第七周第一次作业答案

7-1.1

解：（1）由欧拉公式可知，

$$cos\ (n\omega_0+\Phi)=\frac{1}{2}[e^{j(n\omega_0+\Phi)}+e^{-j(n\omega_0+\Phi)}]$$

$$x(n)=Ar^n\cos\ (n\omega_0+\Phi)u(n)\ =\frac{1}{2}Ar^n[e^{jn\omega_0}e^{j\Phi}+e^{-jn\omega_0}e^{-j\Phi}]u(n)$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}A[(re^{j\omega_0}\cdot z^{-1})^n e^{j\Phi}+(re^{j\omega_0}\cdot z^{-1})^n e^{-j\Phi}]$$

由比值法可知，

当$\left|\frac{\frac{1}{2}A\cdot(re^{j\omega_0}\cdot z^{-1})^{n+1}e^{j\Phi}}{\frac{1}{2}A\cdot(re^{j\omega_0}\cdot z^{-1})^{n}e^{j\Phi}}\right|<1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}A(re^{j\omega_0}\cdot z^{-1})^n e^{j\Phi}$收敛，

即$|re^{j\omega_0}\cdot z^{-1}|<1,|z|>|re^{j\omega_0}|$。

当$\left|\frac{\frac{1}{2}A\cdot(re^{-j\omega_0}\cdot z^{-1})^{n+1}e^{-j\Phi}}{\frac{1}{2}A\cdot(re^{-j\omega_0}\cdot z^{-1})^{n}e^{-j\Phi}}\right|<1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}A(re^{-j\omega_0}\cdot z^{-1})^n e^{-j\Phi}$收敛，

即$|re^{j\omega_0}\cdot z^{-1}|<1,|z|>|re^{-j\omega_0}|$。

$|e^{j\omega_0}|=|e^{-j\omega_0}|=1$，故$|z|>r$时，$X(z)$收敛。

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}Ae^{j\Phi}\cdot(re^{j\omega_0}\cdot z^{-1})^n=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}Ae^{j\Phi}\cdot\frac{1-(re^{j\omega_0}\cdot z^{-1})^k}{1-re^{j\omega_0}\cdot z^{-1}}$，

$\left|re^{j\omega_0}\cdot z^{-1}\right|<1$，因此$\lim_{k\to\infty}(re^{j\omega_0}\cdot z^{-1})^k=0$，

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}Ae^{j\Phi}\cdot(re^{j\omega_0}\cdot z^{-1})^n=\frac{1}{2}Ae^{j\Phi}\cdot\frac{1}{1-re^{j\omega_0}\cdot z^{-1}}$，

同理可得，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}Ae^{-j\Phi}\cdot(re^{-j\omega_0}\cdot z^{-1})^n=\frac{1}{2}Ae^{-j\Phi}\cdot\frac{1}{1-re^{-j\omega_0}\cdot z^{-1}}$，

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}A[(re^{j\omega_0}\cdot z^{-1})^n e^{j\Phi}+(re^{j\omega_0}\cdot z^{-1})^n e^{-j\Phi}]$$

$$=\frac{1}{2}Ae^{j\Phi}\cdot\frac{1}{1-re^{j\omega_0}\cdot z^{-1}}+\frac{1}{2}Ae^{-j\Phi}\cdot\frac{1}{1-re^{-j\omega_0}\cdot z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{2}A\cdot(\frac{ze^{j\Phi}}{z-re^{j\omega_0}}+\frac{ze^{-j\Phi}}{z-re^{-j\omega_0}})$$

$$= A \cdot \frac{z^2 \cdot \cos(\Phi) - z \cdot r \cdot \cos(\omega_0 - \Phi)}{z^2 - 2z \cdot r \cdot \cos(\omega_0) + r^2}, |z| > r.$$

当$z^2 \cdot \cos(\Phi) - z \cdot r \cdot \cos(\omega_0 - \Phi) = 0$ 时, $z \cdot \left(z \cdot \cos(\Phi) - r \cdot \cos(\omega_0 - \Phi)\right) = 0$,

若$\cos(\Phi) \neq 0$ 且 $\cos(\omega_0 - \Phi) \neq 0$，有两个零点$z_1 = 0, z_2 = \frac{r \cdot \cos(\omega_0 - \Phi)}{\cos(\Phi)}$

