信号与系统

Lecture 16

第八章:离散时间系统的变换域分析（续）

§8.7 离散时间序列傅里叶变换

§8.8 离散时间系统的频响特性

复习

- 用z变换求解差分方程
- s平面与z平面的对应关系
- 离散时间系统的系统函数

本讲内容

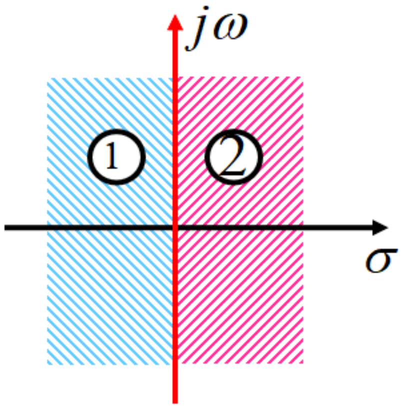
- 离散时间序列的傅里叶变换
- 离散时间系统的频率响应特性

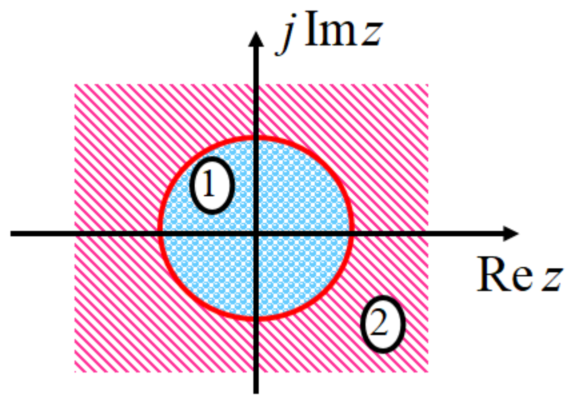
复习：从s平面到z平面的映射

设 $s=\sigma+j\omega \qquad z=re^{j\theta}$

$$z=e^{sT}=e^{(\sigma+j\omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\omega T}$$

则 $|z|=r=e^{\sigma T} \qquad \theta=\omega T$





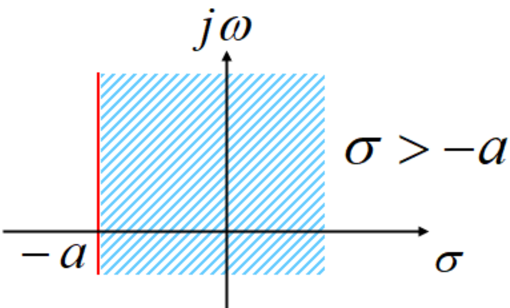
回顾

连续（因果）信号：

$$X(j\omega)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$s=\sigma+j\omega$$

$$X(s)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$



S平面

若其拉普拉斯变换的收敛区包含虚轴，则

$$X(j\omega)=X(s)\big|_{s=j\omega}$$

连续信号：

$$X(j\omega)$$

$$\downarrow s=\sigma+j\omega$$

$$X(s)$$

离散信号：

$$X(e^{j\omega})$$

$$z=e^{s}=e^{\sigma+j\omega}=e^{\sigma}\cdot e^{j\omega}=e^{j\omega}$$

$$X(s) \xrightarrow{z=e^{sT}=e^{s}} X(z)$$

若拉普拉斯变换的收敛区包含虚轴，则

$$X(j\omega)=X(s)\big|_{s=j\omega}$$

若z变换的收敛区包含单位圆，则

$$X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

§8.7 序列的傅里叶变换

对于离散时间信号的研究，傅里叶变换同样占有重要的地位。

本节讨论序列的傅里叶变换，主要内容有：

- 定义
- 基本性质

注意：序列的傅里叶变换（DTFT）不是离散傅里叶变换（DFT）。

序列的傅里叶变换(DTFT)

$$s = j\omega$$

若 $X(z)$的收敛区包含单位圆，令 $z = e^{sT} = e^{s} \overset{s=j\omega}{=} e^{j\omega}$，

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \overset{\Delta}{=} X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$ 称为x(n)的频谱密度函数，是 ω 的复函数。

$$X(e^{j\omega}) = \underbrace{\left|X(e^{j\omega})\right|}_{\text{幅度}} \underbrace{e^{j\varphi(\omega)}}_{\text{相位}} = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] + j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

特点：

(1) $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续函数。

(2) $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数，周期为 2π；

幅度谱以 $\omega = \pi$ 为对称轴。

结论：离散序列的频谱是连续的，且是周期的。

序列的傅里叶反变换(IDTFT)

若X(z)的收敛区包含单位圆，则

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{z=e^{j\omega}} X(z)z^{n-1}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_{z=e^{j\omega}} X(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)}d(e^{j\omega})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

———序列的傅里叶反变换

- 连续

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

物理意义：连续信号x(t)可以分解为无穷多个幅度无穷小的复正弦信号$e^{j\omega t}$之和。

- 离散

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

物理意义：离散序列x(n)可以分解为一系列幅度无穷小的复正弦信号$e^{j\omega n}$之和。

例1（例题8-16）求 $R_5(k)=u(k)-u(k-5)$ 的FT，并画出其幅频曲线。

解：$R(e^{j\omega})=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}[u(n)-u(n-5)]e^{-jn\omega}$

