

## Homework9

518021911160 窦嘉伟

### Problem1

1.  $\langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 0,3 \rangle, \langle 0,4 \rangle$   
 $\langle 1,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle$   
 $\langle 2,0 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle$   
 $\langle 3,0 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle$
2.  $\langle 1,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle$

### Peoblem2

$$\begin{aligned} R \circ (S \cup T) &\Leftrightarrow (\exists u)(\langle x, u \rangle \in (S \cup T) \wedge \langle u, y \rangle \in R) \\ &\Leftrightarrow (\exists u)((\langle x, u \rangle \in S \vee \langle x, u \rangle \in T) \wedge \langle u, y \rangle \in R) \\ &\Leftrightarrow (\exists u)((\langle x, u \rangle \in S \wedge \langle u, y \rangle \in R) \vee (\langle x, u \rangle \in T \wedge \langle u, y \rangle \in R)) \\ &\Leftrightarrow (R \circ S) \cup (R \circ T) \end{aligned}$$

### Problem3

1.

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

### Problem4

1.  $R1 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$
2.  $R1 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$
3.  $R1 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle\}$
4.  $R1 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$   
 $\{\{1,2\}, \{3,4\}\}$

5.  $R1 = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 3,4 \rangle \}$   
 $\{ \{1,2\}, \{3,4\} \}$

*Problem5*

1. 不是, 如果  $R1$  本身是一个自反关系, 如  $A = \{1,2,3,4\}, R1 = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$  则  $(A \times A) - R1$  不具有自反性, 所以不是等价关系.
2. 在关系矩阵中, 令  $R1$  元素为  $a_{ij}$ ,  $R1^2$  元素为  $b_{ij}$ ,  $b_{ii} = a_{ii} * a_{ii} = 1$ , 所以  $R1^2$  具有自反性, 若  $b_{ij} = 1$  ( $i \neq j$ ), 则存在另一整数  $k$  有  $a_{ik} * a_{kj} = 1$ , 因为  $R1$  的对称性和传递性有  $b_{ji} = a_{jk} * a_{ki} = 1$ , 所以  $R1^2$  具有对称性. 若  $b_{ik} = b_{kj} = 1$ , 则有  $a_{iz} = a_{zk} = a_{km} = a_{mj} = 1$ , 所以由传递性有  $a_{ik} = a_{kj} = 1$ , 所以  $b_{ij} = a_{ik} * a_{kj} = 1$ , 所以  $R1^2$  具有传递性. 所以  $R1^2$  是等价关系
3. 不是. 同 1 中例子

*Problem6*

证明: 自反性: 在关系矩阵  $S$  中,  $a_{ii} = I_{A_{ii}} \vee R_{ii} \vee R_{ii}^{-1} = 1 (I_{A_{ii}} = 1)$ , 所以具有自反性

对称性:  $a_{ij} = I_{A_{ij}} \vee R_{ij} \vee R_{ij}^{-1} = 1 (R_{ij} \vee R_{ij}^{-1} = 1)$ , 所以具有对称性

所以  $S$  是相容关系。