Homework8

窦嘉伟 518021911160

Problme1

1. {1,3,4}
2. {1,3,5}
3. {1,5}
4. {{4},{1,4},{1,2},{2},{5},{2,5},{1,5},{1,2,5}}

Problem2

1. 右边=$(A \cap (-B \cup -A)) \cup (B \cap (-B \cup -A))$

$=(A \cap -B) \cup (B \cap -A)$

$=(A\text{-}B) \cup (B - A)$

$=A \oplus B$

=左边

2. 由$(A - B) \subseteq A \Rightarrow (A - B) - C \subseteq A - C$

3. 左边=$((B \cup C) \cap (B \cup -A) \cap (-A \cup C) \cap (-A \cup -A))$

$=(B \cup C) \cap (-A \cup (B \cap C)) \cap -A$

$=(B \cup C) \cap -A$

$=(B \cup C) - A$

4. $x \in \cup P(A) \Leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \in P(A)) \Leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \subseteq A) \Leftrightarrow x \in A$

5. $x \in \cup (A \cup B) \Leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \in (A \cup B))$

$\Leftrightarrow \exists y((x \in y \wedge y \subseteq A) \vee (x \in y \wedge y \subseteq B))$

$\Leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \subseteq A) \vee \exists y((x \in y \wedge y \subseteq B))$

$\Leftrightarrow x \in (\cup A) \cup (\cup B)$

Problem3

若 A 是传递集合，则 $x \in \cup A \Leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \subseteq A)$，而由传递集合定义得 $x \in \cup A \Leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \subseteq A) \Leftrightarrow x \in A$,所以$\cup A \subseteq A$.

若$\cup A \subseteq A$，则有$\forall x(x \in \cup A \to x \in A) \Leftrightarrow \forall x(\forall y(x \in y \wedge y \in A) \to x \in A) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \to x \in A) \Leftrightarrow$A 是传递集合

Problem4

1. 若 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$，则$\forall x((x \in A) \to x \in C) \wedge \forall x((x \in B) \to x \in C)$

则$\forall x(x \in A \cup B) \Rightarrow \forall x((x \in A) \vee (x \in B)) \Rightarrow \forall x(x \in C)$

若 $A \cup B \subseteq C$，则$\forall x((x \in A \cup B) \to x \in C)$,

则$\forall x((x \in A) \to x \in (A \cup B) \to x \in C)$且$\forall x((x \in B) \to x \in (A \cup B) \to x \in C)$

则 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$

2. $A = B \Leftrightarrow \forall x(\ x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(\ x \in B \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
3. 若 $P(A) \subseteq P(B)$,则$\forall x(\ \{x\} \in P(A) \Leftrightarrow x \in A \rightarrow \{x\} \in P(B) \Leftrightarrow x \in B\ )$,所以 $A \subseteq B$
   若 $A \subseteq B$,则$\forall x(\ (x \subseteq A) \Leftrightarrow x \in P(A) \rightarrow (x \subseteq B) \Leftrightarrow x \in P(B)\ )$,所以 $P(A) \subseteq P(B)$
4. 若 $P(A) = P(B)$,则$\forall x(\ \{x\} \in P(A) \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow \{x\} \in P(B) \Leftrightarrow x \in B\ )$,所以 A=B
   若 $A = B$,则$\forall x(\ x \subseteq A \Leftrightarrow x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq B \Leftrightarrow x \in P(B)\ )$,所以 P(A) ⊆=P(B)
5. 若 $A \subseteq B$, $x \in \cup A \Leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \in A) \rightarrow \exists y(x \in y \wedge y \in B) \Leftrightarrow x \in \cup B$,所以$\cup A \subseteq \cup B$

Problem5

1. 因为对于 A 的元素 x, 有 $x \in x$,所以{x}是奇异集合
2. 假设存在非空集合 A,B,则存在集合 Z={A,B}，因为 $A \in B \wedge A \in Z$,所以 $B \cap Z \neq \emptyset$,同理 $A \cap Z \neq \emptyset$,这与正则公理矛盾。

Problem6

1. 由无序对集合存在公理有集合{A}
2. {A}存在元素 A 与其自身不相交,所以{A}是集合

Problem7

若$|\cup A| > n$，假设任意子集 Ai 的度≤1,则$|\cup A| \leq |A1| + |A2| + \ldots + |An| \leq n$ 矛盾。

所以$|\cup A| > n \Rightarrow (\exists A0)(A0 \in A \wedge |A0| > 1)$

Problem8

2020 的质因数有 2，5，101

设 P(i)表示 1-2019 之间能被 i 整除的数的集合

|P(2)|=1009,|P(5)|=(403),||P(101)|=19

|P(2)∩P(5)|=201,|P(2)∩P(101)|=9,|P(5)∩P(101)|=3

|P(2)∩P(5)∩P(101)|=1

|P(2)∪P(5)∪P(101)|=1009+403+19-201-9-3+1=1219

Problem9

1. 对于 $x \in [0,1], y \in [a, b]$, 存在一一对应关系 $y = x * (b - a) + a$,所以题设成立
2. 对于 $y \in [0,1], x \in R$,除 y=1 和 y=-1 外存在一一对应关系 y=1/(x+2)+1/2 (x>=0) 及 y=1/(x-2)+1/2 (x<0),所以[0, 1] ≈R.