

## 算法 作业 2

窦嘉伟 518021911160

1 证明对于任意等价的 BST 树 ( $n$  个节点), 都能通过  $O(n)$  次旋转 (zig/zag) 相互转化。  
(任意一次 zig/zag 都能增加右/左子树的高度);

证明: 先证明一个一般结论: 任意等价二叉树 (假设有  $n$  个节点), 我们可以通过若干次右旋变成一条右链。

方法: 我们知道, 右旋时, 原来的父节点变成子节点并且其右子树高度保持不变。那么我们对一颗子树进行右旋, 得到新子树相比原子树有关系: 新子树的右子树高度比原子树多 1。因此我们对一颗二叉树进行若干次右旋, 会得到一条右链, 其高度为  $n$ 。而我们知道, 原树的右子树高度 (暂且将根节点也归入右子树) 至少为 1, 因此需要  $n-1$  次右旋。

有了这个规律, 反过来, 任何一颗  $n$  节点二叉树都可以由其等价的右链经过若干次左旋转化 (至多  $n-1$  次)。

结合二者, 任何两颗等价二叉树都可以经过若干次左右旋转化, 方法是 (树 1  $\rightarrow$  右链  $\rightarrow$  树 2)。其旋转次数不会超过  $2n-2$  次。所以命题得证。

2 对于如下一棵 splay 树, 依次访问节点 3, 9, 1, 给出 bottom-up 双层旋转的调整过程

