信号与系统

Lecture 14

第八章:离散时间系统的变换域分析（续）

§8.4 反z变换

§8.5 z变换与拉普拉斯变换的关系

复习

- z变换的定义
- z变换的收敛区
- 常用序列的z变换
- z变换的性质

本讲内容

- 反z变换的求解
- z变换与拉普拉斯变换的关系

收敛区域表征原函数时域分布特征

- 任何一个离散时间序列，只要存在z变换，其象函数收敛区一定分别是以下四种情况之一：

  (1) z变换收敛区为有限z平面，这对应时域中有限长时间函数或序列。

  (2) z变换收敛区为z平面中以原点为中心的某个圆的外部，这对应着时域中的右边时间函数或序列。

  (3) z变换收敛区为z平面中以原点为中心的某个圆的内部，这对应着时域中的左边时间函数或序列。

  (4) z变换收敛区为z平面中以原点为中心的内外半径有限的圆环，这对应着时域中的双边时间函数或序列。

- 前三种情况中，z平面的原点和无穷远点是否在收敛区内，根据时间序列在时域中的位置决定。

反z变换公式的推导

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

回忆得到z变换的过程：

$$f(t)\to f_s(t)=f(t)\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

$$\to f(nT)\ \to f(n)$$

$$LT\{f_s(t)\}=\int(\sum_n f(nT)\delta(t-nT))e^{-st}dt$$

$$z=e^{sT}$$

$$=\sum_n f(nT)e^{-snT}\to\sum_n f(n)z^{-n}$$

反z变换公式的推导

$$z = e^{sT}$$

$$\Rightarrow \; dz = T e^{sT} ds$$

$$\Rightarrow ds = \frac{1}{z} dz$$

$$e^{st} \rightarrow e^{snT} \rightarrow z^{n}$$

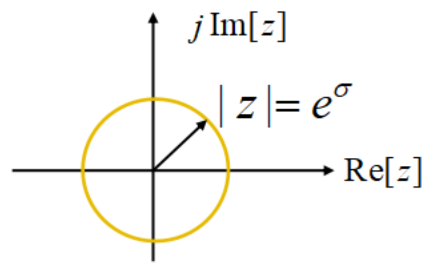
$$z = e^{s} = e^{\sigma + j\omega} = e^{\sigma} \cdot e^{j\omega}$$

$$\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \rightarrow \oint_{c}$$

$$f_s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

$$\boxed{f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c} F(z) z^{n-1} dz}$$

其中C为收敛区中以原点为中心的一个逆时针圆。



§8.4 反z变换

- 反z变换指由变换的象函数及收敛区求其原函数的过程。

反z变换解法

1. 幂级数展开法(长除法)
2. 部分分式展开法
3. 围线积分法(留数法)

幂级数展开法（长除法）

序列f(n)的z变换定义为z^{-1}的幂级数：

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n}$$

- 一般而言，若因果序列f(n)的单边z变换F(z)：

$$F(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=A_0+A_1z^{-1}+A_2z^{-2}+\cdots$$

$$f(0)=A_0, f(1)=A_1, f(2)=A_2,\cdots$$

- 一般只能得到序列f(n)的前几项。

例1 设有z变换式:

$$F(z)=\frac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}$$

试用幂级数展开法进行反z变换。这里的f(k)

(1)为有始序列;(2)为左边序列。

解:要用展开F(z)为幂级数的方法求f(k),为此将F(z)进行长除。

(1)将F(z)的分子、分母按降幂排列,进行长除。

(2)将F(z)的分子、分母按升幂排列,进行长除。

具体过程见例题8-8。

部分分式展开法

拉普拉斯反变换求解：

$$F(s) = B_0 + \frac{B_1}{s - v_1} + \frac{B_2}{s - v_2} + \frac{B_3}{(s - v_2)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = B_0\delta(t) + B_1 e^{v_1 t}u(t) + B_2 e^{v_2 t}u(t) + B_3 t e^{v_2 t}u(t)$$

回忆两个公式：

$$H(S) = \frac{1}{S - v} \Rightarrow h(k) = v^{k-1}u(k-1)$$

$$H(S) = \frac{S}{S - v} \Rightarrow h(k) = v^k u(k)$$

回忆序列与其双边z变换收敛区的对应关系：

$$f(k)=v^k u(k) \quad \Rightarrow \quad F(z)=\frac{z}{z-v}, |z|>|v|$$

$$f(k)=-v^k u(-k-1) \quad \Rightarrow \quad F(z)=\frac{z}{z-v}, |z|<|v|$$

右边序列 <-> 收敛区：圆外

左边序列 <-> 收敛区：圆内

部分分式展开法

当F(z)有n个单阶极点$v_1, v_2, \ldots, v_n$时，

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{B_0}{z} + \frac{B_1}{z - v_1} + \frac{B_2}{z - v_2} + \cdots + \frac{B_n}{z - v_n}$$

$$F(z) = B_0 + \frac{B_1 z}{z - v_1} + \frac{B_2 z}{z - v_2} + \cdots + \frac{B_n z}{z - v_n}$$