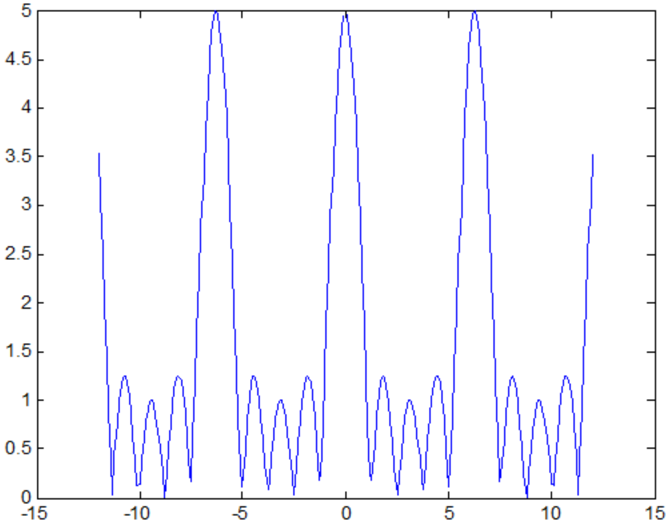
$$=\sum_{n=0}^{4}e^{-jn\omega}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

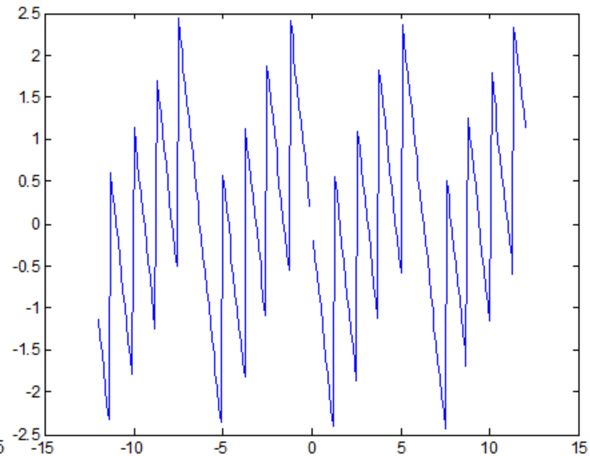
$$=\frac{e^{-j\frac{5}{2}\omega}(e^{j\frac{5}{2}\omega}-e^{-j\frac{5}{2}\omega})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}(e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega})}=\frac{\sin\frac{5}{2}\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}e^{-j2\omega}$$

$$R(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{5}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega} e^{-j2\omega}$$

Matlab program

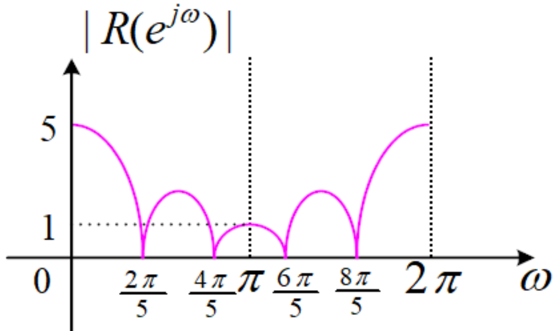
```
k=0;
for w=-12:0.1:12 %角频率
      k=k+1;
      wc(k)=w;%The value of the kth w
      X(k)=exp(-
j*2*w)*sin(2.5*w)/sin(0.5*w);
end
%the complex modulus (magnitude)
XA=abs(X);
plot(wc,XA);
%phase angles, in radians
XP=angle(X);
figure,plot(wc,XP);
```





$$\therefore |R(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin \frac{5}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega} \right|$$

