambda_2 + 1 - \lambda_2^2 = 0 \rightarrow$ xq' λ_2 es solución del polinomio característico $(*)'$

- $-\lambda_1 - 1 + \lambda_1^2 = 0 \rightarrow$ Idem

- $-\lambda_2 - 1 + \lambda_2\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 + 1$$

$$= -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Entonces:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cancel{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\cancel{5}} + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\cancel{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\cancel{5}} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = D$$

(c) Hallar una fórmula explícita para el K-ésimo elemento de serie f_K. Sugerencia: usar los resultados del ítem anterior y hallar primero una expresión para $x^{(K)}$.

Resolución

sabemos que $\longrightarrow$ $x^{(K)} = A\, x^{(K-1)}$

Por otro lado $\longrightarrow$ $D = P^{-1} A P$ $\rightsquigarrow$ premult. miem por P

$PD = AP$ $\rightsquigarrow$ pos mult miem por P^{-1}

$\boxed{P D P^{-1} = A}$

Entonces:

$$x^{(K)} = PDP^{-1} \underbrace{x^{(K-1)}}_{= PDP^{-1} x^{(K-2)}}$$

$$\Rightarrow x^{(K)} = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \underbrace{x^{(K-2)}}_{= PDP^{-1} x^{K-3}}$$

$$= (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\, x^{K-3}$$

$$= (PDP^{-1})^3\, x^{(K-3)}$$

$$= (PDP^{-1})^3 \cdots (PDP^{-1})\, x^{(\overset{=0}{K-K})}$$

$$= (PDP^{-1})^K x^{(0)} \longrightarrow x^{(0)} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(K)} = (PDP^{-1})^K \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando el siguiente resultado de [2]:

$$A^K = (PDP^{-1})^K = PD^K P^{-1} \quad (4.62)\ [2]$$

David Canal	Análisis Matemático para IA TP Nº 3	4

Entonces:

$$X^{(k)} = \left(P D^k P^{-1}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por otro lado sabemos que:

$$D^n = \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right)^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{bmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{2\times 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ -\lambda_2^k \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_1^k - \lambda_2 \lambda_2^k \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{recordando que } \sqrt{5} = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$\begin{bmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f_{k+1} = \dfrac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\[2ex] f_k = \dfrac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{f_k = \dfrac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}}$$

Puede verse que el termino f_{k+1} es una extensión de la expresión de f_k

con $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

Referencias

[1] Teorema 4.12. Chapter 4. Mathematics for Machine Learning, Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, Cheng Soon Ong.

[2] Ecuation 4.62. Chapter 4. Mathematics for Machine Learning, Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, Cheng Soon Ong.

David Canal