工程数学基础

DR_CAN

2023 年 2 月 17 日

目录

第一章　特征值与特征向量

在数学中, 特别是线性代数中, 对于一个给定的线性变换 $\boldsymbol{A}$, 它的特征向量 $\boldsymbol{v}$ 经过这个线性变换的作用之后, 得到的新向量仍然与原来的 $\boldsymbol{v}$ 保持在同一条直线上, 但其长度或方向也许会改变, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{v}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 为标量，即特征向量的长度在该线性变换下缩放的比例，称为其特征值

1.1　线性变化

现有二维线性变化矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

以及一个向量

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

向量 $\boldsymbol{v_1}$ 通过 $\boldsymbol{A}$ 的线性变换，即

$$\boldsymbol{Av_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 \\ 4 \times 1 + (-2) \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

笛卡尔坐标系下 v_1 向量的 A 变化如图1.1所示

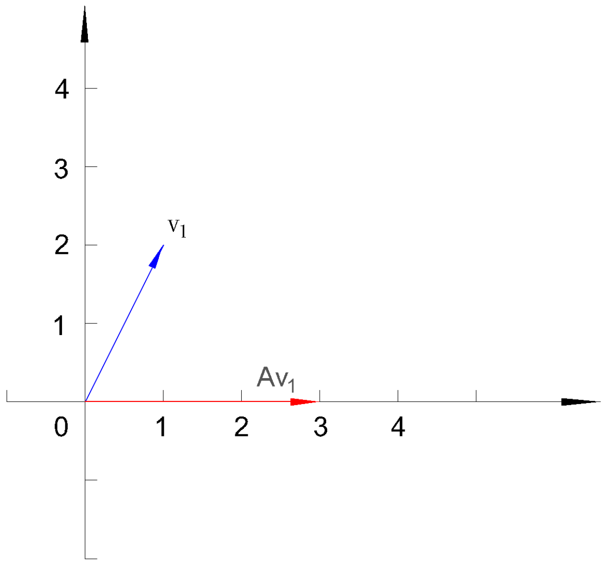


图 1.1: v_1 向量的 A 变化

通过图1.1可以看出 v_1 通过 A 的线性变化后大小和方向都发生了变化

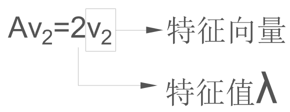
现有另一个向量

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同样的对 v_2 进行 A 线性变化得到

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 \\ 4 \times 1 + (-2) \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2v_2$$

Av_2 与 v_2 在一条直线上，根据定义可知 v_2 是矩阵 A 的特征向量，缩放比例 2 即是特征值 λ



1.2　求解特征值特征向量

求解矩阵的特征值和特征向量推导：

$$Av = \lambda v \tag{1.1}$$

$$Av - \lambda v = 0 \tag{1.2}$$

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{1.3}$$

此处 I 是一个单位矩阵

若式1.3有非零解则有

$$\left| A - \lambda I \right| = 0$$

通过上式即可求得特征值 λ，然后再将特征值带回式1.3中即可得到特征向量。

例 1.2.1. 现有矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$，求其特征值和特征向量。

解：

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}A-\lambda I\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)(-2-\lambda)-1\times 4=0$$

$$\lambda^2+\lambda-6=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda+3)=0$$

$$\lambda_1=2,\lambda_2=-3$$

此处 λ_1,λ_2 即是矩阵 A 的特征值

① 当 $\lambda_1=-2$ 时，带入 $(A-\lambda I=0)$，求解矩阵 A 的特征向量

$$\begin{bmatrix}1-2 & 1\\ 4 & -2-2\end{bmatrix}v_1=0$$

此处向量 v_1 即是特征值 λ_1 所对应的“A 的特征向量”。

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{cases}-v_{11}+v_{12}=0\\ 4v_{11}-4v_{12}=0\end{cases} \Rightarrow v_{11}=v_{12}$$

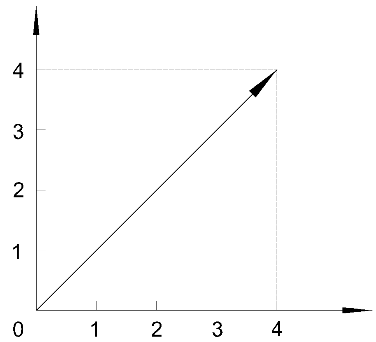


图 1.2: $v_{11} = v_{12}$

如图*1.2*所示，此时在该条直线 $(v_{11} = v_{12})$ 上任一点所取的值都可作为矩阵的特征向量

取 $\begin{cases} v_{11} = 1 \\ v_{12} = 1 \end{cases}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

②当 $\lambda = -3$ 时，带入 $(A - \lambda I = 0)$，求解矩阵 A 的特征向量

$$\begin{bmatrix} 1-(-3) & 1 \\ 4 & -2-(-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 4v_{21} + v_{22} = 0$$

可取 $\begin{cases} v_{21} = 1 \\ v_{22} = -4 \end{cases}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

综上 A 的特征值为 λ_1, λ_2，特征向量为 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

1.3　特征值特征向量的应用

利用特征值特征向量可以对复杂的方程进行画对角，解耦

设 $P = [v_1, v_2]$，v_1, v_2 是 P 的特征向量，P 是一个过渡矩阵

$$\begin{aligned}AP &= A\begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix}\\ &= A\begin{bmatrix}v_{11} & v_{21}\\ v_{12} & v_{22}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}A\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix} & A\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

此处由特征值，特征向量的定义可知 $Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2$

$$\begin{aligned}\text{接上式} &= \begin{bmatrix}\lambda_1\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix} & \lambda_2\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\lambda_1 v_{11} & \lambda_1 v_{12}\\ \lambda_2 v_{21} & \lambda_2 v_{22}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}v_{11} & v_{21}\\ v_{12} & v_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{令}\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

可得：

$$\begin{aligned}AP &= P\Lambda\\ P^{-1}AP &= P^{-1}P\Lambda\\ P^{-1}AP &= \Lambda\end{aligned}$$

例 1.3.1. 现有微分方程组 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1 + x_2\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 4x_1 - 2x_2\end{cases}$

解：

$$\text{原式} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax \tag{1.4}$$

$$\text{令} x = Py$$

$$\text{可得} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = P\dot{y} \\ Ax = APy \end{cases}$$

将上式带回式*1.4*可得：

$$P\dot{y} = APy$$

$$P^{-1}P\dot{y} = P^{-1}APy$$

$$\dot{y} = P^{-1}APy$$

由 $P^{-1}AP = \Lambda$ 可知

$$\dot{y} = \Lambda y \Rightarrow \begin{matrix} \dot{y_1} = 2y_1 \\ \dot{y_2} = -3y_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = C_1e^{2t} \\ y_2 = C_2e^{-3t} \end{matrix}$$

$$C_1, C_2 \text{ 为常数} x = Py$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} \\ C2_e^{2t} - 4C_2e^{-3t} \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

1.4　总结

① $Av = \lambda v$ 在一条直线上的概念

② 求解方法 $\left|A - \lambda I\right| = 0, (A - \lambda I)V = 0$

③ $P^{-1}AP = \Lambda, P = [v_1, v_2 ...], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

④ $\dot{x} = Ax, x = Py\dot{y} = \Lambda y$ 反求 x