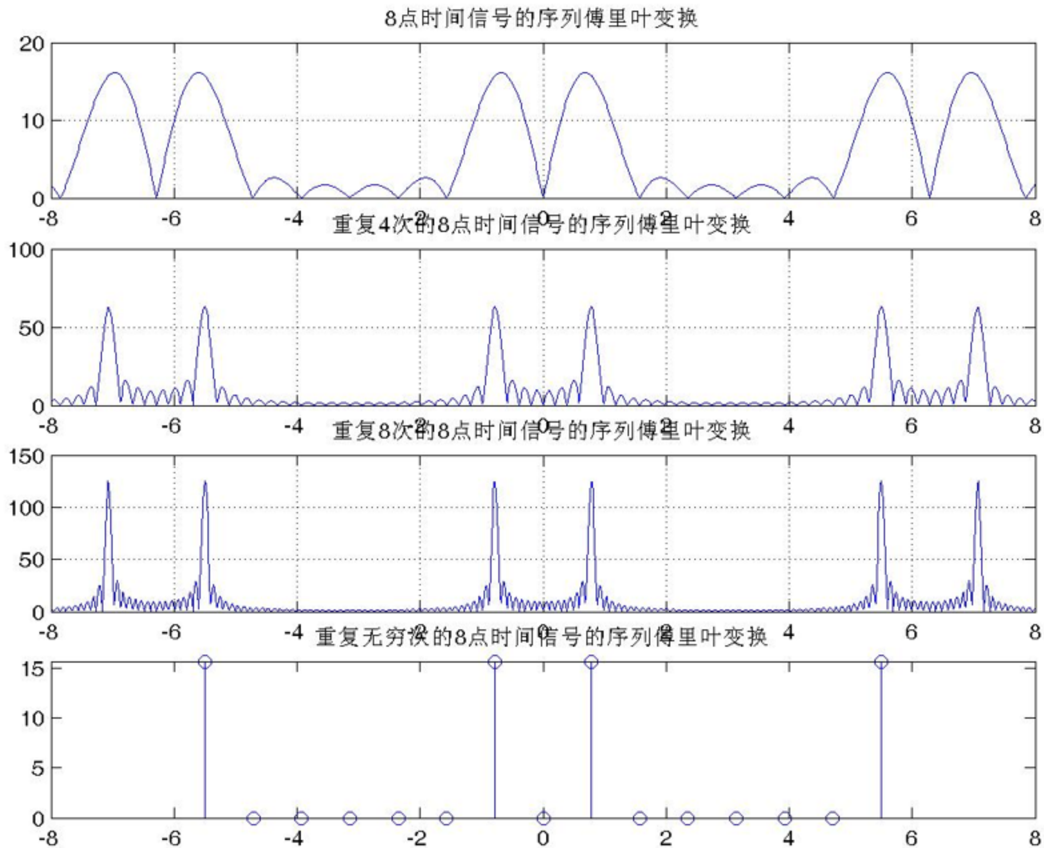
其幅度谱以 2π 为周期，且在 $[0,2\pi]$ 内关于$\omega = \pi$ 对称。



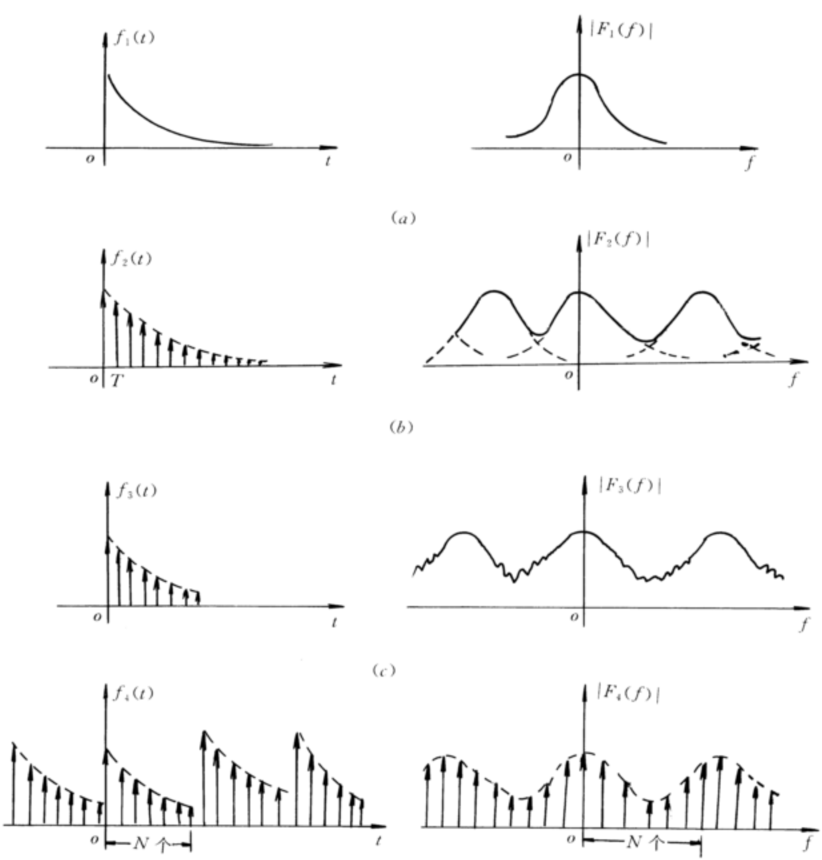
傅里叶变换的几种形式

以时间为自变量的信号 ⟷ 傅里叶变换对 ⟷ 以频率为自变量的频谱函数

时域信号	频谱	变换名称
非周期连续信号	连续频谱	傅里叶变换
周期性连续信号	离散频谱	傅里叶级数
离散信号	周期性连续频谱	序列的傅里叶变换
⇩	⇩	
周期性离散信号	周期性离散频谱	离散傅里叶变换



8点时间信号的序列傅里叶变换
重复4次的8点时间信号的序列傅里叶变换
重复8次的8点时间信号的序列傅里叶变换
重复无穷次的8点时间信号的序列傅里叶变换



离散傅里叶变换

补充：了解离散傅里叶变换

连续信号与频谱同时理想抽样，同时离散化，同步周期化

对于周期为T的连续时间函数，用于分解的复正弦正交函数集为

$$\{1, e^{\pm j\frac{2\pi}{T}t}, e^{\pm j2\times\frac{2\pi}{T}t}, e^{\pm j3\times\frac{2\pi}{T}t}, \cdots, e^{\pm jm\times\frac{2\pi}{T}t}, \cdots\}$$

