

**Mémoire de soutenance de Diplôme d'Ingénieur INSA
Spécialité TOPOGRAPHIE**

**Évaluation d'une solution de référence
autonome pour la navigation pedestre dans les
bâtiments**

Présenté en **Septembre 2014** par **Camille MARCHAND**

Réalisé au sein du laboratoire :

IFSTTAR - Lab. GEOLOC
Route de Bouaye
Bouguenais – 44340 Cedex

Directeur de PFE :
Mme RENAUDIN
Chargée de recherche
IFSTTAR – Lab. GEOLOC

Correcteur :
M FERHAT
Maître de conférences
INSA de Strasbourg

Remerciements

Avant toute chose, je tiens à remercier les personnes qui ont contribué de loin ou de près à la réussite de ce stage.

Je remercie donc Valérie Renaudin pour le sujet de stage qui m'a permis de prendre du recul quant aux approches classiques de la topographie et de me confronter au monde de la recherche. Son dynamisme motivant et son ambition contagieuse en matière de recherche ont été des moteurs tout au long de ces six mois. De plus, j'ai eu la chance de participer à la rédaction d'un article. Je lui en suis, à ce titre, très reconnaissante.

La solution implémentée au cours de ce stage n'aurait pas pu être aussi performante sans les conseils avisés de Christophe Combettes en matière de code sous Matlab. Son aide tout au long de mon stage m'a été très précieuse.

Je tiens également à remercier les autres membres de GEOLOC, à savoir François Peyret, responsable du laboratoire, David Bétaille et Miguel Ortiz ainsi que toutes les personnes rencontrées à l'IFSTTAR.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble de mes professeurs pendant mes 5 ans de scolarité à l'INSA de Strasbourg.

Ma famille, pendant mes cinq ans d'études, m'a toujours soutenue et je les en remercie. En particulier, mon petit frère, Germain, s'est attelé à la longue tâche de la relecture de ce rapport, je ne peux que lui dire merci.

Ces remerciements ne s'arrêtent pas là car ce stage à l'IFSTTAR n'aurait pas été aussi plaisant sans les autres étudiants rencontrés sur Nantes. Grâce à eux, j'ai pu découvrir avec enthousiasme tous les recoins de Nantes et de sa région. Mes remerciements s'adressent donc aux autres stagiaires de l'IFSTTAR prenant la navette, en particulier Mathilde, Karim, Léo, Caroline, Malo et Eric, aux post-doc et thésards rencontrés, en particulier William et Yngjie, et à Florent stagiaire chez Bio-Littoral.

Le projet de fin d'études est la conclusion de cinq années d'études passées à l'INSA, dans la ville de Strasbourg. Toutes les personnes rencontrées ont contribué, chacune à leur manière, à la réussite de ces années. Je tiens à les remercier pour leur amitié, leurs conseils, leur écoute, leur enthousiasme, les discussions plus ou moins philosophiques autour d'une bière et tous les autres nombreux bons moments passés ensemble. Je remercie donc chaleureusement mes camarades de promo en particulier Jacques, Lucie, Quentin, Christelle, Rémi et les « Stef » ainsi que tous mes autres camarades n'ayant, malheureusement, pas choisi la spécialité topographie à savoir Caroline, Nicolas, Sophie, Noémie, Alexandre, Sylvain et Juliette.

Table des matières

Introduction	5
1. État de l'art et principes de base	7
1.1. Différents repères	7
1.1.1. Repère « inertiel »	7
1.1.2. Repère « navigation »	7
1.1.3. Repère « body »	7
1.2. Système de référence	8
1.3. Navigation pedestre en intérieur	8
1.3.1. « Pedestrian Dead Reckoning System »	8
1.3.2. Navigation à l'estime avec une centrale inertielle sur le pied	9
1.3.3. Comment calculer le cap de marche plus précisément ?	10
1.4. Compensation avec un filtre de Kalman	10
1.4.1. Une étape de prédiction	11
1.4.2. Une étape de mise à jour	11
1.5. Étude de la variance d'Allan	12
1.5.1. Théorie	12
1.5.2. Comment obtient-on les valeurs des bruits ?	13
1.6. Un changement de repère exprimé avec un quaternion	14
2. Mesures inertielles et observations GNSS exploitées	17
2.1. Solution de référence : DGPS	17
2.2. Caractéristiques de la centrale inertielle	17
2.2.1. Données constructeurs	17
2.2.2. Bilan des erreurs pour une centrale inertielle	17
2.3. Modélisation des observations de la centrale inertielle	18
2.3.1. Modélisation de l'accélération	18
2.3.2. Modélisation du biais d'accélération	19
2.3.3. Modélisation des mesures du gyromètre et lien avec le quaternion	19
2.3.4. Modélisation du biais du gyromètre et lien avec le biais sur le quaternion du gyromètre	19
2.3.5. Modélisation du champ magnétique	20
2.4. Position et vitesse du pied du piéton	20
2.4.1. Modélisation de la vitesse du pied du piéton	20
2.4.2. Modélisation de la position du piéton	20
3. Initialisation - Prédiction	21
3.1. Initialisation du filtre de Kalman	21
3.1.1. Initialisation du vecteur d'état	21
3.1.2. Initialisation des variances et des bruits de mesure	22
3.2. Phase de prédiction	25
3.2.1. Lois d'évolution du quaternion et des biais	25
3.2.2. Lois d'évolution de la vitesse et de la position du piéton	26
3.2.3. Matrice de transition entre deux états	27
3.2.4. Loi d'évolution de la variance du système	29

4.	Correction du vecteur d'état.....	31
4.1.	Détection de QSA et QSF	31
4.2.	Application des mises à jour liées... ..	31
4.2.1.	...aux variations du champ magnétique	31
4.2.2.	...aux variations de l'accélération.....	32
4.3.	Détection de ZUPT.....	33
4.3.1.	Détection de pas à l'aide de l'accéléromètre	33
4.4.	Application de ZUPT	35
4.4.1.	Innovation liée à la vitesse du pied.....	35
4.4.2.	Innovation liée à la position du piéton	35
4.4.3.	Mise à jour en ZUPT	36
5.	Acquérir des données en vue d'une solution de référence	39
5.1.	Rappel des objectifs.....	39
5.2.	Description globale des tests	39
5.2.1.	Équipement pour l'acquisition	39
5.2.2.	Parcours effectués.....	40
5.3.	Étude de précision	41
5.3.1.	Approche théorique	41
5.3.2.	Indicateurs de précision effective	43
5.4.	Analyse des résultats	44
5.4.1.	Analyse des traces	44
5.4.2.	Étude statistique	49
5.4.3.	Impact des différentes mises-à-jour.....	49
5.4.4.	Présence des QSF pendant les phases d'oscillation du pied	50
5.5.	Recommandations sur le protocole d'acquisition	51
5.5.1.	Effets des phases statiques imposées.....	51
5.5.2.	Vitesse de marche.....	53
5.5.3.	Conclusion sur les recommandations	53
	Conclusion.....	55
	Bibliographie	57
	Annexes	59
A.1	Variance d'Allan	61
A.1.1	Définition de la variance d'Allan	61
A.1.2	Variance d'Allan et lien avec la densité spectrale de puissance	61
A.2	Algèbre des quaternions et propriétés liées	65
A.2.1	Définition de l'espace des quaternions	65
A.2.2	Rotation et quaternion	66
A.2.3	Angles d'Euler et quaternion	66
A.3	Détermination du défaut d'alignement de l'accéléromètre et du biais d'accélération initial par la méthode des moindres carrés.....	69

Introduction

L'institut français des sciences et technologies des transports (IFSTTAR) est un établissement public à caractère scientifique et technologique. C'est un service du ministère de l'écologie, du développement durable et de l'énergie ainsi que du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche. Cet institut a pour but d'améliorer la mobilité des personnes et des biens par la recherche, le développement et l'innovation des points de vue technique, économique, social, sanitaire, énergétique, environnemental et humain. L'IFSTTAR est composé de plusieurs sites répartis dans toute la France, où travaillent 1208 agents. Le site de Nantes regroupe le département Matériaux et structures, le département Géotechnique, environnement, risques naturels et sciences de la terre, le département Aménagement, mobilité et environnement ainsi que le département Composants et systèmes.

Ce Projet de Fin d'Études a été réalisé au sein du département Composants et systèmes, dans le laboratoire GEOLoc.

Après l'avènement du système de localisation de type GNSS (Global Navigation Satellites System) qui offre des solutions satisfaisantes pour la géolocalisation en zone dégagée, il est devenu primordial de pouvoir se géolocaliser dans les zones non couvertes par les signaux GPS, en zone masquée et même en intérieur [1]. Il existe déjà des solutions permettant de géolocaliser des véhicules ou tout autre moyen de transport dans ce type de lieu. La mobilité des Hommes a évolué et connaître la position d'un piéton est devenue une source d'intérêt pour tous.

Plusieurs recherches et développements dans le domaine de la navigation pédestre en intérieur ont déjà été réalisés et apportent des réponses plus ou moins satisfaisantes au problème. Certaines de ces solutions sont dépendantes d'une infrastructure déjà mise en place. La précision sur la position dépend alors de la couverture du réseau. On peut par exemple citer des solutions utilisant un réseau WIFI pour calculer la position du piéton [2]. Dans ce cas, il se peut qu'il y ait une zone dans laquelle les ondes WIFI sont de mauvaise qualité ce qui entraîne des imprécisions en termes de calcul de position.

L'inter-connectivité des données reçues et émises entraîne alors des questions sur la protection des données de l'utilisateur. La géolocalisation pédestre en intérieur peut poser des problèmes d'éthique. Il est donc intéressant de disposer d'une solution autonome.

De nombreuses recherches ont été effectuées dans ce but : déterminer la position d'un piéton en intérieur de manière indépendante. Les solutions répondant à cette problématique ne sont pas tout à fait satisfaisantes en termes de précision, souvent de l'ordre de plusieurs mètres. Cette précision n'est pas suffisante pour l'usage qui en est fait. Dans une approche classique de la topographie, déterminer une position précisément peut s'effectuer par un suivi tachéométrique. Or cette méthode est impossible à mettre en place pour le suivi d'un piéton se déplaçant dans un environnement clos. Ce projet de fin d'études propose donc une solution s'adaptant à la problématique du déplacement de l'Homme.

L'objectif de ce projet est d'établir une solution de référence autonome pour la navigation pédestre en intérieur, c'est-à-dire d'obtenir une trajectoire de référence pour un piéton se déplaçant à l'intérieur d'un bâtiment. Cette solution doit être indépendante de tout autre système ainsi qu'assurer une précision sur la position, calculée en temps réel, de 1m à 2 sigma. Ce projet de fin d'études s'inscrit dans le cadre du développement d'une solution performante pour la localisation en intérieur, adaptée à un smartphone. La solution de

référence établie lors de ce PFE permettra de tester les développements lors d'expériences futures.

Dans le domaine de la navigation pédestre, il est possible d'utiliser les principes de la biomécanique de la marche pour déterminer la position d'un piéton. Il existe différents modèles qui permettent d'estimer la longueur d'un pas. Le cap de marche est calculé à partir des observations d'une centrale inertielle. Les positions successives du piéton sont alors calculées par une succession de points lancés. Dans ce cas, on parle de Pedestrian Dead Reckoning (PDR).

La grande présence de capteurs de type MEMS dans de nombreux objets de la vie courante, tels que les smartphones, est à l'origine de leur utilisation dans le domaine de la géolocalisation pédestre en intérieur. Ces capteurs sont issus de la technologie de la micro-électronique et sont constitués d'éléments mécaniques, d'actionneurs et de capteurs. De plus, leurs performances se sont grandement améliorées au cours des dernières années. Ces capteurs laissent entrevoir de nouvelles possibilités de recherche et de développement en ce qui concerne la géolocalisation en intérieur. Leurs observations peuvent maintenant être exploitées tout en gardant à l'esprit cette idée de qualité dans la détermination de la position. Les relations utilisées en aéronautique, c'est-à-dire les relations de Newton liant l'accélération à la vitesse et à la position sont alors appliquées. On parle de « strapdown inertial navigation ». La vitesse et la position sont calculées à partir des mesures de l'accéléromètre, celles du gyromètre et celles du magnétomètre. De plus, le principe général de la navigation à l'estime est aussi utilisé. Par cette méthode, la position d'un objet à un instant donné est déterminée à partir de l'instant précédent et grâce aux observations de l'accélération et/ou de la vitesse à l'instant présent.

Cependant, la précision des mesures issues de ces capteurs est bien inférieure à celle des centrales inertielles de haute qualité. La dérive temporelle des MEMS actuellement sur le marché est assez élevée et impose une correction régulière des inconnues à l'aide des observations. La solution implémentée au cours de ce projet met en pratique plusieurs mises à jour qui permettent de limiter la propagation des erreurs sur la position du piéton.

Les deux principaux objectifs de ce travail sont

1. d'implémenter une solution autonome utilisant uniquement les observations d'un capteur inertiel situé sur le pied d'un piéton et
2. de définir un protocole d'acquisition afin que la solution obtenue puisse être considérée comme une solution de référence.

La première partie de ce rapport présente différentes solutions déjà existantes dans la littérature actuelle et pose les différents concepts permettant de comprendre le fonctionnement de la solution proposée par la suite. Les outils utilisés au cours de ce projet sont ensuite détaillés dans une seconde partie. Afin de répondre aux deux objectifs définis précédemment, la solution proposée est expliquée en deux étapes principales. Différents tests ainsi qu'une étude de la précision ont finalement été réalisés dans le but de définir le protocole d'acquisition qu'il faudra suivre pour atteindre les meilleures performances avec la solution proposée.

1. État de l'art et principes de base

Cette partie fait état des autres recherches effectuées dans le domaine de la navigation pédestre et résume les différents concepts nécessaires à la compréhension des travaux effectués au cours de ce PFE.

1.1. Différents repères

Avant tout calcul ou toute étude, il est nécessaire de présenter les différents repères qui sont mis en jeu dans ce rapport.

1.1.1. Repère « inertiel »

Un repère inertiel est un repère dans lequel les lois de Newton sont applicables. Ce référentiel est un référentiel orthonormé et son origine est arbitraire. Les centrales inertielles fournissent des observations par rapport à un repère inertiel.

1.1.2. Repère « navigation »

Le référentiel « navigation » est un repère cartésien dans lequel sont projetées les positions issues directement du DGPS et les positions calculées à partir des observations du capteur inertiel. Ce repère est un plan tangent localement à la Terre. Il permet donc de comparer les positions issues de la solution de référence et celles calculées à partir des observations du capteur.

1.1.3. Repère « body »

Les observations issues du capteur inertiel sont exprimées dans un référentiel propre au capteur, appelé « body ». Un exemple d'un tel référentiel est représenté sur la Figure 1.

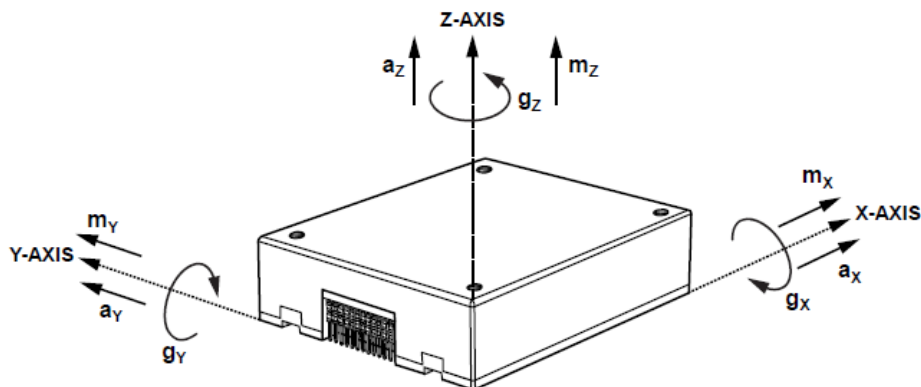


Figure 1 : Axes de mesure de la centrale inertielle ADIS 16488 (Source [21])

Ainsi, pour la centrale inertielle ADIS 16488, les axes de l'accéléromètre sont confondus avec ceux du gyromètre et du magnétomètre.

Ce repère dépend uniquement de l'orientation du capteur par rapport au repère « navigation ». Dans notre cas, le capteur est fixé sur le pied d'un piéton. La centrale inertielle est considérée comme fixe par rapport à ce dernier. L'orientation du référentiel « body » dans le repère « navigation » est donc lié aux mouvements du pied. A chaque instant de mesure, le repère « body » exprimé dans le référentiel « navigation » est différent.

Dans notre étude, seules les coordonnées planimétriques sont étudiées. En navigation pédestre en intérieur, les changements d'altitude correspondent à des changements d'étage. Ces

changements brusques de niveau sont détectés à l'aide d'autres capteurs tels que des baromètres. Les variations d'altitude minimales, de l'ordre du cm, n'intéressent pas l'utilisateur qui cherche à se géolocaliser dans un environnement et non pas à connaître ses coordonnées précisément.

Dans la suite de ce mémoire, une grandeur écrite avec un exposant « b » signifie que sa valeur est exprimée dans le repère « body ». De la même manière, une grandeur écrite avec un exposant « n » indique que sa valeur est exprimée dans le repère « navigation ».

1.2. Système de référence

En extérieur, le GPS est la solution autonome de référence mais on ne compte, à ce jour, aucun équivalent lorsque l'utilisateur se déplace en intérieur. Cependant, certaines solutions non autonomes offrent de bonnes performances pour la géolocalisation indoor.

Les solutions offrant les meilleurs résultats dans le domaine de la géolocalisation pédestre sont les solutions optiques [3]. Ces systèmes sont donc souvent utilisés comme solution de référence. Ils servent à qualifier la précision de la solution étudiée. Ces systèmes, dits de « motion capture », permettent de déterminer la position du piéton ainsi que les angles d'attitude. La dépendance de ces systèmes vis à vis d'une infrastructure particulière est le principal inconvénient. Ils ne peuvent donc pas être facilement déplacés dans un nouvel endroit et ne sont donc pas adaptables et utilisables par tous.

Il est également possible d'utiliser un jeu de données de référence qui permet d'analyser et de vérifier les performances d'une solution. La méthode de simulation de ces signaux de référence est décrite dans [4]. Ces données permettent, par la suite, de tester les solutions implémentées. Cependant, ces signaux sont assez éloignés de la réalité et ne peuvent pas représenter tous les mouvements et gestes aléatoires d'un humain qui marche. Les résultats donnés par cette approche de qualification d'une solution sont donc assez limités.

L'absence de réelle solution autonome de référence pour la navigation pédestre est à l'origine de ce projet de fin d'études.

1.3. Navigation pédestre en intérieur

De nombreux travaux ont déjà été menés dans le domaine de la navigation pédestre en intérieur. Les scientifiques ont longtemps délaissé la navigation à l'estime du fait de la mauvaise qualité des capteurs bas coûts, ces capteurs étant perturbés par une dérive importante.

1.3.1. « Pedestrian Dead Reckoning System »

Ce principe de géolocalisation exploite les caractéristiques biomécaniques de la marche en plus des observations d'un capteur inertiel pour calculer la position d'un piéton [5] et [6]. La position du piéton est calculée par point lancé depuis une position initiale connue. Le cap de marche est déterminé par double intégration des mesures du gyromètre tandis que la distance parcourue est calculée à l'aide d'un modèle de longueur de pas. Ce modèle dépend de la fréquence de marche du piéton, de sa taille et d'un jeu de trois variables. Les instants de pas doivent au préalable être détectés. Cette approche est particulièrement intéressante pour des capteurs portés dans la main.

Les dernières recherches dans ce domaine [5] permettent de détecter ces instants tout en ayant le capteur inertiel dans la main. Cette étape est rendue difficile car la fréquence de marche et les fréquences extraites des mouvements du bras pendant la marche ne sont pas

identiques. La cadence de pas est alors estimée en supposant que la partie haute fréquence du signal peut être comparée avec la fréquence de pas.

Une erreur planimétrique de 2,5 à 5% par rapport à la longueur totale parcourue est observée. Ces performances sont à comparer avec celles obtenues avec les meilleures solutions, *i.e.* lorsque le capteur inertiel est positionné sur le pied ou sur le torse. On est alors dans les mêmes ordres de grandeur.

1.3.2. Navigation à l'estime avec une centrale inertielle sur le pied

Le fondement d'une solution de navigation calculée selon un mécanisme de type « strapdown » est d'utiliser directement les observations issues du capteur inertiel pour déterminer la vitesse et la position du piéton en exploitant les équations de Newton dans le référentiel inertiel, [7], [8], [9] et [10]. L'ensemble est implémenté dans un filtre de Kalman, les inconnues étant la position du piéton, la vitesse du piéton, le biais d'accélération, le biais du gyromètre, et les angles d'attitude. La Figure 2 explicite le principe de fonctionnement d'une telle solution de géolocalisation.

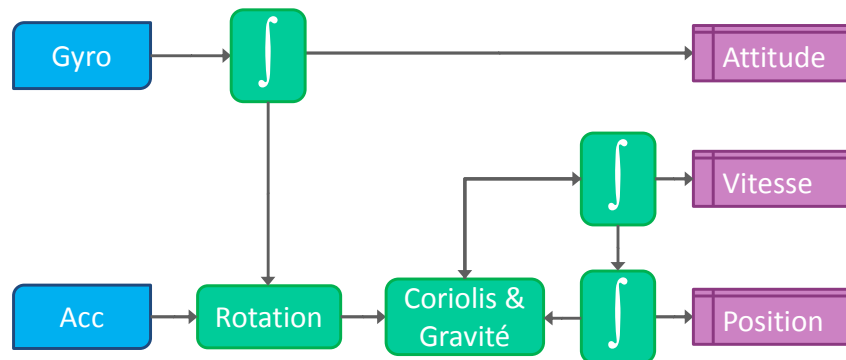


Figure 2 : Schéma bloc pour la navigation à l'estime

Dans un premier temps les observations issues du gyromètre sont intégrées afin de déterminer les angles attitudes. Ces observations permettent également de calculer la matrice de transformation entre le repère « body » et le repère « navigation ». Le cap de marche est alors déterminé à partir des angles d'attitude. Dans un second temps, les observations issues de l'accéléromètre peuvent être exprimées dans le repère « navigation » à l'aide de cette matrice de changement de repère. La vitesse et la position sont obtenues après, respectivement, par intégration simple et par double intégration des données d'accélération.

L'importante dérive des capteurs inertiels bas-coûts impose des mises à jour régulières, le plus souvent grâce à des mesures externes de type GPS. Ici la biomécanique du cycle de marche est exploitée. La première mise à jour est effectuée sur la vitesse : Zero velocity UpdaTe. La vitesse est supposée nulle lorsque le pied est en phase d'appui au sol. La seconde mise à jour s'effectue en corrigeant les angles avec les mesures de champ magnétique. Il est donc nécessaire de détecter ces phases d'appui au sol du pied.

