算法设计与分析

Computer Algorithm Design & Analysis

2023秋 算法设计与...

吕志鹏
zhipeng.lv@hust.edu.cn

群名称：2023秋 算法设计与分析

群　号：921525307

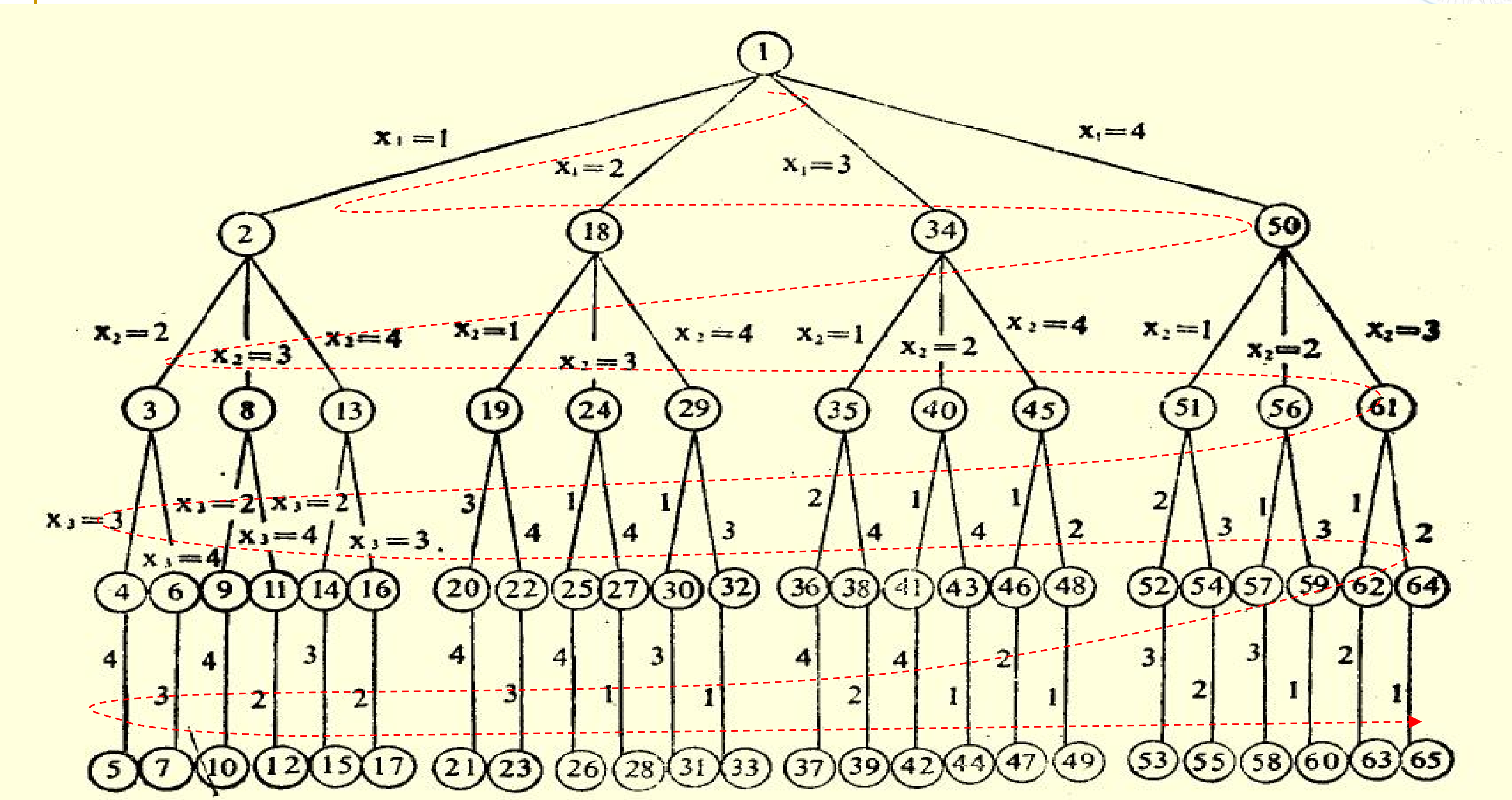
分支－限界法

Branch and Bound

分支－限界法

- **分支－限界法**：采用宽度优先策略，在生成当前E-结点全部儿子之后再生成其它活结点的儿子，且用限界函数帮助避免生成不包含答案结点子树的状态空间的检索方法。
- **活结点表：**
  活 结 点：自己已经被生成，但还没有被检测的结点。
  存储结构：队列（First In First Out, BFS）、
  栈（Last In First Out, D-Search）
- 分支－限界法的两种基本设计策略：
  - FIFO检索：活结点表采用队列
  - LIFO检索：活结点表采用栈

例 4皇后问题的状态空间树。

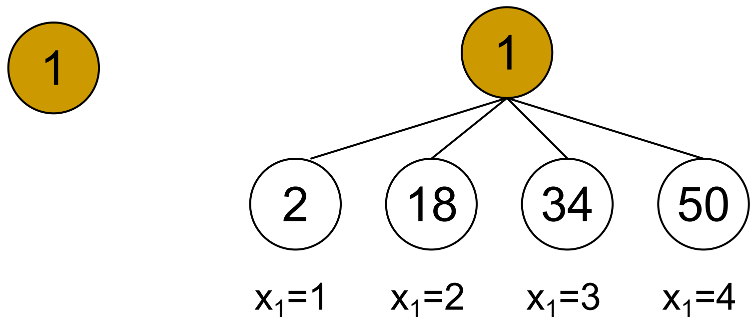


4-皇后问题完整的状态空间树

- 限界函数：如果（$x_1,x_2,\ldots,x_{i-1}$）是到当前E结点的路径，那么具有父－子标记的所有儿子结点x_i是一些这样的结点，它们使得（$x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i$）表示没有两个皇后正在相互攻击的一种棋盘格局。

