Введение в физику сверхпроводимости

Больгинов Виталий Валериевич

Понеделльник, аудитория **420 ГЛК**

Лекция 7

Критический ток тонкой пленки (пластина с током). Энергия N-S границы. Сверхпроводники 1 и 2 рода.

Приведенные уравнения теории ГЛ

$$\alpha\Psi+\beta\,\Psi|\Psi|^2+(1/4m)(-i\hbar\nabla-2eA)^2\Psi=0; \qquad (ГЛ\ Ia)$$

$(i\hbar\nabla\Psi+2eA\Psi)\,\mathbf{n}=0$, где n - единичный вектор, нормальный к поверхности св-ка.

$$(1/\mu_0)\ \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{A}=-(i\hbar e/2m)(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)-(2e^2/m)|\Psi|^2\,\mathbf{A} \qquad (ГЛ\ IIa)$$

Приведенный параметр порядка: $\psi=\Psi(\mathrm{r})/\Psi_0$, $\Psi(\mathrm{r})=\psi\Psi_0=\psi\,(|\alpha|/2\beta)^{1/2}=(n_{s0})^{1/2}\psi$

где $|\Psi_0|^2=n_{s0}=-(\alpha/\beta);$ $\qquad H_{cm}{}^2=\beta\,n_{s0}{}^2/\mu_0=\alpha^2/(\mu_0\beta);$

$$\xi^2\,[i\nabla+(2\pi/\Phi_0)A]^2\psi-\psi+\psi|\psi|^2=0 \qquad \xi^2=-\hbar/4m\alpha \quad [\text{м}]$$

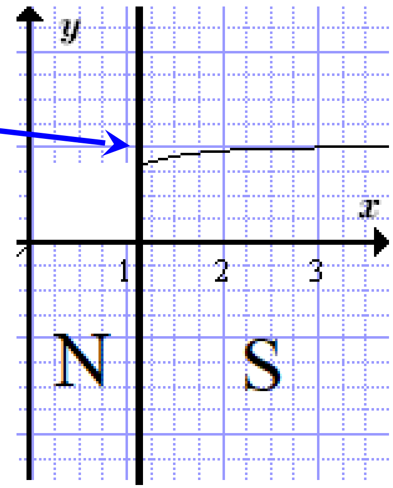
$$\left(i\nabla\psi+\frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}\psi\right)\vec{n}=\frac{\psi}{b} \qquad \lambda^2=-m\beta/(\mu_0\alpha e^2)=m/\mu_0\,n_{s0}\,e^2 \quad [\text{м}]$$

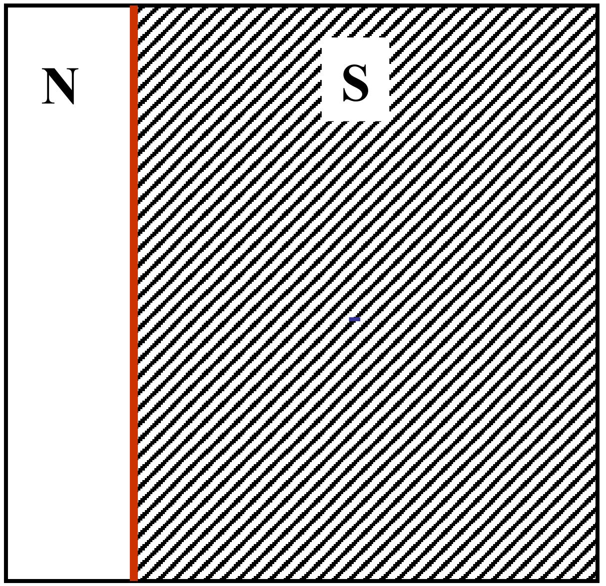
$$\mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{A}=-i\,[\Phi_0/(4\pi\lambda^2)](\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)-|\psi|^2\mathbf{A}/\lambda^2 \qquad \Phi_0=h/2e=2\pi\hbar/2e \quad [\text{Вб}]$$

Эффект близости на NS-границе

$$-\xi^2\, d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x=0) = \frac{\psi}{b}$$





Посчитаем отклонение от равновесного значения.

Приближенное решение: $\psi(x)=1-f(x)$, *где* $f(x) \ll 1$.