Il existe différents principes de détection de ces instants. Ces modes de détection sont évalués dans [11].

Les résultats en position de ce genre de solution ont une marge d'erreur de 5% par rapport à la distance parcourue.

Les résultats sur le calcul du cap de marche sont plus probants lorsqu'il est estimé puis corrigé en utilisant les observations du champ magnétique et celles d'accélération.

1.3.3. Comment calculer le cap de marche plus précisément ?

Récemment, une nouvelle solution afin de calculer le cap de marche avec un capteur inertiel a été définie [12]. Cette solution est basée sur deux principes innovants.

Dans un premier temps, la meilleure solution mathématique pour paramétrer le système a été choisie. Le problème est paramétré entièrement dans l'espace des quaternions. L'utilisation des quaternions pour la définition d'une solution de navigation pedestre n'est pas nouvelle, [8] et [9]. Dans ces deux articles, les angles d'attitude sont exprimés à l'aide d'un quaternion dans le vecteur d'état. L'erreur sur le biais du gyromètre; figurant également parmi les inconnus, n'est pas exprimée sous la forme d'un quaternion contrairement à ce qui est fait dans [12]. La première innovation dans le calcul du cap de marche réside donc dans le fait d'introduire un biais sur le quaternion du gyromètre dans les inconnues à la place d'un biais sur les vitesses angulaires.

Dans un second temps, l'ensemble des données fournies par un capteur inertiel est exploité afin d'améliorer l'estimation du cap de marche. Deux nouvelles mises à jour sont appliquées. Elles sont effectuées en observant les variations du champ magnétique (« Magnetic Angular Rate Update » : MARU) et celles des mesures d'accélération (« Angular Gradient Update » : AGU). Ces mises à jour permettent de contraindre le système et donc de corriger, à des moments opportuns, les inconnues du problème.

Des tests ont été menés avec un capteur bas-coûts de type MEMS tenus dans la main par un piéton. Ces tests offrent de bons résultats puisque la dérive angulaire est de seulement 7° après un kilomètre de marche.

Ce projet de fin d'études combine la nouvelle manière de calculer le cap de marche tout en ayant le capteur inertiel sur le pied. En vue des bonnes performances de ces deux méthodes séparément, de très bons résultats peuvent être envisagés si elles sont associées dans une même solution.

Un filtre de Kalman a été mis en place afin de pouvoir prendre en compte les deux dernières innovations décrites précédemment.

1.4. Compensation avec un filtre de Kalman

L'ensemble de la solution est implémenté avec un filtre de Kalman. Cette partie théorique permet de bien comprendre l'articulation des différentes équations qui sont établies tout au long de ce rapport.

L'objectif d'un filtre de Kalman est d'estimer les inconnues d'un système dynamique dont l'état est décrit par des équations de mouvement et des équations d'observation. Les inconnues sont déterminées en deux étapes, [13] et [14]. Elles sont d'abord prédites par un modèle d'évolution du système puis mises à jour à l'aide d'un ensemble d'observations. Le filtre de Kalman fournit une estimation optimale des inconnues à partir de mesures bruitées et de modèles qui approximent la réalité.

Contrairement à une compensation par les moindres carrés, le filtre de Kalman a pour avantage de prendre en compte la modélisation dynamique du système. C'est à dire qu'un modèle fonctionnel lie les inconnues aux observations. Le filtre de Kalman suppose que le bruit du modèle ainsi que le bruit de mesure sont de type bruit blanc gaussien centré, c'est-à-dire qu'ils suivent chacun une loi normale de variance donnée et de moyenne nulle. Cette condition peut aussi se traduire par le fait que deux observations successives du signal ne sont pas corrélées. Ces deux bruits ne doivent pas être corrélés. En conséquence, toutes les inconnues des capteurs sont modélisées avec différents biais et bruits. Ces modélisations

jouent un rôle important dans la convergence du filtre et doivent être les plus exactes possible. Le plus généralement, les biais des inconnues font partie intégrante des inconnues et ils sont également estimés et corrigés par le filtre.

Les inconnues forment le vecteur d'état du système. Ce type de filtre est applicable uniquement dans le cas où le vecteur d'état à un instant t_k dépend du vecteur d'état à l'instant précédent. Cette corrélation entre deux instants successifs se traduit par l'équation (1) :

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{f}_{k,k-1} \cdot \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1}, \quad (1)$$

où \mathbf{X}_k est le vecteur d'état du système à l'instant t_k .

$\mathbf{f}_{k,k-1}$ est la matrice de transition entre les époques t_k et t_{k-1} . Elle est considérée comme invariable dans le temps. Cette matrice découle de la Jacobienne calculée par un développement de Taylor à l'ordre 1, sur l'intervalle de transition Δt , des fonctions qui décrivent la dynamique du système.

\mathbf{W}_{k-1} est le bruit du modèle à l'instant t_{k-1} . Il est de moyenne nulle et de variance \mathbf{Q}_{k-1} .

Les observations disponibles sont reliées aux inconnues, à l'instant t_k , via la matrice de mesure \mathbf{H}_k :

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{X}_k + \mathbf{N}_k \quad (2)$$

avec \mathbf{z}_k est le vecteur des observations à l'instant t_k ,

\mathbf{N}_k est le bruit de mesure à l'instant t_k .

Comme dit précédemment, \mathbf{W}_{k-1} et \mathbf{N}_k sont des bruits blancs gaussiens. Chacun suit donc une loi normale de moyenne nulle et de variance donnée et ils sont supposés non corrélés.

Un filtre de Kalman se décompose en deux étapes.

1.4.1. Une étape de prédiction

Le vecteur d'état à l'instant t_k est prédit à l'aide du vecteur d'état à l'instant précédent. La matrice d'évolution du système est utilisée lors de cette étape de prédiction.

Les variables estimées, représentées par un « ^ », sont à distinguer des variables prédites ou mises à jour, représentées respectivement par un signe – ou un signe +.

Ainsi, le vecteur d'état est prédit de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{X}}_k^- = \mathbf{f}_{k,k-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{k-1}^+ \quad (3)$$

La matrice de covariance des inconnues est déterminée par propagation de variances et ajout des bruits qui représentent les incertitudes du modèle, ce qui donne l'équation (4).

$$\hat{\mathbf{P}}_k^- = \mathbf{f}_{k,k-1} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{k-1}^+ \cdot \mathbf{f}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_k \quad (4)$$

$\hat{\mathbf{P}}_k^-$ est l'estimation de la matrice de covariance des inconnues à l'instant t_k .

1.4.2. Une étape de mise à jour

Les observations réalisées à l'instant t_k sont utilisées pour mettre à jour le vecteur d'état et la matrice de covariance des inconnues.

Pour cela, la différence entre les observations à l'instant t_k et les mesures prédites au même instant est calculée. C'est la séquence d'innovation, notée \mathbf{ino}_k à l'instant t_k .

$$\mathbf{ino}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{X}}_k^- \quad (5)$$

Elle permet de prendre en compte de nouvelles contraintes liées aux observations à l'instant t_k .

Afin de corriger au plus juste les estimations des inconnues, le gain de Kalman est déterminé. Il a pour but de pondérer les corrections à apporter sur les inconnues. La matrice des poids à appliquer à la correction est calculée de la manière suivante :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T \cdot (\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (6)$$

\mathbf{K}_k est le gain de Kalman à l'instant t_k .

Finalement, les inconnues et la matrice de covariance sont corrigées de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{X}}_k^+ = \hat{\mathbf{X}}_k^- + \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{ino}_k \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{H}_k) \cdot \mathbf{P}_k^- \quad (8)$$

La mise à jour sur les inconnues et sur la matrice de variance-covariance est effectuée à chaque fois que cela est possible, *i.e.* dès que la configuration des observations permet de déterminer une séquence d'innovation.

Il est important de noter qu'une mauvaise modélisation du système entraîne une mauvaise ou une non-convergence du filtre. Les résultats sont donc faussés. La variance d'Allan donne de bonnes indications sur le bruit de mesure et permet donc de modéliser le système au plus près de la réalité.

1.5. Étude de la variance d'Allan

Le calcul de variance d'Allan a été utilisé au cours de ce projet afin d'identifier et de quantifier les différents bruits de mesure des capteurs. Il apparaît donc primordial d'expliciter son principe et la manière dont elle a été utilisée.

1.5.1. Théorie

La variance d'Allan est usuellement utilisée pour caractériser le bruit de mesure d'un capteur, [15] et [16]. Dans ce cas, le bruit de mesure est supposé modélisable par des erreurs caractéristiques. La contribution de chacune des erreurs au bruit de mesure total du capteur est déterminée grâce à la variance d'Allan.

La variance d'Allan correspond à l'écart-type moyen entre deux séries d'observations séparées de n observations. Cela nous informe donc sur la variance d'un jeu d'observations par rapport à sa fréquence d'acquisition. Plus de détails théoriques sur la définition du calcul de variance d'Allan sont fournis dans l'annexe A.1.

La Figure 3 représente la courbe issue du calcul de variance d'Allan pour un signal perturbé par différents bruits caractéristiques.

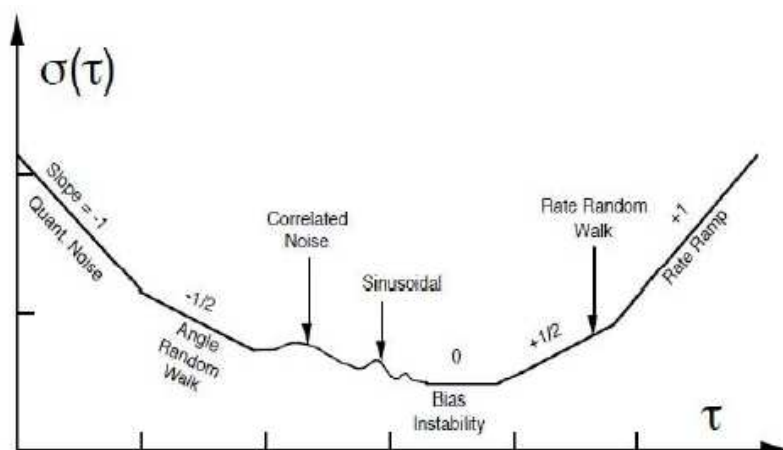


Figure 3 : Variance d'Allan en fonction du temps pour différents bruits (Source : [16])

Un signal mesuré est perturbé par différents bruits définis par des processus aléatoires particuliers. L'étude de la variance d'Allan permet donc d'identifier les différents bruits qui affectent le signal ainsi que de quantifier leur valeur. Si la pente de la courbe issue de la variance d'Allan est égale à $-1/2$ pour de faibles fréquences, alors le signal est composé d'un bruit de type marche aléatoire (« Angle Random Walk »). Le calcul de variance d'Allan pour un signal présentant un bruit corrélé (« Correlated Noise ») donnera une courbe modélisable par une sinusoïdale. Après avoir identifié les différents bruits affectant le signal, il est possible de lire les valeurs de ces bruits à partir de la courbe de la variance d'Allan.

1.5.2. Comment obtient-on les valeurs des bruits ?

Les observations issues d'un capteur inertiel sont le plus souvent composées d'un bruit blanc (« Quantization Noise »), d'une marche aléatoire (« Random walk ») et d'un bruit corrélé (« Correlated Noise ») [17]. Ici, nous présenterons uniquement la manière de lire la valeur de ces bruits. Le Tableau 1 reprend les expressions extraites du calcul de variance d'Allan pour les bruits de mesure cités précédemment.

Type de bruit	Variance d'Allan ($\sigma^2(\tau)$)	Equation en échelle log.	Pente	Valeur du coefficient
Bruit blanc (« Random Walk »)	$\frac{N^2}{\tau}$	$\log(\sigma) = \log(N) - \frac{1}{2} \log(\tau)$	-1/2	$N = \sigma(1)$
Marche aléatoire (« Rate Random Walk »)	$\frac{K^2 \tau}{3}$	$\log(\sigma) = \log\left(\frac{K}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} \log(\tau)$	1/2	$K = \sigma(3)$
Bruit corrélé (« Correlated Noise »)	$\frac{(q_c T_c)^2}{\tau}, \tau \gg T_c$ $\frac{q_c^2}{3} \tau, \tau \ll T_c$	$\log(\sigma) = -\frac{1}{2} \log(\tau) + \log(q_c T_c)$ $\log(\sigma) = \frac{1}{2} \log(\tau) + \log\left(\frac{q_c}{\sqrt{3}}\right)$	$\pm 1/2$	$q_c T_c = \sigma(1)$ $q_c = \sigma(3)$

Tableau 1 : Caractéristiques de différents types de bruits

Les valeurs des bruits pour un signal correspondent aux valeurs des coefficients décrits dans le Tableau 1. Elles peuvent donc être lues directement sur la courbe issue du calcul de variance d'Allan, [18] et [19]. Ainsi, pour déterminer la valeur du bruit blanc d'un capteur, il faut lire la valeur de la variance d'Allan pour $\tau=1$. De la même manière, le valeur de la marche aléatoire d'un signal est lue pour $\tau=3$. La valeur du bruit corrélé correspond à la valeur maximale de la partie de la courbe assimilable à une sinusoïdale.

Les bruits des signaux du capteur inertiel peuvent donc être définis grâce à l'étude de la variance d'Allan.

Le dernier principe de base essentiel à la compréhension de ce rapport correspond à l'innovation principale définissant la solution, *i.e.* l'utilisation des quaternions pour paramétrer les rotations entre les différents repères.

1.6. Un changement de repère exprimé avec un quaternion

Les observations fournies par le capteur inertiel sont exprimées dans le repère « body » alors que les résultats finaux sont étudiés dans le repère « navigation ». Avant tout calcul, il est donc nécessaire de définir la transformation permettant de passer d'un repère à l'autre. Si l'on se place dans des espaces de dimension 3, un changement de repère est défini comme une succession de plusieurs rotations, chacune au tour d'un axe d'un trièdre droit. Les angles d'Euler sont utilisés pour paramétrer ces rotations. La Figure 4 rend compte du changement de repère entre le référentiel « body » et le référentiel « navigation ». Les angles d'Euler γ sont représentés en vert.

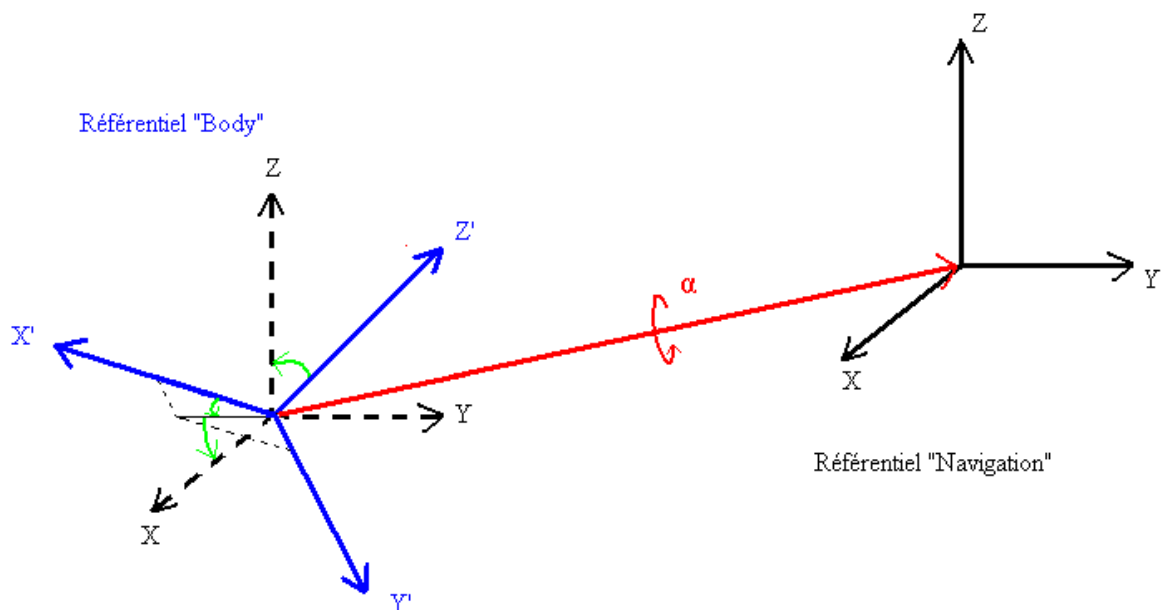


Figure 4 : Changement de repère à l'aide des angles d'Euler et à l'aide d'un quaternion
(Source personnelle)

Cependant, en fonction de l'ordre dans lequel les rotations sont réalisées, différents résultats peuvent être obtenus. Or, d'après le théorème d'Euler, dans un espace tridimensionnel, une transformation entre deux repères peut être définie par une rotation unique, notée α , autour d'un vecteur fixe, appelé axe Eulérien, noté E . L'angle de rotation α et l'axe eulérien permettent de définir un quaternion. Le changement de repère à l'aide d'un quaternion est représenté en rouge sur la Figure 4.

Un quaternion est un vecteur composé de quatre composantes [20]. Il est possible de passer des angles d'Euler au quaternion associé et vice versa. Les différentes propriétés sur l'espace des quaternions sont présentées dans l'annexe A.2. Les formules permettant de transformer les angles d'Euler en quaternion y sont également définies.

Dans la suite, tous les calculs sont effectués à l'aide des quaternions pour s'affranchir des ambiguïtés provoquées par l'utilisation des angles d'Euler en ce qui concerne les transformations entre repères.

Le vecteur d'état du filtre de Kalman n'est pas composé des angles d'Euler, ou des angles d'attitude, et des biais sur ces angles comme souvent mais des quatre composantes du quaternion et d'un biais sur ce quaternion.

Après avoir défini succinctement les différents principes de base nécessaires à la compréhension de la solution implémentée dans la suite du mémoire, la partie suivante est consacrée à la présentation des capteurs utilisés dans notre étude et à la modélisation des différentes inconnues du problème.

2. Mesures inertielles et observations GNSS exploitées

Cette étude met en jeu deux capteurs différents : une centrale inertielle et un GPS ; l'un jouant le rôle de la solution à qualifier et l'autre de la référence.

2.1. Solution de référence : DGPS

Le but de cette étude est d'évaluer la précision allouable à notre solution de navigation pédestre en intérieur afin de définir une solution de référence. Dans ce but, il est nécessaire de pouvoir comparer les résultats obtenus avec notre solution à une référence. Un GPS différentiel (DGPS) sert de solution de référence. Il s'agit d'un récepteur GNSS bi-fréquence Septentrio AsteRx21 porté par le piéton. Le point de base se situe sur le toit d'un des bâtiments de l'IFSTTAR. La longueur de la ligne de base est de 1km au maximum. Les positions GPS sont calculées en post-traitement avec le logiciel GrafNav de NovAtel. Ces positions sont exprimées dans le repère « navigation ». La précision sur les positions issues des observations du DGPS est posée égale à 2 cm.

2.2. Caractéristiques de la centrale inertielle

2.2.1. Données constructeurs

Dans le cadre de ce projet, le capteur utilisé est une centrale inertielle s ADIS 16488. Cette centrale inertielle est munie d'un accéléromètre, d'un gyromètre et d'un magnétomètre chacun triaxial, ainsi que d'un capteur de pression. Elle a 10 degrés de liberté.

L'accéléromètre permet de mesurer l'accélération linéaire du mobile dans un repère 3D. Le gyromètre mesure des vitesses angulaires selon 3 axes par rapport au repère inertiel. Ces vitesses sont exprimées dans le repère « body ». Le magnétomètre mesure l'intensité et la direction du champ magnétique. Les données issues du capteur de pression n'ont pas été utilisées lors de ce projet mais pourraient servir à identifier des changements d'altitude. Les caractéristiques de mesure de l'ADIS 16488, fournies par le constructeur, sont résumées dans le Tableau 2.

	Accéléromètre	Gyromètre	Magnétomètre
Plage de mesure	$\pm 18 \text{ g}$	$\pm 450 \text{ }^\circ/\text{s}$	$\pm 2,5 \text{ Gauss}$
Précision de mesure	$1,221 \cdot 10^{-8} \text{ g}$	$3,052 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ/\text{s}$	$0,1 \text{ mGauss}$
Densité spectrale de bruit	$0,067 \text{ mg}/\sqrt{\text{Hz}}$	$0,0066 \text{ }^\circ/\text{s}/\sqrt{\text{Hz}}$	$0,054 \text{ mGauss}/\sqrt{\text{Hz}}$
Stabilité de biais	16 mg	$\pm 0,2 \text{ }^\circ/\text{sec}$	-
Erreur d'alignement	$\pm 0,035 \text{ }^\circ$	$\pm 0,05 \text{ }^\circ$	$\pm 0,25^\circ$

Tableau 2 : Caractéristiques principales de la centrale inertielle ADIS 16488 (Source [21])

Cette centrale inertielle est un capteur . Les performances d'un tel capteur sont donc loin de celles des centrales inertielles de haute qualité, utilisées, entre autres, dans l'aéronautique.

2.2.2. Bilan des erreurs pour une centrale inertielle

Comme tout capteur, les observations d'une centrale inertielle sont entachées d'erreurs. Deux types d'erreurs sont à distinguer pour les centrales inertielles : les erreurs déterministes, qui peuvent être prédites et quantifiées ; et les erreurs aléatoires qui, répétées dans des

conditions identiques, donnent des résultats différents. Les erreurs entachant les mesures du gyromètre sont du même type que celle entachant les mesures d'accélération.

Le biais et le facteur d'échelle sont des erreurs déterministes. Ces erreurs peuvent être réduites, voire éliminées grâce à des phases de calibration, précédant les observations. Le biais du capteur correspond à la valeur mesurée lorsque le capteur est au repos. Il est composé d'une partie qui ne varie pas et d'une autre qui diffère selon le jeu d'observations. Cette dernière partie est appelée le biais d'allumage. Elle est difficile à estimer. Le facteur d'échelle correspond au rapport signal en entrée sur signal en sortie. Le facteur d'échelle d'un capteur parfait vaut 1. Il est aussi important de prendre en compte le défaut d'alignement du capteur par rapport à la direction de marche. Cette erreur déterministe est corrigée en estimant ce défaut pendant les premiers instants d'observations.

Le bruit de mesure est une erreur aléatoire. Il est composé de deux composantes : une liée aux basses fréquences et l'autre, aux hautes fréquences. En navigation pédestre, la composante liée aux basses fréquences est la plus importante.

2.3. Modélisation des observations de la centrale inertielle

La modélisation des observations des capteurs inertiels est explicitée dans le paragraphe suivant.

2.3.1. Modélisation de l'accélération

L'accéléromètre ne mesure pas directement l'accélération instantanée du mobile mais une force de réponse à la force de gravitation. D'après le principe fondamental de la dynamique, dans un repère galiléen, la somme des forces appliquées à un solide est équivalente au produit de sa masse par son accélération, d'où :

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (9)$$

Lorsque l'accéléromètre est composé d'un ressort, on peut écrire

$$\mathbf{P} + \mathbf{T} = m\mathbf{a} \quad (10)$$

Avec $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ le poids de l'objet, m étant la masse de l'objet.