若已知z变换的收敛区，或已知f(k)的类型，就可求解反z变换。

例如，若已知f(k)是因果序列，则

$$f(k) = B_0 \delta(k) + B_1 {v_1}^k u(k) + B_2 {v_2}^k u(k) + \cdots + B_n {v_n}^k u(k)$$

例2 已知 $F(z)=\dfrac{3z^2-5z}{(z-1)(z-2)}$，收敛区

为 $1<|z|<2$，求原序列。

解：
$$\frac{F(z)}{z}=\frac{3z-5}{(z-1)(z-2)}=\frac{2}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

$$\therefore F(z)=\frac{2z}{z-1}+\frac{z}{z-2}$$

$|z|>1$ → 右边序列

$|z|<2$ → 左边序列

$$\therefore f(k)=f_r(k)+f_l(k)=2u(k)-2^k u(-k-1)$$

例2 已知 $F(z)=\dfrac{3z^2-5z}{(z-1)(z-2)}$ ，收敛区

为 $1<|z|<2$ ，求原序列。

解：

$$F(z)=3+\frac{2}{z-1}+\frac{2}{z-2}$$

$|z|>1$ ⬇ 右边序列

$|z|<2$ ⬇ 左边序列

$$\therefore f(k)=3\delta(k)+2u(k-1)+?$$

例3 求 $F(z)=\dfrac{z+2}{2z^2-7z+3}$ 的原函数。

解：$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z+2}{z(2z^2-7z+3)}=\frac{1}{2}\frac{z+2}{z(z-\frac{1}{2})(z-3)}=\frac{\frac{2}{3}}{z}+\frac{-1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{z-3}$$

$$\therefore F(z)=\frac{2}{3}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\frac{z}{z-3}$$

（1）若f(k)为右边序列，则

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)-(\frac{1}{2})^k u(k)+\frac{1}{3}3^k u(k)$$

其双边z变换收敛区为$|z|>3$

（2）若f(k)为左边序列

$$F(z)=\frac{2}{3}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\frac{z}{z-3}$$

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)+(\frac{1}{2})^k u(-k-1)-\frac{1}{3}3^k u(-k-1)$$

其收敛区为 $|z|<\frac{1}{2}$

（3）若f(k)为双边序列

$$F(z)=\frac{2}{3}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\frac{z}{z-3}$$

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)-(\frac{1}{2})^{k}u(k)-\frac{1}{3}3^{k}u(-k-1)$$

其收敛区为 $\frac{1}{2}<|z|<3$

留数法（围线积分法）

$$f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)z^{k-1}dz$$

$$=\sum_m [F(z)z^{k-1}\ \text{在C内的留数}\ ]$$

$$=\sum_m \mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_m}$$

式中Res表示极点的留数，z_m为$F(z)z^{k-1}$的极点。如果$F(z)z^{k-1}$在$z=z_m$处有s阶极点，此时它的留数由下式确定：

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_m}=\frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}[(z-z_m)^s F(z)z^{k-1}]_{z=z_m}$$

若只含有一阶极点，即s=1，此式简化为

$$\mathrm{Re}\,s[F(z)z^{k-1}]_{z=z_m}=[(z-z_m)F(z)z^{k-1}]_{z=z_m}$$

- 这种方法是借助于复变函数的留数定理，把反z变换的积分表示为围线C内包含的F(z) z^{n-1}的各极点的留数之和。在使用这种方法时要注意以下两点：

1、对于同一个表达式F(z)，当给定的收敛区不同时，所选择的积分围线也不相同，最后将得到不同的逆变换序列f(n)。

2、应当注意收敛域内围线所包围的极点情况，特别要关注对于不同的*n*值，在*z=0*处的极点可能具有不同的阶次。

例4 用留数法求解例1(1)：$F(z)=\dfrac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}$

解：

$$F(z)z^{k-1}=\frac{(2z^2-0.5z)}{z^2-0.5z-0.5}z^{k-1}=\frac{(2z-0.5)z^k}{(z-1)(z+0.5)}$$

若已知f(k)为因果序列，则当k<0时，f(k)＝0；
当k≥0时极点的情况：显然其极点在z=1和z=−0.5，那么被积函数在这两个极点处的留数分别为

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=1}=\frac{(2z-0.5)z^k}{z+0.5}\bigg|_{z=1}=1$$

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=0.5}=\frac{(2z-0.5)z^k}{z-1}\bigg|_{z=-0.5}=(-0.5)^k$$