对于周期为N的离散时间序列，用于分解的复正弦正交函数集为

$$\{1, e^{j\frac{2\pi}{N}k}, e^{j2\times\frac{2\pi}{N}k}, e^{j3\times\frac{2\pi}{N}k}, \cdots, e^{j(N-1)\times\frac{2\pi}{N}k}\}$$

$$F(m) = DFT\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$$

序列傅里叶变换的性质

1. 周期性

离散时间$f(k)$的离散时间傅里叶变换$F(e^{j\omega})$对 ω来说总是周期性的，其周期为2π。这是它与连续时间傅里叶变换的根本区别。

2. 线性

若 $f_1(k) \leftrightarrow F_1\left(e^{j\omega}\right), f_2(k) \leftrightarrow F_2\left(e^{j\omega}\right),$ 则有

$$af_1(k) + bf_2(k) \leftrightarrow aF_1(e^{j\omega}) + bF_2(e^{j\omega})$$

3. 奇偶性

若 $f(k) \leftrightarrow F(e^{j\omega})$,

$$F(e^{j\omega}) = \left|F(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)} = \mathrm{Re}[F(e^{j\omega})] + j\,\mathrm{Im}[F(e^{j\omega})]$$

$$\left|F(e^{j\omega})\right| = \left|F(e^{-j\omega})\right|$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$$

$$\mathrm{Re}[F(e^{j\omega})] = \mathrm{Re}[F(e^{-j\omega})]$$

$$\mathrm{Im}[F(e^{j\omega})] = -\mathrm{Im}[F(e^{-j\omega})]$$

$$F(e^{-j\omega}) = F^*(e^{j\omega})$$

4. 时移和频移

如果 $f(k) \leftrightarrow F(e^{j\omega})$，则

$$f(k-k_0) \leftrightarrow F(e^{j\omega})e^{-j\omega k_0}$$

$$e^{j\omega_0 k} f(k) \leftrightarrow F(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

5. 反褶

如果 $f(k) \leftrightarrow F(e^{j\omega})$，则

$$f(-k) \leftrightarrow F(e^{-j\omega})$$

6. 频域微分特性

如果 $f(k) \leftrightarrow F(e^{j\omega})$，则 $kf(k) \leftrightarrow j\dfrac{dF(e^{j\omega})}{d\omega}$

证明：$$F(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-j\omega k}$$

把上式两端对 ω 求微分，可得

$$\frac{dF(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-jk)f(k)e^{-j\omega k}$$

两端乘 j，即得。

7. 卷积定理

如果 $f_1(k) = F_1(e^{j\omega}), f_2(k) = F_2(e^{j\omega})$，则

$$f_1(k) * f_2(k) \leftrightarrow F_1(e^{j\omega}) \cdot F_2(e^{j\omega})$$

$$f_1(k) \cdot f_2(k) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(e^{j\omega}) * F_2(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} F_1(e^{j\Omega}) \cdot F_2(e^{j(\omega-\Omega)}) d\Omega$$

8. 帕塞瓦尔定理

与连续时间信号的情况一样，在离散序列的傅里叶变换中也有类似的帕塞瓦尔定理。 即

如果 $f(k) \leftrightarrow F(e^{j\omega})$，则

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f(k) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \left| F(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

§8.8 离散时间系统的频率响应特性

在连续时间系统中，系统的频响函数有如下几种定义方式：

$$H(j\omega)=\frac{Y_{zs}(j\omega)}{E(j\omega)}$$

$$h(t)\leftrightarrow H(j\omega)$$

$$H(s)\rightarrow H(j\omega)$$ （因果稳定系统）

系统的频响函数 $H(j\omega)$ 反映了系统在频率为 ω 的（复）正弦激励信号 $e^{j\omega t}$ 下的稳态响应。

连续时间信号对（复）正弦激励信号的稳态响应仍然是同频率的（复）正弦信号，只是模量和相位特性发生了变化，而 $H(j\omega)$ 正好反映了这种变化。

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow e^{j\omega t}H(j\omega)$$

我们还学习了：从频响曲线判断滤波器类型，
利用系统函数H(s)零极点分布粗略画出频响曲线。

一、离散系统的频率响应函数

类似地，离散系统频率响应也有多种定义：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y_{zs}(e^{j\omega})}{E(e^{j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$ （因果稳定系统）

可以验证： $e^{j\omega k} \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow e^{j\omega k} H(e^{j\omega})$