$\mathbf{T} = k\mathbf{x}$: la tension du ressort, k étant la constante de raideur du ressort.

(10) équivaut à (11).

$$\frac{k}{m}\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{g} \quad (11)$$

L'accéléromètre mesure donc la réponse aux forces qui lui sont appliquées, c'est-à-dire $\frac{k}{m}\mathbf{x}$, k et m étant des constantes connues.

On pose : $\mathbf{y}_{Acc}^b = \frac{k}{m}\mathbf{x}$. Le modèle de mesure de l'accélération, exprimé dans le repère « body », est de la forme :

$$\mathbf{y}_{Acc}^b = \mathbf{a}^b - \mathbf{g}^b + \mathbf{b}_{Acc}^b + \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b, \quad (12)$$

avec \mathbf{g}^b l'intensité de la force de pesanteur,

\mathbf{a}^b l'accélération propre à l'objet, exprimée dans le « body »,

\mathbf{b}_{Acc}^b le biais d'accéléromètre, exprimé dans le « body »,

η_{Acc}^b le bruit blanc gaussien de l'accélération, exprimé dans le « body ».

2.3.2. Modélisation du biais d'accélération

Le biais d'accélération est modélisé avec un processus de Gauss Markov du premier ordre. Ce choix résulte de l'analyse de variance d'Allan effectué sur une longue période d'acquisition statique des mesures. La dynamique du biais d'accélération est définie de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{b}}_{Acc}^b = \sqrt{2\beta} \cdot \mathbf{b}_{Acc}^b + \eta_{b_{Acc}^b}^b, \quad (13)$$

avec β le temps de corrélation associé au processus de Gauss Markov du biais d'accélération,

$\eta_{b_{Acc}^b}^b$ le bruit du biais d'accélération dans le repère « body ».

2.3.3. Modélisation des mesures du gyromètre et lien avec le quaternion

Les observations réalisées par le gyromètre permettent de déterminer les angles d'Euler et par la suite la matrice de passage entre le repère « body » et le repère « navigation ».

Le modèle de mesure du gyromètre, exprimé dans le repère « body », est de la forme :

$$\mathbf{y}_\omega^b = \boldsymbol{\omega}^b + \mathbf{b}_\omega^b + \eta_\omega^b, \quad (14)$$

avec $\boldsymbol{\omega}^b$ la valeur vraie de la mesure du gyromètre, exprimée dans le « body »,

\mathbf{b}_ω^b le biais du gyromètre, exprimé dans le « body »,

η_ω^b un bruit blanc gaussien sur le gyromètre

L'ensemble du travail étant réalisé dans l'espace des quaternions, les observations du gyromètre sont utilisées afin de calculer le quaternion correspondant. Pour chacune des mesures du gyromètre, le quaternion associé est de la forme :

$$\bar{\mathbf{q}}_\omega = \mathbf{q}_\omega + \mathbf{b}_{q_\omega} + \eta_{q_\omega}, \quad (15)$$

avec \mathbf{q}_ω la valeur vraie du quaternion,

\mathbf{b}_{q_ω} le biais du quaternion du gyromètre,

η_{q_ω} un bruit blanc gaussien sur le quaternion.

2.3.4. Modélisation du biais du gyromètre et lien avec le biais sur le quaternion du gyromètre

Le biais du gyromètre est modélisé avec un processus stochastique de marche aléatoire, comme le montre l'équation (16).

$$\dot{\mathbf{b}}_\omega^b = \eta_{b_\omega^b}^b, \quad (16)$$

avec $\eta_{b_\omega^b}^b$ un bruit blanc gaussien sur le biais du gyromètre, exprimé dans le référentiel « body ».

Par suite le biais sur le quaternion du gyromètre est également modélisé par un tel processus. Il s'écrit alors de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{b}}_{q_\omega}^b = \eta_{b_{q_\omega}^b}^b, \quad (17)$$

avec $\eta_{b_{q_\omega}^b}^b$ un bruit blanc gaussien sur le biais du quaternion du gyromètre, exprimé dans le « body ».

2.3.5. Modélisation du champ magnétique

Le modèle de mesure du champ magnétique s'écrit suivant l'équation (18).

$$\mathbf{y}_m^b = \mathbf{A}\mathbf{m}^b + \mathbf{b}_m^b + \boldsymbol{\eta}_m^b, \quad (18)$$

avec \mathbf{y}_m^b la valeur mesurée du champ magnétique exprimée dans le repère « body »,

\mathbf{m}^b la valeur vraie du champ magnétique exprimée dans le repère « body »,

\mathbf{A} une matrice prenant en compte le facteur d'échelle et le défaut d'alignement,

\mathbf{b}_m^b le biais du champ magnétique exprimé dans le repère « body »,

$\boldsymbol{\eta}_m^b$ un bruit blanc sur la mesure du champ magnétique.

Contrairement aux capteurs inertiels, le bruit de mesure du magnétomètre peut être calibré au début de chaque acquisition de données car il n'est pas composé d'une dérive [22]. Il inclut uniquement des bruits déterministes dont la valeur peut être déterminée par calibration. Après calibration (18) devient :

$$\mathbf{y}_m^b = \mathbf{m}^b + \boldsymbol{\eta}_m^b \quad (19)$$

2.4. Position et vitesse du pied du piéton

Le capteur se situant sur le pied, la vitesse calculée à partir des observations de la centrale inertielle sera donc celle du pied. La position du pied est calculée à partir des vitesses du pied du piéton.

2.4.1. Modélisation de la vitesse du pied du piéton

La modélisation de la vitesse est en lien avec celle de l'accélération, équation (12).

La valeur vraie de la vitesse exprimée dans le repère « navigation », \mathbf{y}_v^n , s'écrit alors de la manière suivante :

$$\mathbf{y}_v^n = \hat{\mathbf{v}}^n + \delta\mathbf{v}^n + \boldsymbol{\eta}_v^n, \quad (20)$$

avec $\hat{\mathbf{v}}^n$ la vitesse estimée à partir de l'état précédent,

$\delta\mathbf{v}^n$ l'erreur sur la vitesse,

$\boldsymbol{\eta}_v^n$ un bruit blanc gaussien sur la vitesse du piéton.

Ce bruit est directement lié au bruit des observations de l'accélération car la vitesse du pied du piéton est déterminée par intégration de l'accélération.

2.4.2. Modélisation de la position du piéton

Les observations réalisées par le capteur permettent de déterminer la position du piéton. De la même manière que pour la vitesse du pied du piéton, la valeur vraie de la position du piéton, \mathbf{y}_p^n , est modélisée de la manière suivante :

$$\mathbf{y}_p^n = \hat{\mathbf{P}}^n + \delta\mathbf{P}^n + \boldsymbol{\eta}_p^n, \quad (21)$$

avec $\hat{\mathbf{P}}^n$ la position du piéton estimée à partir de l'état précédent,

$\delta\mathbf{P}^n$ l'erreur sur la position du piéton,

$\boldsymbol{\eta}_p^n$ un bruit blanc gaussien sur la position du piéton.

Ce bruit est lié au bruit des observations de l'accélération car la position du piéton est calculée par intégrale double de l'accélération.

3. Initialisation - Prédiction

La centrale inertielle mesure des accélérations et des vitesses angulaires. A partir de ces observations la vitesse et la position du piéton peuvent être calculées. Cependant, la forte dérive des capteurs bas coûts ne permet pas d'exploiter directement ces mesures. Il est nécessaire de les corriger dès que les conditions de mesure le permettent. Pour cela, un filtre de Kalman est implémenté de telle sorte que le vecteur d'état, composé des inconnues du problème, puisse être corrigé aux moments opportuns.

3.1. Initialisation du filtre de Kalman

Le vecteur d'état du filtre de Kalman, noté \mathbf{X} , est composé des 17 inconnues du problème, qui sont :

- les quatre composantes du quaternion des angles d'attitude obtenu à partir des angles d'Euler, notées q_i
- le biais de chacune des composantes du quaternion du gyromètre, soit 4 biais notés b_{q_i}
- les biais d'accélération selon les 3 axes de mesures exprimés dans le repère « navigation », noté b_{Acc-i}^n
- les composantes de la position du pied du piéton exprimées dans le repère « navigation », notées P_i^n
- les composantes de la vitesse du pied du piéton exprimées dans le repère « navigation », notées v_i^n .

Le vecteur d'état s'écrit sous forme de vecteur de la manière suivante :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & b_{q_1} & b_{q_2} & b_{q_3} & b_{q_4} & b_{Acc-X}^n & b_{Acc-Y}^n & b_{Acc-Z}^n & P_X^n & P_Y^n & P_Z^n & v_X^n & v_Y^n & v_Z^n \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

3.1.1. Initialisation du vecteur d'état

Comme expliqué dans le paragraphe 1.4, le vecteur d'état doit dans un premier temps être initialisé. Cette initialisation permet ensuite d'effectuer une première estimation des inconnues. Il est nécessaire d'y attacher un soin tout particulier car la convergence du filtre dépend en grande partie de cette initialisation.

3.1.1.1. Initialisation du quaternion des angles d'attitude

La valeur initiale du quaternion des angles d'attitude est calculée à partir des angles d'Euler initiaux. Ces angles correspondent au défaut d'alignement initial. Ils sont calculés à partir des valeurs moyennes de l'accélération et du champ magnétique mesurées pendant la phase statique, effectuée avant chaque début d'observation.

3.1.1.2. Initialisation du biais du quaternion

Il est difficile d'évaluer quantitativement le biais initial sur le quaternion du gyromètre. Pour se rapprocher au plus de la réalité, sa valeur est calculée à partir d'observations en phase statique. Pendant de telles périodes, le gyromètre ne doit mesurer aucune vitesse angulaire. Dans le cas contraire, les valeurs mesurées correspondent à un biais de mesure du gyromètre. Des observations ont été effectuées en phase statique pendant 6 heures, à une fréquence de 100 Hz. Les quaternions calculés à partir de ces observations doivent être égaux à $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Les valeurs résiduelles correspondent au biais sur le quaternion du gyromètre.

3.1.1.3. Initialisation du biais d'accélération

Contrairement au biais du quaternion du gyromètre, le biais d'accélération est établi à la suite d'une phase de calibration. En position verticale, l'accéléromètre ne doit mesurer que la réponse à la force de pesanteur sur l'axe qui est placé verticalement. Plusieurs jeux d'observations ont été effectués en plaçant successivement chacun des trois axes verticalement.

La Figure 5 représente le banc de calibration utilisé pour l'accéléromètre. La centrale inertielle y est fixée de manière à ce qu'un des trois axes soit vertical. L'horizontalité de l'ensemble est garantit grâce à une nivelle sphérique.

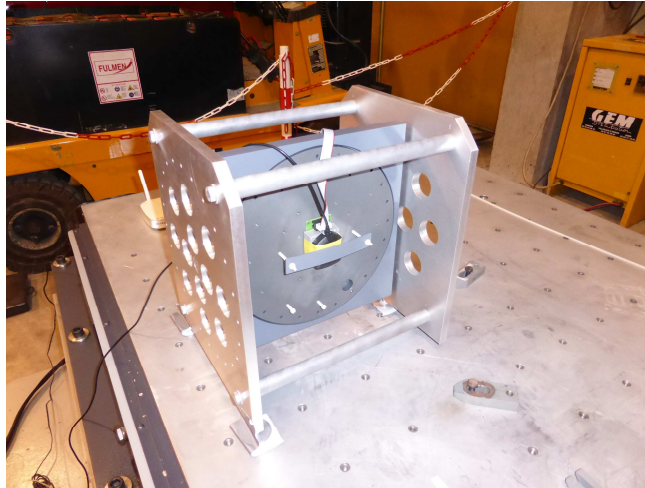


Figure 5 : Banc de calibration pour l'accéléromètre (Source personnelle)

Les observations ont été effectuées pendant 1 minute sur chacun des 3 axes, et à chaque fois dans les deux sens (vers le haut et le bas), avec une fréquence d'acquisition de 100 Hz. Les 6 jeux de mesures nous permettent de déterminer le biais d'accélération. Ce vecteur est calculé par la méthode des moindres carrés comme décrit dans l'annexe A.3.

3.1.1.4. Initialisation de la vitesse et de la position du piéton

La position et la vitesse du piéton sont initialisées à l'aide des positions issues de la solution de référence, c'est-à-dire un GPS différentiel. Les observations commencent avec une phase statique de l'utilisateur. La vitesse initiale est donc définie comme étant nulle. Dans d'autres conditions, une vitesse instantanée pourrait être déterminée à partir des positions issues du DGPS, aux instant t_{init} et $t_{init-\Delta T}$.

$$v_{init} = \frac{X_{init-\Delta T} - X_{init}}{\Delta T} \quad (23)$$

3.1.2. Initialisation des variances et des bruits de mesure

Seules les variances de la position du piéton et de sa vitesse n'ont pas été définies à l'aide de l'étude de la variance d'Allan. Cette dernière a été réalisée afin d'analyser la contribution de chacune des erreurs au bruit de mesure du capteur. Elle nous a aussi permis de déterminer les variances initiales des inconnues du problème.

Les observations ont été effectuées sur une durée de 6 heures avec une centrale inertielle ADIS16488 en phase statique, la centrale reposant sur un banc en béton fixe et immobile. La fréquence d'acquisition est de 102,4 Hz. Une borne Wifi placée à proximité de la centrale a été nécessaire afin de transférer les données au cours de la phase d'acquisition, la carte mémoire de la centrale ne permettant pas de stocker l'ensemble des observations. Du fait

de la présence d'une source émettrice d'ondes magnétiques, les données issues du magnétomètre n'ont pas été exploitées. L'étude de la variance d'Allan a donc permis d'initialiser la variance du quaternion des angles d'attitude, la variance du biais du quaternion du gyromètre et la variance du biais d'accélération.

3.1.2.1. Variance d'Allan pour le gyromètre

Un quaternion a été calculé à partir de chacune des mesures effectuées par le gyromètre selon l'équation suivante :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{Roll}{2}\right)\cos\left(\frac{Pitch}{2}\right)\cos\left(\frac{Heading}{2}\right) + \sin\left(\frac{Roll}{2}\right)\sin\left(\frac{Pitch}{2}\right)\sin\left(\frac{Heading}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{Roll}{2}\right)\cos\left(\frac{Pitch}{2}\right)\cos\left(\frac{Heading}{2}\right) - \cos\left(\frac{Roll}{2}\right)\sin\left(\frac{Pitch}{2}\right)\sin\left(\frac{Heading}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{Roll}{2}\right)\sin\left(\frac{Pitch}{2}\right)\cos\left(\frac{Heading}{2}\right) + \sin\left(\frac{Roll}{2}\right)\cos\left(\frac{Pitch}{2}\right)\sin\left(\frac{Heading}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{Roll}{2}\right)\cos\left(\frac{Pitch}{2}\right)\sin\left(\frac{Heading}{2}\right) - \sin\left(\frac{Roll}{2}\right)\sin\left(\frac{Pitch}{2}\right)\cos\left(\frac{Heading}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Le « roll » (roulis), le « pitch » (tangage) et le « heading » (cap) étant les angles d'Euler associés aux mesures du gyromètre.

L'étude de la variance d'Allan a directement été effectuée sur les valeurs des quaternions. La Figure 6 représente les courbes issues du calcul de variance d'Allan pour les quatre terme des quaternions calculés avec (24).

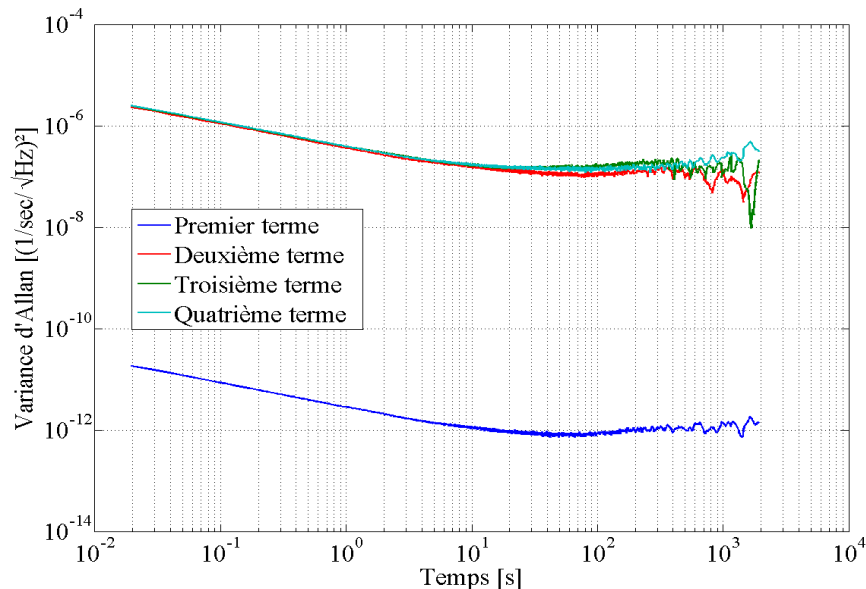


Figure 6 : Courbes issues de l'étude de la variance d'Allan pour les 4 termes des quaternions (Source personnelle)

D'après ces courbes, il est possible d'extraire la valeur initiale de la variance du quaternion des angles d'attitude et celle du biais du quaternion du gyromètre. La valeur de la variance initiale du quaternion des angles d'attitude correspond à la valeur du bruit blanc du quaternion des angles d'attitude. La valeur de la variance initiale du biais du quaternion du gyromètre correspond à la valeur de la marche aléatoire du quaternion des angles d'attitude. Ces valeurs sont résumées dans le Tableau 3.

	1 ^{er} terme	2 ^{ème} terme	3 ^{ème} terme	4 ^{ème} terme
Quaternion des angles d'attitude	$2,8 \cdot 10^{-11}$	$3,6 \cdot 10^{-6}$	$3,8 \cdot 10^{-6}$	$3,9 \cdot 10^{-6}$
Quaternion du biais du gyromètre	$1,7 \cdot 10^{-11}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$

Tableau 3: Variances initiales issues de l'étude de la variance d'Allan

3.1.2.2. Variance d'Allan pour l'accélération

L'étude de la variance d'Allan effectuée sur les observations d'accélération effectuées comme décrit précédemment permet de définir directement les variances initiales des composantes du biais d'accélération.

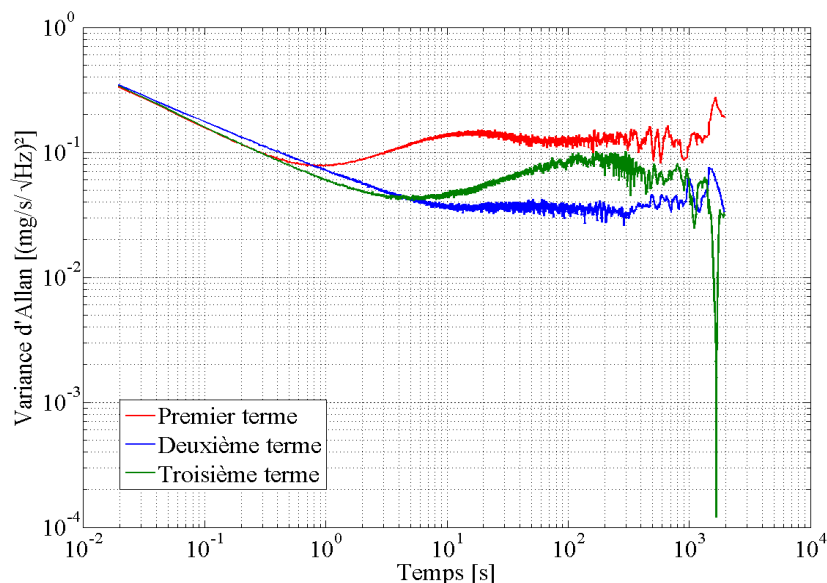


Figure 7 : Courbes issues de la variance d'Allan pour le biais d'accélération (Source personnelle)

La valeur de la variance initiale du biais d'accélération correspond à la valeur du bruit blanc du biais d'accélération. Ces valeurs sont résumées dans le Tableau 4.

	1 ^{ère} composante	2 ^{ème} composante	3 ^{ème} composante
Biais d'accélération [m/s²]²	0,0038	0,0035	0,0029

Tableau 4 : Variance initiale pour le biais d'accélération

3.1.2.3. Initialisation de la variance de la vitesse et de la position du piéton

La position du piéton est initialisée à l'aide de la solution de référence. La précision sur cette position est posée comme étant égale à 2cm. Par suite, la précision sur la vitesse initiale du piéton est posée égale à 2,8 cm/s. Ces valeurs représentent l'imprécision initiale attendue sur ces inconnues. Cependant, les imprécisions initiales associées à la vitesse et à la position du piéton ont été augmentées pour favoriser la convergence du filtre de Kalman.

3.1.2.4. Matrice initiale des variances-covariances des inconnues

L'une des principales hypothèses du filtre de Kalman est que les inconnues sont indépendantes entre elles. La matrice des variances-covariance est donc diagonale. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \text{Var}(\mathbf{q}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{Var}(\mathbf{b}_q) & & \vdots \\ \vdots & & \text{Var}(\mathbf{b}_{Acc}^b) & \\ & & & \text{Var}(\mathbf{P}^n) & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \text{Var}(\mathbf{v}^n) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Cette matrice de variances-covariances définit la confiance accordée aux inconnues.

3.1.2.5. Matrice initiale du bruit du système

La matrice initiale du bruit du système est composée des bruits de mesure du système sur sa diagonale. Ces bruits de mesure sont au nombre de quatre : un bruit sur le quaternion des angles d'attitudes, un bruit sur le biais du quaternion du gyromètre, un bruit sur le biais d'accélération et un bruit sur l'accélération. Les trois premiers bruits cités précédemment sont définis comme égaux à leur variance. Le bruit sur l'accélération est issu de l'étude de la variance d'Allan. Il correspond à la valeur du bruit blanc de l'accélération.

	1 ^{ère} composante	2 ^{ème} composante	3 ^{ème} composante
Bruit d'accélération [m/s ²] ²	0,077	0,071	0,060

Tableau 5 : Bruit d'accélération

Cette matrice définit la confiance accordée aux observations.

3.2. Phase de prédiction

Une fois que le vecteur d'état, ainsi que les variances et les bruits du système sont initialisés, c'est à dire que toutes ces grandeurs sont connues à un instant t , il est nécessaire de prédire ces grandeurs à l'instant suivant : $t + \Delta t$. Pour cela, des lois d'évolution doivent être établies pour chacune des inconnues composant le vecteur d'état. Ces lois d'évolution relient les inconnues entre deux états successifs.

3.2.1. Lois d'évolution du quaternion et des biais

Les lois d'évolution présentées dans ce paragraphe sont antérieures à ce projet de fin d'études.