Тогда: $\xi^2 d^2 f/dx^2 - 1 + f(x) + (1-f(x))^3 = 0;$

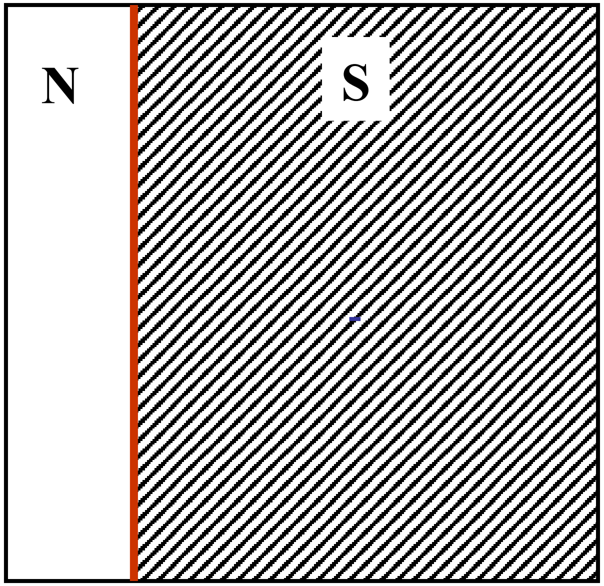
$(1-f(x))^3 \approx 1 - 3f(x) \leftrightarrow \xi^2 d^2 f/dx^2 - 2f(x) = 0;$

Решение: $f(x) = f_0 \exp[-\sqrt{2}\,(\{x-x_0\}/\xi)];$ $\boxed{\psi(x=\infty)=1}$

Экспоненциальное восстановление параметра порядка на длине ξ. Маситаб.

Точное решение

Рассмотрим изменение сверхпроводящего параметра порядка на границе с нормальным металлом справа и слева от границы.



$$-\psi + \psi|\psi|^2 + \xi^2 [i\nabla + (2\pi/\Phi_0)A]^2 \psi = 0$$

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A} = -i\,[\Phi_0/(4\pi\lambda^2)](\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\mathbf{A}/\lambda^2$$

$$[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\, n\, \psi = \psi/b$$

$$f(x) = d^2\psi/dx^2 \qquad -\xi^2 (d^2\psi/dx^2)(d\psi/dx) - \psi(d\psi/dx) + \psi^3(d\psi/dx) = 0;$$

$$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = C, \qquad C = -1/2$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x=0) = \frac{\psi}{b}$$

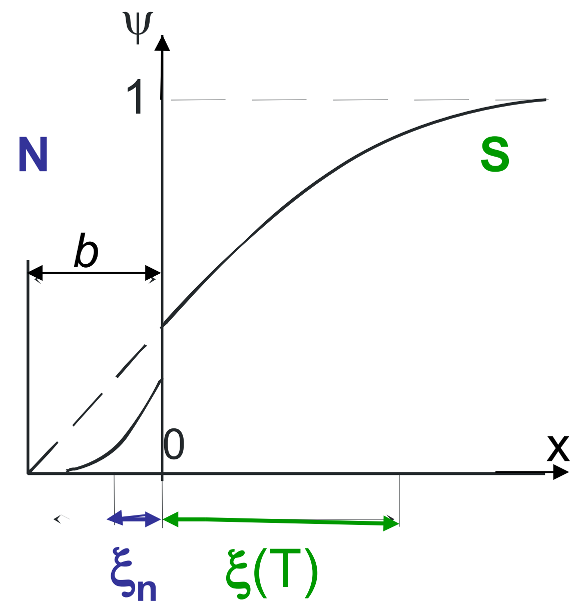
$$\xi^2(d\psi/dx)^2 + \psi^2 - (1/2)\psi^4 = 1/2$$

$$\boxed{\psi = \mathrm{th}\,[(x - x_0)/\sqrt{2}\xi].}$$

$$\boxed{\mathrm{sh}\left(\sqrt{2}x_0/\xi\right) = b}$$

Масштаб!

Куда делись S-электроны?



Приближенное решение:
ψ(x)=1-f(x), где f(x)<<1. $f(x)=f_0 \exp[-\sqrt{2}\,(x/\xi)]$

Время жизни (N): $\Delta E \Delta t \cong \hbar \quad \Delta E \cong kT_C$

$$\Delta t \cong \hbar / \Delta E \cong \hbar / kT_c$$

Предположим, что N – это тот же сверхпроводник, но при T слегка больше T_{cn}, с небольшим (флуктуационным) параметром парядка Ψ.

Появление S-электронов в нормальном металле – это возникновение некоторого порядка.