说明：

由前面的讨论我们知道，系统的频响$H(e^{j\omega})$是系统对复正弦序列$e^{j\omega k}$的影响。其中并没有考虑取样频率。

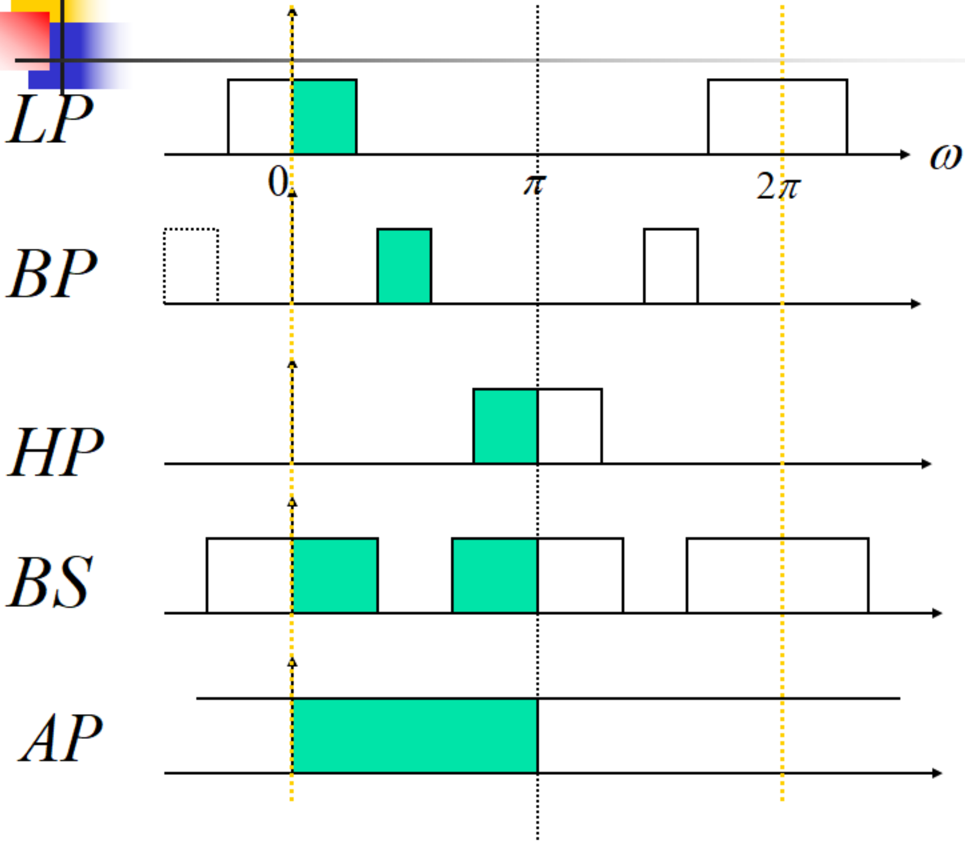
实际上，复正弦序列$e^{j\omega k}$是由正弦信号$e^{j\frac{\omega}{T}t}$按照间隔T取样得到，其实际频率是$\Omega=\dfrac{\omega}{T}$。将其代入频响函数中，得到$H(e^{j\Omega T})$。

$H(e^{j\omega}) \longrightarrow$ 归一化频响函数，用于不同取样频率的系统中，更具一般性。

$H(e^{j\Omega T}) \longrightarrow$ 与某取样频率下的实际系统相对应。

这两种频响函数频谱的区别只是在于频率坐标的刻度不同：

$$H(e^{j\omega}):[0,2\pi] \qquad H(e^{j\Omega T}):[0,\frac{2\pi}{T}]$$



数字滤波器

二、系统频率响应的几何确定法

连续时间系统频响的几何确定法：

$$H(s)=H_0\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \qquad H(j\omega)=H_0\frac{\prod_{i=1}^{m}(j\omega-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(j\omega-p_i)}$$

令 $j\omega-z_i=B_ie^{j\beta_i}$， $j\omega-p_i=A_ie^{j\alpha_i}$

—— 零点矢量 —— 极点矢量

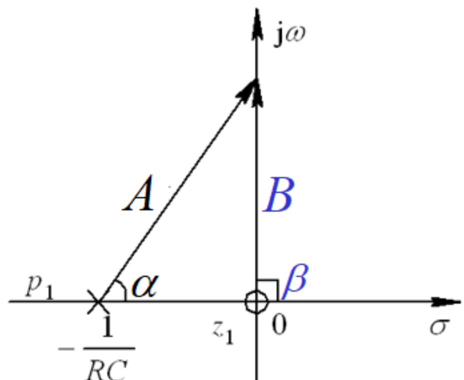
则得 $$H(j\omega)=H_0\frac{\prod_{i=1}^{m}B_ie^{j\beta_i}}{\prod_{i=1}^{n}A_ie^{j\alpha_i}}$$

$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{m} B_i}{\prod_{i=1}^{n} A_i}$$

幅频特性等于零点矢量模的乘积除以极点矢量模的乘积

$$\varphi(\omega) = \sum_i \beta_i - \sum_j \alpha_j$$

相频特性等于零点矢量相角和减去极点矢量相角和



离散时间系统频响的几何确定法:

$$H(z)=\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}=\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$e^{j\omega}-z_r=B_re^{j\beta_r}$$