3.2.1.1. Loi d'évolution des biais

D'après la définition des mesures d'accélération et de celle des mesures du gyromètre écrites dans le paragraphe 2.3, le biais d'accélération est modélisé à l'aide d'un processus de Gauss Markov et le biais du quaternion du gyromètre est défini avec un processus stochastique de type marche aléatoire. Par définition, les lois d'évolution de ces biais s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{q_\omega}(t + dt) = \mathbf{b}_{q_\omega}(t) + \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{b}_{q_\omega}} \\ \mathbf{b}_{Acc}^b(t + dt) = \sqrt{2\beta} \cdot \mathbf{b}_{Acc}^b(t) + \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{b}_{Acc}^b} \end{cases}, \quad (26)$$

avec $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{b}_{q_\omega}}$ le bruit blanc du biais du quaternion du gyromètre,

$\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{b}_{Acc}^b}$ le bruit blanc du biais d'accélération, exprimé dans le repère « body »,

β le temps de corrélation lié à la marche aléatoire du biais d'accélération.

3.2.1.2. Loi d'évolution du quaternion des angles d'attitude

Le quaternion des angles d'attitude est estimé à chaque instant de mesure à l'aide de la formule (27). Il dépend directement des mesures du gyromètre.

$$\mathbf{q}_b^n(t+dt) = \mathbf{q}_b^n(t) \cdot \mathbf{q}_\omega^b(t)$$

$$\mathbf{q}_b^n(t+dt) = \mathbf{q}_b^n(t) \left(\begin{array}{c} \cos(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_{nb}^b\|}{2} dt) \\ \sin(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_{nb}^b\|}{2} dt) \frac{\boldsymbol{\omega}_{nb}^b dt}{\|\boldsymbol{\omega}_{nb}^b\|} \end{array} \right) + \mathbf{q}_b^n(t) \cdot \boldsymbol{\eta}_{q_\omega}^b, \quad (27)$$

avec $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b$ la vitesse angulaire mesurée à l'instant t , exprimée dans le « body »,

$\boldsymbol{\eta}_{q_\omega}^b$ le bruit blanc du quaternion des angles d'attitude.

3.2.2. Lois d'évolution de la vitesse et de la position du piéton

La position et la vitesse du piéton sont calculées dans le repère « navigation », à l'aide des équations de Newton qui relient l'accélération à la vitesse et à la position :

$$\mathbf{a}^n = \frac{\partial \mathbf{v}^n}{\partial t} \quad (28)$$

$$\mathbf{v}^n = \frac{\partial \mathbf{P}^n}{\partial t} \quad (29)$$

L'accélération, sur l'intervalle de temps fixé par la fréquence d'échantillonnage du filtre, est considérée constante, c'est à dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall i \in [t, t + \Delta t[, \mathbf{a}(i) = \mathbf{a}(t), \quad (30)$$

avec Δt : l'intervalle de temps entre deux mesures successives.

L'accélération prédite dans le repère « navigation » à un instant t se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}^{n-}(t) &= \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) [\hat{\mathbf{a}}^{b-}] \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-}(t) \\ &= \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) [\mathbf{y}_{Acc}^b(t) + \mathbf{g}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-}(t) + \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b] \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-}(t) \\ \hat{\mathbf{a}}^{n-}(t) &= \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) [\mathbf{y}_{Acc}^b(t) - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-}(t) + \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b] \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-}(t) + \mathbf{g}^n \end{aligned} \quad (31)$$

En intégrant les équations (28) et (29) sur un intervalle $[t, t + \Delta t]$ on obtient, respectivement, à partir de (28) et de (29), une équation descriptive de l'évolution de la vitesse du pied (32) et de celle de la position du piéton (33), chacune en fonction du temps.

$$\forall u \in [t, t + \Delta t], \mathbf{v}(u) = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{a} du = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \Delta t \quad (32)$$

$$\forall u \in [t, t + \Delta t], \mathbf{P}(u) = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}(u) du = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a} \Delta t^2 \quad (33)$$

Appliqué à notre cas d'étude, (34) est donc l'équation d'évolution de la vitesse du pied du piéton entre deux instants successifs et (35) l'équation d'évolution de la position du piéton, toutes deux exprimées en fonction des observations et constantes du problème.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}}^{n-}(t + \Delta t) &= \hat{\mathbf{v}}^{n+}(t) + \hat{\mathbf{a}}^{n-}(t)\Delta t \\ &= \hat{\mathbf{v}}^{n+}(t) + (\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t)[\mathbf{y}_{Acc}^b(t) - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^b(t) + \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b] \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) + \mathbf{g}^n)\Delta t\end{aligned}\quad (34)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}^{n-}(t + \Delta t) &= \hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) + \hat{\mathbf{v}}^{n+}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{a}}^{n-}(t)\Delta t^2 \\ &= \hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) + \hat{\mathbf{v}}^{n+}(t)\Delta t + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t)[\mathbf{y}_{Acc}^b(t) - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^b(t) + \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b] \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) + \mathbf{g}^n)\Delta t^2\end{aligned}\quad (35)$$

Ainsi, la vitesse et la position du piéton à un instant $t + \Delta t$ sont prédites à partir de l'observation de l'accélération réalisée à l'instant t , de la valeur estimée du biais d'accélération à l'instant t et des valeurs corrigées de la vitesse et de la position à l'instant précédent.

3.2.3. Matrice de transition entre deux états

La matrice de transition entre deux états est établie en déterminant, pour chacune des inconnues de notre vecteur d'état, l'écart entre la valeur prédite et la valeur vraie à l'instant suivant, c'est-à-dire $t + \Delta t$. Cette matrice permet d'exprimer l'écart entre la valeur d'une inconnue à un instant $t + \Delta t$ et sa valeur à l'instant précédent. Seules les équations sur l'erreur sur la position du piéton et celle sur l'erreur sur sa vitesse ont été établies au cours de ce PFE.

3.2.3.1. Erreurs sur les biais

Comme cela a été posé dans le paragraphe précédent, les biais sont liés à leur bruit respectif de la manière suivante :

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{b}}_{q_i} = \boldsymbol{\eta}_{b_{q_i}} \\ \delta \dot{\mathbf{b}}_{Acc}^b = \boldsymbol{\eta}_{b_{Acc}^b} \end{cases}\quad (36)$$

3.2.3.2. Erreur sur le quaternion des angles d'attitude

L'équation d'erreur du quaternion des angles d'attitude se déduit de la formule de dérivation d'un quaternion. Elle dépend de la mesure du gyromètre à l'instant t et par suite du quaternion associé. Cette équation est définie précisément dans [12].

3.2.3.3. Erreur sur la position du piéton et sur sa vitesse

L'équation d'erreur sur la position s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{P}^n(t + \Delta t) &= \mathbf{P}^n(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{P}}^{n-}(t + \Delta t) \\ &= \mathbf{P}^n(t) + \Delta t \mathbf{v}^n(t) + \frac{1}{2} \mathbf{a}^n(t) \Delta t^2 - (\hat{\mathbf{P}}^{n-}(t) + \Delta t \hat{\mathbf{v}}^{n-}(t) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}^{n-}(t) \Delta t^2) \\ &= \delta \mathbf{P}^n(t) + \mathbf{v}^n(t) \Delta t - \hat{\mathbf{v}}^{n-}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 \delta \mathbf{a}^n(t) \\ \delta \mathbf{P}^n(t + \Delta t) &= \delta \mathbf{P}^n(t) + \Delta t \delta \mathbf{v}^n(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \delta \mathbf{a}^n(t)\end{aligned}\quad (37)$$

L'erreur sur la vitesse à l'instant suivant est déterminée suivant l'équation (38):

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{v}^n(t + \Delta t) &= \mathbf{v}^n(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{v}}^{n-}(t + \Delta t) \\
&= \mathbf{v}^n(t) + \mathbf{a}^n(t)\Delta t - (\hat{\mathbf{v}}^{n-}(t) + \hat{\mathbf{a}}^{n-}(t)\Delta t) \\
\delta \mathbf{v}^n(t + \Delta t) &= \delta \mathbf{v}^n(t) + \Delta t \delta \mathbf{a}^n(t)
\end{aligned} \tag{38}$$

La variation de l'accélération à un instant t est calculée suivant l'équation (39).

$$\delta \mathbf{a}^n(t) = \mathbf{a}^n(t) - \hat{\mathbf{a}}^{n-}(t) \tag{39}$$

$\hat{\mathbf{a}}^{n+}$ et $\hat{\mathbf{a}}^{n-}$ sont exprimées de la même manière que pour l'équation (31) ce qui nous donne :

$$\delta \mathbf{a}^n(t) = \mathbf{q}_b^n(t)(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^b(t))\bar{\mathbf{q}}_b^n(t) + \mathbf{g}^n - (\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t)(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-}(t) + \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b)\bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) + \mathbf{g}^n) \tag{40}$$

On pose :

$$\mathbf{q}_b^n = \hat{\mathbf{q}}_b^{n-} + \delta \mathbf{q}_b^n \text{ et de la même manière } \bar{\mathbf{q}}_b^n = \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{a}^n &= (\hat{\mathbf{q}}_b^{n-} + \delta \mathbf{q}_b^n)(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^b)(\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n) - \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-} + \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b)\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} \\
&= (\hat{\mathbf{q}}_b^{n-} + \delta \mathbf{q}_b^n)(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-} - \delta \mathbf{b}_{Acc}^b)(\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n) - \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-} + \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b)\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} \\
&= (\hat{\mathbf{q}}_b^{n-} + \delta \mathbf{q}_b^n)(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})(\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n) - \dots \\
&\dots (\hat{\mathbf{q}}_b^{n-} + \delta \mathbf{q}_b^n)\delta \mathbf{b}_{Acc}^b(\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n) - \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-} + \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b)\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} \\
&= \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\delta \bar{\mathbf{q}}_b^n + \delta \mathbf{q}_b^n(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \dots \\
&\dots \delta \mathbf{q}_b^n(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\delta \bar{\mathbf{q}}_b^n - [\hat{\mathbf{q}}_b^{n-} \cdot \delta \mathbf{b}_{Acc}^b \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \hat{\mathbf{q}}_b^{n-} \cdot \delta \mathbf{b}_{Acc}^b \cdot \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n + \dots \\
&\dots \delta \mathbf{q}_b^n \cdot \delta \mathbf{b}_{Acc}^b \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \delta \mathbf{q}_b^n \cdot \delta \mathbf{b}_{Acc}^b \cdot \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n] - \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \hat{\mathbf{q}}_b^{n-} \cdot \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-}
\end{aligned} \tag{42}$$

Un développement de Taylor est effectué à l'ordre 1. Les termes d'ordre 2 ne sont donc pas pris en compte car considérés comme négligeables par rapport aux autres termes. Ainsi (40) devient :

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{a}^n &= \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\delta \bar{\mathbf{q}}_b^n + \delta \mathbf{q}_b^n(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} \\
&\quad - \hat{\mathbf{q}}_b^{n-} \cdot \delta \mathbf{b}_{Acc}^b \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} - \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^n + \hat{\mathbf{q}}_b^{n-} \cdot \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^n \\
\delta \mathbf{a}^n &= [\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\delta \bar{\mathbf{q}}_b^n + \delta \mathbf{q}_b^n(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-}] - \hat{\mathbf{q}}_b^{n-} \cdot \delta \mathbf{b}_{Acc}^b \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} + \hat{\mathbf{q}}_b^{n-} \cdot \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-}
\end{aligned} \tag{43}$$

3.2.3.4. Matrice de transition entre deux instants

Finalement, la matrice de transition entre deux époques est de la forme :

$$\mathbf{f}_{t,t+\Delta t} = \begin{bmatrix} C(\hat{\mathbf{q}}_\omega) & -M(\hat{\mathbf{q}}_{bn}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^2}{2} A & 0 & -\hat{\mathbf{q}}_b^{n-} \frac{\Delta t^2}{2} \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} & I & \Delta t I \\ \Delta t A & 0 & -\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \Delta t \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-}(t) & 0 & I \end{bmatrix}, \tag{44}$$

avec C et M des fonctions définies dans [12],

A est une fonction définie telle que $A \delta \mathbf{q}_b^n(t) = \mathbf{q}_b^n(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\delta \bar{\mathbf{q}}_b^{n-} + \delta \mathbf{q}_b^n(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-})\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-}$.

Le vecteur d'état à l'instant $t + \Delta t$ peut alors être prédit selon l'équation (3).

3.2.4. Loi d'évolution de la variance du système

La loi d'évolution de la variance correspond à l'équation (4). La matrice de variances-covariances à un instant $t + \Delta t$ dépend de la matrice de transition entre deux époques, équation (44), de la matrice de variances-covariances de l'état précédent et de la matrice de variances-covariances des bruits du modèle, exprimée à l'instant présent. Cette dernière matrice, notée \mathbf{Q} , dépend des bruits de mesure du système et de leur évolution. Elle est définie de la manière suivante :

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{\Omega} \Delta t \cdot \mathbf{G}^T(t), \quad (45)$$

avec \mathbf{G} : la matrice représentant les lois d'évolution des bruits sur les inconnues,

$\mathbf{\Omega}$: la matrice des bruits de mesure du modèle, initialisée dans 3.1.2.5.

D'après les lois d'évolution des inconnues écrites précédemment, les bruits des inconnues sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\eta}_{q_\omega}^n(t) = \mathbf{q}_b^n(t) \cdot \boldsymbol{\eta}_{q_\omega}^b \\ \boldsymbol{\eta}_{b_{q_\omega}}^n(t) = \boldsymbol{\eta}_{b_{q_\omega}}^n \\ \boldsymbol{\eta}_{b_{Acc}}^n(t) = \sqrt{2\beta} \boldsymbol{\eta}_{Acc}^n \\ \boldsymbol{\eta}_P^n(t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \cdot \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-}(t) \Delta t^2 \\ \boldsymbol{\eta}_v^n(t) = \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \cdot \boldsymbol{\eta}_{Acc}^b \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-}(t) \Delta t \end{array} \right. \quad (46)$$

La matrice de variances-covariances des bruits de mesure représente la confiance allouée au modèle d'évolution du système.

Les inconnues formant le vecteur d'état sont maintenant prédites. Elles sont ensuite corrigées lorsque cela est possible. L'étape de correction de notre filtre de Kalman est décrite dans la partie suivante.

4. Correction du vecteur d'état

Un filtre de Kalman permet de corriger le vecteur d'état à partir d'observations. Ces corrections sont appliquées dès que possible, c'est-à-dire, dès que l'on se trouve dans une situation d'observation particulière : champ magnétique ou accélération quasi-statique sur une période T . Il est donc nécessaire d'attacher un soin tout particulier à la détection de ces périodes. Une fois que ces périodes sont correctement détectées, différentes mises à jour sont effectuées en fonction des cas :

- « Quasi Static Field » (QSF)
- « Magnetic Angular Rate Updates » (MARU)
- « Quasi Static Acceleration » (QSA)
- « Angular Gradient Update » (AGU).

QSF et MARU concernent les variations du champ magnétique tandis que QSA et AGU concernent les variations de l'accélération.

Par souci de simplification, dans la suite de ce rapport, « QSA » se réfère aux deux mises à jour sur l'accélération et « QSF » aux mises à jour prenant en compte le champ magnétique.

De plus, la localisation du capteur sur le pied permet d'utiliser les caractéristiques de la marche humaine en appliquant une mise à jour appelée « Zero velocity UPdaTe » (ZUPT).

4.1. Détection de QSA et QSF

L'absence de variation d'accélération et le fait que le champ magnétique soit quasi statique sont détectés en étudiant les dernières variations de l'accélération pour l'un et celles du champ magnétique pour l'autre. Le test se fait sur la variance de l'accélération sur une fenêtre glissante de longueur fixe qui doit être inférieure à un seuil pour être considérée comme une période quasi-statique d'accélération. De la même manière, la variance du champ magnétique sur une fenêtre glissante est comparée à un seuil pour détecter les phases de champ magnétique quasi-statique.

Le seuil pour le champ magnétique dépend uniquement de la qualité du capteur alors que le seuil de détection pour l'accélération est différent selon les personnes. En effet la manière de marcher de chacun diffère et même en appui au sol, certaines personnes verront leur pied bouger alors que d'autres pas. Le seuil pour le champ magnétique, noté T_{QSF} , est établi à partir d'observations en phase statique. Il est défini de la manière suivante :

$$T_{QSF} = \frac{1}{T} \int_T \text{var}(y_m(t-l), \dots, y_m(t)) \quad (47)$$

avec l : la longueur de la fenêtre glissante,

T : la longueur de la période statique considérée.

4.2. Application des mises à jour liées...

4.2.1. ...aux variations du champ magnétique

Une phase de QSF correspond donc aux deux mises à jour liées au champ magnétique.

4.2.1.1. Application de QSF

Pendant cette phase, le champ magnétique est par définition constant dans le référentiel « body », il doit donc aussi l'être dans le référentiel « navigation ». Le champ magnétique estimé dans le repère « navigation » est comparé à une valeur de référence qui correspond à la valeur du champ magnétique dans le repère « navigation » à l'instant t . L'écart entre ces deux valeurs permet de corriger le quaternion d'attitude. Cette première mise à jour est appelée QSF. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\delta \mathbf{z}_{m_{QSF}} = \mathbf{m}_{\text{Ref}}^n - \hat{\mathbf{q}}_b^{n-} \cdot \mathbf{y}_m^b \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} \quad (48)$$

avec $\delta \mathbf{z}_{m_{QSF}}$ l'erreur en QSF,

$\mathbf{m}_{\text{Ref}}^n$ le champ magnétique de référence exprimé dans le repère « navigation ». Ce champ est propre à chaque instant d'observation.

4.2.1.2. Application de MARU

La seconde mise à jour à l'aide du champ magnétique, appelée MARU, est ensuite appliquée. Le champ magnétique est estimé à l'instant $t + \Delta t$ dans le repère « navigation » grâce à la loi d'évolution du champ magnétique et aux observations. Cette relation correspond à l'équation (49).

$$\hat{\mathbf{m}}_m^b(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{q}}_\omega(t) \cdot \mathbf{y}_m^b(t) \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_\omega(t) \quad (49)$$

Cette valeur permet de déterminer une vitesse angulaire magnétique qui est comparée à celle issue des observations du gyromètre. L'écart entre ces deux valeurs nous donne des informations sur la transformation à appliquer pour passer du repère « body » au repère « navigation » et permet d'apporter des corrections au quaternion des angles d'attitude et au biais du quaternion du gyromètre. L'erreur en MARU, notée $\delta \mathbf{z}_{m_{MARU}}$, s'écrit alors de la manière suivante :

$$\delta \mathbf{z}_{m_{MARU}} = \mathbf{y}_m^b(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{m}}_m^b(t + \Delta t) \quad (50)$$

4.2.2. ...aux variations de l'accélération

De la même manière que précédemment, les phases de QSA permettent de mettre à jour certaines inconnues.

4.2.2.1. Application de QSA

De la même manière que pour QSF, l'erreur en QSA correspond à l'écart entre un champ d'accélération de référence et la valeur de l'accélération, estimée dans le repère « navigation ». Cette valeur est estimée à l'aide des observations. L'erreur en QSA, notée $\delta \mathbf{z}_{Acc_{QSA}}$, s'écrit alors de la manière suivante :

$$\delta \mathbf{z}_{Acc_{QSA}} = \mathbf{a}_{\text{Ref}}^n - \hat{\mathbf{q}}_b^{n-} (\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^b) \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-} \quad (51)$$

Cette mise à jour, appelée QSA, permet de corriger le biais d'accélération, et le quaternion des angles d'attitude.

4.2.2.2. Application de AGU

De la même manière que pour la mise à jour en MARU, AGU compare la valeur de l'accélération exprimée à l'instant $t + \Delta t$ à une valeur de référence. L'accélération est estimée dans le repère « body » à l'aide de sa loi d'évolution suivant l'équation (52).

$$\hat{\mathbf{a}}^b(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{q}}_\omega(t) \cdot \hat{\mathbf{a}}^b(t) \cdot \bar{\hat{\mathbf{q}}}_\omega(t) \quad (52)$$

L'erreur en AGU, notée $\delta z_{Acc_{AGU}}$, s'écrit suivant l'équation (53).

$$\delta z_{Acc_{AGU}} = (\mathbf{y}_{Acc}^b(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}) - \hat{\mathbf{a}}^b(t + \Delta t) \quad (53)$$

La valeur de cette erreur permet donc corriger le quaternion d'attitude, le biais du quaternion du gyromètre et le biais d'accélération. Cette mise à jour est appelée AGU.

4.3. Détection de ZUPT

Afin d'ajouter une autre correction à notre vecteur d'état, les caractéristiques de la marche sont exploitées. La Figure 8 décrit les différentes étapes du cycle de marche sur une foulée, pour chacun des pieds.

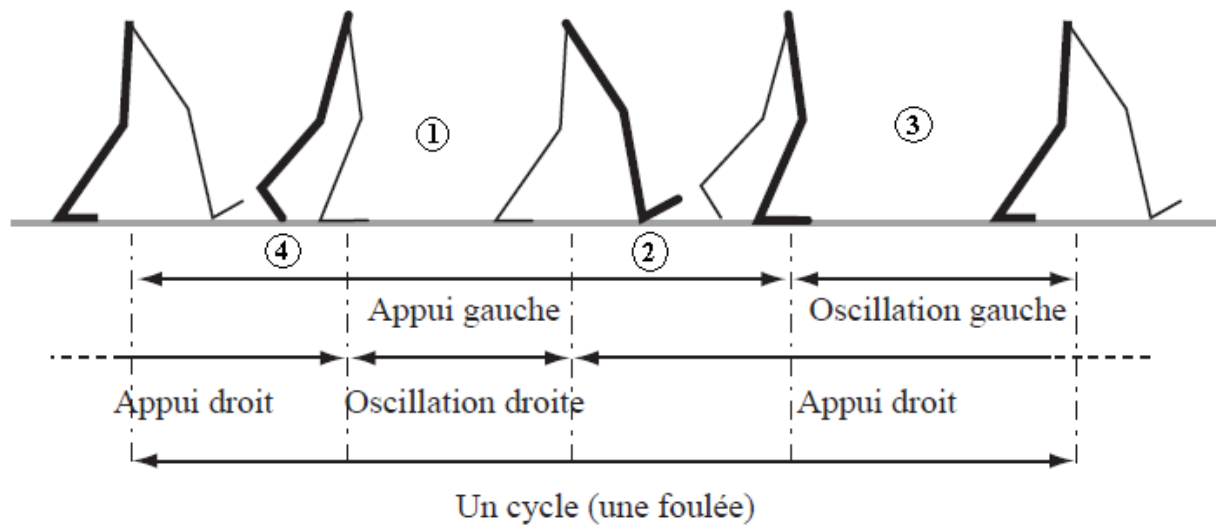


Figure 8 : Cycle de marche (Source [13])

Le cycle de marche se décompose en deux grandes phases : une phase oscillante et une phase d'appui.