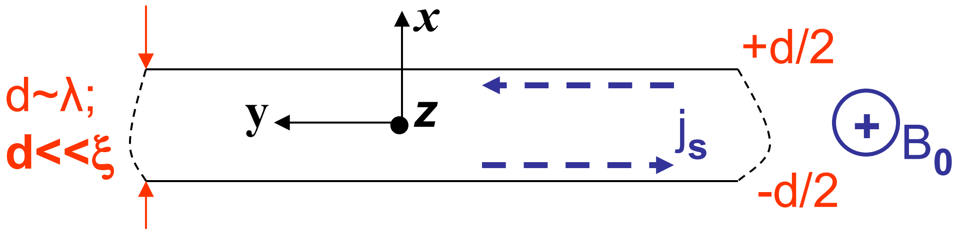
$\alpha(T) = -|\alpha_0|[1-(T/T_c)]$ $\alpha < 0$ @ $T < T_c$ $\alpha > 0$ @ $T < T_c$

$-\xi^2 d^2\psi / dx^2 + \psi + \psi^3 = 0$ (for 1D-case) (N) $\xi^2 = \hbar/4m|\alpha|$!!! $|\Psi_0|^2 = n_{s0} = |\alpha|/\beta$

$\psi_N(x) = \psi_0 \exp[-|x|/\xi_N]$; $x \to -\infty$; $\psi_N = 0$; $x=0$, $\psi_N = \psi_0$

Экспоненциальное затухание сверхпроводимости вглубь N-слоя.

Распределение поля в тонкой пленке



Бесконечная сверхпроводящая пластина с тощиной d~λ , d<<ξ в параллельном магнитном поле

$\kappa=\lambda/\xi<<1$

Поле и параметр порядка меняется только по x (из симметрии)

$$\xi^2[(2\pi/\Phi_0)A]^2\psi - \psi + \psi^3 = 0 \quad (ГЛ\ I)$$

$$\text{или}\quad \psi^2 = 1 - (2\pi\xi A/\Phi_0)^2 = \text{const}\ (x)$$

$$\mu_0 J_s = d^2A_y/dx^2 = (\psi^2/\lambda^2)A_y \quad (ГЛ\ II)$$

Общее решение ГЛ II: $\mathbf{A}(x) = a\, ch(\psi x/\lambda) + b\, sh(\psi x/\lambda)$;

$$\mathbf{B}(x) = d\mathbf{A}/dx = a\,(\psi/\lambda)\, sh(\psi x/\lambda) + b\,(\psi/\lambda)\, ch(\psi x/\lambda);$$

Подставляя $B(\pm d/2) = B_0 = \mu_0 H_0$ *получим* $a=0$; $b = (\mu_0 H_0 \lambda)/[\psi\, ch(\psi d/2\lambda)]$

Решение ГЛ II: $B(x) = (\mu_0 H_0)\, ch(\psi x/\lambda)/ch[(\psi d/(2\lambda)]$

$$A(x) = [\mu_0 H_0 \lambda/\psi]\, sh(\psi x/\lambda)/ch[(\psi d/(2\lambda)]$$

Вблизи T_c, H_{cm} - ψ *–мало* ←→ $\psi d/(2\lambda) << 1$: $B = \mu_0 H_0$ $\quad A(x) = \mu_0 H_0 x$

Критическое поле тонкой пленки

$\psi^2(x) = 1 - (2\pi\xi/\Phi_0)^2(\mu_0 H_0\, x)^2 \approx \mathrm{const} = \psi^2(d/2)$

$\nabla\psi \cong 0$

$$|\psi(d/2)|^2 = 1-(1/4)d^2(\mu_0 H_0)^2(2\pi\xi/\Phi_0)^2 = 1-(1/8)(H_0/H_{cm})^2(d/\lambda)^2,$$

поскольку $\sqrt{2}H_{cm} = \Phi_0/(2\pi\mu_0\lambda\xi)$ ***или*** $(2\pi\xi\mu_0/\Phi_0)^2 = 1/[2(H_{cm}\lambda)^2]$.

Все равно квадратичная зависимость подавления параметра порядка магнитным полем.

Определим критическое поле $H_к$, при котором зануляется квадрат параметр порядка **(на краю и по всей пленке)**:

$$\psi^2 = 0 \text{ при } \boxed{H_к = 2\sqrt{2}\,(\lambda/d)H_{cm}} \qquad (4.4)$$

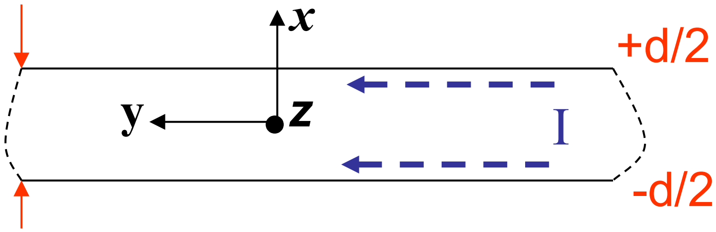
Чем меньше d, тем больше $H_к$! Нет зависимости от ξ!!!