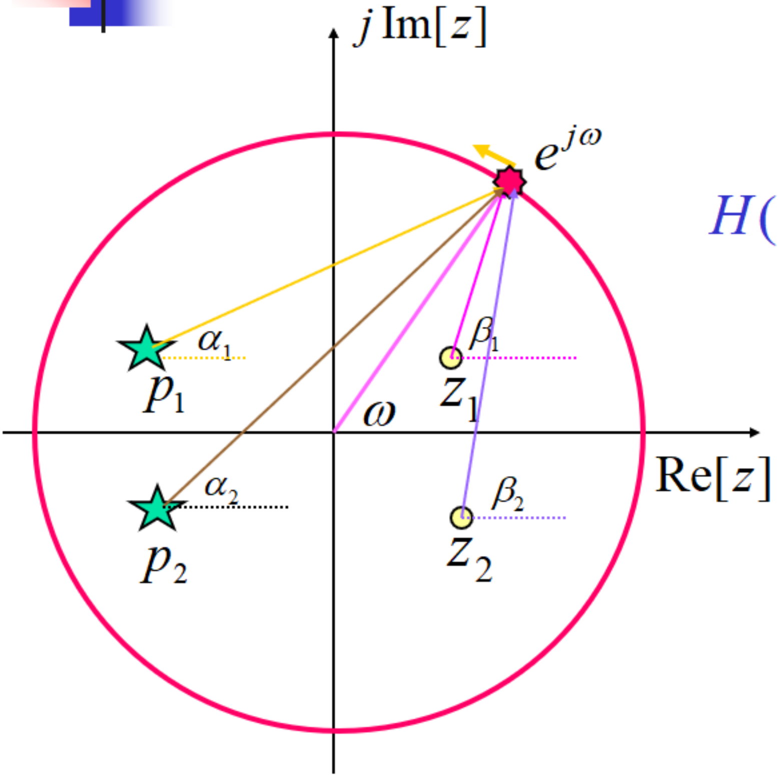
— 零点矢量

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{\prod_{r=1}^{M}B_r}{\prod_{k=1}^{N}A_k}$$

$$e^{j\omega}-p_k=A_ke^{j\alpha_k}$$

— 极点矢量

$$\phi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\beta_r-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k$$



$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\prod_{r=1}^{M} B_r}{\prod_{k=1}^{N} A_k}$$

$$\phi(\omega) = \sum_{r=1}^{M} \beta_r - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k$$

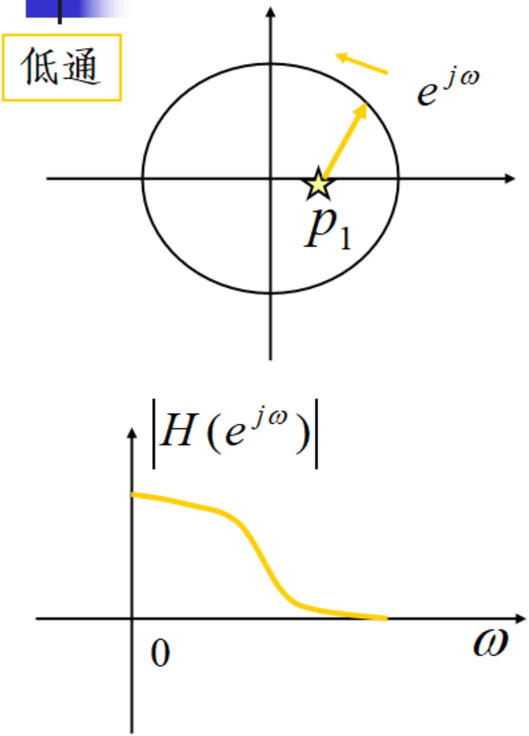
由几何法可以看出：

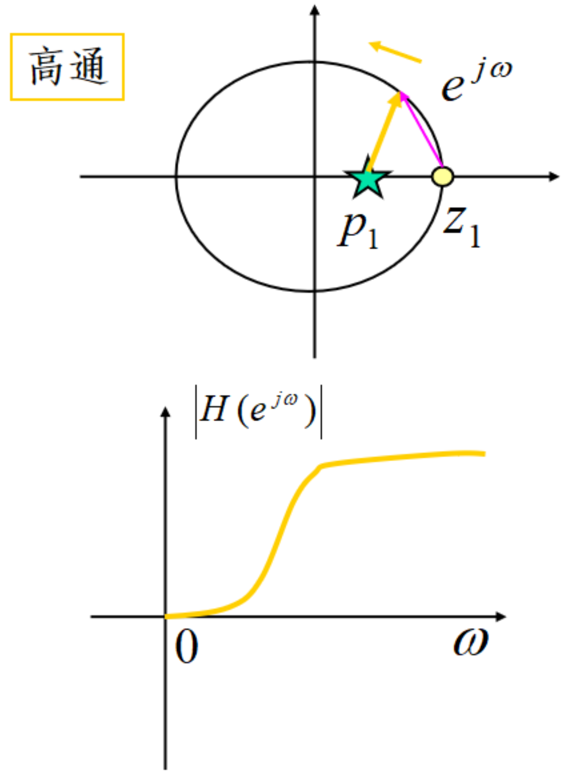
（1）z=0处的零极点对幅频特性 $\left|H(e^{j\omega})\right|$ 没有影响，只对相位有影响；