La phase oscillante, pour le pied droit, est représentée par le numéro 1 sur la Figure 8. À ce moment le pied n'est plus en contact avec le sol. Tout le poids du corps repose sur le pied gauche, qui est alors en phase d'appui.

La phase d'appui pour un pied peut se décomposer en trois périodes. La première période suit directement la phase d'oscillation. Le talon touche le sol en premier. Cette période, pour le pied droit, correspond au numéro 2 sur la Figure 8. A ce moment, le pied droit n'est pas encore totalement immobile. Le numéro 3 correspond à la période d'appui du pied droit. Il est alors entièrement en contact avec le sol. À cet instant, le pied gauche est en phase d'oscillation. La dernière période est représentée par le numéro 4. Seuls les orteils du pied droit sont encore en contact avec le sol. Cette période précède une nouvelle phase d'oscillation du pied droit et une phase d'appui du pied gauche. Les pieds suivent ces différentes étapes chacun leur tour.

La période qui nous intéresse est celle pendant laquelle le pied est en appui sur le sol (numéro 3). En phase d'appui, le pied est quasi-statique. Grâce aux mesures d'accélération, il est possible de détecter ces phases quasi-statiques.

4.3.1. Détection de pas à l'aide de l'accéléromètre

Les périodes quasi-statiques du pied sont déterminées à l'aide des mesures de l'accéléromètre. Deux tests sont effectués afin de détecter ces périodes.

4.3.1.1. Étude de la norme de la mesure l'accélération

En période quasi-statique, un accéléromètre « parfait » mesure uniquement la réponse à la force de pesanteur dans le repère « body », c'est-à-dire $-\vec{g}$. Il est impossible de déterminer la valeur de la force de pesanteur dans chacun des repères « body ». La norme euclidienne de la force de pesanteur est donc étudiée car elle ne dépend pas du référentiel. Ce premier test correspond à calculer l'écart entre la norme de la force de pesanteur et la norme de l'accélération mesurée. Cet écart est à comparer à un seuil. Ce seuil a été fixé à 70 mg après plusieurs tests.

4.3.1.2. Étude de l'écart-type de la norme de la mesure l'accélération

Ce second test prend en compte l'écart-type de la norme de la mesure d'accélération. Cet écart-type est calculé sur une fenêtre glissante dont la taille est fixée. Il est ensuite comparé à un seuil. La longueur de la fenêtre glissante sur laquelle est calculé l'écart-type, est de 10 observations soit 0,1s. Cette grandeur est à mettre en relation avec la durée de la phase d'appui d'un pied, qui est de 0,4s pour chaque pas. Contrairement à la taille de la fenêtre glissante, le seuil est spécifique au piéton. Il dépend directement des conditions d'acquisition des observations et par conséquent des caractéristiques de marche du piéton. La manière de marcher ainsi que la vitesse de marche du piéton apparaissent comme les deux principales caractéristiques influençant la définition de ce seuil. Cependant, ils restent difficiles à estimer. Ce seuil varie, dans notre étude, de 0,01 à 0,09 m/s² suivant les personnes.

4.3.1.3. Instant de pas

Le pied est considéré en période quasi-statique si les deux tests décrits précédemment sont validés. Pour chaque pas, plusieurs instants correspondant à des périodes quasi-statiques sont détectés. Il est possible de détecter un instant de début de pas et un instant de fin de pas. L'instant de pas est défini comme étant l'instant moyen sur cet intervalle. La Figure 9 représente la détection de périodes quasi-statiques pour le pied et les instants de pas correspondants, pour deux pas. Les phases d'oscillations sont bien distinctes des phases d'appuis.

Le fait de réaliser une bonne ou mauvaise détection de ces périodes quasi-statiques du pied réside donc dans l'évaluation des différents paramètres énoncés précédemment.

Il est difficile d'évaluer la pertinence de la détection des phases statiques car nous n'avons pas de système de référence permettant de le vérifier. Il est préférable d'être assez sévère sur la détection de ces phases afin d'éviter les fausses alertes, qui peuvent avoir de graves conséquences sur la convergence du filtre.

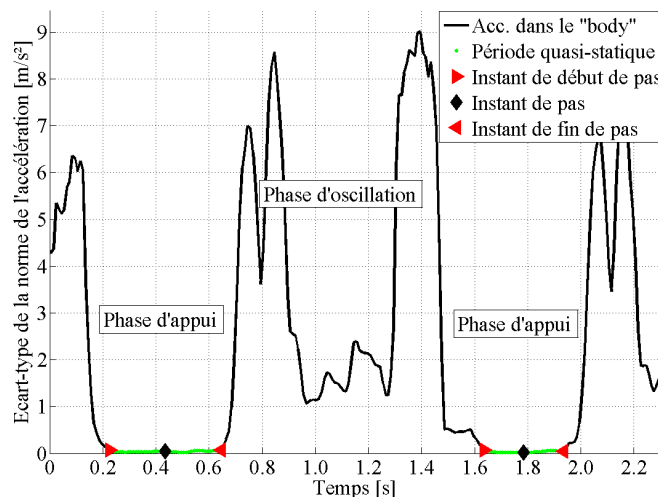


Figure 9 : Détection de phases quasi-statiques et instants de pas (Source personnelle)

4.4. Application de ZUPT

En présence d'une période quasi-statique du pied, il est possible d'appliquer une correction appelée « Zero velocity UPdaTe ». En se basant sur les caractéristiques de la marche humaine énoncées précédemment, de fortes hypothèses peuvent être émises.

4.4.1. Innovation liée à la vitesse du pied

Au cours de ce cycle, la vitesse du pied varie entre 0 m/s et 5 m/s au maximum, respectivement d'une phase d'appui à une phase d'oscillation.

Pendant une période quasi-statique du pied, la vitesse calculée doit être nulle car le pied est immobile. Si ce n'est pas le cas, alors la vitesse prédite à l'instant t correspond à une erreur. Cette erreur peut être corrigée puisque la valeur vraie de la vitesse du pied est connue à cet instant. La valeur de l'innovation sur la vitesse peut alors être déterminée à un instant t , elle correspond à la valeur de l'opposé de la vitesse estimée à cet instant, équation (54).

$$\delta \mathbf{v}^n(t) = \mathbf{v}^n(t) - \hat{\mathbf{v}}^n(t) = \mathbf{0} - \hat{\mathbf{v}}^n(t) \quad (54)$$

4.4.2. Innovation liée à la position du piéton

Si entre deux instants la vitesse du pied est nulle, alors la différence entre les deux positions successives correspondantes doit être nulle. Sa position à un instant $t + \Delta t$ est égale à sa position à l'instant précédent.

$$\hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) = \hat{\mathbf{P}}^{n-}(t + \Delta t) \quad (55)$$

La valeur de la correction qu'il faudra apporter à la position est déterminée avec l'équation (56).

$$\hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) - \hat{\mathbf{P}}^{n-}(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) - (\hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) + \hat{\mathbf{v}}^{n+}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{a}}^{n-}(t)\Delta t^2) \quad (56)$$

Or en phase statique, $\hat{\mathbf{v}}^{n+}(t) = \mathbf{0}$. De plus, $\hat{\mathbf{a}}^{n-}$ est exprimée de la même manière que dans l'équation (31).

(56) devient alors :

$$\hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) - \hat{\mathbf{P}}^{n-}(t + \Delta t) = -\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t)(\mathbf{y}_{Acc}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-}(t))\bar{\hat{\mathbf{q}}}_b^{n-}(t) + \mathbf{g}^n]\Delta t^2 \quad (57)$$

Or en période quasi-statique du pied, l'accélération dans le référentiel « body » est nulle : $\mathbf{a}^b = \mathbf{0}$, d'où la mesure d'accélération est de la forme :

$$\mathbf{y}_{Acc}^b = \mathbf{a}^b + \mathbf{b}_{Acc}^b - \mathbf{g}^b = \mathbf{b}_{Acc}^b - \mathbf{g}^b \quad (58)$$

(57) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) - \hat{\mathbf{P}}^{n-}(t + \Delta t) &= -\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t)(\mathbf{b}_{Acc}^b(t) - \mathbf{g}^b - \hat{\mathbf{b}}_{Acc}^{b-}(t)) * \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) + \mathbf{g}^n] \Delta t^2 \\ &= -\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \cdot \delta \mathbf{b}_{Acc}^b(t) \cdot \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) - \hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \cdot \mathbf{g}^b \cdot \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) + \mathbf{g}^n] \Delta t^2 \end{aligned} \quad (59)$$

En utilisant les relations (41) qui lient le quaternion estimé à sa valeur vraie et à son erreur, l'erreur en position s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) - \hat{\mathbf{P}}^{n-}(t + \Delta t) &= -\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \cdot \delta \mathbf{b}_{Acc}^b \cdot \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) - (\mathbf{q}_b^n(t) - \delta \mathbf{q}_b^n(t)) \mathbf{g}^b (\bar{\mathbf{q}}_b^n(t) - \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n(t)) + \mathbf{g}^n] \Delta t^2 \\ &= -\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \cdot \delta \mathbf{b}_{Acc}^b \cdot \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) - \mathbf{q}_b^n(t) \cdot \mathbf{g}^b \cdot \bar{\mathbf{q}}_b^n(t) + \mathbf{q}_b^n(t) \cdot \mathbf{g}^b \cdot \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n(t) \\ &\quad + \delta \mathbf{q}_b^n(t) \cdot \mathbf{g}^b \cdot \bar{\mathbf{q}}_b^n(t) - \delta \mathbf{q}_b^n(t) \cdot \mathbf{g}^b \cdot \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n(t) + \mathbf{g}^n] \Delta t^2 \end{aligned} \quad (60)$$

De la même manière que précédemment, les termes d'ordre 2 sont négligeables et finalement on peut déterminer l'erreur sur la position de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) - \hat{\mathbf{P}}^{n-}(t + \Delta t) &= -\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \delta \mathbf{b}_{Acc}^b \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) + \mathbf{q}_b^n(t) \mathbf{g}^b \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n(t) + \delta \mathbf{q}_b^n(t) \mathbf{g}^b \bar{\mathbf{q}}_b^n(t)] \Delta t^2 \\ &= -\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \delta \mathbf{b}_{Acc}^b \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) + \mathbf{q}_b^n(t) \mathbf{g}^b \bar{\mathbf{q}}_b^n(t) \mathbf{q}_b^n(t) \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n(t) + \delta \mathbf{q}_b^n(t) \bar{\mathbf{q}}_b^n(t) \mathbf{q}_b^n(t) \mathbf{g}^b \bar{\mathbf{q}}_b^n(t)] \Delta t^2 \\ \hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) - \hat{\mathbf{P}}^{n-}(t + \Delta t) &= -\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \delta \mathbf{b}_{Acc}^b \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) + \mathbf{g}^n \mathbf{q}_b^n(t) \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n(t) + \delta \mathbf{q}_b^n(t) \mathbf{q}_b^n(t) \mathbf{g}^n] \Delta t^2 \end{aligned} \quad (61)$$

4.4.3. Mise à jour en ZUPT

Les deux innovations décrites précédemment permettent de corriger le vecteur d'état. La matrice de mesure à l'instant $t + \Delta t$ correspond au Jacobien des équations d'erreurs sur les inconnues. $\mathbf{H}_{t+\Delta t}$ s'écrit alors :

$$\mathbf{H}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ B & 0 & -\hat{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \frac{1}{2} \Delta t^2 \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (62)$$

avec B une fonction définie telle que $B \delta \mathbf{q}_b^n(t) = \mathbf{g}^n \cdot \mathbf{q}_b^n(t) \cdot \delta \bar{\mathbf{q}}_b^n(t) + \delta \mathbf{q}_b^n(t) \cdot \mathbf{q}_b^n(t) \cdot \mathbf{g}^n$.

La séquence d'innovations est ainsi définie, le gain de Kalman peut être calculé. La mise à jour en ZUPT s'effectue de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{X}}^{n+}(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{X}}^{n-}(t + \Delta t) + \mathbf{K}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{ino}(t + \Delta t), \quad (63)$$

avec $\mathbf{ino}(t + \Delta t)$ la matrice d'innovation à l'instant $t + \Delta t$ qui s'écrit sous la forme de (64).

$$\mathbf{ino}(t + \Delta t) = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{v}}^{n-}(t + \Delta t) \\ \hat{\mathbf{P}}^{n-}(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{P}}^{n+}(t) \end{bmatrix} \quad (64)$$

Les différentes mises à jour permettent de corriger les inconnues et par conséquent de contraindre le système et d'éviter la propagation d'erreur sur les inconnues. La solution décrite dans les deux parties précédentes doit maintenant être mise en pratique afin de la tester. Les performances de la solution sont ensuite évaluées.

5. Acquérir des données en vue d'une solution de référence

Dans le cadre de ce projet, plusieurs acquisitions de données ont été menées afin d'évaluer la précision de la solution décrite dans les parties précédentes. L'ensemble des tests, des indicateurs de précision et des résultats sont résumés dans la partie suivante.

5.1. Rappel des objectifs

L'objectif principal des tests est de pouvoir répondre à la question : « *la solution inertielle implémentée dans le cadre de ce projet peut-elle être considérée comme une solution de référence pour d'autre système de navigation pédestre ?* »

Cet objectif est envisageable car la solution décrite dans cette étude apparaît suffisamment mature et prometteuse. En effet, cette solution est une compilation des dernières avancées dans le domaine de la navigation pédestre. Les différentes innovations donnent des résultats plus qu'intéressants lorsqu'elles sont exploitées séparément. Une solution les regroupant devrait donc donner des résultats plus qu'acceptables en termes de précision de positionnement.

Dans un premier temps, différents tests expérimentaux ont été réalisés afin d'évaluer la précision allouable à notre solution inertielle. Dans le but de définir une solution de référence, ces tests ont été menés sur plusieurs piétons et dans différents environnements.

Dans un second temps, les performances doivent être analysées et étudiées. Elles sont estimées suivant le critère de précision utilisé actuellement dans le domaine de la navigation pédestre et également à l'aide de nouveaux critères tels que l'étude des erreurs planimétriques. La précision pour notre solution visée est de l'ordre du mètre à deux sigma près.

Ces différents tests ont aussi permis d'identifier l'origine des erreurs en analysant les performances d'une telle solution sur plusieurs jeux de données. Cette analyse doit aussi être mise en lien avec les conditions d'acquisition. Cette étude permettra de définir un protocole d'acquisition pour garantir les meilleurs résultats et ainsi pouvoir considérer, ou non, la solution implémentée comme une solution de référence pour la navigation pédestre.

5.2. Description globale des tests

Une solution de référence doit pouvoir être utilisée par différentes personnes, c'est pourquoi il est intéressant d'évaluer l'adaptabilité de la solution à la manière de marcher. Chaque personne marchant de manière différente, les acquisitions ont été effectuées par quatre personnes de morphologie différente. Cependant le matériel utilisé ainsi que les parcours effectués par chacun sont les mêmes. Ils sont décrits dans les deux parties suivantes.

5.2.1. Équipement pour l'acquisition

La Figure 10 présente un piéton équipé avec la solution de référence (a) et la solution inertielle (c). L'antenne GPS est fixée sur une casquette portée par l'utilisateur. Le récepteur se situe dans le sac à dos du piéton. La longueur de la base est au maximum de 1 km.

La solution inertielle est composée du capteur ADIS16488, rigidement attaché à la chaussure de l'utilisateur de telle sorte qu'il ne puisse pas bouger lors des acquisitions. Suivant la disposition du capteur sur le pied, les vitesses de rotations angulaires sont plus ou moins réparties selon les trois axes de mesure. La plage de mesure du gyromètre est de $\pm 450^\circ/\text{s}$. Afin d'éviter la saturation du gyromètre, le capteur est placé de biais sur le pied et le piéton ne

doit pas marcher rapidement. La carte d'acquisition de la centrale inertielle est maintenue à la ceinture du piéton ou peut être tenue à la main.

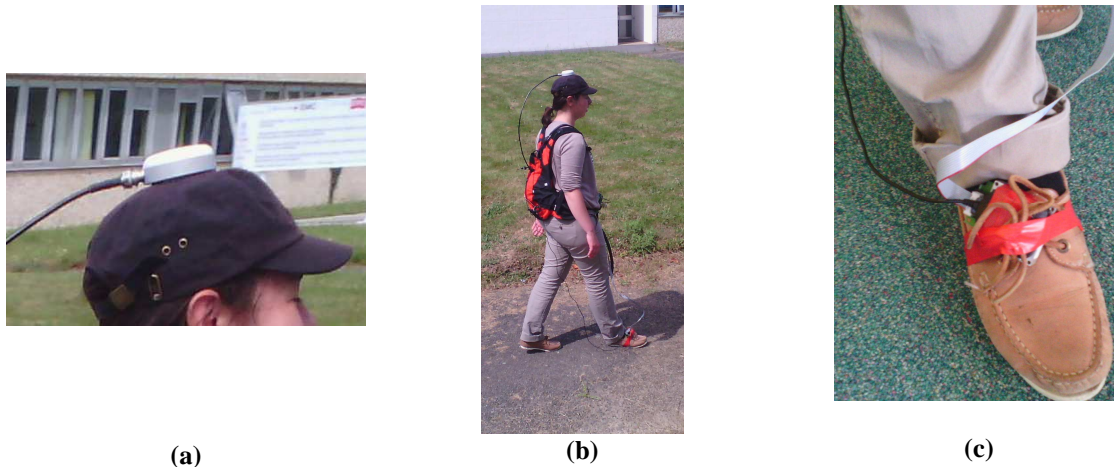


Figure 10 : Équipement pour l'acquisition

(a) : Antenne GPS fixée sur la tête - (b) : Piéton équipé - (c) : Centrale inertielle fixée sur le pied
(Source personnelle)

5.2.2. Parcours effectués

Deux types de parcours ont été réalisés :

- un parcours en extérieur : le but est d'observer des erreurs planimétriques sur toute la durée de marche afin de pouvoir estimer la précision de la solution. Les piétons ont effectué un aller retour pour une longueur totale de marche de 500m. L'aller est effectué sans arrêt tandis que le retour est ponctué de plusieurs phases statiques imposées variant de 15s à 2min. Pendant ces phases statiques, le piéton doit garder son pied au sol, le plus immobile possible.

- un parcours alternant des passages en intérieur et en extérieur : l'objectif est de tester la solution en intérieur. Des phases en extérieur sont nécessaires pour comparer les positions calculées à partir de la solution inertielle à celles issues de la solution de référence. Après une dizaine de mètres dehors, le piéton marche dans un bâtiment pendant 100m avant de ressortir. La longueur de cette deuxième période à l'extérieur est de 130m. Le piéton entre une dernière fois dans le bâtiment pour une longueur de marche de 75m. L'acquisition se termine à l'extérieur. Avant chaque entrée dans le bâtiment / après chaque sortie du bâtiment, le piéton doit effectuer une phase statique afin de connaître la précision de la solution avant/après chaque changement d'environnement. Le parcours est également ponctué de différentes phases statiques imposées.

A noter que chaque acquisition de données commence avec une phase de calibration du magnétomètre. Cette calibration a pour but de modéliser le champ magnétique émis par le boîtier du capteur pour ne mesurer ensuite que le champ magnétique extérieur. Cette modélisation est réalisée dans un espace propre d'un point de vue électromagnétique, où seul le champ magnétique de la Terre est mesuré. Cette condition nous permet de calibrer le magnétomètre avant de commencer à marcher [22].

De plus, une phase statique est effectuée à chaque début d'acquisition afin d'initialiser le vecteur d'état. Une phase statique est également réalisée à la fin de chacune des acquisitions.

5.3. Étude de précision

Deux approches ont été étudiées dans le cadre de ce projet :

- une étude théorique visant à définir la précision que l'on peut espérer atteindre à partir des données initiales et
- une étude effective utilisant les données expérimentales. Des indicateurs de précision sont utilisés.

5.3.1. Approche théorique

Avant de procéder aux observations, il est possible de déterminer, par transmission d'erreurs moyennes quadratiques, la précision théorique sur les inconnues. Dans notre cas, les observations ne sont pas corrélées. Précision et exactitude sont donc confondues.

Par la suite, nous nous intéresserons uniquement à la précision sur l'accélération du pied du piéton dans le repère « navigation », à celle sur la vitesse du piéton dans le repère « navigation » et enfin à celle sur la position du piéton dans le repère « navigation ». Les résultats issus de l'analyse de la variance d'Allan ont été utilisés dans cette étude.

5.3.1.1. Précision théorique sur l'accélération du piéton

La mesure de l'accélération est définie suivant l'équation (12), d'où :

$$\mathbf{a}^b = \mathbf{y}_{Acc}^b - \mathbf{b}_{Acc}^b + \mathbf{g}^b - \mathbf{\eta}_{Acc}^b \quad (65)$$

La valeur de la force pesanteur et le bruit d'accélération sont des constantes supposées connues et dont les erreurs moyennes quadratiques sont considérées nulles. En appliquant la formule de transmission d'erreurs moyennes quadratiques à (65) et, en supposant que le biais de l'accélération et la mesure de l'accélération sont indépendants, on obtient :

$$\mathbf{mq}_{a^b}^2 = \mathbf{mq}_{y_{Acc}^b}^2 + \mathbf{mq}_{b_{Acc}^b}^2 \quad (66)$$

avec \mathbf{mq}_X^2 un vecteur définit avec les erreurs moyennes quadratiques sur les composantes du vecteur \mathbf{X} .

Les valeurs de ces erreurs moyennes quadratiques sont équivalentes aux variances issues de l'analyse de la variance d'Allan. Pour rappel, on a :

$$\mathbf{mq}_{y_{Acc}^b}^2 = 0,22 \text{ mg}^2 \text{ et } \mathbf{mq}_{b_{Acc}^b}^2 = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ mg}^2 \text{ ce qui nous donne } \mathbf{mq}_{a^b}^2 = 0,23 \text{ mg}^2$$

L'accélération du pied du piéton dans le repère « navigation » peut se définir suivant l'équation (67)

$$\hat{\mathbf{a}}^{n-}(t) = \mathbf{q}_b^{n-}(t) \cdot \hat{\mathbf{a}}^{b-}(t) \cdot \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \quad (67)$$

Par transmission d'erreurs moyennes quadratiques appliquée à (67), l'erreur moyenne quadratique de l'accélération dans le repère « navigation » est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{mq}_{a_t^n}^2 = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{a}}^{n-}(t)}{\partial \mathbf{q}_b^{n-}(t)} \mathbf{mq}_{q_b^{n-}(t)}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{a}}^{n-}(t)}{\partial \hat{\mathbf{a}}^{b-}(t)} \mathbf{mq}_{\hat{\mathbf{a}}^{b-}} \right)^2 \quad (68)$$

avec \mathbf{mq}_X^2 un vecteur composé des erreurs moyennes quadratiques des composantes du vecteur \mathbf{X} .