采用FIFO分支－限界法检索4-皇后问题的状态空间树：

E结点　　扩展E结点得到的状态空间树　　活结点表（队列）

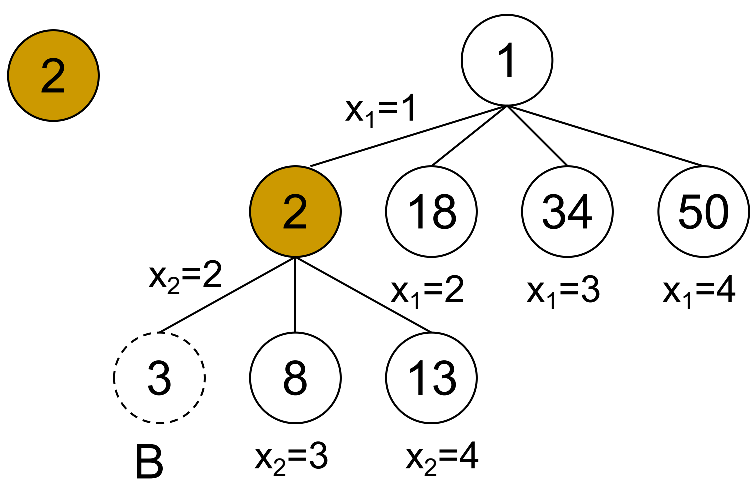


head　　tail

2	18	34	50				

扩展结点1，得新结点2，18，34，50

活结点2、18、34、50入队列



head　　tail

18	34	50	8	13			

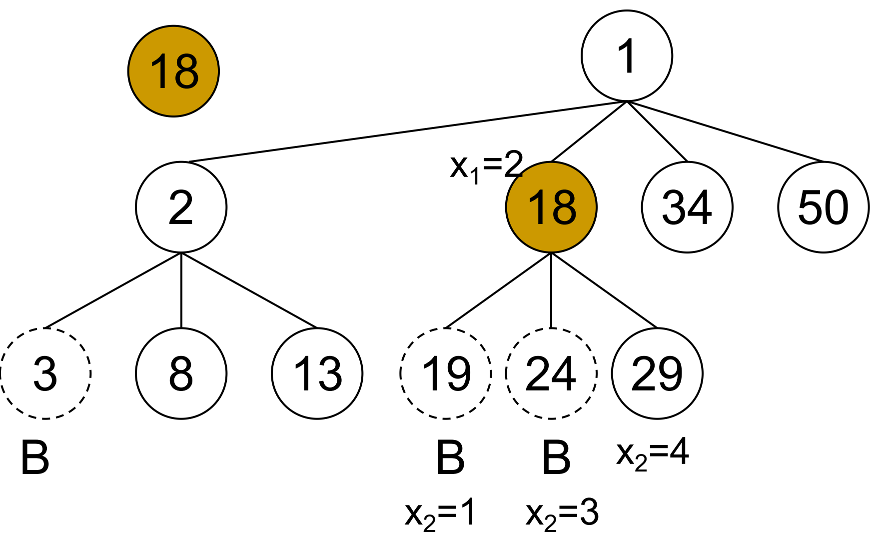
扩展结点2，得新结点3，8，13

利用限界函数杀死结点3

活结点8、13入队列

采用FIFO分枝－限界法检索4-皇后问题的状态空间树（续）：

E结点　　　扩展E结点得到的状态空间树



活结点表（队列）

head　　　　tail

34	50	8	13	29			

扩展结点18，得新结点19，24，29

利用限界函数杀死结点19、24

活结点29入队列

采用FIFO分支－限界法检索4-皇后问题的状态空间树（续）：

E结点

34

扩展E结点得到的状态空间树

活结点表（队列）

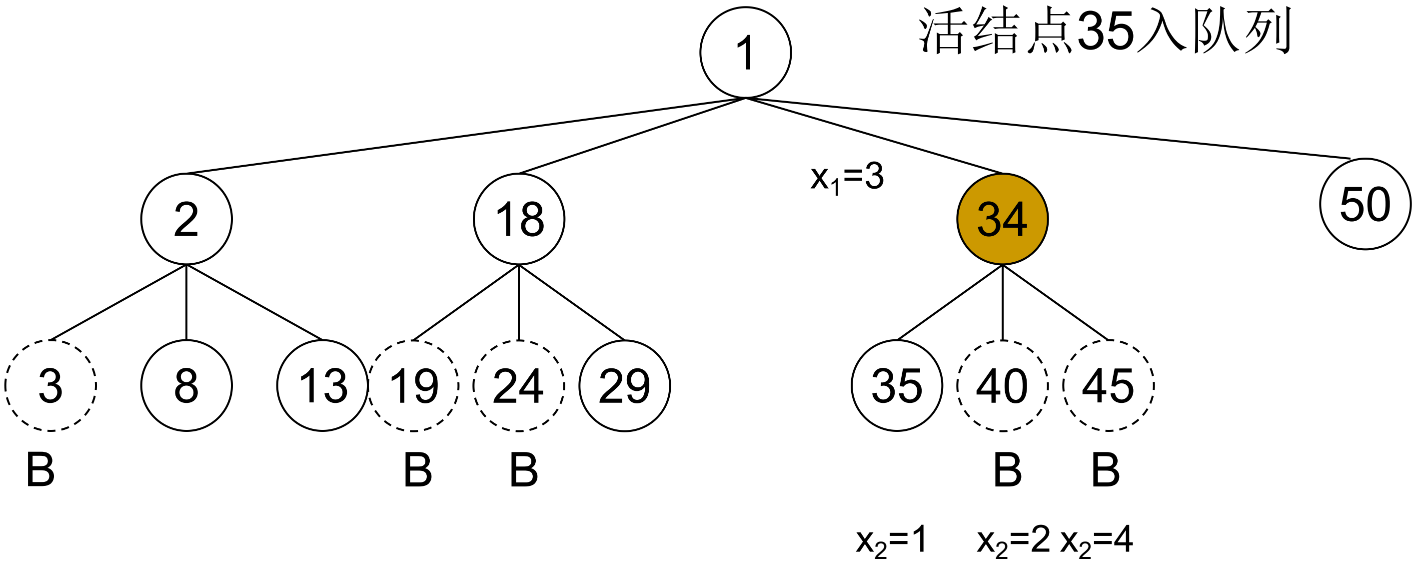
head　　tail

50	8	13	29	35			

扩展结点34，得新结点35，40，45

利用限界函数杀死结点40、45

活结点35入队列



采用FIFO分支－限界法检索4-皇后问题的状态空间树（续）：

E结点　　扩展E结点得到的状态空间树　　活结点表（队列）

50

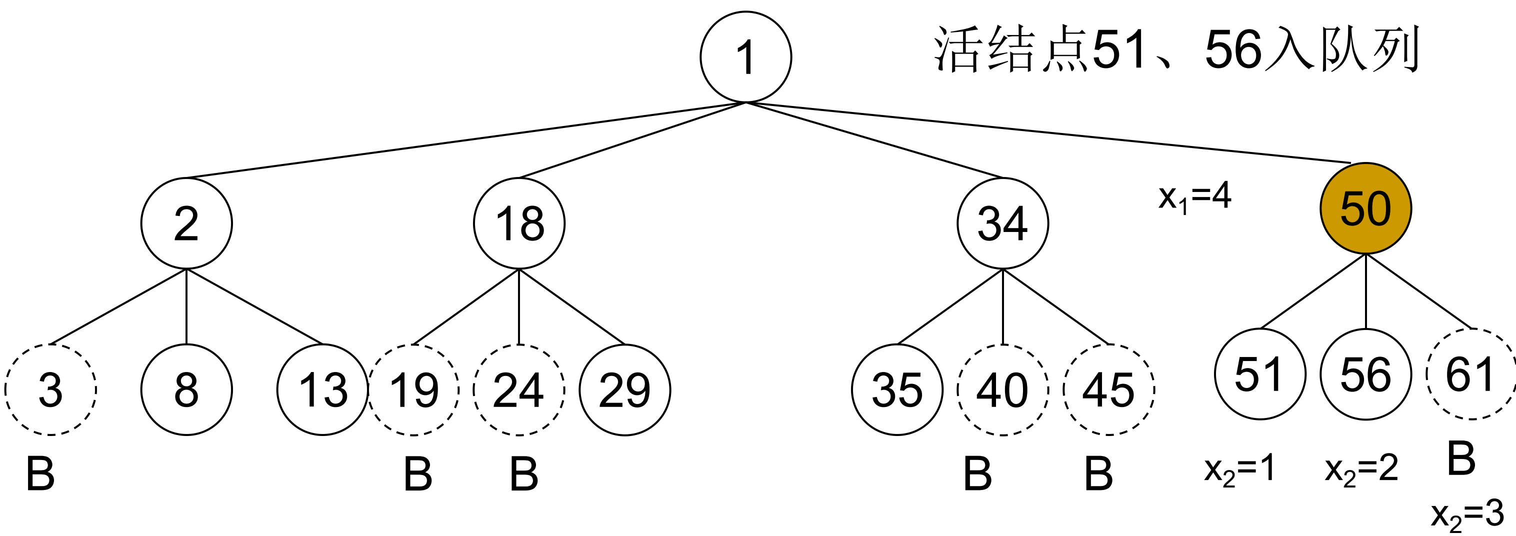
head　　tail

8	13	29	35	51	56		

扩展结点50，得新结点51，56，61

利用限界函数杀死结点61

活结点51、56入队列



采用FIFO分支－限界法检索4-皇后问题的状态空间树（续）：

E结点　　扩展E结点得到的状态空间树　　活结点表（队列）

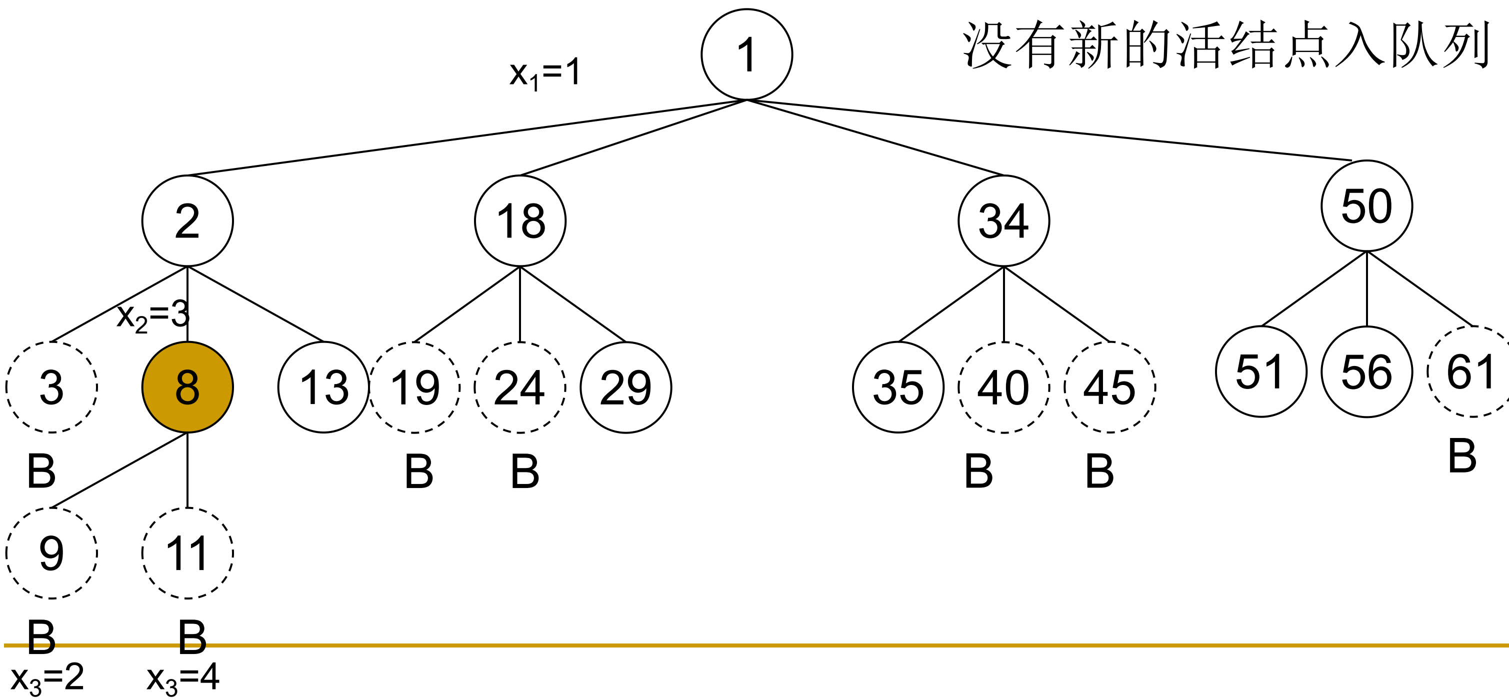
13	29	35	51	56			

head　　tail

扩展结点8，得新结点9，11

利用限界函数杀死结点9、11

没有新的活结点入队列



采用FIFO分支－限界法检索4-皇后问题的状态空间树（续）：

E结点　　扩展E结点得到的状态空间树　　活结点表（队列）

13

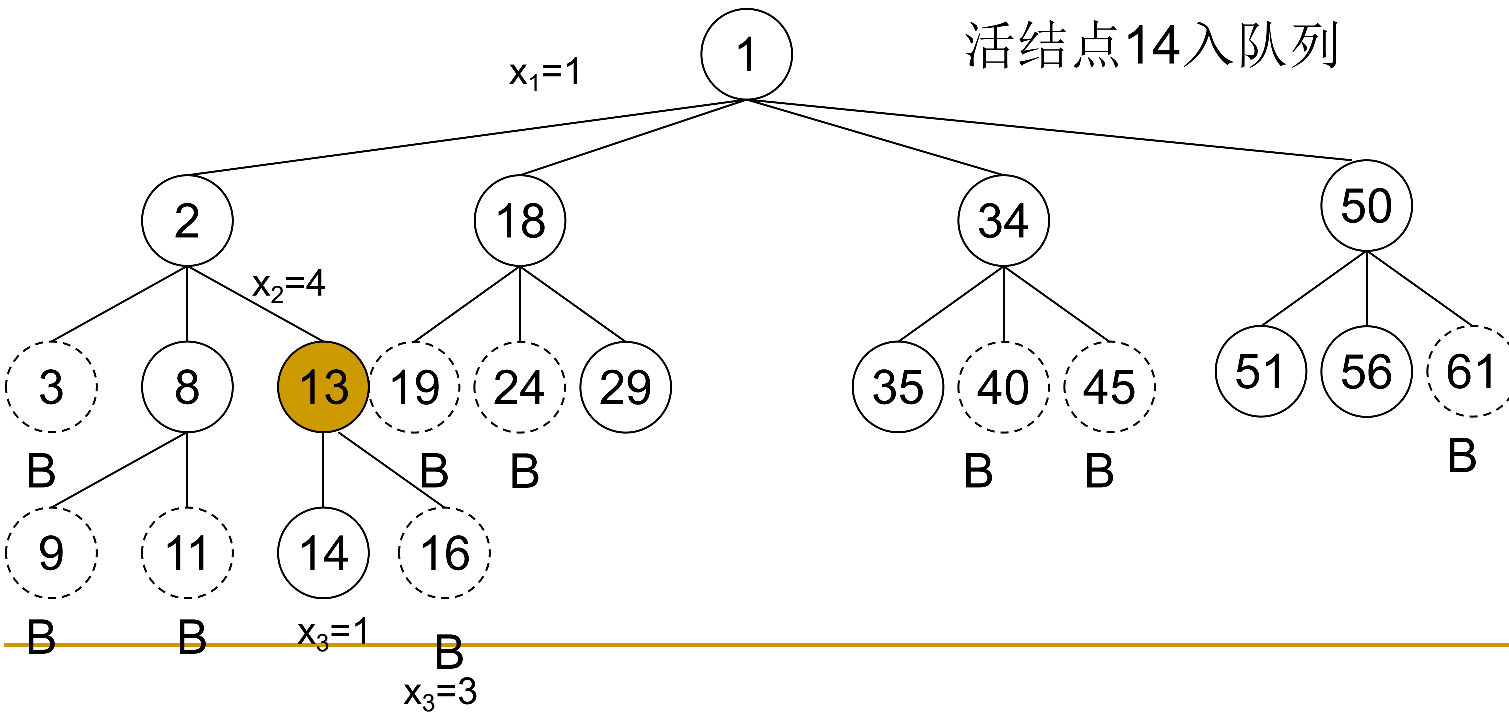
head　　tail

29	35	51	56	14			

扩展结点13，得新结点14，16

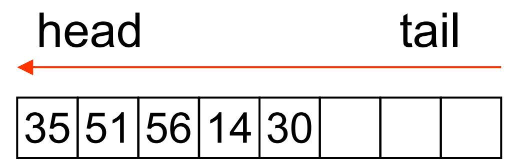
利用限界函数杀死结点16

活结点14入队列