（2）当 $z=0$ 旋转某个极点 p_i 附近时，例如在同一半径上时，B_i 较短，则 $\left|H(e^{j\omega})\right|$ 在该点应当出现一个峰值，B_i 越短，p_i 附近越尖锐。若 p_i 落在单位圆上，则 $B_i=0$，则 p_i 处的峰值趋于无穷大。

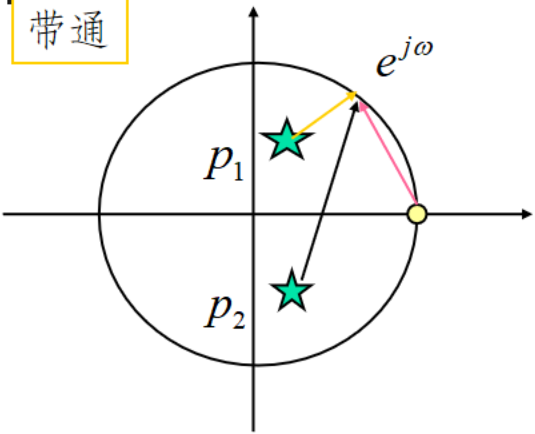
（3）对于零点则其作用与极点的作用正好相反。

典型滤波器的零极点分布

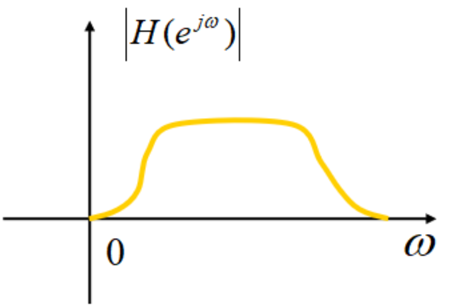




带通

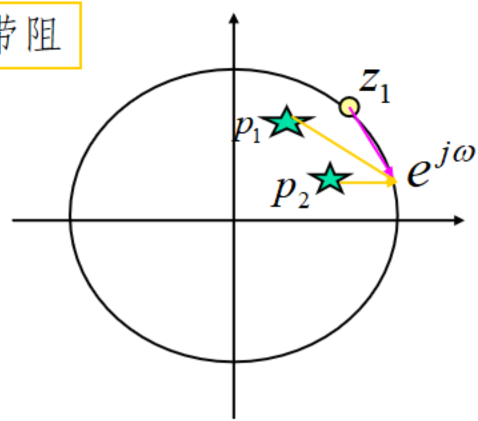


$e^{j\omega}$
p_1
p_2

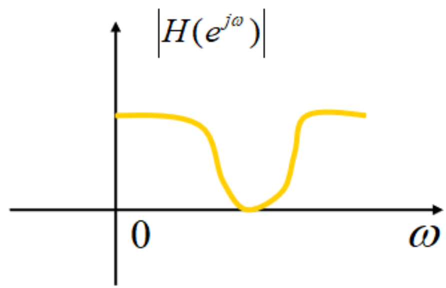


$|H(e^{j\omega})|$
0
ω

带阻

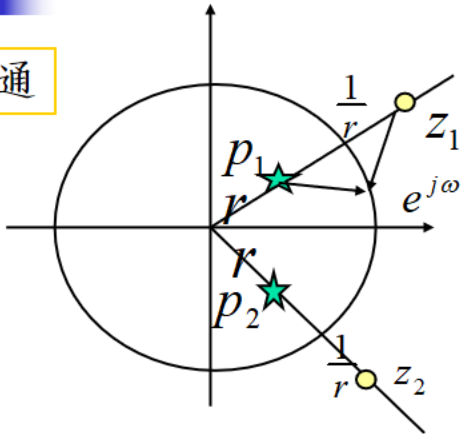


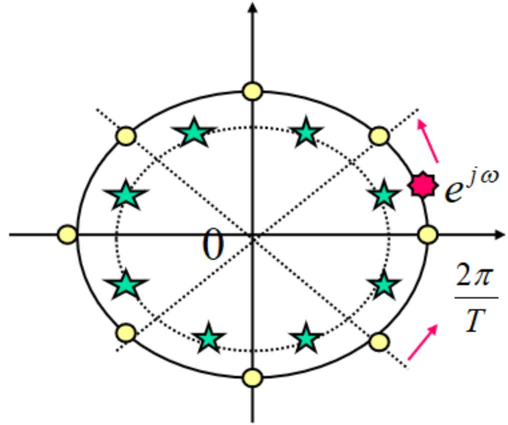
z_1
p_1
p_2
$e^{j\omega}$

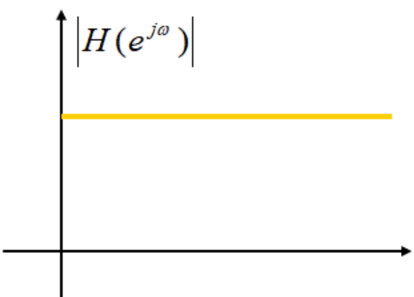


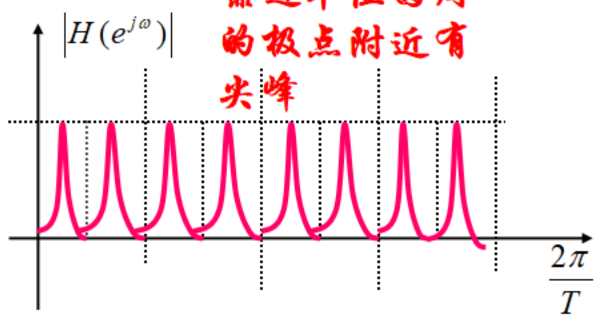
$|H(e^{j\omega})|$
0
ω

全通









靠近单位圆周的极点附近有尖峰

练习：

1、已知某因果离散时间系统的系统函数为

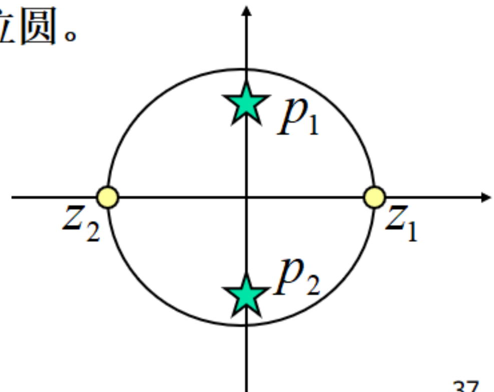
$$H(z) = \frac{z-1}{z-\frac{1}{2}}$$

粗略画出系统的幅频特性曲线。