(68) s'écrit alors sous la forme de l'équation (69).

$$\mathbf{mq}_{a_t^n}^2 = \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_b^{n-}(t) \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \cdot \hat{\mathbf{a}}^{b-}(t) \cdot \mathbf{mq}_{q_b^{n-}(t)}} \right)^2 + \left(\mathbf{q}_b^{n-}(t) \cdot \mathbf{mq}_{\hat{\mathbf{a}}^{b-}} \cdot \bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t) \right)^2 \quad (69)$$

,

avec $\hat{\mathbf{a}}^{b-}(t)$, $\mathbf{q}_b^{n-}(t)$ et $\bar{\mathbf{q}}_b^{n-}(t)$ les valeurs les plus probables, respectivement, de l'accélération dans le « body », du quaternion et du conjugué du quaternion, exprimés à l'instant t . Ces grandeurs ont été calculées avec un filtre de Kalman implémenté sans ZUPT.

$\bar{\mathbf{q}}_\omega(t)$ le quaternion associé aux observations du gyromètre à l'instant t ,

$\mathbf{mq}_{\mathbf{q}_b^n}$ un vecteur définit avec l'erreur moyenne quadratique des composantes du quaternion des angles d'attitude. Par souci de simplification, cette grandeur est définie comme constante dans le temps. Ce vecteur est initialisé avec les valeurs issues de l'analyse de la variance d'Allan.

5.3.1.2. Précision théorique sur la vitesse du piéton

La vitesse est définie suivant l'équation (32). La précision théorique sur la vitesse est obtenue de la manière suivante :

$$\mathbf{mq}_{\mathbf{v}_{i+1}^n}^2 = \mathbf{mq}_{\mathbf{v}_i^n}^2 + \Delta t^2 \mathbf{mq}_{\mathbf{a}_i^n}^2 + 2\mathbf{mq}_{\mathbf{v}_i^n; \mathbf{a}_i^n} \Delta t, \quad (70)$$

avec $\mathbf{mq}_{\mathbf{v}_{i+1}^n}^2$ un vecteur composé de l'erreur moyenne quadratique de chacune des composantes de la vitesse du piéton.

Or \mathbf{v}_i^n et \mathbf{a}_i^n sont deux vecteurs indépendants l'un de l'autre, puisque la vitesse à l'instant i dépend uniquement de celle à l'instant précédent et de l'accélération à l'instant précédent.

(70) s'écrit donc :

$$\mathbf{mq}_{\mathbf{v}_{i+1}^n}^2 = \mathbf{mq}_{\mathbf{v}_i^n}^2 + \Delta t^2 * \mathbf{mq}_{\mathbf{a}_i^n}^2 \quad (71)$$

(71) peut s'écrire à chaque instant i compris entre 1 et n , avec n le nombre d'observations.

En sommant terme à terme, à l'instant i , on peut écrire :

$$\forall i \in [1, n], \mathbf{mq}_{\mathbf{v}_i^n}^2 = \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{mq}_{\mathbf{v}_k^n}^2 + \Delta t^2 \mathbf{mq}_{\mathbf{a}_k^n}^2 \quad (72)$$

La vitesse initiale est calculée à partir des positions issues du GPS comme définit dans (23).

Sa précision dépend donc de la précision sur les positions GPS. On pose :

$$\mathbf{mq}_{DGPS} = 2\text{cm d'où } \mathbf{mq}_{\mathbf{v}_1^n} = \sqrt{2\mathbf{mq}_{DGPS}^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2,8 \text{ cm.s}^{-1} \quad (73)$$

5.3.1.3. Précision théorique sur la position du piéton

En suivant le même raisonnement que pour déterminer l'erreur moyenne quadratique de la vitesse, celle de la position se détermine par transmission d'erreur moyenne quadratique appliquée à la formule (33), ce qui nous donne :

$$\mathbf{mq}_{\mathbf{p}_{i+1}^n}^2 = \mathbf{mq}_{\mathbf{p}_i^n}^2 + \Delta t^2 * \mathbf{mq}_{\mathbf{v}_i^n}^2 + \left(\frac{\Delta t^2}{2} * \mathbf{mq}_{\mathbf{a}_i^n}\right)^2 \quad (74)$$

On considère que la position à un instant i est indépendante de l'accélération et de la vitesse à ce même instant. Les covariances sur ces différentes variables sont donc nulles.

Tout comme pour la vitesse, il est nécessaire d'initialiser la position. La première position est déterminée à l'aide du GPS. La précision allouée à cette initialisation est définie avec (73).

La précision sur la position du piéton se calcule alors de la manière suivante :

$$\mathbf{mq}_{\mathbf{p}_i^n}^2 = \sum_{k=1}^{i-1} [\mathbf{mq}_{\mathbf{p}_k^n}^2 + (\Delta t \mathbf{mq}_{\mathbf{v}_k^n})^2 + \left(\frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{mq}_{\mathbf{a}_k^n}\right)^2] \quad (75)$$

D'après les équations (72) et (75), la précision sur la vitesse du piéton et celle sur la position du piéton vont décroître très rapidement. Les précisions théoriques sont souvent assez pessimistes en comparaison avec la réalité du terrain.

5.3.2. Indicateurs de précision effective

Différents indicateurs permettent d'évaluer la précision de la solution décrite ci-dessus. Ces indicateurs sont définis en comparant les résultats obtenus avec la solution inertielle à ceux obtenus avec la solution de référence.

5.3.2.1. Erreur planimétrique

Il est difficile de comparer les vitesses issues de la solution inertielle à celles issues de la solution de référence. L'inertiel nous donne la vitesse du pied du piéton tandis que la solution DGPS nous donne directement la vitesse de marche du piéton. La précision des expérimentations a donc été jugée en terme d'écart apparent entre les positions déterminées à l'aide de la solution GPS et celles calculées à l'aide des observations inertielles.

L'erreur planimétrique entre la trace issue des données GPS et celle issue des données inertielles est déterminée pour chaque instant de pas. Comme expliqué dans le paragraphe 4.3, ces instants sont détectés à l'aide des observations des mesures d'accélération. Les données issues du GPS ne permettent pas de déterminer des instants de pas car l'antenne GPS est située sur la tête du piéton. De plus les deux systèmes n'ont pas la même fréquence d'acquisition, 100Hz pour le capteur inertiel contre 5Hz pour le GPS. Cependant, ils sont synchronisés temporellement. La position GPS correspondant à chaque instant de pas est calculée à l'aide des instants de pas issus de l'inertiel. Pour chaque pas, la position GPS se trouvant temporellement juste avant l'instant de pas, notée P_1 , et celle se trouvant temporellement juste après, notée P_2 , sont extraites. Si ces points GPS ne se trouvent pas dans l'intervalle délimité par l'instant de début et l'instant de fin de pas alors, ils ne sont pas pris en compte. Figure 11 montre un exemple des deux cas cités précédemment.

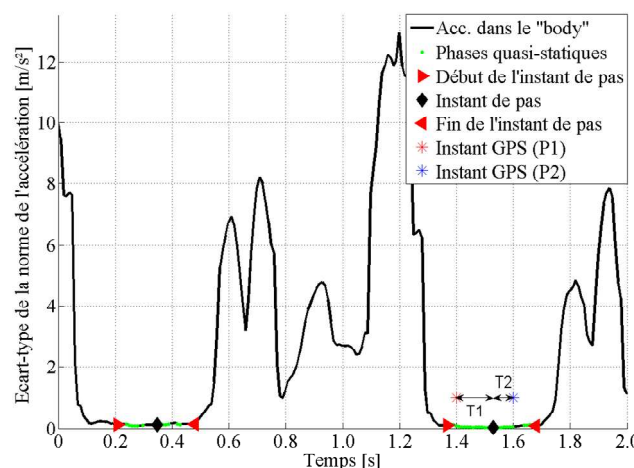


Figure 11 : Détection de l'instant de pas GPS et calcul de la position GPS correspondante
(Source personnelle)

Si les deux points sont compris dans l'intervalle alors on effectue une moyenne pondérée pour connaître la position GPS correspondant à cet instant de pas. La pondération s'effectue en fonction des temps suivant (76).

$$P_{GPS, \text{Instant de pas}} = \frac{T_1 \cdot P_1 + T_2 \cdot P_2}{T_1 + T_2}, \quad (76)$$

avec P_X un vecteur défini avec les coordonnées planimétriques du point X .

L'erreur planimétrique peut ensuite être déterminée comme une distance euclidienne entre la position GPS et la position inertielle, pour chaque instant de pas.

5.3.2.2. Écart sur la distance totale parcourue

En navigation pedestre, il est d'usage de définir la précision d'une solution en mettant en relation l'erreur planimétrique avec la distance parcourue. Cette valeur a donc été calculée afin de pouvoir comparer nos résultats à ceux de la littérature actuelle. Elle s'exprime en termes de pourcentage d'erreur.

5.3.2.3. Écart-type et distribution gaussienne

L'écart-type sur les erreurs planimétriques, noté σ_{Pi} , pour chaque jeu d'acquisition Pi est calculé de la manière suivante :

$$\sigma_{Pi} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i - M_{Pi})^2}{n}} \quad (77)$$

avec v_i l'erreur planimétrique calculé à chaque pas,

M_{Pi} la moyenne des erreurs planimétriques du jeu de données Pi ,

n le nombre d'observations du jeu de données Pi .

La distribution des erreurs planimétriques a aussi été étudiée dans le but de vérifier si les objectifs sont atteints en terme de précision, à savoir obtenir une précision planimétrique de 1 mètre à 2 sigma.

5.4. Analyse des résultats

Les résultats sont évalués avec les indicateurs de précision cités précédemment. Les quatre piétons sont nommés H1, H2, F1 et F2 dans la suite de ce rapport, afin de les distinguer. H correspond à un homme et F à une femme.

5.4.1. Analyse des traces

Les différentes traces sont analysées de manière qualitative et quantitative pour chaque série d'acquisitions.

5.4.1.1. Acquisitions en extérieur

La Figure 12 montre les trajectoires obtenues pour chaque piéton, avec en bleu la trajectoire de référence calculée avec le GPS et en vert la trajectoire calculée uniquement avec la solution inertielle.

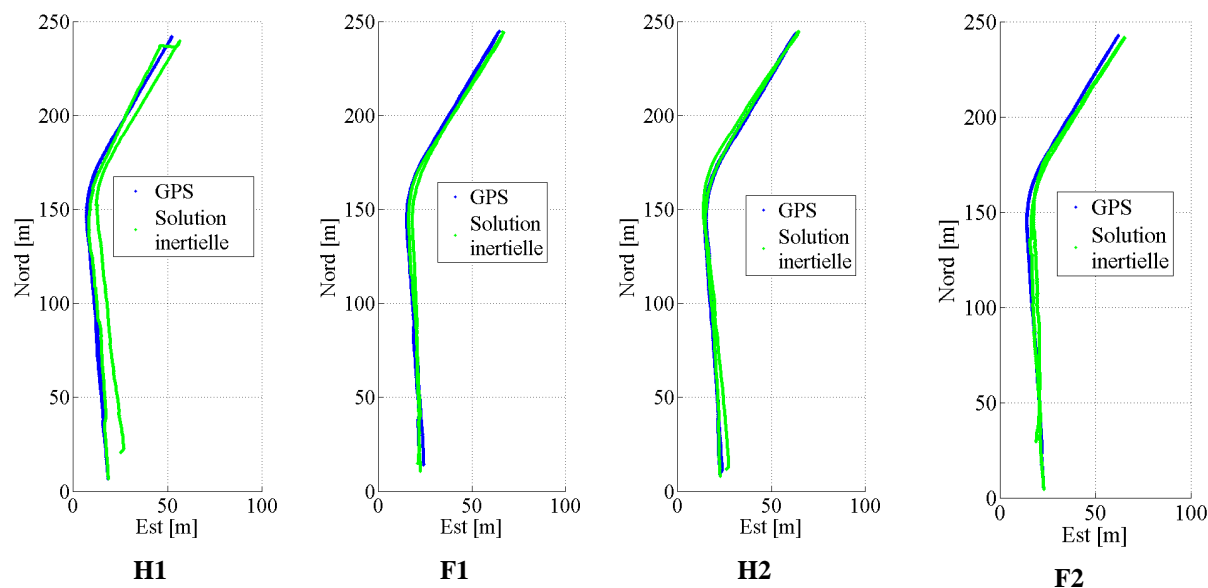


Figure 12 : Trajectoires issues des données inertielles et du GPS pour les 4 piétons - Parcours en extérieur de 500m - (Source personnelle)

Dans chacun des quatre cas, la trajectoire issue uniquement de la solution inertielle recouvre correctement la trajectoire de référence. D'un point de vue qualitatif, les résultats sont cohérents.

De manière plus quantitative, la Figure 13 représente les erreurs planimétriques, calculées comme décrit dans la section 5.3.2.1, pour les quatre jeux de données en extérieur.

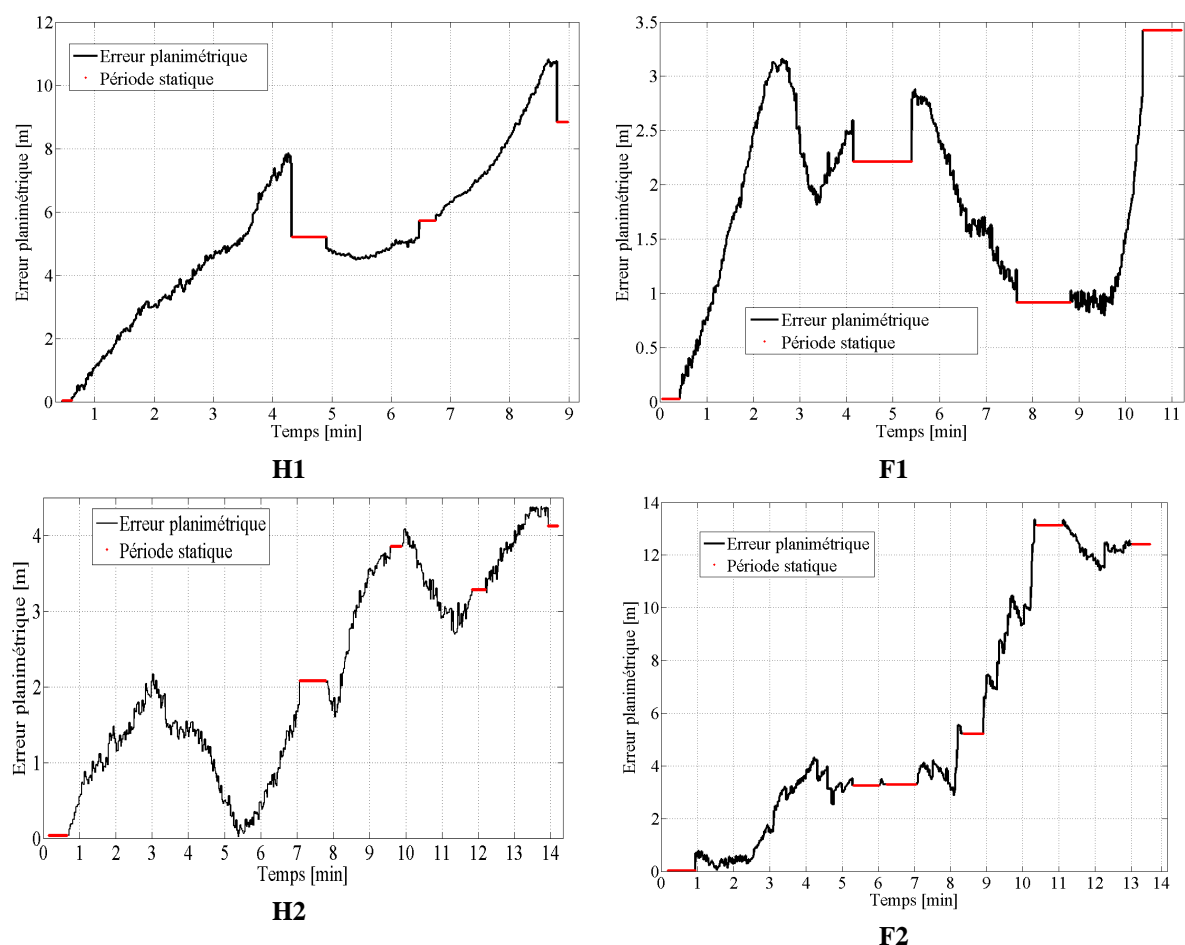


Figure 13 : Erreurs planimétriques pour les parcours en extérieur - (Source personnelle)

Les erreurs planimétriques augmentent avec le temps pour atteindre un maximum de 13m pour le jeu d'acquisition de F2. Les résultats obtenus ne sont pas tous de la même qualité. Les résultats de F1 et H2 sont les meilleurs. Ils prouvent que la solution implémentée peut donner d'excellents résultats sous certaines conditions. L'initialisation des variables, en particulier celle du bruit du système, joue un grand rôle dans la qualité des résultats.

Tableau 6 résume les performances pour les différents jeux de données en extérieur.

	H1	F1	H2	F2
Précision théorique [m]	6,5	6,9	8,3	7,7
Vitesse de marche [m/s]	1,2	1,1	0,7	0,8
Moyenne des écarts [m]	5,1	1,9	2,1	5,0
Ecart-type [m]	1,6	0,8	1,3	2,0
Erreur par rapport à la distance parcourue [%]	0,9	0,1	0,6	2,1

Tableau 6 : Caractéristiques des 4 jeux en extérieur

Les précisions théoriques calculées indiquent la précision que l'on peut espérer obtenir pour chacun des jeux de données. Cependant, ces précisions dépendent essentiellement du nombre d'acquisitions qui a été réalisé. La vitesse de marche du piéton influe donc sur leur valeur. C'est pourquoi les précisions théoriques sont moins bonnes pour H2 et F2 que pour H1 et F1.

En moyenne sur les quatre jeux d'acquisitions, l'écart-type est de 1,4 m et l'erreur sur la distance parcourue est de 0.9%. Il est important de noter que les résultats présentés ci-dessus sont bien meilleurs que ceux présents dans la littérature actuelle, *i.e.* une erreur de 5% sur la distance parcourue [8]. Ils laissent entrevoir de bonnes performances pour des acquisitions en intérieur.

5.4.1.2. Acquisitions en intérieur

La Figure 14 représente les trajectoires obtenues pour chaque jeu de données en intérieur, avec en bleu la solution de référence et en vert la solution inertielle. Le fond de carte permet de mieux estimer la qualité des résultats obtenus mais n'a pas vocation à servir de référence.

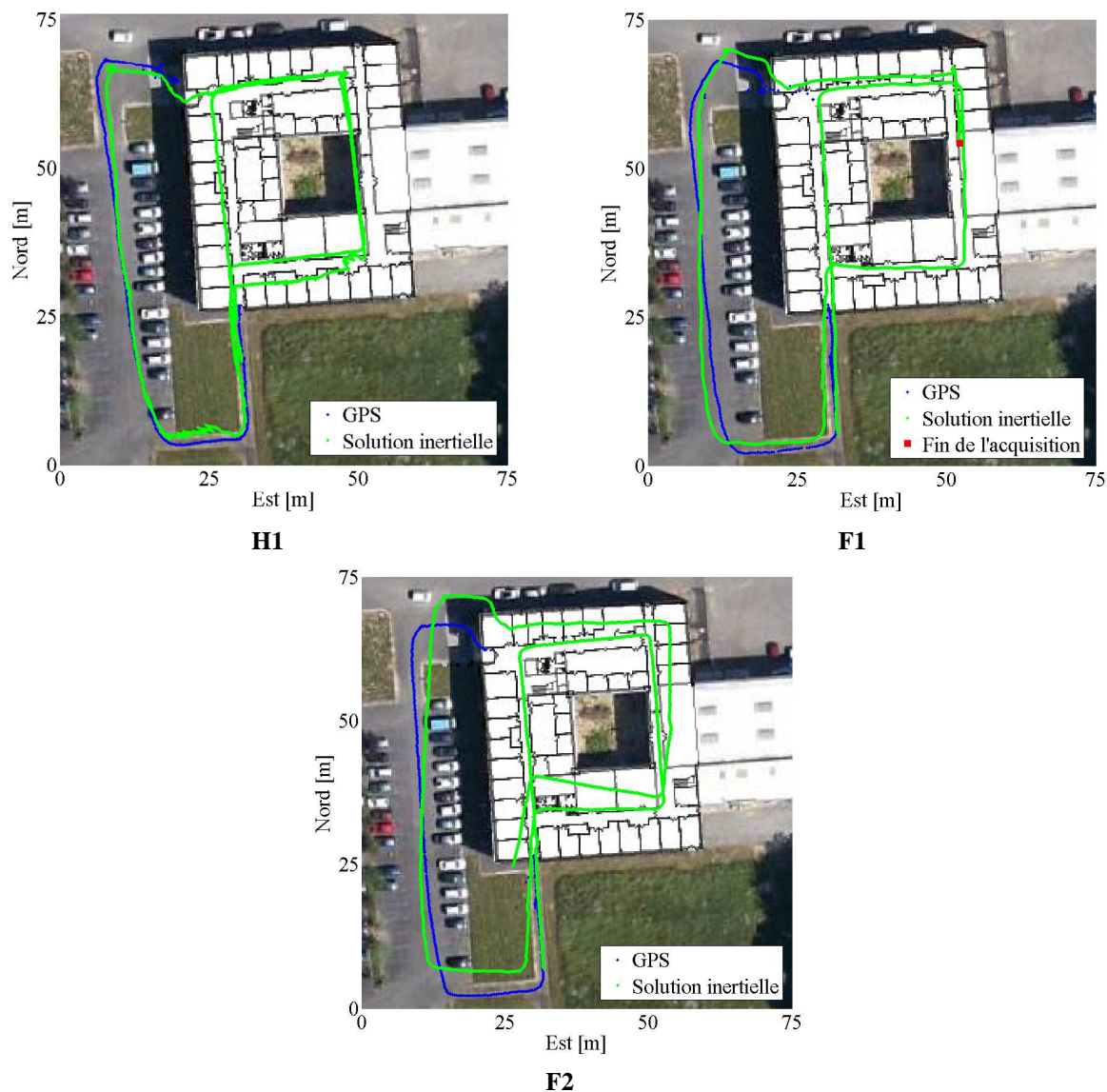


Figure 14 : Trajectoires issues des données inertielles et du GPS pour différents jeux d'acquisitions - Parcours en intérieur 375m – (Source personnelle)

Les résultats du parcours de F1 ne sont pas complets car nous avons rencontré des problèmes de saturation du gyromètre lors du deuxième passage à l'intérieur du bâtiment. Le point rouge indique la fin des acquisitions exploitables. Il est aussi à noter que ce parcours n'a pas été effectué par H2 d'où l'absence de résultat pour ce piéton.