采用FIFO分支－限界法检索4-皇后问题的状态空间树（续）：

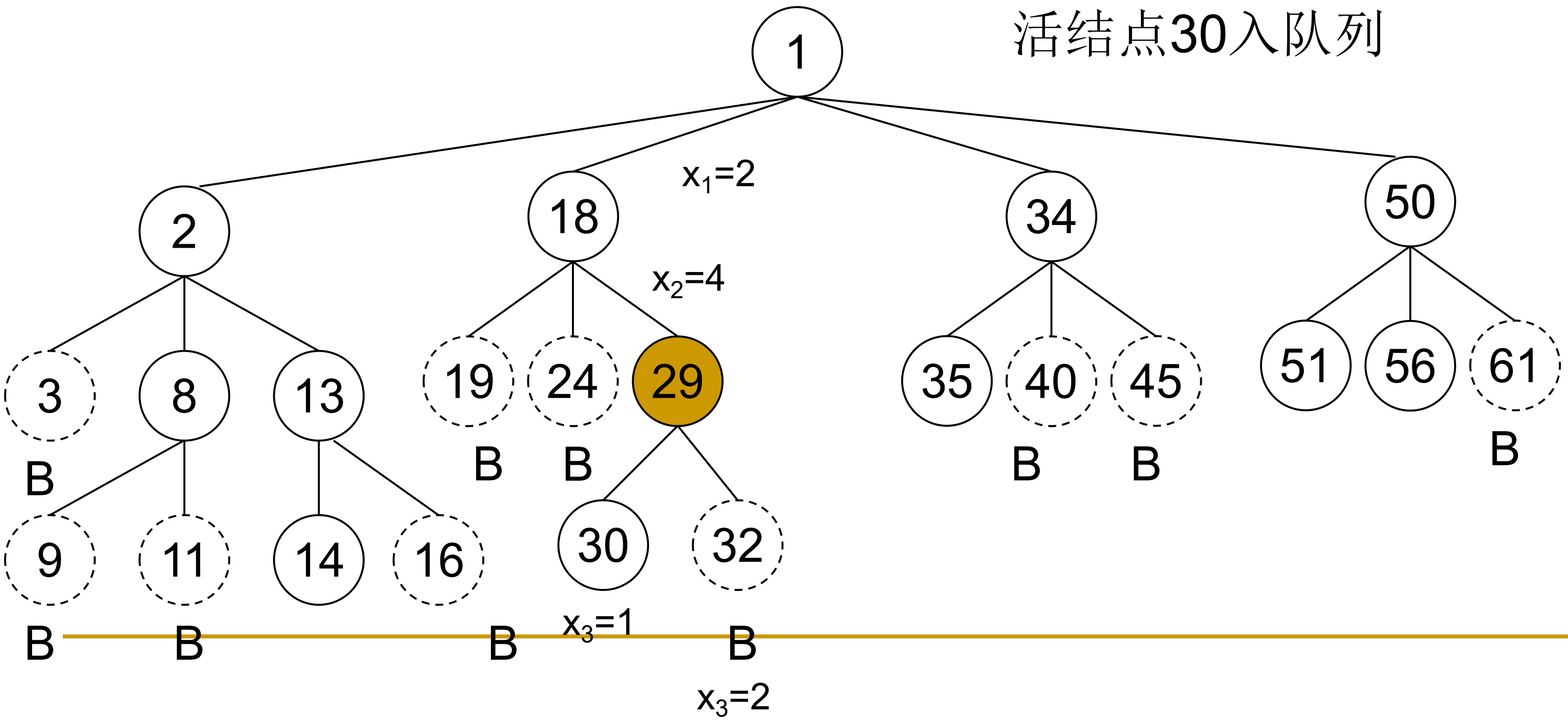
E结点　　扩展E结点得到的状态空间树　　活结点表（队列）



扩展结点29，得新结点30，32

利用限界函数杀死结点32

活结点30入队列



采用FIFO分支－限界法检索4-皇后问题的状态空间树（续）：

E结点　　扩展E结点得到的状态空间树　　活结点表（队列）

35

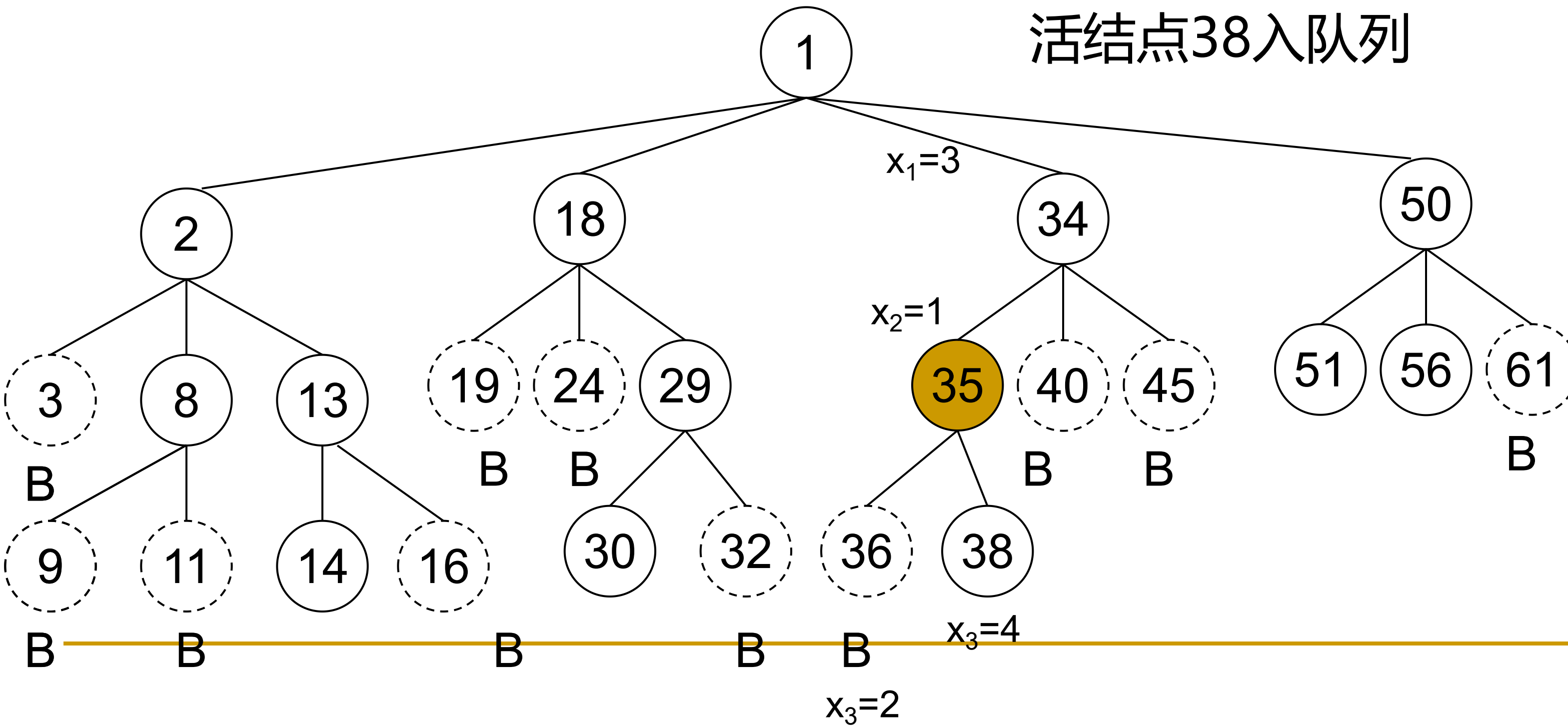
head　　tail

51	56	14	30	38			

扩展结点35，得新结点36，38

利用限界函数杀死结点36

活结点38入队列



采用FIFO分枝－限界法检索4-皇后问题的状态空间树（续）：

E结点　　扩展E结点得到的状态空间树　　活结点表（队列）

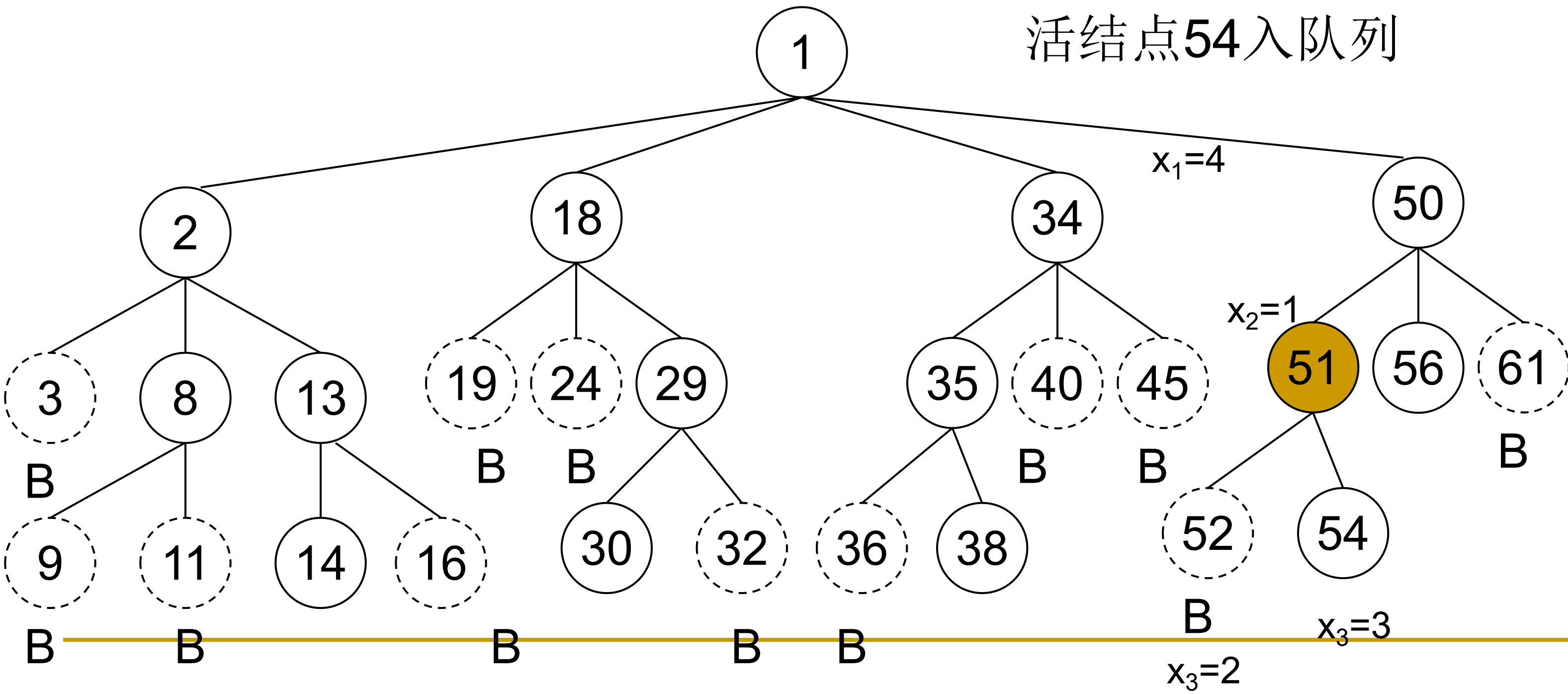
head　　tail

56	14	30	38	54			

扩展结点51，得新结点52，54

利用限界函数杀死结点52

活结点54入队列



采用FIFO分支－限界法检索4-皇后问题的状态空间树（续）：

E结点　　扩展E结点得到的状态空间树　　活结点表（队列）

56

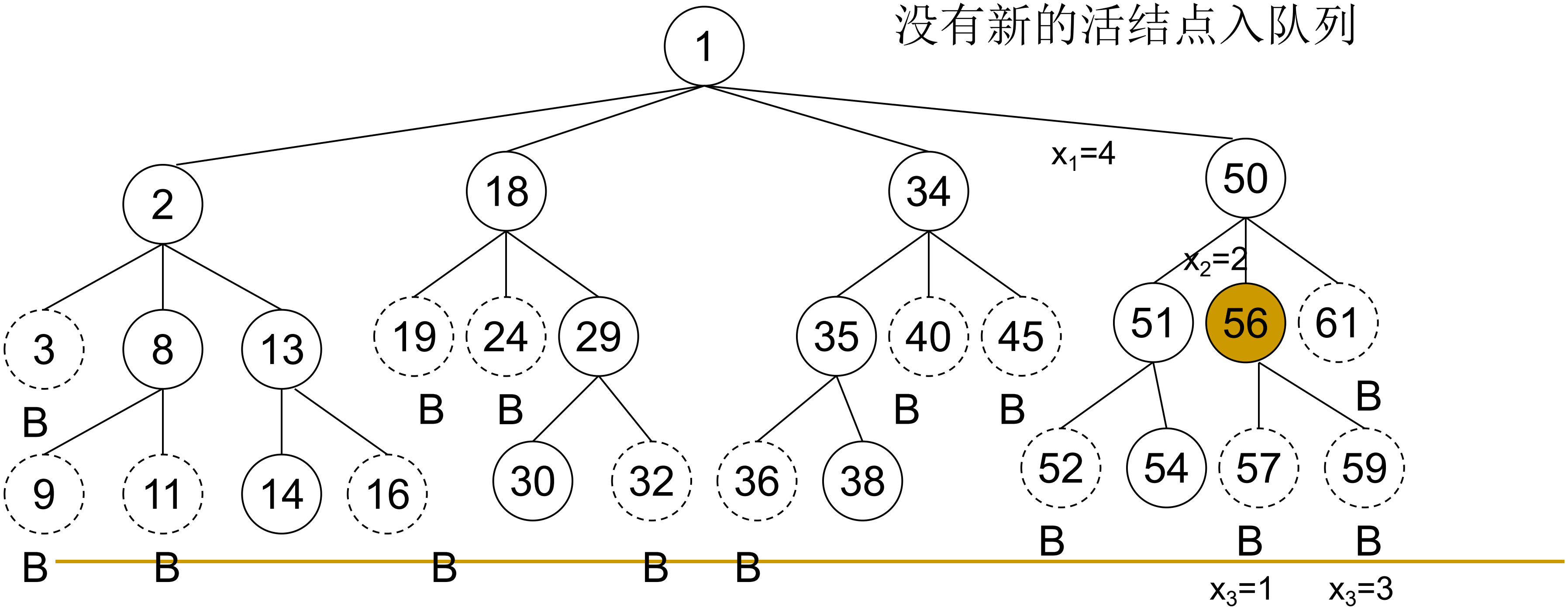
head　　tail

14	30	38	54				

扩展结点56，得新结点57，59

利用限界函数杀死结点57、59

没有新的活结点入队列



采用FIFO分支－限界法检索4-皇后问题的状态空间树（续）：

E结点　　扩展E结点得到的状态空间树　　活结点表（队列）

14

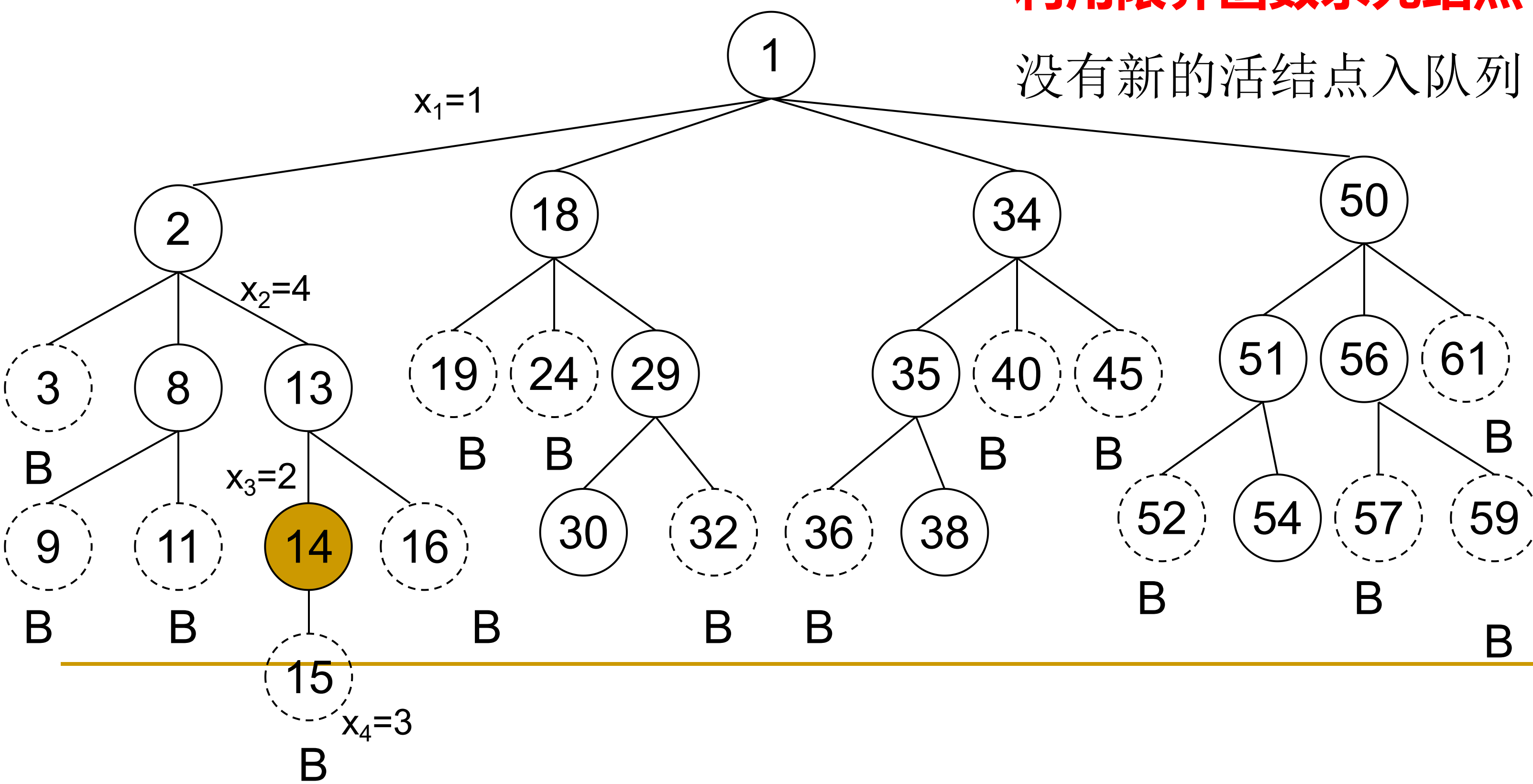
head　　tail

30	38	54					

扩展结点14，得新结点15

利用限界函数杀死结点15

没有新的活结点入队列



采用FIFO分支－限界法检索4-皇后问题的状态空间树（续）：

E结点　　扩展E结点得到的状态空间树　　活结点表（队列）

30

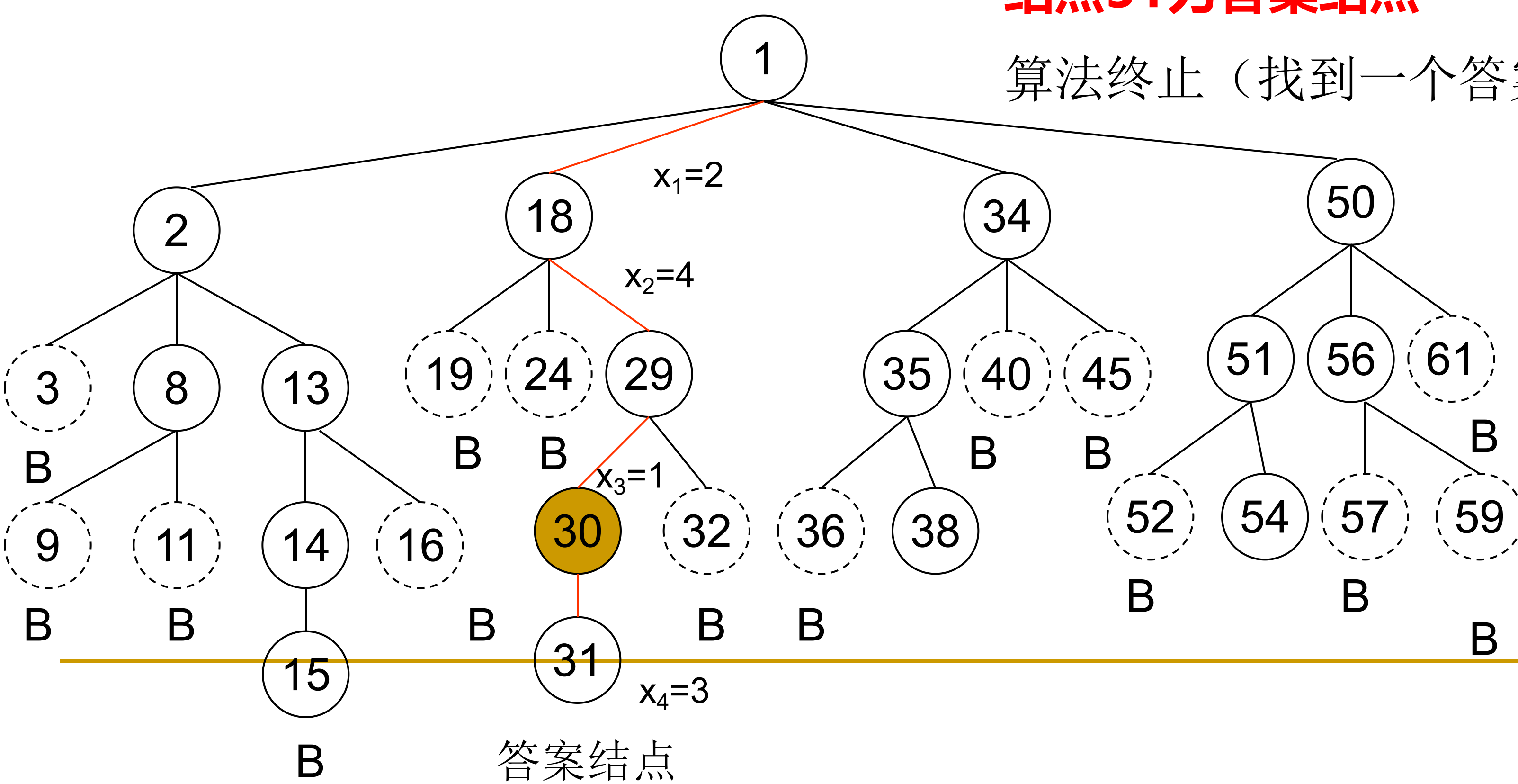
head → tail

38	54						

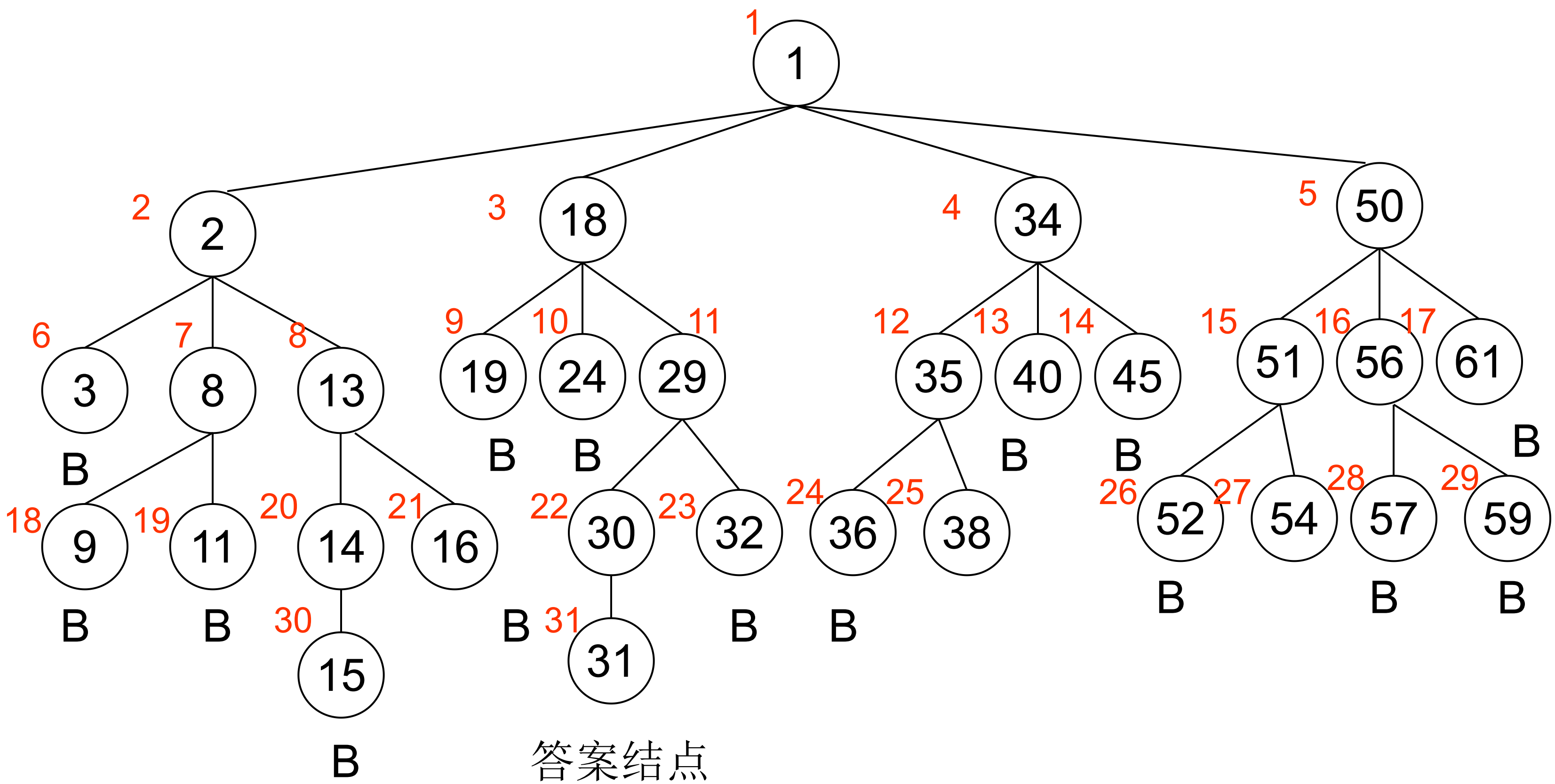
扩展结点30，得新结点31

结点31为答案结点

算法终止（找到一个答案结点）



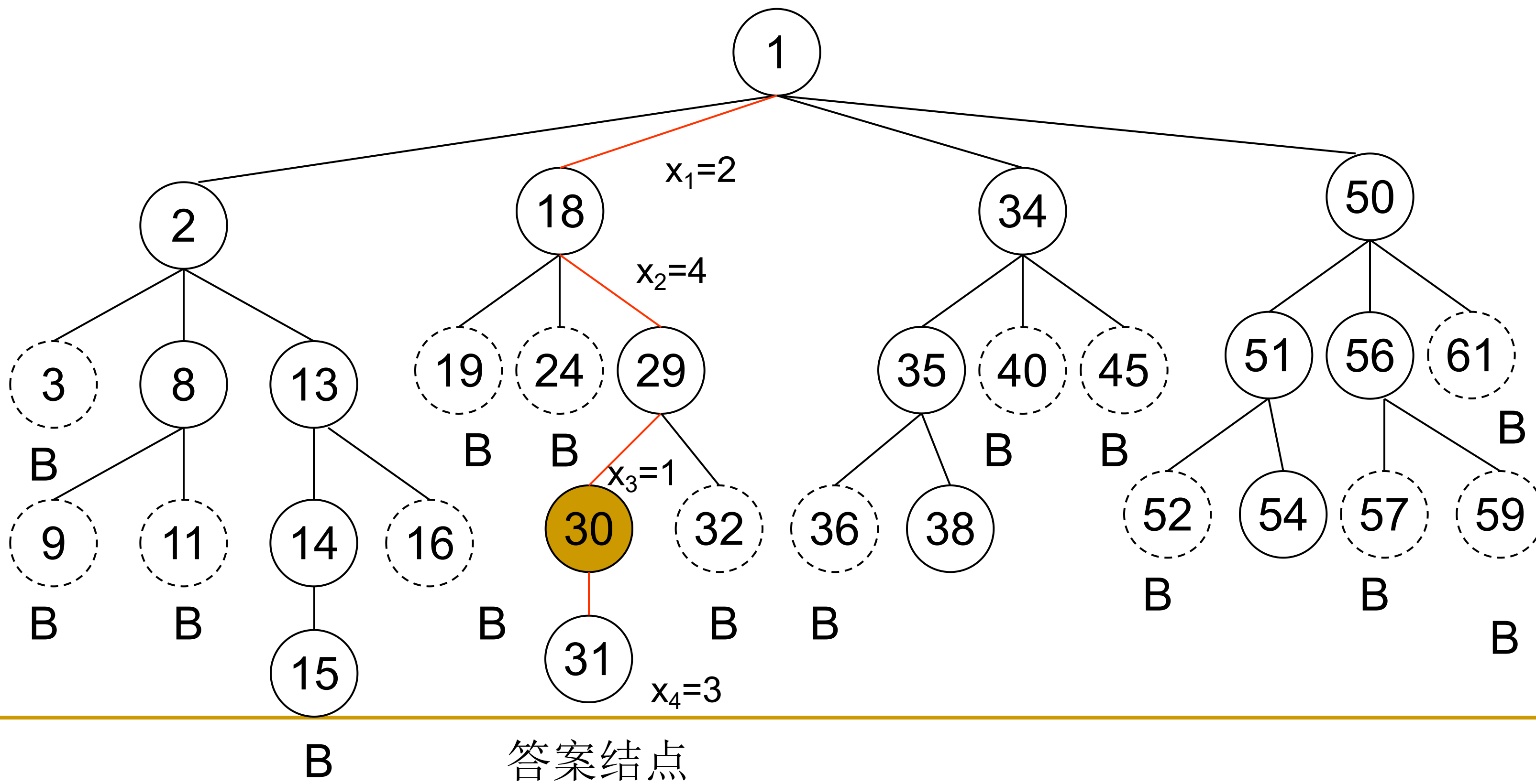
采用FIFO分支－限界法检索4-皇后问题的状态空间树：



LC-检索（Least Cost，A*算法）

- LIFO和FIFO分枝-限界法存在的问题

