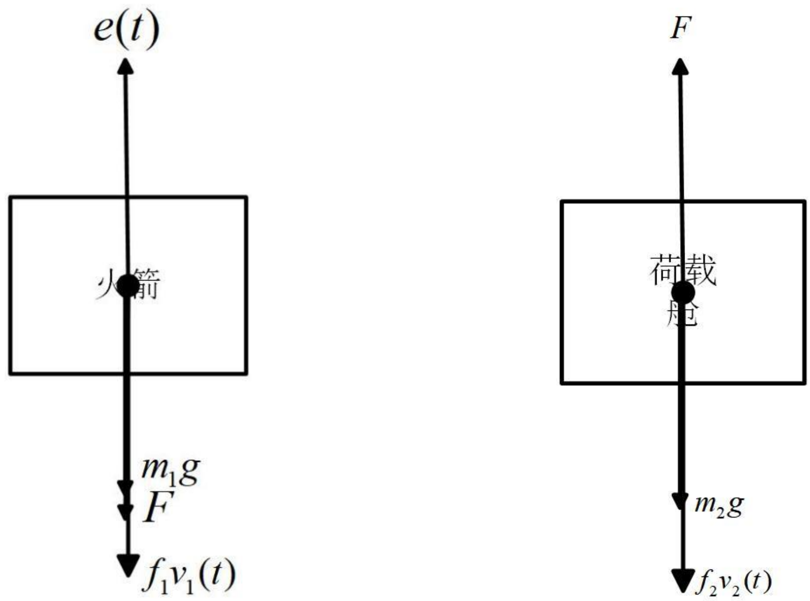
# 第二周第一次作业

2-1.1

解：

首先对火箭和荷载舱进行受力分析，画出示意图：

设火箭速度为$v_1(t)$，荷载舱速度为$v_2(t)$，$F$为弹簧弹力。




对火箭有如下关系式成立：

$$e(t)-m_1g-F-f_1v_1(t)=m_1\frac{dv_1(t)}{dt} \qquad (1)$$

对荷载舱有如下关系式成立：

$$F-m_2g-f_2v_2(t)=m_2\frac{dv_2(t)}{dt} \qquad (2)$$

另外，对于火箭和荷载舱之间的弹簧，还有

$$\begin{cases} F=kx \\ x=\int_{-\infty}^{t}v_1(\tau)-v_2(\tau)d\tau \end{cases} \qquad (3)$$

将（3）带入（2）可得

$$k\int_{-\infty}^{t}v_1(\tau)-v_2(\tau)d\tau-m_2g-f_2v_2(t)=m_2\frac{dv_2(t)}{dt}$$

即 $$v_1(t)=v_2(t)+\frac{f_2}{k}\cdot\frac{dv_2(t)}{dt}+\frac{m_2}{k}\cdot\frac{d^2v_2(t)}{dt^2} \qquad (4)$$

将（4）带入（1）可得

$$\frac{m_1m_2}{k}\cdot\frac{d^3v_2(t)}{dt^3}+\frac{m_1f_2+m_2f_1}{k}\cdot\frac{d^2v_2(t)}{dt^2}+(m_1-m_2+\frac{f_1f_2}{k})\cdot\frac{dv_2(t)}{dt}+$$
$$(f_1+f_2)v_2(t)+m_1g=e(t)$$

如果不考虑火箭和荷载舱的重力，则上式变为：

$$\frac{m_1m_2}{k}\cdot\frac{d^3v_2(t)}{dt^3}+\frac{m_1f_2+m_2f_1}{k}\cdot\frac{d^2v_2(t)}{dt^2}+(m_1-m_2+\frac{f_1f_2}{k})\cdot\frac{dv_2(t)}{dt}+$$
$$(f_1+f_2)v_2(t)=e(t)$$

也算对。

2-1.2

解：

（1）$t=0_-$时，电路已达到稳态，可知回路中没有电流通过，所以$i(0_-)=0\mathrm{A}$, 回路电压全部施加在电容两端，电感两端电压为 0，所以$i'(0_-)=0\mathrm{A/s}$ ；当开关由“1”转至“2”，因电感电流不发生突变，所以$i(0_+)=0\mathrm{A}$，电容两端电压仍为 10V，可知电感两端电压为 10V，所以$i'(0_+)=10\mathrm{A/s}$。

（2）系统的微分方程为：

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau+L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=e(t) \qquad (1)$$

已知$\mathrm{C}=1\mathrm{F}$，$\mathrm{L}=1\mathrm{H}$，$\mathrm{R}=1\Omega$，$e(t)=\delta(t)$。对（1）式求导可得

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{di(t)}{dt}+i(t)=\delta'(t) \qquad (2)$$

可以得出

$$h(t)=i(t)=e^{-\frac{t}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)u(t) \qquad (3)$$

由（2）式得，（2）式中$\delta(t),u(t)$的系数为 0，$\delta'(t)$的系数为 1，（2）式中含$\delta'(t)$的项只会在$h''(t)$中出现，$h''(t)$中含$\delta'(t)$的项为$e^{-\frac{t}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\delta'(t)=C_1\delta'(t) => C_1=1$;

（3）式中含$\delta(t)$的项在$h''(t)$、$h'(t)$中出现，$h''(t)$中含$\delta(t)$的项为

$e^{-\frac{t}{2}}(-\frac{\sqrt{3}}{2}C_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t)\delta(t)-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\delta(t)=$

$(\frac{\sqrt{3}}{2}C_2-\frac{1}{2}C_1)\delta(t)$，$h'(t)$中含$\delta(t)$的项为$e^{-\frac{t}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\delta(t)$。将这两部分系数相加可得：

（$\frac{\sqrt{3}}{2}C_2-\frac{1}{2}C_1+C_1)\delta(t)=0$,解得$C_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$。

最终可得$h(t)=e^{-\frac{t}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)u(t)$。

（3）

根据(1)式可知，当$t\geq 0_+$时，系统微分方程为：

$$\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau+\frac{di(t)}{dt}+i(t)=20u(t)$$

求导可得

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{di(t)}{dt}+i(t)=20\delta(t) \qquad (4)$$

系统全响应为:$i(t)=[e^{-\frac{t}{2}}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)+y_p(t)]u(t)$，$y_p(t)=C$为方程（4）的特解，带入（4）可得$C=0$。

由$\begin{cases}i(0_+)=0\\i'(0_+)=10\end{cases}$，可以求得$\begin{cases}A=0\\B=\frac{20}{\sqrt{3}}\end{cases}$。

完全响应为$i(t)=\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}tu(t)$;

自由响应$i_h(t)=\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}tu(t)$，强迫相应$i_p(t)=0$;

系统零状态响应$i_{zs}(t)=h(t)*e(t)=\frac{40}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}tu(t)$，易知零输入响应为

$i(t)-i_{zs}(t)=-\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}tu(t)$。

本题中激励只引起自由响应。一般而言，激励还会引起强迫响应。注意：零输入响应是自由响应的一部分；强迫响应属于零状态响应，零状态响应中除强迫响应外的部分贡献给自由响应。