La trace issue de la solution inertielle est représentée en vert. Les positions issues des observations GPS sont représentées en bleu. Globalement, la trajectoire issue de la solution inertielle suit les axes des couloirs en intérieur du bâtiment et la trace GPS en extérieur. Pour F2, on constate que le cap de marche calculé à la fin du deuxième tour à l'intérieur est faussé. Cette mauvaise estimation du cap influe directement sur la précision des positions calculées à la suite de cette erreur. Les variations du champ magnétique sont plus importantes à l'intérieur qu'en extérieur, les mises à jour en QSF sont donc moins nombreuses. En sachant que les mises à jour en QSF permettent de corriger le quaternion des angles d'attitude, une variation importante du champ magnétique à un instant peut entraîner une mauvaise estimation du cap.

La Figure 15 représente les erreurs planimétriques, sous forme de graphique, pour les trois jeux de données en intérieur.

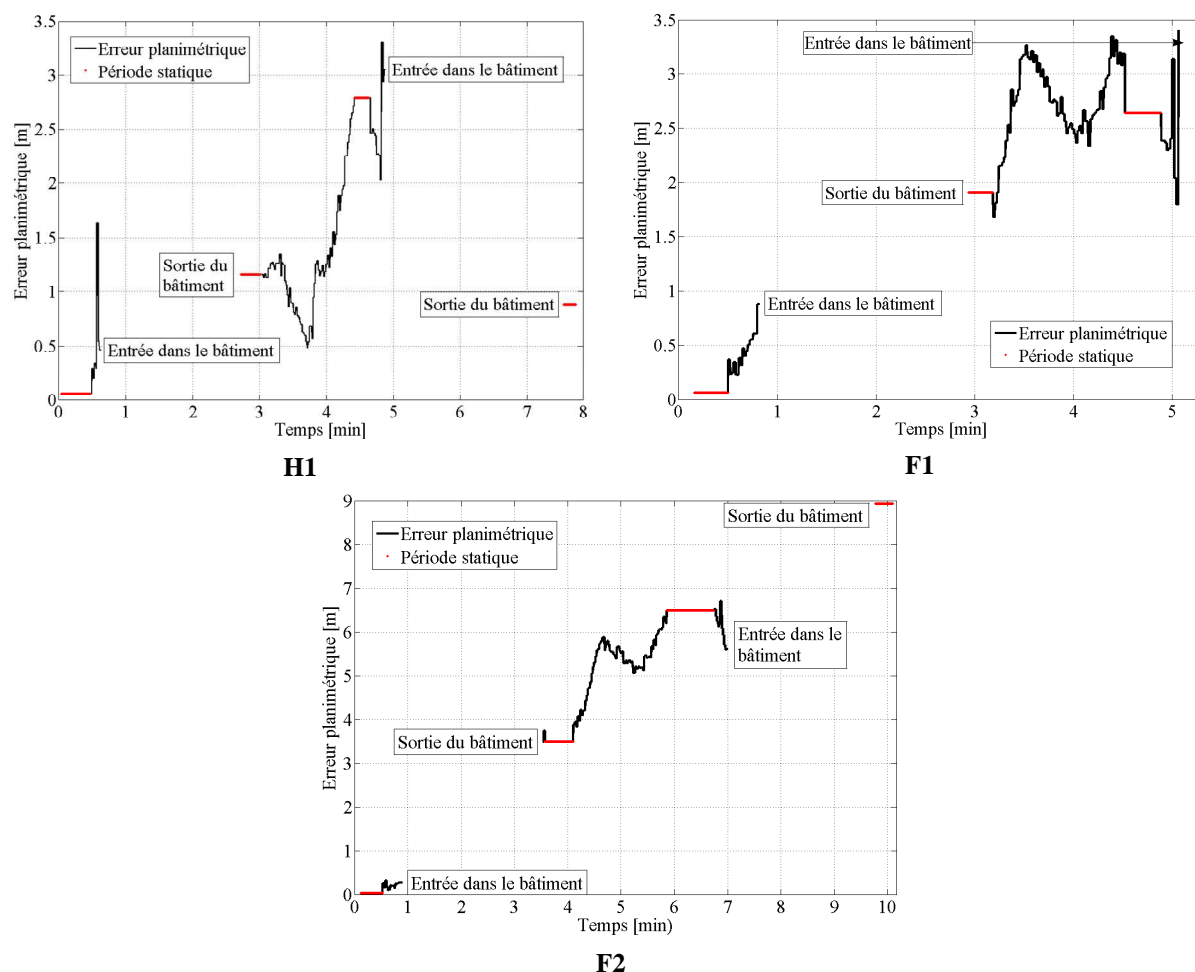


Figure 15 : Erreurs planimétriques pour les parcours en intérieur – (Source personnelle)

Les résultats obtenus pour les acquisitions alternant des passages en intérieur et en extérieur sont de l'ordre de grandeur de ceux obtenus pour les acquisitions en intérieur. L'évolution des erreurs planimétriques ne diffère pas selon l'environnement. Par exemple, pour F2, l'erreur planimétrique a augmenté de 3,5m après 4 minutes de marche (le premier tour à l'intérieur commence après 1 minute d'acquisition et se termine au bout de 4 minutes) et de 6,5 m après 7 minutes d'acquisition (le passage en extérieur commence après 4 minutes de marche).

Pour H1, les erreurs planimétriques calculées en fin de parcours, à savoir après le second tour dans le bâtiment sont de l'ordre de grandeur de celles calculées après le premier tour dans le bâtiment. Le jeu d'acquisition de H1 offre les meilleurs résultats avec une erreur planimétrique de 1m après 375m de marche. Comme pour les parcours en extérieur, les résultats obtenus pour le jeu F2 sont moins bons que pour les autres jeux de données.

Les résultats montrent donc que le fait de marcher à l'intérieur d'un bâtiment ne dégrade pas les performances de la solution inertielle. Elle peut donc également fonctionner à l'intérieur sous certaines conditions. Les différentes périodes statiques imposées au piéton sont probablement à l'origine de ces bonnes performances.

Les différentes caractéristiques des jeux d'acquisition en intérieur n'ont pas été calculées car elles ne sont pas représentatives de la précision de chacun des jeux de données. Les erreurs planimétriques ne peuvent être déterminées que lorsque le GPS est disponible ce qui n'est pas souvent le cas pour cette série d'acquisitions.

5.4.2. Étude statistique

L'étude statistique a été effectuée uniquement sur les deux jeux de données offrant les meilleures performances, à savoir ceux de F1 et H2 en extérieur. On suppose que les erreurs planimétriques calculées précédemment suivent une loi normale. La Figure 16 représente les probabilités cumulées des erreurs planimétriques en fonction des erreurs planimétriques.

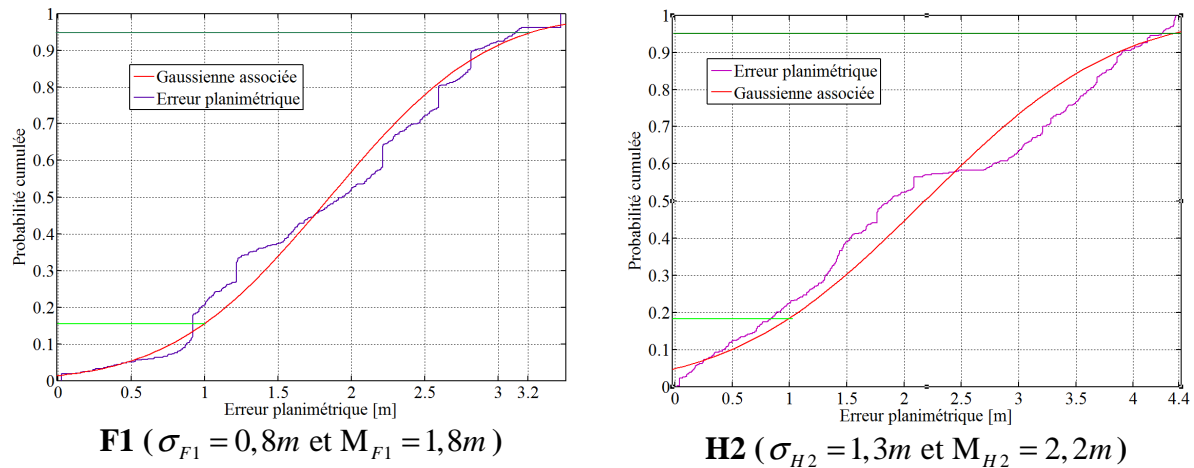


Figure 16 : Courbes statistiques pour F1 et H2 – (Source personnelle)

Pour F1, 16% des données ont une précision inférieure à 1m et 95% des données offrent une précision inférieure à 3,4m. L'objectif de 1m à 2 sigma près n'est pas atteint car la valeur moyenne est de 1,8m pour un écart type de 0,8m. Néanmoins, la précision de positionnement suit une distribution centrée sur 1,8m avec un percentile de 95.4% (2 sigma), car 95% des mesures ont une imprécision inférieure à 3,4m.

De la même manière, 18% des données de H2 ont une précision inférieure à 1m et la précision de 95% des données pour H2 est inférieure à 4,4m. L'objectif de 1m à 2 sigma n'est pas atteint car la valeur moyenne est de 2,2 m pour un écart type de 1,3m. La précision de positionnement suit une distribution centrée sur 2,2 avec un percentile de 95,4 car 95% des mesures ont une imprécision inférieure à 4,4m.

5.4.3. Impact des différentes mises-à-jour

Les précisions théoriques calculées dans le Tableau 6 ne sont pas du même ordre de grandeur que les précisions effectives. Ce résultat est assez logique car le calcul des précisions théoriques ne prend pas en compte le fait que les inconnues et leur variance associée sont régulièrement corrigées grâce aux différentes mises à jour. Ceci permet de rendre compte de l'importance des différentes mises à jour. De plus, ces précisions théoriques dépendent essentiellement de la vitesse de marche du piéton.

Le Tableau 7 présente la quantité de mises à jour pour chaque jeu de données et ce pour chaque type de correction.

		H1	F1	H2	F2
<i>Seuils</i>	Seuil de détection des QSA [m.s-2]	0,01	0,02	0,01	0,09
	Seuil de détection des QSF [mGauss]	0,56	0,30	0,33	0,30
	Seuil de détection des ZUPT [m.s-2]	0,39	0,20	0,03	0,24
<i>Extérieur</i>	Nombre de périodes statiques imposées	4	4	5	6
	Durée des périodes statiques [%]	14	32	14	30
	Pourcentage de QSA	11	32	18	9
	Pourcentage de QSF	44	35	26	24
	Pourcentage de ZUPT	26	35	25	42
<i>Intérieur</i>	Nombre de périodes statiques imposées	6	4	-	4
	Durée des périodes statiques [%]	27	31	-	21
	Pourcentage de QSA	20	32	-	8
	Pourcentage de QSF	31	27	-	13
	Pourcentage de ZUPT	40	33	-	57

Tableau 7 : Nombre et types de mises à jour pour chaque jeu de données

Les pourcentages de chacune des mises à jour sont calculés en fonction du nombre total de mises à jour. La quantité de mises à jour pour un jeu de données dépend directement des périodes statiques car beaucoup de mises à jour se produisent pendant ces périodes. Leur durée apparaît donc dans le tableau ci-dessus.

Pour les acquisitions en extérieur, la quantité de mises à jour de chaque type varie en fonction du piéton. Ceci s'explique par le fait que les seuils de détection utilisés pour les différentes mises à jour ne sont pas les mêmes. Ces seuils dépendent de la manière de marcher de chacun. Ils varient donc d'un jeu de données à l'autre.

Pour chaque piéton, l'acquisition en intérieur a été effectuée directement à la suite de l'acquisition en extérieur. De plus, les seuils de détection des mises à jour sont les mêmes pour les jeux de données en extérieur et ceux en intérieur. Il est donc possible de comparer le nombre de mises à jour entre une acquisition en intérieur et une acquisition en extérieur pour un même piéton. Le nombre de mises à jour liées au champ magnétique est inférieur lorsque le piéton marche à l'intérieur. Ce résultat s'explique par le fait qu'il y ait plus de perturbations magnétiques à l'intérieur d'un bâtiment qu'en extérieur, les variations du champ magnétique sont donc plus rapides. Le nombre de mises à jour liées à l'accélération et le nombre de ZUPT sont du même ordre de grandeur que les acquisitions se fassent en intérieur ou en extérieur.

5.4.4. Présence des QSF pendant les phases d'oscillation du pied

L'une des principales innovations de cette solution de navigation pédestre est la manière de réaliser les mises à jour avec le champ magnétique. Contrairement à ce qui se fait actuellement, les mises à jour QSF et MARU peuvent être appliquées lors des phases d'oscillation du pied. Ceci est illustré par la Figure 17 sur laquelle est représenté le profil de vitesse pour deux pas. La norme de la vitesse du pied varie de 0m/s pendant les phases d'appui à 3,5m/s pendant les phases d'oscillation.

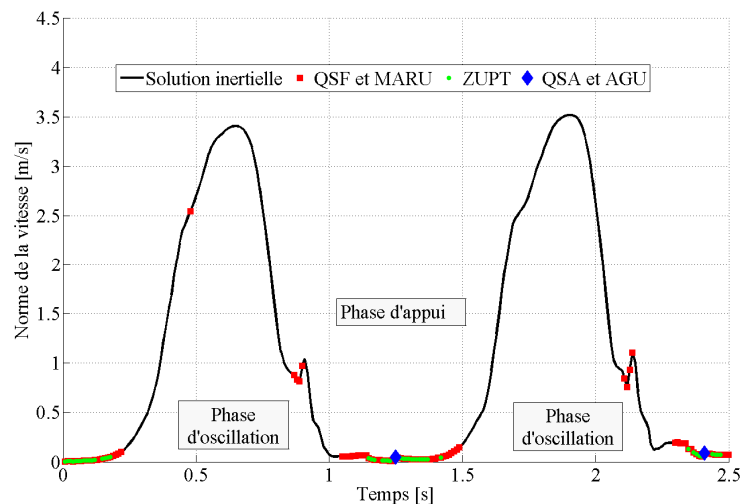


Figure 17 : Présence de QSF pendant les phases d'oscillation du pied - (Source personnelle)

Les différentes mises à jour s'appliquent principalement pendant les phases d'appui du pied. Cependant, certaines mises à jour issues de l'observation du champ magnétique se produisent également pendant les phases d'oscillation du pied. Ces mises à jour sont moins nombreuses pendant les phases d'oscillation que pendant les phases d'appui mais sont suffisantes pour contraindre le système. La propagation d'erreur sur le calcul de l'orientation est ainsi bornée.

5.5. Recommandations sur le protocole d'acquisition

Dans le but de définir un protocole d'acquisition permettant d'obtenir les meilleures performances possibles avec la solution implémentée, plusieurs recommandations peuvent être établies à la suite des tests qui ont été menés.

5.5.1. Effets des phases statiques imposées

D'après la Figure 13 et la Figure 15, les phases statiques imposées au piéton n'ont pas de réelle influence sur la précision planimétrique du jeu d'acquisition. Cependant, ces phases statiques permettent la convergence des autres inconnues, comme le biais d'accélération. Ce phénomène est illustré par la Figure 18. Les phases statiques sont délimitées par des triangles. Les variations du biais d'accélération sont moindres après la deuxième phase statique qu'avant celle-ci.

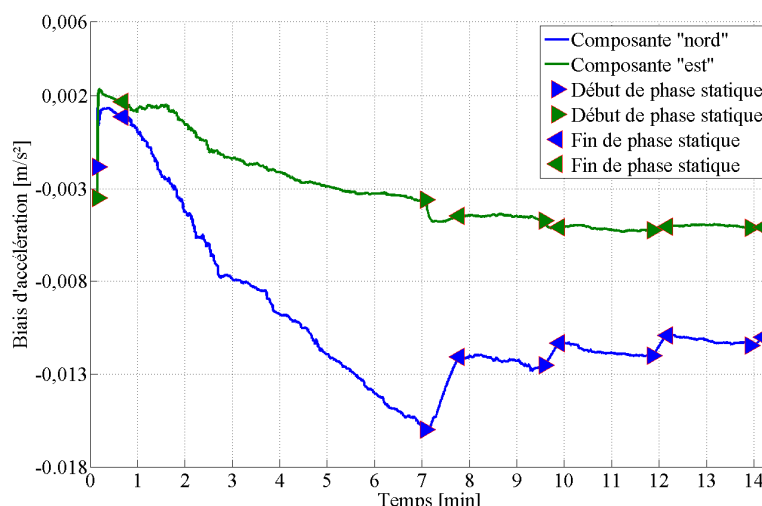


Figure 18 : Convergence du biais d'accélération grâce aux phases statiques – (Source personnelle)

Les différentes phases sont donc nécessaires à la convergence du biais d'accélération vers sa valeur la plus probable. Leur durée ne semble pas avoir de réelle influence. Il est préférable d'effectuer plusieurs phases statiques courtes régulièrement qu'une seule longue au début.

L'importance de ces phases statiques se remarque également en étudiant la variance des inconnues. La Figure 19 représente l'évolution de l'écart type du biais d'accélération pendant une période de marche et pendant une phase statique imposée. Les instants de ZUPT sont également représentés afin de se rendre compte des instants pendant lesquels le pied est immobile.

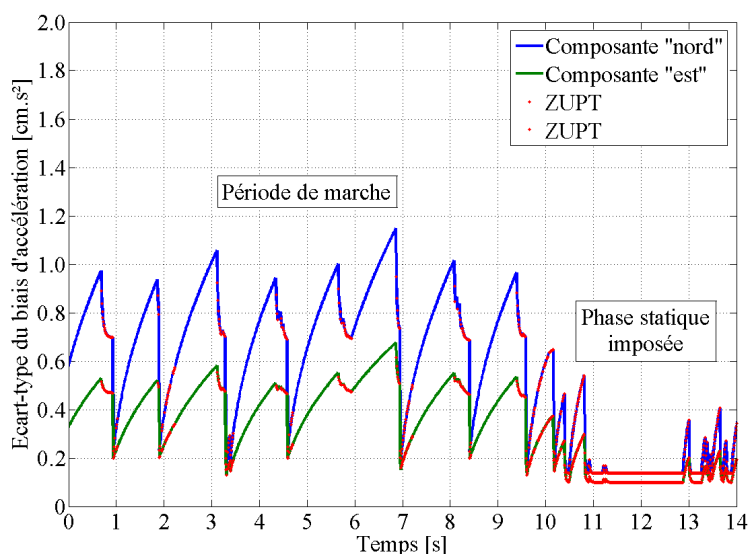


Figure 19 : Écart-type du biais d'accélération (Source personnelle)

Ainsi, l'écart-type du biais d'accélération diminue pendant les instants de ZUPT. Ceci s'explique car ces instants correspondent aux instants où la plupart des mises à jour se produisent. Les inconnues sont corrigées très fortement au début de chaque intervalle de pas puis de façon moindre sur le reste de l'intervalle. On constate aussi que l'écart-type ne diminue pas soudainement pour chaque période quasi-statique comme on peut le voir pour $t=6s$. Plusieurs périodes quasi-statiques successives sont nécessaires pour obtenir un écart-type sur le biais d'accélération de $0,2 \text{ cm/s}^2$. Les changements brusques d'état sont donc à proscrire.

De plus, pendant la phase statique imposée, l'écart type du biais d'accélération atteint sa valeur la plus faible et reste stable jusqu'à la reprise de la marche. Ceci confirme l'importance des phases statiques imposées tout au long du parcours de marche. Leur durée peut être ajustée en fonction de la vitesse de convergence des inconnues vers leur valeur limite. Les variations des écart-type des autres inconnues sont similaires aux variations de l'écart-type du biais d'accélération quelque soit le jeu de données. Les conclusions émises dans ce paragraphe s'appliquent donc également aux autres inconnues.

Les phases statiques ont de réelles influences sur la dynamique du système et permettent de contraindre l'évolution des erreurs.

5.5.2. Vitesse de marche

Les différentes acquisitions ont été effectuées pour des vitesses de marche différentes. Cependant, on ne remarque pas de différences notoires sur les performances entre un jeu de données acquis avec une vitesse plus rapide qu'un autre. En effet, les meilleurs résultats sont obtenus avec F1 et H2 ayant des vitesses de marche respectives de 1,1 m/s et 0,7 m/s. En comparaison, la vitesse de marche de H1 et celle de F2 sont, respectivement, de 1,2 m/s et 0,8 m/s.

Comme vu dans le paragraphe précédent, les périodes quasi-statiques influencent directement la convergence du filtre. Or la durée de ces périodes dépend de la vitesse de marche. Plus le piéton marche vite, moins les phases d'appui du pied sont longues. Pour un piéton marchant à 1,1 m/s, les périodes quasi-statiques du pied durent en moyenne 0,26s contre 0,54s pour un piéton marchant à 0,8m/s. Ainsi, il est préférable de marcher à une vitesse modérée.

5.5.3. Conclusion sur les recommandations

Cette étude a permis d'établir certaines recommandations quant au protocole d'acquisition à mettre en place pour obtenir les meilleures performances pour cette solution de navigation pédestre.

Les phases statiques imposées sont nécessaire à la convergence de certaines inconnues du vecteur d'état. Elles influent directement sur les performances du filtre de Kalman. Il est préférable d'effectuer plusieurs phases statiques d'une dizaine de seconde espacées régulièrement tout au long du parcours plutôt que des phases statique longues moins fréquentes. Une phase statique imposée d'une durée de 15 secondes est suffisante pour permettre aux inconnues et aux variances sur les inconnues de converger vers leur valeur limite.

L'étude des variations de l'écart-type du biais d'accélération a mis en lumière les difficultés du filtre à s'adapter aux changements brusques d'état, lorsque le pied passe d'une phase d'oscillation à une phase d'appui. Il est donc important de faire attention à sa manière de marcher, c'est à dire de bien poser le pied au sol et de ne pas effectuer de mouvements brusques avec le pied.

Pour les acquisitions en intérieur, il est possible que l'estimation du cap de marche soit moins bonne que pour les acquisitions en extérieur. Ceci s'explique par le fait que les variations du champ magnétiques sont plus importantes à l'intérieur à cause de la présence de nombreuses sources émettrices de champ magnétique. Plus généralement, les variations du champ magnétique étant plus importantes, moins de mises à jour en QSF sont effectuées. Le vecteur d'état est donc moins souvent corrigé ce qui influe sur les performances de la solution. En extérieur, il est également possible d'être en présence de sources émettrices de champ magnétique particulier. Il est donc important d'éviter ces sources émettrices qui peuvent, par exemple, être des voitures, en mouvement ou à l'arrêt, ou tout autre élément métallique.

Finalement, l'étape de calibration du magnétomètre effectuée avant chaque acquisition doit être réalisée avec le plus de minutie possible. Cette calibration influe directement sur les mises à jour en QSF car elle permet de définir le champ magnétique propre au boîtier de la centrale inertielle et par suite de déterminer précisément le champ magnétique terrestre. Les mises à jour en QSF font partie des innovations principales de cette solution. Une erreur sur ces mises à jour influe directement sur la précision de la solution.