  对下一个E-结点的选择规则过于死板。对于有可能快速检索到一个答案结点的结点没有给出任何优先权。如结点30。



LC-检索（Least Cost，A*算法）

- LIFO和FIFO分枝-限界法存在的问题

对下一个E-结点的选择规则过于死板。对于有可能快速检索到一个答案结点的结点没有给出任何优先权。如结点30。

- 如何解决？
  - 做某种排序，让可以导致答案结点的活结点排在前面！
  - 新问题：**怎么排序?**
  - **寻找一种“有智力”的排序函数C(·)**，用C(·)来选取下一个E结点，加快到达一答案结点的检索速度。

如结点30，29→30→31

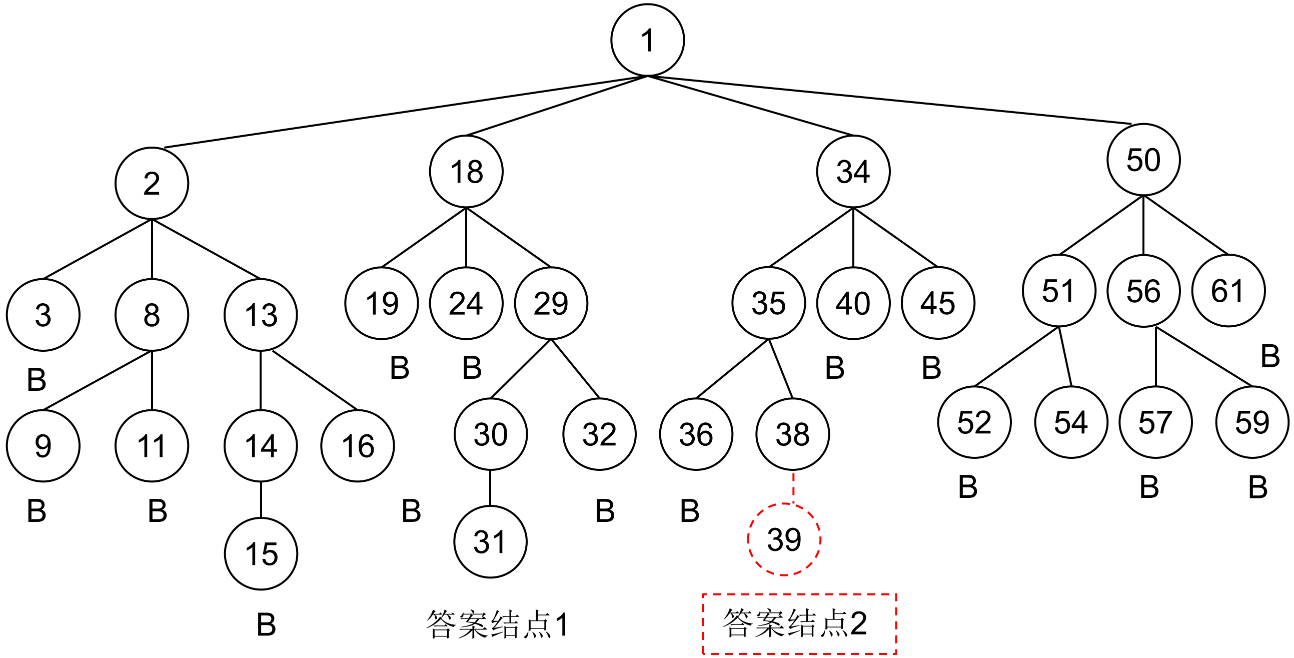
如何衡量结点的优先等级？

- 对于任一结点，用该结点导致答案结点的成本（代价）来衡量该结点的优先级——成本越小越优先。

- 对任一结点X，可以用两种标准来衡量结点的代价：

  1）在生成一个答案结点之前，子树X需要生成的结点数。

  2）在子树X中离X最近的那个答案结点到X的路径长度。



例：在量度2)下各结点的代价：

结点　　　　　　代价

- 1　　　　　　4
- 18，34　　　　3
- 29，35　　　　2
- 30，38　　　　1
- 其余结点(除31、39)　≥3，2，1

量度2)：在子树X中离X最近的那个答案结点到X的路径长度。

结点成本函数

- C(・)：“有智力”的排序函数，依据成本排序，优先选择成本最小的活结点作为下一个E结点进行扩展。C(・)又称为“结点成本函数”
- **结点成本函数C(X)的取值：**

1）如果X是答案结点，则C(X)是由状态空间树的根结点到X的成本(即所用的代价，可以是级数、计算复杂度等)。

2）如果X不是答案结点且子树X不包含任何答案结点，则C(X)＝∞

3）如果X不是答案结点但子树X包含答案结点，则C(X)应等于子树X中具有最小成本的答案结点的成本

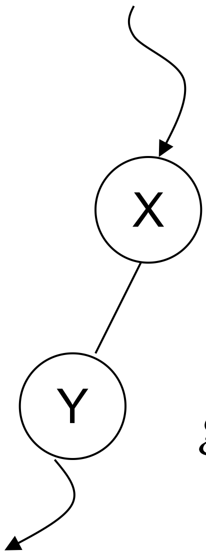
计算结点成本函数的困难

- 计算结点X的代价通常要检索子树X才能确定，因此计算C(X)的工作量和复杂度与解原始问题是相同的。
- 计算结点成本的精确值是不现实的——相当于求解原始问题。怎么办？
- 结点成本的估计函数$\hat{c}(X)$

包括两部分：$\hat{g}(X)$和 h(X)

$\hat{g}(X)$：是由X到达一个答案结点所需成本的**估计函数**。

性质： 单纯使用 $\hat{g}(X)$ 选择E结点会导致算法偏向纵深检查。



$\hat{g}(X) \le \ldots\ldots$

$\hat{g}(Y) \le \hat{g}(X)$

$\ldots\ldots \le \hat{g}(Y)$

$\hat{g}(\bullet)$ 是X到答案结点的最小成本