所以 $f(k)=u(k)+(-0.5)^k u(k)$

此题若已知f(k)的收敛区为|z|<1，可知此序列为左边序列，此时不能简单地判断k<0时f(k)的取值。

k<0时极点的情况：这时除了在z=1和z=−0.5的两个极点外，在z=0处也会出现极点，且随着k值的不同，z=0处极点的阶数也不同，对留数的计算带来不便。

例如，若k=−1，则z=0处极点为一阶，其留数为：

$$\mathrm{Re}\, s[F(z)z^{-2}]_{z=0} = z\left.\frac{(2z-0.5)z^{-2}}{(z-1)(z+0.5)}\right|_{z=0} = 1$$

例如，若k=−2，则z=0处极点为二阶，其留数为：

$$\mathrm{Re}\, s[F(z)z^{-2}]_{z=0} = \frac{d}{dz}\left[z^2\frac{(2z-0.5)z^{-2}}{(z-1)(z+0.5)}\right]\Bigg|_{z=0} = -5$$

§8.5 z变换与拉普拉斯变换的关系

拉普拉斯变换和z变换是两种不同的变换，分别处理连续时间信号和离散时间信号。但是，在一定的条件下，两者也是相互联系的。

下面分别讨论：

1、s平面与z平面的对应关系；

2、由z变换得到拉氏变换、傅氏变换；

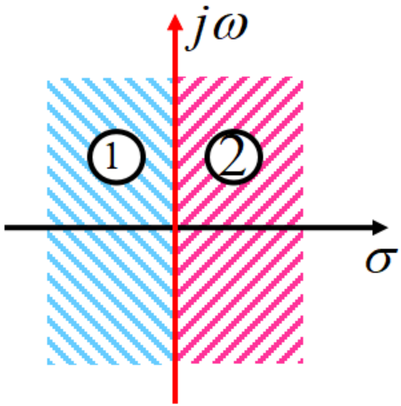
3、由拉氏变换得到z变换。

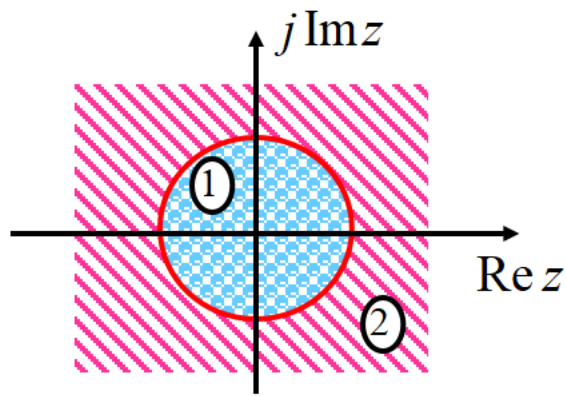
1、从s平面到z平面的映射

设 $s=\sigma+j\omega$　　$z=re^{j\theta}$

$$z=e^{sT}=e^{(\sigma+j\omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\omega T}$$

则 $|z|=r=e^{\sigma T}$　　$\theta=\omega T$





2、z变换 ⟶ 拉普拉斯变换

前面，我们借助理想抽样信号的单边拉氏变换引出了z变换，即

$$F(z)\big|_{z=e^{sT}} = F_{\delta}(s)$$

离散序列的Z变换

理想取样信号的L变换

$$F(z)\big|_{z=e^{j\omega T}} = F_{\delta}(j\omega)$$

理想取样信号的F变换

3、拉普拉斯变换 $\longrightarrow$ z变换

$$F(s) \longrightarrow f(t) \longrightarrow f_\delta(n) \longrightarrow F(z)$$

为导出两者的关系，现在由拉普拉斯反变换开始：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds \Rightarrow f(nT)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{snT}ds$$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{snT}ds\right)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\sum_{n=0}^{\infty}(e^{sT}z^{-1})^{n}ds$$

$$ROC:\left|e^{sT}z^{-1}\right|<1 \Rightarrow |z|>\left|e^{sT}\right|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(e^{sT}z^{-1})^n = \frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{sT}}$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\frac{F(s)}{1-e^{sT}z^{-1}}ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\frac{zF(s)}{z-e^{sT}}ds$$

$$F(z) = \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Re}\,s\left[\frac{zF(s)}{z-e^{sT}}\right]_{s=p_i}$$

连续信号的拉氏变换与z变换的关系

$$F(z)=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Res}\left[\frac{zF(s)}{z-e^{sT}}\right]_{s=p_i}$$

若$F(s)$只含一阶极点，则

$$F(s)=\sum_{i}\frac{A_i}{s-p_i}$$

$$F(z)=\sum_{i}\frac{zA_i}{z-e^{p_iT}}$$

小结

- 在进行反z变换时要注意收敛区的问题
- z变换与拉普拉斯变换的关系密切
  - 从s平面到z平面
  - 从L变换到z变换

课外作业

阅读:8.4—8.5；预习:8.6—8.7

作业:8.7(2) 用部分分式展开法

8.10