La solution implémentée offre des résultats performants si l'on suit les recommandations citées ci-dessus. Cependant, notre solution ne peut pas encore être considérée comme une solution de référence puisque les résultats diffèrent selon les jeux d'acquisition. D'autres tests à plus grande échelle sont nécessaires pour certifier de la précision de la solution.

Conclusion

Grâce aux dernières avancées technologiques dans la qualité des observations des MEMS et aux dernières innovations dans le domaine de la navigation pédestre, il est désormais envisageable de définir une solution de navigation pédestre autonome, performante, fonctionnant seulement avec des données inertielles.

D'un point de vue pratique, cette solution utilise uniquement les observations d'une centrale inertielle fixée rigidement sur le pied d'un piéton afin de calculer les positions successives de ce piéton. Une solution de référence a également été mise en œuvre afin d'évaluer les résultats obtenus. Une antenne GPS fixée sur la tête du piéton joue le rôle de cette référence.

D'un point de vue plus théorique, la solution proposée est implémentée à l'aide d'un filtre de Kalman. Ce filtre se décompose en deux étapes principales au cours desquelles les inconnues sont estimées à l'aide de leur loi d'évolution respective puis corrigées grâce à plusieurs mises à jour. Ces mises à jour s'effectuent aux moments opportuns en étudiant les variations du champ magnétique, les variations de l'accélération et les caractéristiques propres au cycle de marche de l'Homme. Ces différentes mises à jour permettent de réduire l'évolution des erreurs sur les inconnues et d'assurer de bons résultats sur les positions calculées.

Différents tests ont été menés au cours de ce projet afin de déterminer la précision allouable à notre solution de navigation inertielle. Ces tests ont, dans un premier temps, été effectués en extérieur afin d'estimer des écarts planimétriques sur l'ensemble des données. Dans un second temps, des acquisitions ont été menées à l'intérieur afin de tester la solution dans un environnement soumis à plus de variations magnétiques. Les performances obtenues à la suite de ces tests sont meilleures que celles figurant dans la littérature actuelle. Un écart-type moyen de 1,4m après 500m de marche ce qui correspond à une erreur moyenne de 0,9% par rapport à la longueur parcourue sont obtenus pour les quatre jeux d'acquisition en extérieur. Ceci laisse présager de bonnes performances pour des acquisitions en intérieur ce qui est le cas. Cependant, l'objectif d'obtenir une précision planimétrique de 1m à 2 sigma n'est pas encore atteint.

Ces différents tests ont également permis de mettre en lumière plusieurs recommandations quant aux conditions d'acquisition optimales permettant d'obtenir les meilleurs performances avec cette solution. Par exemple, plusieurs phases statiques imposées au piéton sont nécessaires pour observer les bruits de mesure du capteur. Au cours de ces phases statiques, une convergence de l'estimation des inconnues est observée.

Les résultats obtenus avec la solution décrite dans ce rapport sont très prometteurs au vu des performances obtenues. Il est à noter qu'un article pour la cinquième conférence internationale "Indoor Positioning and Indoor Navigation" (IPIN 2014) a été écrit au cours de ce PFE.

Malgré les recommandations émises pour l'acquisition de données, la solution implémentée ne peut pas encore être considérée comme une solution de référence autonome pour la navigation pédestre dans les bâtiments. Il est maintenant nécessaire d'effectuer des tests à plus grande échelle, c'est à dire sur un panel de personnes plus large, sur des parcours plus longs et plus variés, *etc.*

De plus, de nombreuses variables doivent être fixées par l'utilisateur lors de l'implémentation de la solution (seuils de détection des mises à jour, initialisation de certaines variables, *etc.*) alors qu'elles influent directement sur les performances du filtre de Kalman. Des méthodes permettant de les déterminer automatiquement peuvent être établies. Par

exemple, le seuil de détection des mises à jour en ZUPT est directement lié à la vitesse de marche du piéton et à sa manière de se déplacer.

En gardant l'objectif d'obtenir une solution de référence, il pourrait aussi être intéressant d'intégrer des mesures GNSS (pseudo-distances, Doppler, *etc.*) lorsqu'elles sont disponibles afin de gagner en précision sur les positions calculées. Les perspectives ouvertes à la suite de ce PFE sont donc multiples.

Finalement, on peut considérer que la définition d'une solution de référence autonome pour la navigation pédestre en intérieur n'est plus qu'à une portée de pas...

Bibliographie

- [1] Larousserie, D. (2013). Naviguer dans les murs. *Le Monde Science et Techno*, 1–6.
- [2] Chen, Y., & Kobayashi, H. (2002). Signal strength based indoor geolocation. In *Communications, 2002. ICC 2002. IEEE International Conference on* (Vol. 1, pp. 436–439). IEEE.
- [3] Angermann, M., Friese, A., Khider, M., Krach, B., Krack, K., Robertson, P., & München, D. B. (2009). A Reference Measurement Data Set for Multisensor Pedestrian Navigation with Accurate Ground Truth. In *13th European Navigation Conference - Global Navigation Satellite Systems* (p. 6). Naples, Italy: IEEE.
- [4] Zampella, F. J., Jim, A. R., Seco, F., Prieto, J. C., & Guevara, J. I. (2011). Simulation of Foot-Mounted IMU Signals for the Evaluation of PDR Algorithms. In *Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), 2011 International Conference on* (p. 7). Guimaraes, Portugal: IEEE.
- [5] Renaudin, V., Susi, M., & Lachapelle, G. (2012). Step length estimation using handheld inertial sensors. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 12(7), 8507–8525.
- [6] Jimenez, A. R., Seco, F., Prieto, C., & Guevara, J. (2009). A Comparison of Pedestrian Dead-Reckoning Algorithms using a Low-Cost MEMS IMU. In *6th International on Intelligent Signal Processing* (pp. 37–42). Buapest, Hungary: IEEE.
- [7] Godha, S., & Lachapelle, G. (2008). Foot mounted inertial system for pedestrian navigation. *Measurement Science and Technology*, 19(7).
- [8] Casta, N., & Lamy-Perbal, S. (2010). An improved shoe-mounted inertial navigation system. In *Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), 2010 International Conference on* (pp. 1–6). Zurich: IEEE.
- [9] Park, S. (2000). Pedestrian inertial navigation with gait phase detection assisted zero velocity updating. *2009 4th International Conference on Autonomous Robots and Agents, 1*, 336–341.
- [10] Jiménez, A. R., Seco, F., Prieto, J. C., & Guevara, J. (2010, March). Indoor Pedestrian Navigation using an INS/EKF framework for Yaw Drift Reduction and a Foot-mounted IMU. In *Positioning Navigation and Communication (WPNC), 2010 7th Workshop on* (pp. 135–143). IEEE.
- [11] Skog, I., Peter, H., Member, S., Nilsson, J., & Rantakokko, J. (2010). Zero-Velocity Detection — An Algorithm Evaluation. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 57(11), 2657–2666.
- [12] Renaudin, V., Combettes, C., & Peyret, F. (2014). Quaternion Based Heading Estimation with Handheld MEMS in Indoor Environments. In *Position, Location and Navigation Symposium - PLANS 2014* (pp. 645 – 656). Monterey, CA: IEEE.

-
- [13] Construit, A. E. T., Doctoral, P., Informatique, E. N., & Information, C. E. T. (2009). *Hybridation MEMS / UWB pour la navigation pédestre intra-muros* Valérie Jeanne Thérèse Renaudin-Schouler. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [14] Farrell, J. (2008). *Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors* (The McGraw., p. 529). United States of America.
- [15] El-Sheimy, N., Hou, H., & Niu, X. (2008). Analysis and Modeling of Inertial Sensors Using Allan Variance. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 57(1), 140–149. doi:10.1109/TIM.2007.908635
- [16] Zhang, X., Li, Y., Mumford, P., & Rizos, C. (2008). Allan variance analysis on error characters of MEMS inertial sensors for an FPGA-based GPS/INS system. *International Symposium on GPS/GNNS, Tokyo, Japan*(pp. 127-33). US Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology.
- [17] Otak, M. (2009). Determining stochastic parameters using an unified method. *Acta Electronica et Informatica*, 9(2), 59–63.
- [18] Afzal, M. H. (2011). *Use of Earth's Magnetic Field for Pedestrian Navigation*. University of Calgary.
- [19] Boer, J. De. (2010). *Capteurs MEMS : Optimisation des méthodes de traitement capteurs, de navigation et d'hybridation*. Université de Toulouse.
- [20] Kuipers, J. B. (1999). *Quaternions and rotation sequences* (Vol. 66). Princeton: Princeton university press.
- [21] Analog Devices. Tactical Grade Ten Degrees of Freedom Inertial Sensor - ADIS16488 (2011). United State of America.
- [22] Renaudin, V., Afzal, M. H., & Lachapelle, G. (2010). Complete triaxis magnetometer calibration in the magnetic domain. *Journal of sensors*, 2010.

Annexes

A.1 Variance d'Allan	61
A.1.1 Définition de la variance d'Allan.....	61
A.1.2 Variance d'Allan et lien avec la densité spectrale de puissance	61
A.2 Algèbre des quaternions et propriétés liées	65
A.2.1 Définition de l'espace des quaternions	65
A.2.2 Rotation et quaternion	66
A.2.3 Angles d'Euler et quaternion	66
A.3 Détermination du défaut d'alignement de l'accéléromètre et du biais d'accélération initial par la méthode des moindres carrés.....	69

A.1 Variance d'Allan

La variance d'Allan a été utilisée afin de déterminer les différents bruits affectant les observations réalisées avec notre capteur inertiel. La théorie permettant de déterminer les valeurs de ces bruits est présentée dans cette annexe.

A.1.1 Définition de la variance d'Allan

La variance d'Allan, sur une période τ , est définie par :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_{k+n}(\tau) - \bar{y}_k(\tau))^2 \rangle, \quad (1)$$

avec $\bar{y}_k(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt$. $\bar{y}_k(\tau)$ représente la valeur moyenne des mesures instantanées, qui sont notées $y(t)$, réalisées entre les instants t_k et $t_{k+\tau}$ avec $\tau = n\tau_0$, τ_0 étant la période propre d'échantillonnage et n le nombre de mesures à prendre en compte pour calculer cette moyenne.

$\langle \bar{y}_k \rangle = \frac{1}{N-2n} \sum_{k=1}^{N-2n} \bar{y}_k$, N est le nombre de mesures consécutives prises en compte ($2n < N$).

Finalement, la variance d'Allan peut se définir simplement selon l'équation (2).

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2(N-2n)} \sum_{k=1}^{N-2n} (\bar{y}_{k+n}(\tau) - \bar{y}_k(\tau))^2 \quad (2)$$

La variance d'Allan correspond à l'écart type moyen entre deux séries d'observations séparées de n observations. Cette grandeur nous informe sur la variance des observations par rapport à leur fréquence d'acquisition.

A.1.2 Variance d'Allan et lien avec la densité spectrale de puissance

Les bruits de mesure des capteurs sont des processus aléatoires. Ils peuvent être définis en exprimant leur densité spectrale de puissance. Il est donc intéressant d'établir un lien entre la variance d'Allan et la densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire afin de pouvoir en identifier sa nature.

La densité spectrale de puissance représente la répartition de la puissance d'un signal en fonction de sa fréquence.

La relation qui relie la variance d'Allan à la densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire y correspond à l'équation (3).

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^{+\infty} S_y(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (3)$$

$S_y(f)$ est la densité spectrale de puissance du processus aléatoire y . La fonction d'autocorrélation de y doit être indépendante du temps. La variance d'Allan est proportionnelle à la puissance totale en sortie d'un processus aléatoire quand on lui applique un filtre avec une fonction de transfert de type $\sin^4(x)/x^2$.

a) Bruit blanc

La densité spectrale d'un bruit blanc est constante. Elle s'exprime selon l'équation (4).

$$S_y(f) = N^2, \quad (4)$$

avec N le coefficient du bruit blanc.

La variance d'Allan d'un tel bruit s'obtient alors en substituant (4) dans (3) et elle s'écrit finalement selon l'équation (5).

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) &= 4 \int_0^{+\infty} N^2 \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \\ &= \frac{4N^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{(u)^2} du \\ &= \frac{4N^2}{\pi} \frac{\pi}{4} \\ \sigma^2(\tau) &= \frac{N^2}{\tau} \end{aligned} \quad (5)$$

En échelle logarithmique, $\sigma^2(\tau)$ sera donc une droite de pente $-1/2$ ($\log(\sigma) = \log(N) - \frac{1}{2} \log(\tau)$).

b) Marche aléatoire

Une marche aléatoire se caractérise par une densité spectrale de puissance équivalente à l'équation (6).

$$S_y(f) = \left(\frac{K}{2\pi f} \right)^2, \quad (6)$$

avec K le coefficient d'une marche aléatoire.

La variance d'Allan d'un tel bruit s'obtient alors en substituant (6) dans (3) et elle s'écrit finalement selon l'équation (6).

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\tau) &= 4 \int_0^{+\infty} \left(\frac{K}{2\pi f} \right)^2 \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \\
&= \frac{4K^2}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} \frac{\tau^2}{\pi^2 \tau^2 f^2} df \\
&= K^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^2} \frac{\tau^2}{u^2} \frac{du}{\tau} \\
&= K^2 \tau \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du \\
\sigma^2(\tau) &= \frac{K^2 \tau}{3}
\end{aligned} \tag{7}$$

En échelle logarithmique, $\sigma^2(\tau)$ sera donc une droite de pente 1/2 ($\log(\sigma) = \log(\frac{K}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{2} \log(\tau)$).

c) Bruit corrélé

La densité spectrale de puissance d'un bruit corrélé s'écrit selon l'équation (8).

$$S_y(f) = \frac{(q_c T_c)^2}{1 + (2\pi f T_c)^2}, \tag{8}$$

avec q_c l'amplitude du bruit,
 T_c le temps de corrélation.

La variance d'Allan d'un tel bruit s'obtient alors en substituant (8) dans (3) et elle s'écrit finalement selon l'équation (9).

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\tau) &= 4 \int_0^{+\infty} \left(\frac{(q_c T_c)^2}{1 + (2\pi f T_c)^2} \right) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \\
\sigma^2(\tau) &= \begin{cases} \frac{(q_c T_c)^2}{\tau} & \text{si } \tau \gg T_c \\ \frac{q_c^2}{3} & \text{si } \tau \ll T_c \end{cases} \tag{9}
\end{aligned}$$

En échelle logarithmique, $\sigma^2(\tau)$ sera donc une droite de pente $\pm 1/2$ et d'équation $\log(\tau) = -\frac{1}{2} \log(\tau) + \log(q_c T_c)$ si $\tau \gg T_c$ ou d'équation $\log(\tau) = \frac{1}{2} \log(\tau) + \log(\frac{q_c}{\sqrt{3}})$ si $\tau \ll T_c$.

A.2 Algèbre des quaternions et propriétés liées

Les quaternions permettent de représenter et de paramétrer une rotation d'une autre manière. Ils sont utilisés, dans notre problème, afin de définir les changements de repère.

L'espace des quaternions possède plusieurs propriétés qui sont énoncées dans l'annexe suivante.

A.2.1 Définition de l'espace des quaternions

L'ensemble des quaternions, noté H , peut être assimilé à une suite de l'ensemble des nombres complexes. C'est une algèbre non-commutative de dimension 4. Un quaternion est défini comme étant un complexe généralisé, avec quatre composantes (un scalaire et un vecteur à trois composantes) selon l'équation (10).

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \quad (10)$$

avec $(q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4$,

$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ trois nombres imaginaires.

Le produit de deux quaternions donne un quaternion. Les propriétés de la multiplication de l'algèbre des quaternions sont définies telles que :

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{j},$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = -1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{k},$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i}.$$

L'addition et la soustraction de quaternion sont définies comme l'addition et la soustraction des termes correspondant du quaternion.

D'après les propriétés de la multiplication dans l'espace des quaternions, le produit de deux quaternions \mathbf{b} et \mathbf{c} s'écrit suivant l'équation (11).

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= (b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3 - b_4c_4) + (b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_4 - b_4c_3)\mathbf{i} + \dots \\ &\quad \dots + (b_1c_3 - b_2c_4 + b_4c_2 + b_3c_1)\mathbf{j} + (b_1c_4 + b_2c_3 - b_3c_2 + b_4c_1)\mathbf{k} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\ b_2 & b_1 & -b_4 & -b_3 \\ b_3 & b_4 & b_1 & -b_2 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 \\ c_2 & c_1 & c_4 & -c_3 \\ c_3 & -c_4 & c_1 & c_2 \\ c_4 & c_3 & -c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

Il est important de noter que la multiplication dans l'espace des quaternion n'est pas commutative mais associative.

La forme conjuguée du quaternion \mathbf{q} s'écrit de la manière suivante selon (12) :

$$\bar{\mathbf{q}} = q_1 - q_2\mathbf{i} - q_3\mathbf{j} - q_4\mathbf{k} \quad (12)$$

.

La norme d'un quaternion s'écrit selon l'équation (13).

$$\|\mathbf{q}\| = \mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \quad (13)$$

Dans notre cas, la dérivée d'un quaternion peut simplement s'écrire selon l'équation (14).

$$\dot{\mathbf{q}}_a^b = \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^b (0, \boldsymbol{\omega}_{ba}^a), \quad (14)$$

avec $\dot{\mathbf{q}}_a^b$ la dérivée associée au quaternion \mathbf{q}_a^b ,

$(0, \boldsymbol{\omega}_{ba}^a)$ est le quaternion associé à la vitesse angulaire, notée $\boldsymbol{\omega}_{ba}^a$, du repère a par rapport au repère b , exprimée dans le repère a .

A.2.2 Rotation et quaternion

Soit un repère « body » confondu avec un repère « navigation » en appliquant une rotation de α radians autour de l'axe eulérien \mathbf{E} . La quaternion \mathbf{b} qui représente le changement de repère entre le « body » et le « navigation » est défini suivant l'équation (15).

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \mathbf{E} \sin(\alpha/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

avec $\|\mathbf{b}\| = 1$. Le quaternion \mathbf{b} n'a alors que trois degrés de liberté.

Soient \mathbf{Z}^b et \mathbf{Z}^n deux vecteurs exprimés dans des repères tridimensionnels différents. Sous la forme de quaternions, ils s'écrivent :

$$\mathbf{q}_{\mathbf{Z}^b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{Z}^b \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{q}_{\mathbf{Z}^n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{Z}^n \end{bmatrix}$$

Ainsi, la relation liant ces deux quaternions s'écrit sous la forme de l'équation (16).

$$\mathbf{q}_{\mathbf{Z}^n} = \mathbf{b} \mathbf{q}_{\mathbf{Z}^b} \bar{\mathbf{b}}, \quad (16)$$

avec \mathbf{b} : le quaternion exprimant la transformation entre les repères « body » et « navigation »,
 $\bar{\mathbf{b}}$: le conjugué du quaternion cité précédemment.

A.2.3 Angles d'Euler et quaternion

Le passage de la matrice de rotation écrite à l'aide des angles d'Euler, notée \mathbf{R} , vers le quaternion associé, noté \mathbf{b} , se fait selon (17).

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{1 + \mathbf{R}_b^n[1,1] + \mathbf{R}_b^n[2,2] + \mathbf{R}_b^n[3,3]} \\ \frac{\mathbf{R}_b^n[3,2] - \mathbf{R}_b^n[2,3]}{4b_1} \\ \frac{\mathbf{R}_b^n[1,3] - \mathbf{R}_b^n[3,1]}{4b_1} \\ \frac{\mathbf{R}_b^n[2,1] - \mathbf{R}_b^n[1,2]}{4b_1} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

avec \mathbf{R}_b^n la matrice représentant le passage du repère « body » au repère « navigation », définie avec les angles d'Euler.

De même, il est possible de déterminer les angles d'Euler, notés (θ, ϕ, φ) , à partir du quaternion associé, noté \mathbf{b} , suivant les équations en (18).

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= -2(b_2b_4 + b_1b_3) \\ \phi &= a \tan 2(2(b_3b_4 - b_1b_2), 1 - 2(b_2^2b_3^2)) \\ \varphi &= a \tan 2(2(b_2b_3 - b_1b_4), 1 - 2(b_3^2b_4^2)) \end{aligned} \quad (18)$$

A.3 Détermination du défaut d'alignement de l'accéléromètre et du biais d'accélération initial par la méthode des moindres carrés

Les mesures de l'accéléromètre sont corrigées par la méthode des moindres carrés en supposant qu'elles sont modélisées avec un défaut d'alignement et un biais d'accélération. Cette compensation part du postulat qu'un accéléromètre parfait mesure uniquement la réponse à la force de pesanteur en phase statique sur son axe placé verticalement.

Pour chaque observation $\bar{\mathbf{y}}_{Acc-i}^b$, on peut écrire l'équation dite équation d'observation (19).

$$\bar{\mathbf{y}}_{Acc-i}^b = \mathbf{F}'_{Acc} \cdot \mathbf{y}_{Acc-i}^b + \mathbf{B}^b_{Acc}, \quad (19)$$

avec \mathbf{F}'_{Acc} la matrice composée des valeurs approchées du défaut d'alignement des axes de l'accéléromètre,

\mathbf{y}_{Acc}^b la valeur vraie de la mesure effectuée par l'accéléromètre selon les 3 axes de mesure,

\mathbf{B}^b_{Acc} la matrice composée des valeurs approchées du biais d'accélération selon les 3 axes d'observation.

Dans notre problème les inconnues sont le défaut d'alignement et le biais d'accélération. Ces grandeurs forment la matrice des inconnues $\Delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{Acc} \\ \mathbf{B}_{Acc}^b \end{bmatrix}$. Cette matrice se calcule alors avec (20).

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1}, \quad (20)$$

avec \mathbf{Z} la matrice des observations,

\mathbf{A} la matrice composées des dérivées partielles en fonction des inconnues pour chaque observation.

\mathbf{A} est définie selon (21).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}_{Acc-1}^b}{\partial \mathbf{F}_{Acc}} & \dots & \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}_{Acc-n}^b}{\partial \mathbf{F}_{Acc}} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}_{Acc-1}^b}{\partial \mathbf{B}_{Acc}^b} & \dots & \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}_{Acc-n}^b}{\partial \mathbf{B}_{Acc}^b} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

avec n le nombre d'observations.

Dans notre cas, $\forall i \in [1, n]$, $\frac{\partial \bar{\mathbf{y}}_{Acc-i}^b}{\partial \mathbf{F}_{Acc}} = \mathbf{y}_{Acc-i}^b$ et $\forall i \in [1, n]$, $\frac{\partial \bar{\mathbf{y}}_{Acc-i}^b}{\partial \mathbf{B}_{Acc}^b} = 1$.

Les résidus sur les observations, notés \mathbf{V} , peuvent ensuite être calculés selon l'équation (22).

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} - \mathbf{F}_{Acc}^{-1} \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{B}_{Acc}^b) \quad (22)$$