纵深检索：

1）如果 $\hat{g}(X) = C(X)$ ，最理想！

2）否则，可能导致不能很快地找到更靠近根的答案结点。

特例： Z比W更接近答案结点，但 $\hat{g}(W) < \hat{g}(Z)$ 。

如何避免单纯考虑 $\hat{g}(X)$ 造成的纵深检查？

- 引进**h(X)**改进成本估计函数。
- h(X)：根结点到结点X的成本——已发生成本。

改进的**结点成本估计函数** $\hat{c}(X)$

$$\hat{c}(X) = f(h(X)) + \hat{g}(X)$$

- f(・)是一个非降函数。
- 非零的f(・)可以减少算法作偏向于纵深检查的可能性，它强使算法优先检索**更靠近答案结点**但又**离根较近**的结点。

LC-检索： 选择 $\hat{c}(\bullet)$值最小的活结点作为下一个E-结点的状态空间树检索方法。

（Least Cost Search）

特例：

- BFS： 依据级数来生成结点，令

  $\hat{g}(X)=0$； f (h(X)) =X的级数（只看h(X)）

- D-Search：令f (h(X)) =0；而当Y是X的一个儿子时，

  总有$\hat{g}(X) \geqslant \hat{g}(Y)$ 。

LC分支-限界检索： 带有限界函数的LC-检索

LC-检索的抽象化控制

设：　T是一棵状态空间树

- c(X)是T的结点成本函数
- $\hat{c}(X)$是成本估计函数
- 如果X是一个答案结点或者是一个叶结点，则

  c(X) = $\hat{c}(X)$ 。

过程LC用 $\hat{c}(\bullet)$ 去寻找一个答案结点

LC-检索的抽象化控制

```
procedure LC(T, ĉ )
  //为找答案结点检索T, ĉ 为结点成本估计函数//
  if T是答案结点 then 输出T; return endif   //T为答案结点，输出T//
  E ← T    //E—结点//
  将活结点表初始化为空
  loop
      for E的每个儿子X do
          if X是答案结点 then 输出从X到T的路径；return endif
          call ADD(X)  //X是新的活结点，ADD将X加入活结点表中//
          PARENT(X) ← E //指示到根的路径//
      repeat
      if 不再有活结点 then   print("no  answer code")；stop  endif
      call LEAST(E)  //从活结点表中找 ĉ 最小的活结点，赋给E，并从活结点表中删除//
  repeat
end LC
```

