第八周第一次作业答案

8-1.1

解:

$$H(z)=\frac{9.5z}{(z-0.5)(10-z)}=\frac{z}{z-0.5}+\frac{-z}{z-10},$$

已知 $\mathscr{Z}[a^n u(n)]=\frac{z}{z-a}$, $|z|>|a|$

$\mathscr{Z}[a^n u(-n-1)]=\frac{-z}{z-a}, |z|<|a|$

所以当$|z|>10$时，可得$h(n)=\mathcal{Z}^{-1}[H(z)]=(0.5^n-10^n)u(n)$

当$n<0$时，$h(n)=0$，故该系统是因果的。

又 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|0.5^n-10^n|=\sum_{n=0}^{\infty}10^n-\sum_{n=0}^{\infty}0.5^n$

易知$\sum_{n=0}^{\infty}10^n=\infty$，因此$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|$无界，系统不稳定。

（也可根据因果系统的系统函数的极点分布来判断。）

当$0.5<|z|<10$时，可得$h(n)=0.5^n u(n)+10^n u(-n-1)$

当$n<0$时，$h(n)\neq 0$，故该系统是非因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}0.5^n+\sum_{n=-1}^{-\infty}10^n=2+\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{19}{9}$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|$有界，故该系统稳定。

8-1.2

解:

（1） $y(n)+y(n-1)=x(n)$

对上式进行 z 变换可得

$$Y(z)+z^{-1}Y(z)=X(z)$$

则$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1+z^{-1}}=\frac{z}{z+1}$， $|z|>1$，

易知$H(z)$的逆变换$h(n)=(-1)^{n}u(n)$

当$n<0$时，$h(n)=0$，此系统是因果系统，$H(z)$只有一个一阶极点在单位圆上，因此系统不稳定。

（2） 系统起始状态为零，则零输入响应为零。

其零状态响应$y_{zs}(z)=X(z)H(z)$，已知激励$x(n)=10u(n)$，则 $X(z)=\mathscr{Z}[X(n)]=\frac{10z}{z-1}$，$|z|>1$，故$Y_{zs}(z)=X(z)H(z)=\frac{10z}{z-1}\cdot\frac{z}{z+1}=\frac{5z}{z-1}+\frac{5z}{z+1}$，$|z|>1$。

可知 $y_{zs}(n)=5[1+(-1)^{n}]u(n)$，

系统的响应为 $y(n)=y_{zs}(n)=5[1+(-1)^{n}]u(n)$。

8-1.3

解：由图可知，$y(n)=x(n)+ay(n-1)$，

对上式进行z变换得 $Y(z)=X(z)+az^{-1}[Y(z)+2y(-1)]$。

可得系统函数 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$

当 $x(n)=u(n)$时，$X(z)=Z[x(n)]=\frac{z}{z-1},|z|>1$。

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{z-a}=\frac{\frac{a}{a-1}z}{z-a}+\frac{\frac{1}{1-a}z}{z-1}$$

$Z\left[\frac{a}{a-1}a^{n}u(n)\right]=\frac{\frac{a}{a-1}z}{z-a},|z|>a$，$Z\left[\frac{1}{1-a}u(n)\right]=\frac{\frac{1}{1-a}z}{z-1},|z|>1$。

故 $y(n)=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a-1}u(n)=0,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-a}u(n)=\frac{1}{1-a}.$$

故 $\frac{a^{n+1}}{a-1}u(n)$是瞬态响应，$\frac{1}{1-a}u(n)$是稳态响应。

当 $x(n)=e^{jn\omega}u(n)$时,$X(z)=\frac{z}{z-e^{j\omega}}$。

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{z-e^{j\omega}}\cdot\frac{z}{z-a}=\frac{\frac{a}{a-e^{j\omega}}z}{z-a}+\frac{\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}z}{z-e^{j\omega}}$$

$Z\left[\frac{a}{a-e^{j\omega}}a^n u(n)\right]=\frac{\frac{a}{a-e^{j\omega}}z}{z-a},|z|>a$,

$Z\left[\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}e^{jn\omega}u(n)\right]=\frac{\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}z}{z-e^{j\omega}},|z|>|e^{j\omega}|$

故 $y(n)=\frac{e^{j(n+1)\omega}-a^{n+1}}{e^{j\omega}-a}u(n)$。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a-e^{j\omega}}u(n)=0,\lim_{n\to\infty}\frac{e^{j(n+1)\omega}}{e^{j\omega}-a}u(n)=\frac{e^{j(n+1)\omega}}{e^{j\omega}-a}$$

故 $\frac{a^{n+1}}{a-e^{j\omega}}u(n)$是瞬态响应，$\frac{e^{j(n+1)\omega}}{e^{j\omega}-a}u(n)$是稳态响应。