

Homework2

Problem1:

Tom is a blue cat \vee Tom is a black cat

Problem2:

对于一个由同种连接词连接的 n 个变量，其各变量取值一共有 2^n 种情况，每种情况有两种不同的结果取值 True or False。共有 2^{n+1} 种情况。每种情况我们可以为之定义一种逻辑联结词。所以可以定义 2^{n+1} 种连接词

对于一个 n 变量合式公式，其真值表有 2^n 行

Problem3:

真值表如下

P	Q	$P \downarrow Q$
True	True	False
True	False	False
False	True	False
False	False	True

很显然， $\neg P$ 对应 1, 4 两种情况，可写为 $P \downarrow P$ ， $P \vee Q$ 值与上表真好相反，可写为 $\neg(P \downarrow Q) = (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$ ， $P \wedge Q$ 值与上表类似，可写为 $(\neg P \downarrow \neg Q) = ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q))$ 。

其他两种可适当进行转化

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q = \neg(\neg P \downarrow Q) = (P \downarrow P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow P \downarrow Q)$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) = (\neg P \downarrow \neg Q) \vee (P \downarrow Q) = ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow (P \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow (P \downarrow Q)$$

Problem4:

$$A = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$B = (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

Problem5:

$$(P \rightarrow Q) \wedge P = (\neg P \vee Q) \wedge P = (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) = P \wedge Q$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg[(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)] = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) = (\neg(P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge ((P \vee Q) \vee \neg(P \wedge Q))$$

$$=[(\neg(P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge ((P \vee Q) \vee \neg(P \wedge Q))] \vee [(\neg(P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge \neg(P \wedge Q)]$$

$$=\{\text{False} \vee [(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)]\} \vee \{[\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)] \vee \text{False}\}$$

$$=[(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)] \vee [\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)]$$

$$=(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

Problem6:

contradiction

P	Q	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P))$
True	Ture	False
True	False	False
False	False	False
False	True	False

$$\begin{aligned}(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)) &= [(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)] \leftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)] \\ &= \neg[(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)] \leftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)] \\ &= \text{False}\end{aligned}$$