找到答案结点，

输出到根的路径

说明：

LEAST(E)：在活结点表中找一个具有最小成本估计值的活结点，从活结点表中删除这个结点，并将此结点放在变量E中返回。

ADD(X)：将新的活结点X加到活结点表中。

活结点表：以**min-堆**结构（优先队列）存放。

LC-检索与FIFO-检索和D-检索的关系

1）FIFO-检索及D-检索是LC算法的特例：

- 若活结点表采用**队列**，用LEAST(X)和ADD(X)从队列中删除或加入元素，并**依据级数**来生成结点，即令$\hat{g}(X)=0$；f (h(X))＝X的级数，则LC-检索就变成了 FIFO-检索。
- 若活节点表采用**栈**，用LEAST(X)和ADD(X)从栈中删除或加入元素，并**令f (h(X)) ＝0**；而当Y是X的一个儿子时，总有$\hat{g}(X) \geq \hat{g}(Y)$，则LC就变成了 D-检索

2）算法的不同之处在于：对下一个E-结点的选择规则不同。

不同估算函数对于结果的影响

估计函数选择不同，对寻路结果有哪些影响呢？

1、**当估算的距离$\hat{g}(X)$ 完全等于实际距离时**，也就是每次扩展的那个点都准确的知道选它以后，路径距离是多少，这样就不用乱选了，每次都选最小的那个，一路下去，肯定就是最优的解，而且基本不用扩展其它的点。

2、**如果估算距离$\hat{g}(X)$小于实际距离时**，则到最后一定能找到一条最短路径，但是有可能会经过很多无效的点。(过于乐观，以h(X)为主)

3、**如果估算距离$\hat{g}(X)$大于实际距离时**，有可能就很快找到一条通往目的地的路径，但是却不一定是最优的解。（过于悲观，以g(X)为主）

成本函数在分支-限界算法中的应用

假定每个答案结点X有一个与其相联系的c(X)，且找成本最小的答案结点。

1）最小成本的下界

$\hat{c}(X)$ 为X的成本估计函数。当 $\hat{c}(X) \le c(X)$ 时，$\hat{c}(X)$ 给出了由结点X求解的最小成本的下界，作为启发性函数，减少选取E结点的盲目性。

2）最小成本的上界

能否定义最小成本的上界？

最小成本的上界

定义U为最小成本解的成本上界，则：

作用：对具有 $\hat{c}(X) > U$ 的所有活结点可以被杀死，从而可以进一步使算法加速，减少求解的盲目性。

注：

根据c(X)的定义，由那些 $\hat{c}(X) > U$ 的结点X可到达的所有答案结点必有 $c(X) \geq \hat{c}(X) \geq U$，不可能具有更小的成本。故，当已经求得一个具有成本U的答案结点，那些有 $\hat{c}(X) > U$ 的所有活结点都可以被杀死。

最小成本上界U的求取：

1）**初始值**：利用启发性方法赋初值，或置为∞

2）每找到一个新的答案结点后修正U，U取当前最小成本值。

注：只要U的初始值**不小于**最小成本答案结点的成本，利用U就不会杀死可以到达最小成本答案结点的活结点。

利用分枝-限界算法求解最优化问题

- 最优化问题求能够使目标函数取极值的最优解。**如何把求最优解的过程表示成与分支-限界相关联的检索过程?**

- **可行解**：类似于n-元组的构造，把可行解可能的构造过程用“状态空间树”表示出来。
- **最优解**：把对最优解的检索表示成对状态空间树答案结点的检索。
- **成本函数**：每个结点赋予一个成本函数c(X)，并使得代表最优解的答案结点的c(X)是所有结点成本的最小值。

成本函数的定义：

直接用目标函数作为成本函数c(·)

1）代表可行解结点的c(X)就是该可行解的目标函数值。

2）代表不可行解结点的c(X)=∞；

3）代表部分解的结点的c(X)是根为X的子树中最小成本结点的成本。

- 答案结点⟷可行解
- 成本最小的答案结点⟷最优解
- 成本估计函数$\hat{c}(X)$ 且要求有$\hat{c}(X) \le c(X)$

注：$\hat{c}(X)$ 根据目标函数进行估计。

实例：利用求解最优化问题的分支-限界算法求带限期的作业排序问题

1.问题描述：带限期的作业排序问题

假定有n个作业和一台处理机，作业i对应一个三元组（p_i,d_i,t_i）

其中，t_i：表示作业i需要t_i个单位处理时间；

d_i：表示完成期限；

p_i：表示若i在期限内未完成招致的罚款。

求解目标： 从n个作业的集合中选取子集J，要求J中所有作业都能在各自期限内完成并且使得不在J中的作业招致的罚款总额最小——最优解。

实例： $n=4$;

$(p_1,d_1,t_1)=(5,1,1)$; $(p_2,d_2,t_2)=(10,3,2)$;

$(p_3,d_3,t_3)=(6,2,1)$; $(p_4,d_4,t_4)=(3,1,1)$;

状态空间：问题的解空间由作业集(1,2,3,4)的所有可能的子集组成，共有2^4个元组。

状态空间树：两种表示形式，

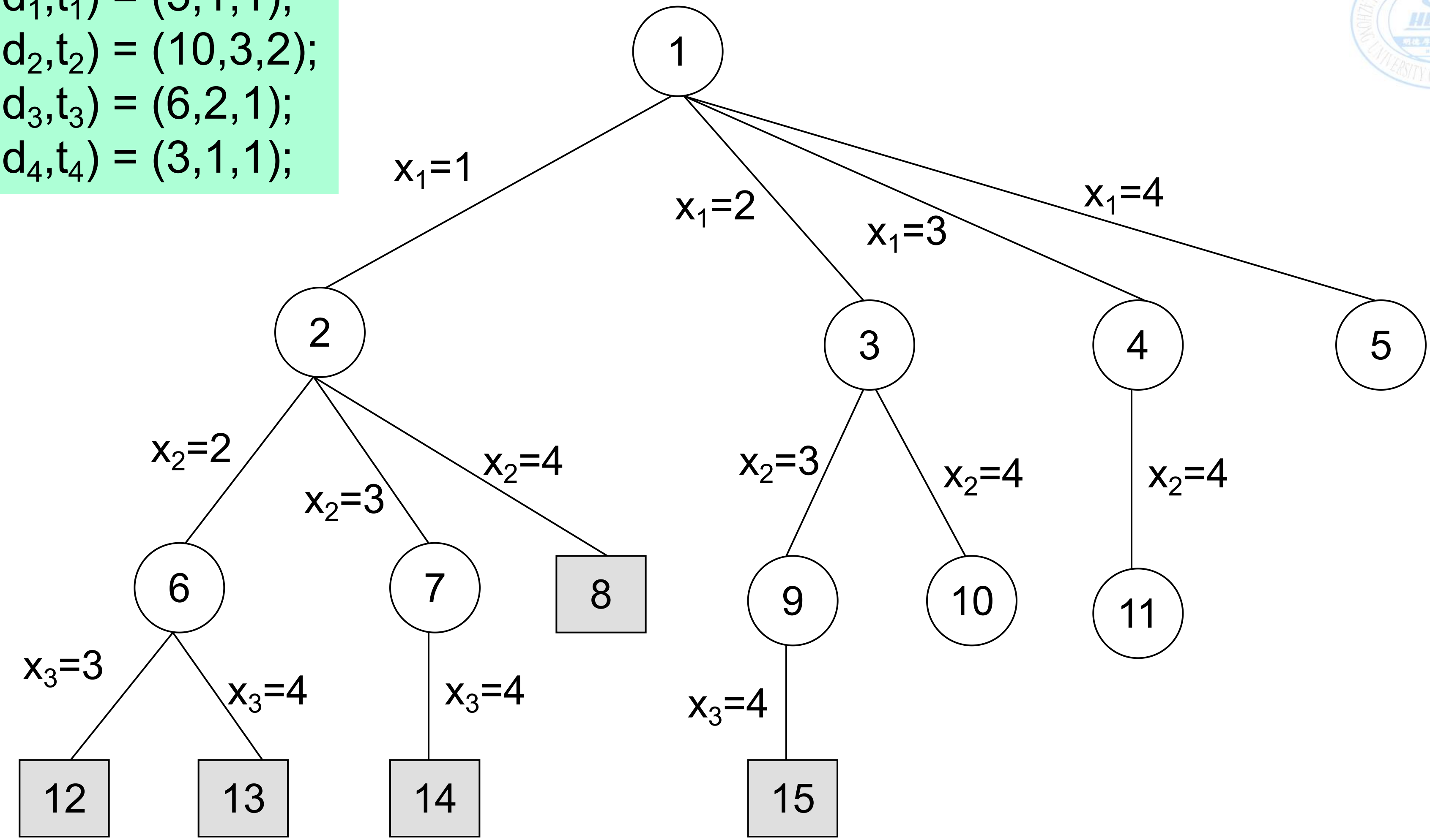
1）元组大小可变的表示

表示选了哪些作业，用作业编号表示。

2）元组大小固定的表示

表示是否选中作业，每个作业对应一个0/1值

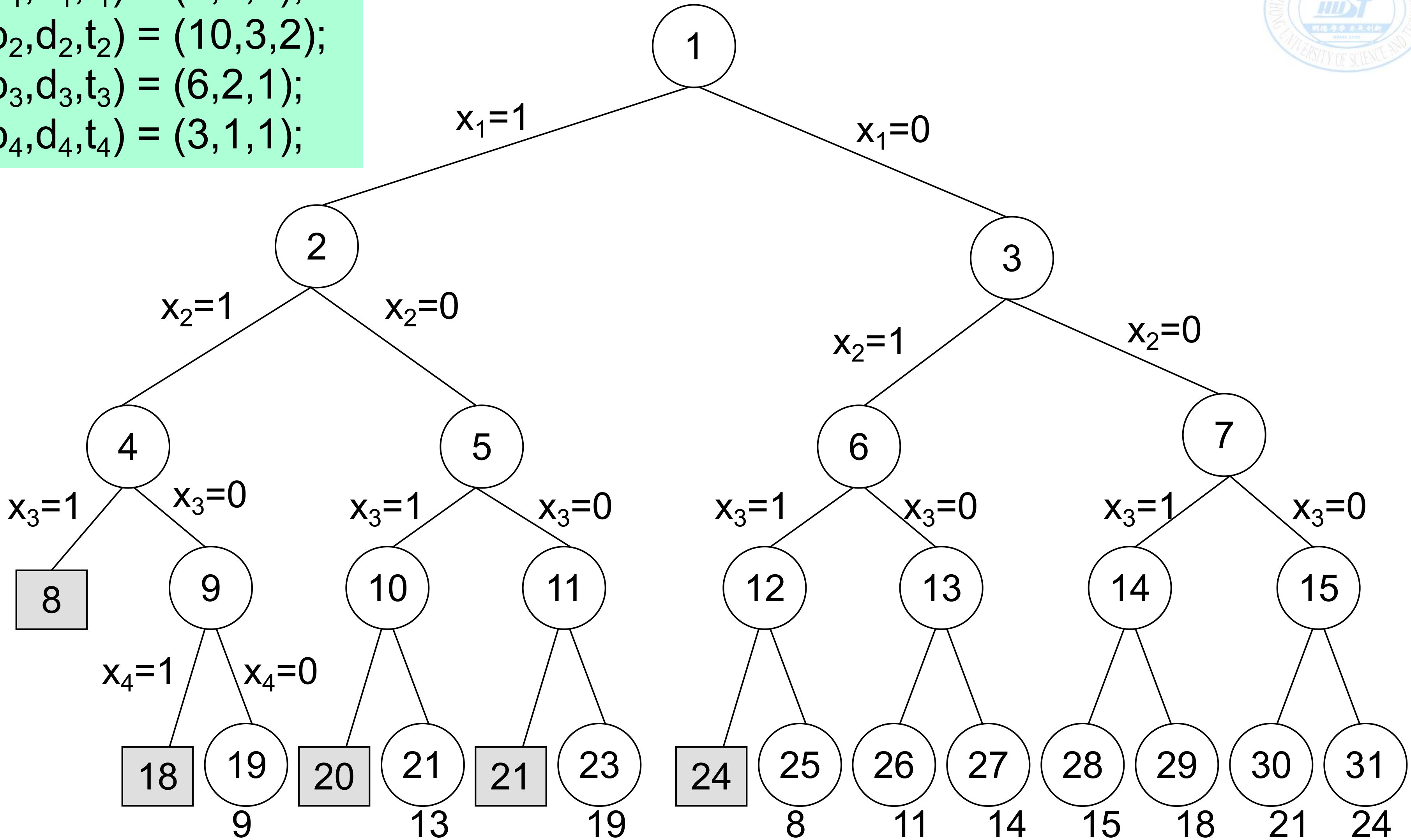
$(p_1,d_1,t_1) = (5,1,1);$
$(p_2,d_2,t_2) = (10,3,2);$
$(p_3,d_3,t_3) = (6,2,1);$
$(p_4,d_4,t_4) = (3,1,1);$