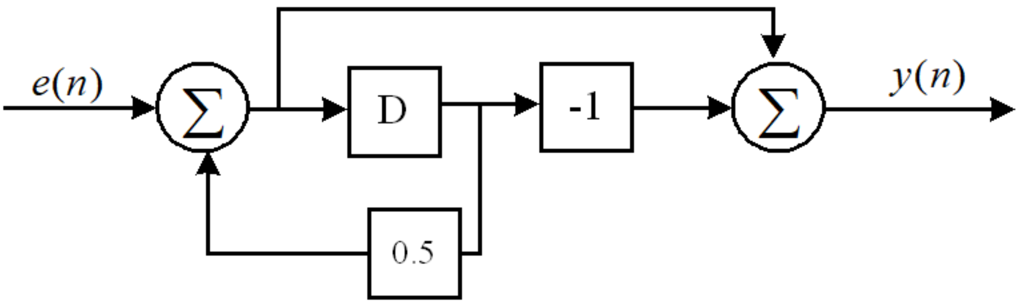
2、已知某因果离散时间系统的系统函数极零点分布如下：

其中极点在单位圆内且靠近单位圆。

粗略画出系统的幅频特性曲线。



3、某线性时不变离散因果系统的模拟框图如下图所示：



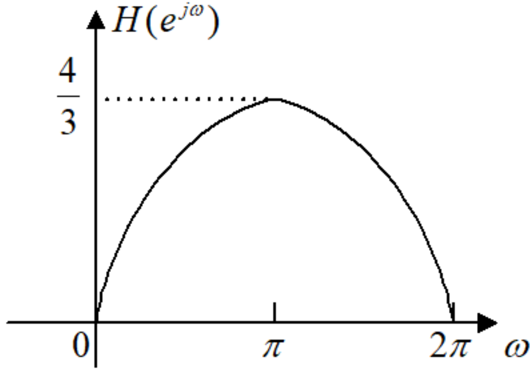
（1）写出描述该系统的差分方程，求系统函数；

（2）判定系统的稳定性。粗略画出系统的幅频特性曲线；

（3）若 $e(n)=\varepsilon(n)$，求系统的零状态响应。

答案：（1）$y(n+1)-\frac{1}{2}y(n)=e(n+1)-e(n)$，$H(z)=\dfrac{z-1}{z-\frac{1}{2}}$

（2）此为因果系统，极点在单位圆内，故系统稳定。幅频曲线如下所示：



（3）$Y_{zs}(z)=H(z)E(z)=\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}$ $\therefore y_{zs}(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\varepsilon(n)$

小结

(1) 序列的傅里叶变换是单位圆上的z变换。

(2) 系统的频率响应特性、应用。

作业：8.20，8.23（1）

第八章小结

(1) z变换、序列傅里叶变换

(2) z变换的定义与收敛区

(3) z变换的性质类似于其它变换。但时移特性，单、双边变换明显不同

(4) 反z变换与收敛区的对应关系

(5) 差分方程的z域分析方法

(6) 系统函数，应用

(7) 离散序列频谱的特点：连续性，周期性

(8) 离散系统的频响函数：定义，物理意义，特性曲线，应用