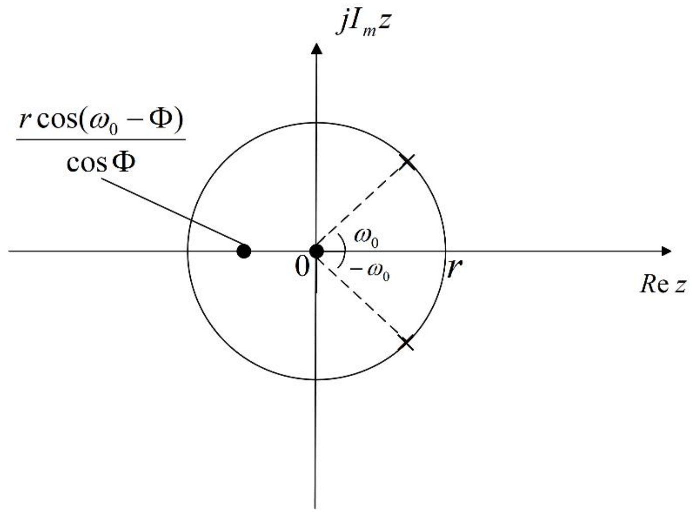
否则，只有一个零点$z = 0$。

当$z^2 - 2z \cdot r \cdot \cos(\omega_0) + r^2 = 0$ 时，$\left(z - r \cdot \cos(\omega_0)\right)^2 = r^2 \cdot \cos^2(\omega_0) - r^2$,

若 $\cos(\omega_0) = 1$，则只有一个极点$p = r$,

否 则 ， 有 两 个 极 点 $p_1 = r\left(\cos(\omega_0) + j\sqrt{1 - \cos^2 w_0}\right), p_2 = r(\cos(\omega_0) - j\sqrt{1 - \cos^2(\omega_0)})$

$X(z)$的收敛域为$|z| > r$，零极点如下图所示。



（2）

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n-N) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=N}^{\infty} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}$$

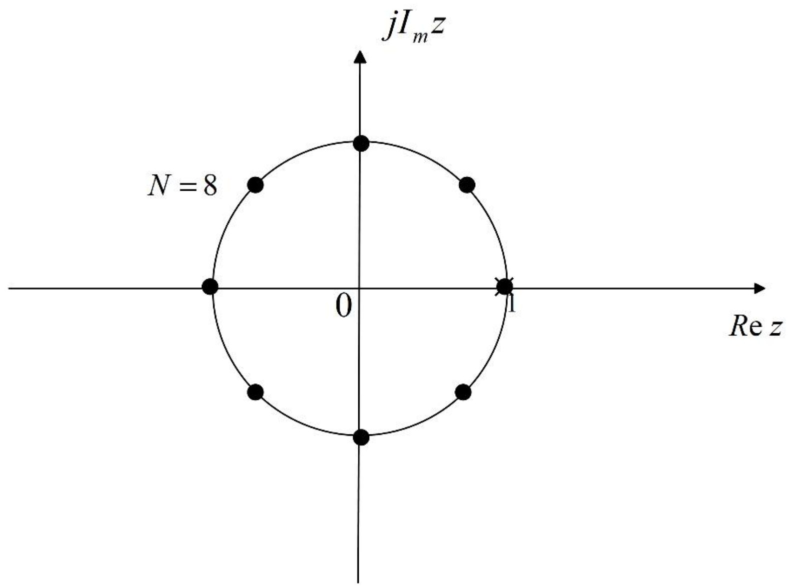
$$= \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, |z| > 0.$$

当 $1-z^{-N}=0$ 时，$z^N=1$，得$z_k=e^{\frac{j2\pi k}{N}}$，$k=0,1,\cdots N-1.$

有N个零点。

当 $1-z^{-1}=0$ 时，得$p=1$，只有一个极点。

零极点如下图所示。



7-1.2

解：已知$X(z)=\mathbf{Z}\,[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$，可得 $\mathbf{Z}\,[x(-n)]\ =\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)z^{-n}\xrightarrow{n=-n}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{n}\ =\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(z^{-1})^{-n}=X(z^{-1})$