图(a) 采用大小可变的元组表示的状态空间树

圆形结点都是可行结点，方形结点是不可行的子集合

$(p_1,d_1,t_1) = (5,1,1)$;
$(p_2,d_2,t_2) = (10,3,2)$;
$(p_3,d_3,t_3) = (6,2,1)$;
$(p_4,d_4,t_4) = (3,1,1)$;



图(b) 采用大小固定的元组表示的状态空间树

只有圆形叶结点是答案结点，方形结点是不可行的子集合

成本函数c(·)定义为：

- 对于圆形结点X，c(X)是根为X的子树中结点的最小罚款；
- 对于方形结点， c(X)=∞。

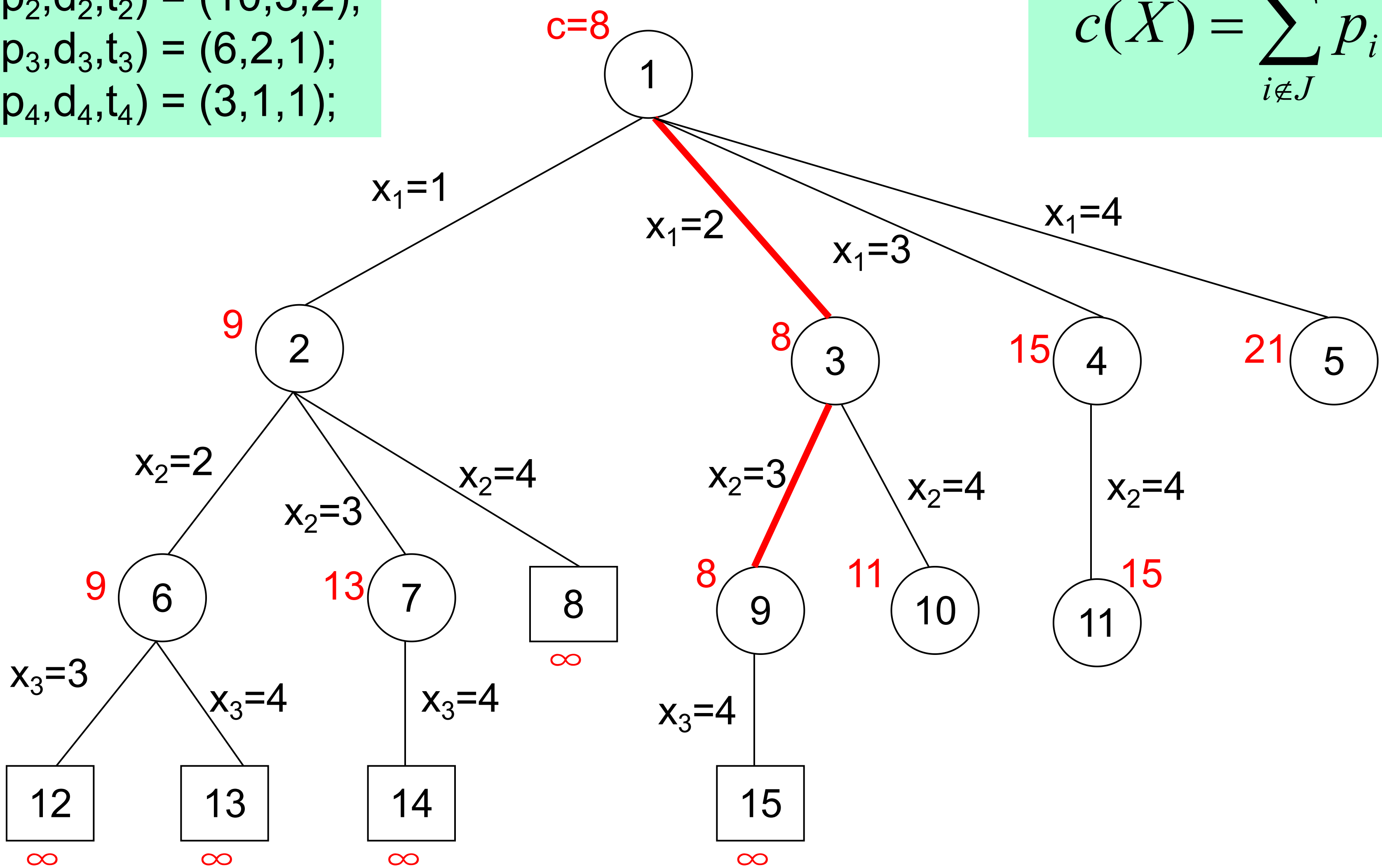
例：下图(c)，c(3)=8，c(2)=9，c(1)=8

下图(d)，c(2)=9，c(5)=13，c(6)=8， c(1)=8

c(1)=最优解J对应的罚款

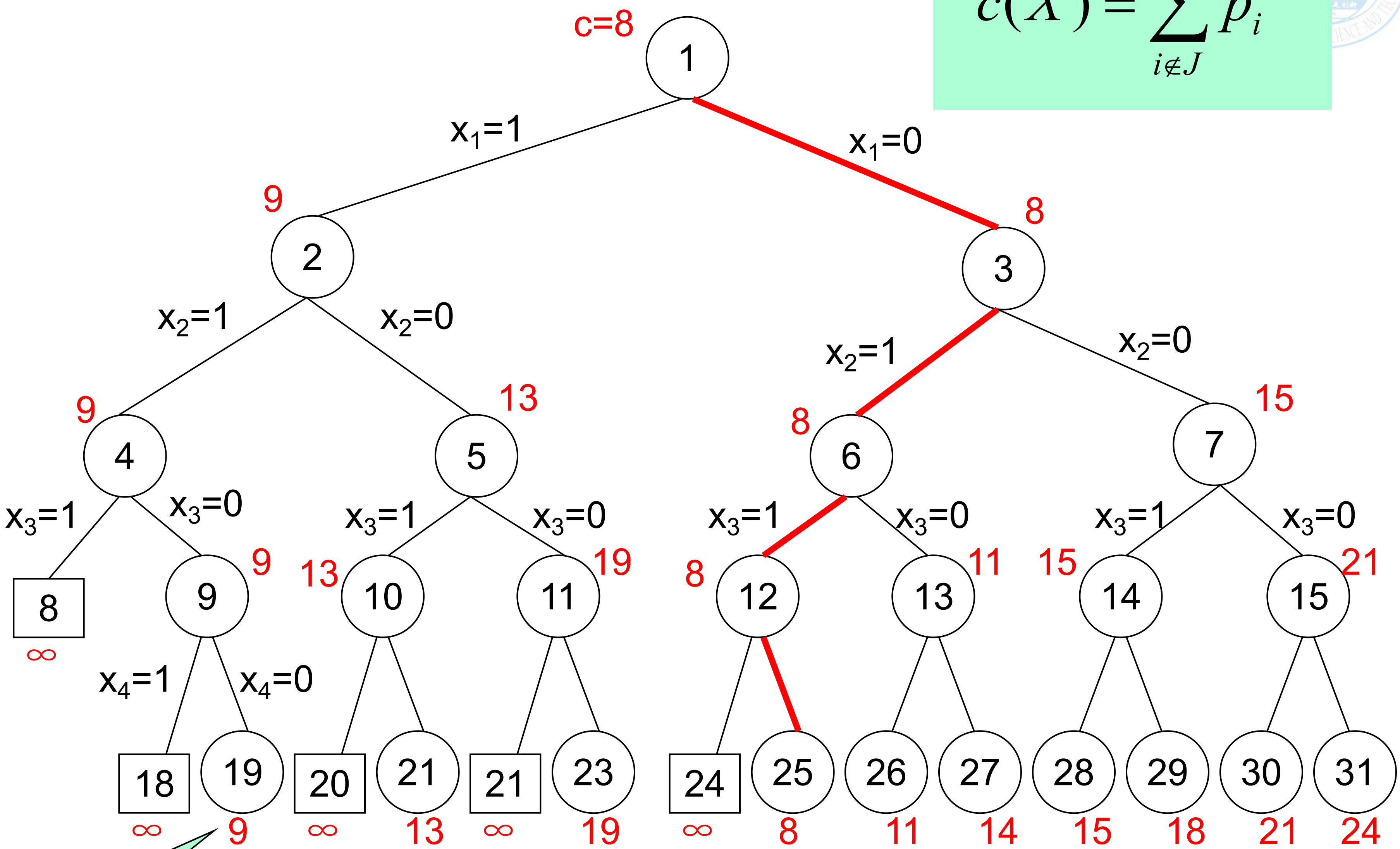
$(p_1,d_1,t_1) = (5,1,1)$;
$(p_2,d_2,t_2) = (10,3,2)$;
$(p_3,d_3,t_3) = (6,2,1)$;
$(p_4,d_4,t_4) = (3,1,1)$;

