第六周第二次作业答案

6-2.1

解：若要判断系统是否为线性系统，设激励$x_1(n)$、$x_2(n)$的响应分别为$y_1(n)$、$y_2(n)$，只需判断激励$ax_1(n)+bx_2(n)$的响应是否等于$ay_1(n)+by_2(n)$；

若要判断系统是否为时不变系统，只需判断激励$x(n-n_0)$的响应是否等于$y(n-n_0)$。

（1）　$y(n)=[x(n)]^2$

可知$y_1(n)=[x_1(n)]^2, y_2(n)=[x_2(n)]^2$, 激励$ax_1(n)+bx_2(n)$的响应为$[ax_1(n)+bx_2(n)]^2 \neq ay_1(n)+by_2(n)$，故该系统是非线性的；

激励$x(n-n_0)$的响应为$[x(n-n_0)]^2=y(n-n_0)$，故该系统是时不变的。

（2）　$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$

可知$y_1(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x_1(m)$，$y_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x_2(m)$，激励$ax_1(n)+bx_2(n)$的响应为$\sum_{m=-\infty}^{n} ax_1(m)+bx_2(m)=ay_1(n)+by_2(n)$，故该系统是线性的；

激励$x(n-n_0)$的响应为$\sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x(m)=y(n-n_0)$，故该系统是时不变的。

6-2.2

解：

设图中套有圆盘的木桩为a，中间的木桩为b，右边的木桩为c。可知a上的圆盘移动到另一木桩上，并保持原始的上下相对位置不变，需要传递$y(n)$次，具体做法为：

将上面的$n-1$个盘子移到b上，需移动$y(n-1)$次，最后将底部最大的盘子移到c上，需移动 1 次，接下来只需要将b上的$n-1$个盘子移到c上，需移动$y(n-1)$次，因此该系统对应的差分方程为

$$y(n)=y(n-1)+1+y(n-1)=2y(n-1)+1$$

解法一：

可知齐次方程$y(n)-2y(n-1)=0$的特征根为：

$$\lambda-2=0,\text{可得}\lambda=2$$

即通解为$y_h(n)=C\cdot 2^n$，C为常数；

设特解为$y_p(n)=D$，代入原式可得$D=-1$。

将$y(0)=0$带入可得$C=1$。

故解得$y(n)=(2^n-1)u(n)$。

解法二：迭代法

$$\begin{aligned} y(n)&=2y(n-1)+1\\ y(n)+1&=2[y(n-1)+1]\\ &=2^n[y(0)+1]\\ &=2^n\\ y(n)&=2^n-1,n\geq 0. \end{aligned}$$

故$y(n)=(2^n-1)u(n)$。