$$c(X) = \sum_{i \notin J} p_i$$



图(c) 采用大小可变的元组表示的状态空间树各结点的c值

$$c(X)=\sum_{i\notin J} p_i$$



图(d) 采用大小固定的元组表示的状态空间树各结点的c值

罚款值

成本估计函数 $\hat{c}(\bullet)$ 的定义

设S_x是考察结点X时，已计入J中的作业的集合。

令 $m = \max\{i \mid i \in S_x\}$，

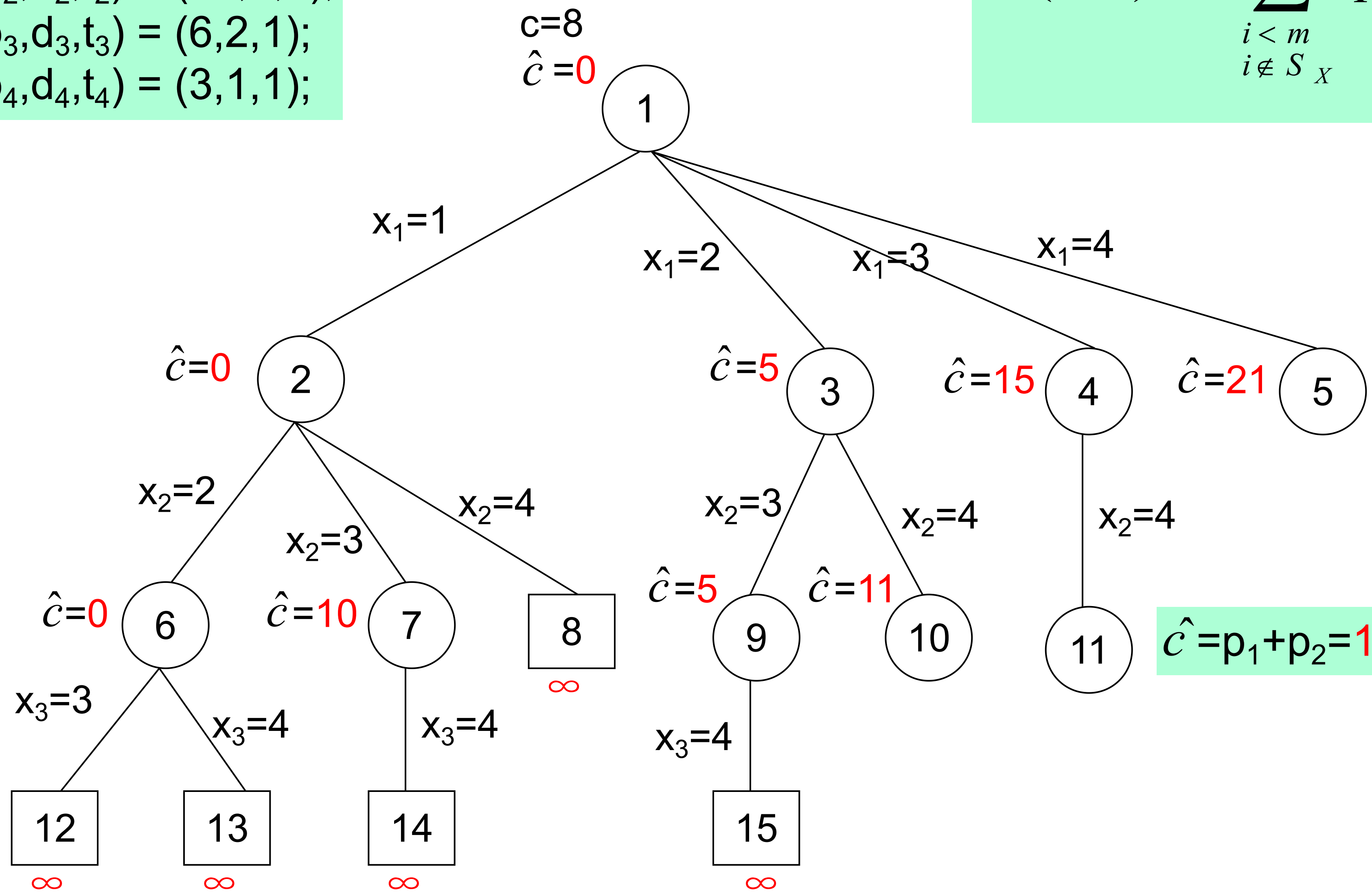
$$\hat{c}(X) = \sum_{\substack{i<m \\ i \notin S_X}} p_i$$

即 $\hat{c}(X)$ 代表已经被考虑过但没有被计入J中的作业的罚款合计。这是已确定的罚款数, 因此 $\hat{c}(X) \le c(X)$ ，是$\hat{c}(X)$ 可以作为c(X)的估计值(下界)。

例：见图

$(p_1,d_1,t_1) = (5,1,1);$
$(p_2,d_2,t_2) = (10,3,2);$
$(p_3,d_3,t_3) = (6,2,1);$
$(p_4,d_4,t_4) = (3,1,1);$

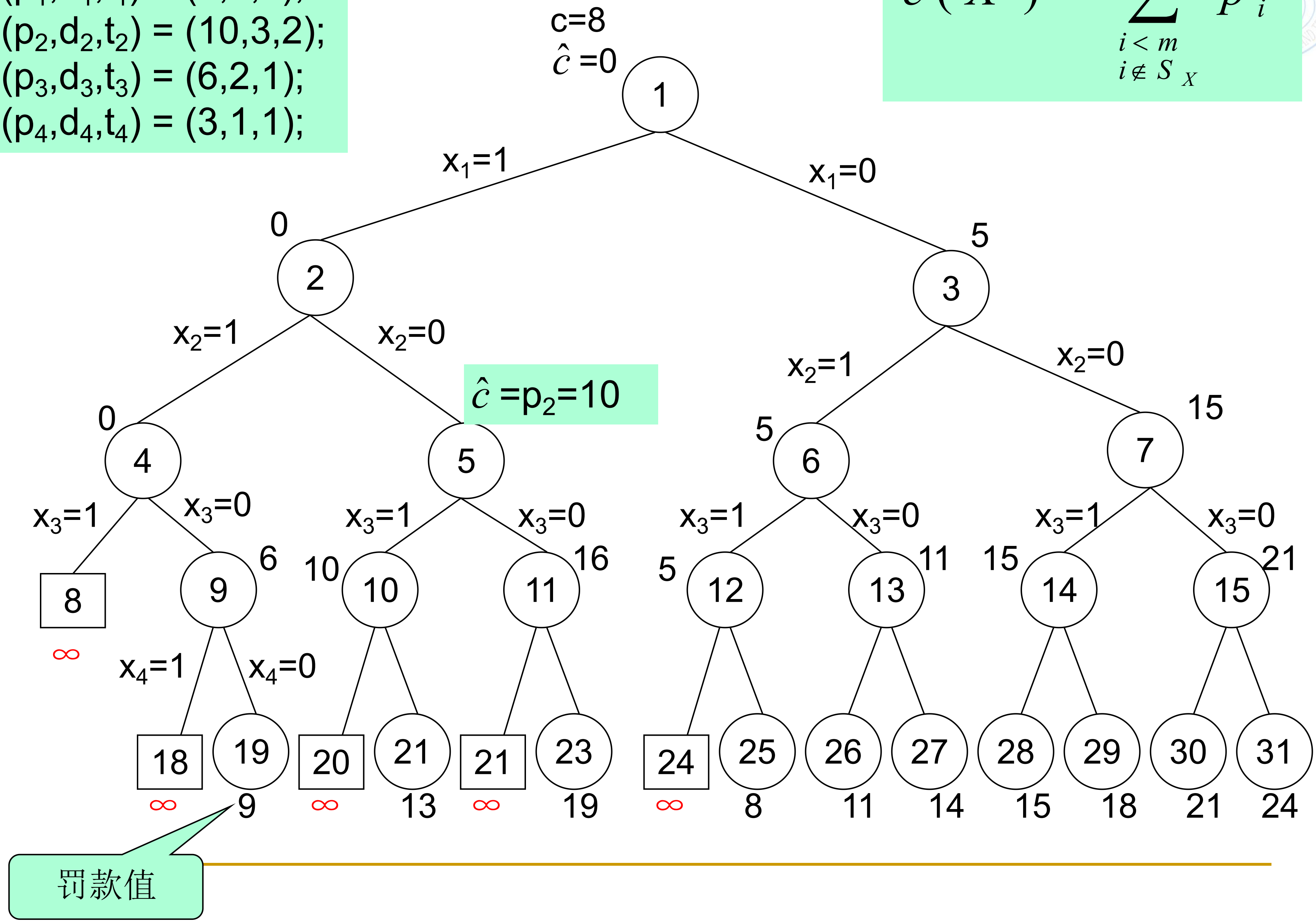
$$\hat{c}(X) = \sum_{\substack{i<m \\ i \notin S_X}} p_i$$



$\hat{c}=p_1+p_2=15$

$(p_1,d_1,t_1) = (5,1,1)$;
$(p_2,d_2,t_2) = (10,3,2)$;
$(p_3,d_3,t_3) = (6,2,1)$;
$(p_4,d_4,t_4) = (3,1,1)$;

$$\hat{c}(X) = \sum_{\substack{i<m \\ i \notin S_X}} p_i$$



成本估计函数上界的定义

$$U(X)=\sum_{i\notin S_X} p_i$$

U(X)是c(X)的一个“简单”上界，代表目前没有被计入到J中的作业的罚款合计——可能的最多罚款，因此是目前罚款的上限。

$(p_1,d_1,t_1) = (5,1,1);$
$(p_2,d_2,t_2) = (10,3,2);$
$(p_3,d_3,t_3) = (6,2,1);$
$(p_4,d_4,t_4) = (3,1,1);$

$$\hat{c}(X) = \sum_{\substack{i<m \\ i \notin S_X}} p_i \qquad u(1) = \sum_{1 \le i \le n} p_i$$

$$u(X) = \sum_{i \notin S_X} p_i \qquad U = \min(u(X))$$

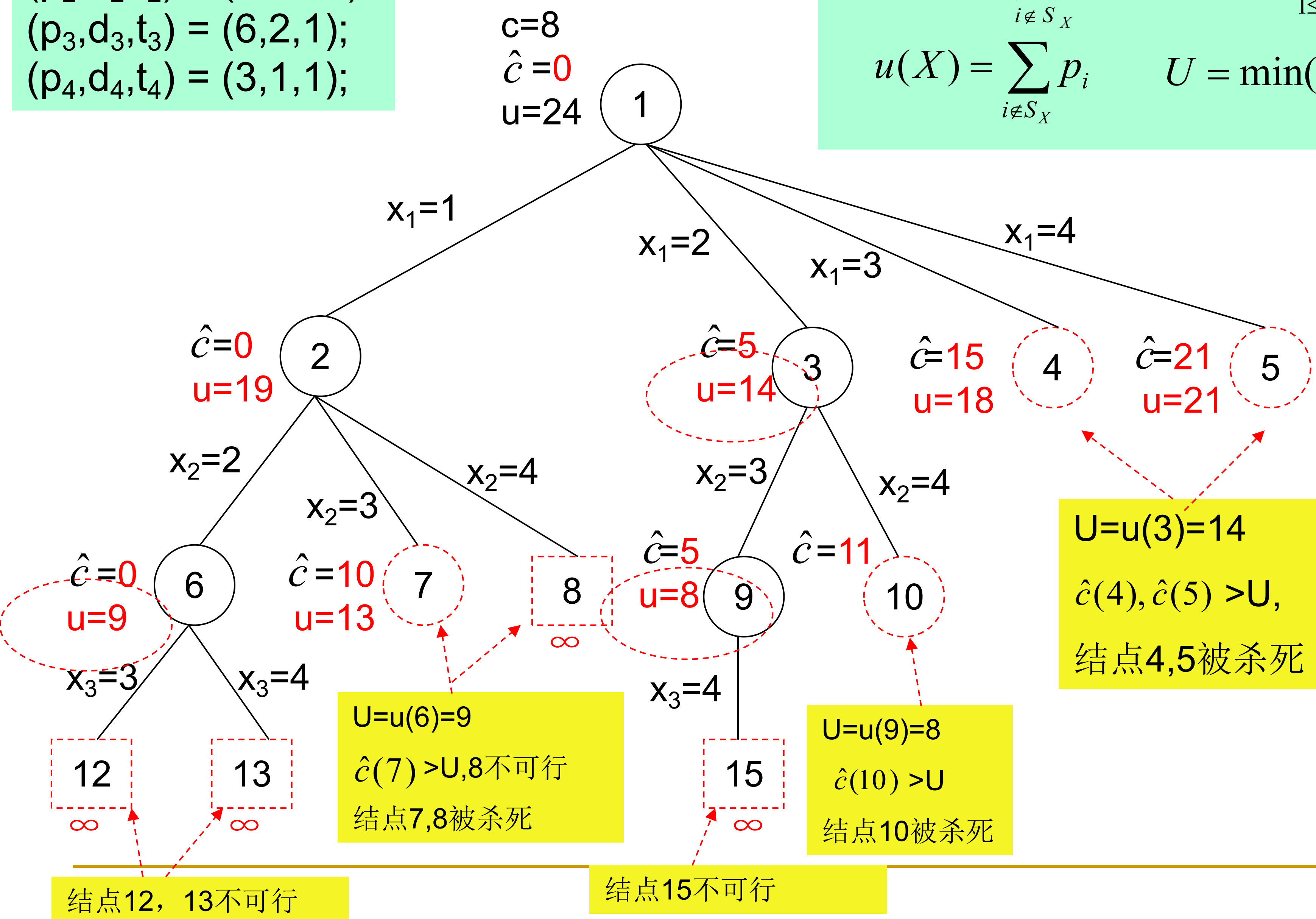


图9.7　采用大小可变的元组表示的状态空间树的成本估计值