Пластина: $f_{sH} = f_{s0} + HM$

Пленка: $M = 0;\ f_{sH} \approx f_{s0}$

Критический ток тонкой пленки

Критический ток тонкой пленки (Лондоны)



(Теория Лондонов)

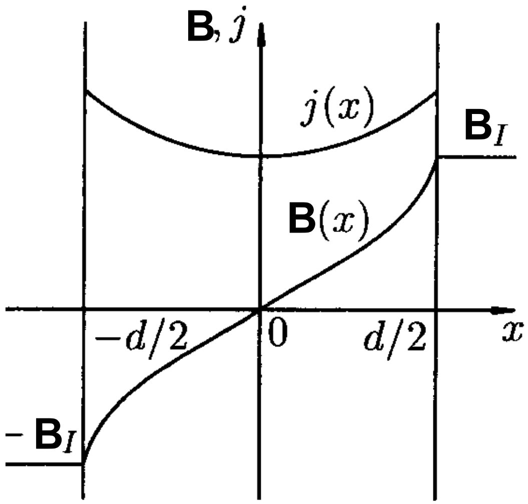
$j_{sy}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{I}/(2\lambda)]\mathrm{ch}(x/\lambda)/\mathrm{sh}(d/2\lambda)$

$B_z(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{I}/2wd]\mathrm{sh}(x/\lambda)/\mathrm{sh}(d/2\lambda)$

Тон. пленка

$j_{sy} = \mathrm{I/d}$

$\mathrm{B}(x) = (\mu_0 \mathrm{I}/w\mathrm{d})\boldsymbol{x}$



Что будет при учете уравнений Г-Л ?
(связь **A** и n_s)

Преобразование уравнений Г-Л

$$\text{rot rot }\mathbf{A} = -i\,[\Phi_0/(4\pi\lambda^2)](\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\mathbf{A}/\lambda^2$$ *(ГЛ-2)*

$$\xi^2\,[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)A]^2\psi - \psi + \psi|\psi|^2 = 0$$ *(ГЛ-1)*

$$\text{rot rot }\mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2}\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta - \mathbf{A}\right).$$

$$\psi = |\psi|e^{i\theta},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\varphi,$$

$$\psi = \psi'\exp\left[i\frac{2\pi}{\Phi_0}\varphi(\mathbf{r})\right].$$

$$\theta' = \theta + (2\pi/\Phi_0)\,\varphi$$

$$-\nabla^2\psi + \left[i\frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{\nabla}\vec{A} + i\frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}\vec{\nabla}\right]\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}^2$$

$$-\nabla^2\psi + i\frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right)\psi + +i\frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}\left(\vec{\nabla}\psi\right) + \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}^2$$

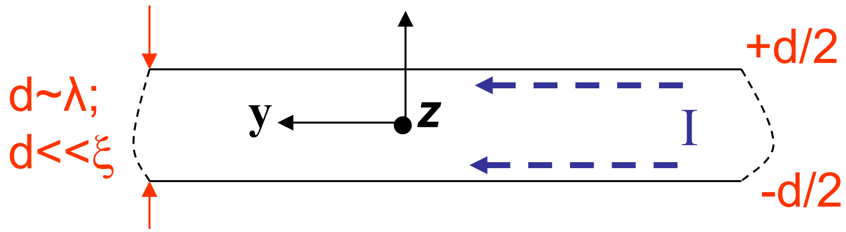
$$\left[\vec{\nabla}\vec{A}\right] = \text{div }\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

Лондоновская калибровка $\quad j_S \Leftrightarrow \vec{A}$

Отсутствие источников тока в объеме сверхпроводника $\quad \vec{A}\left[\vec{\nabla}\psi\right] = 0$

$$-\xi^2\nabla^2\psi + \left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2\vec{A}^2 - \psi + \psi|\psi|^2 = 0$$

Критический ток тонкой пленки (Г-Л)

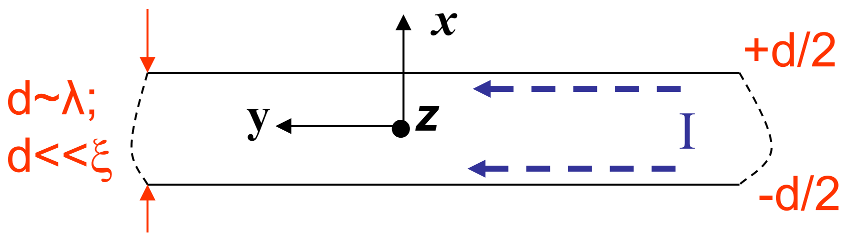


Как записать уравнения Г-Л для бесконечной сверхпроводящей пластины с толщиной $d \sim \lambda$, $d << \xi$ с током вдоль пленки

$$-\xi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2 \left|\vec{A}\right|^2 - \psi + \psi^3 = 0$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -i\,[\Phi_0/(4\pi\lambda^2)](\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - |\psi|^2 \mathbf{A}/\lambda^2$$

Критический ток тонкой пленки (Г-Л)



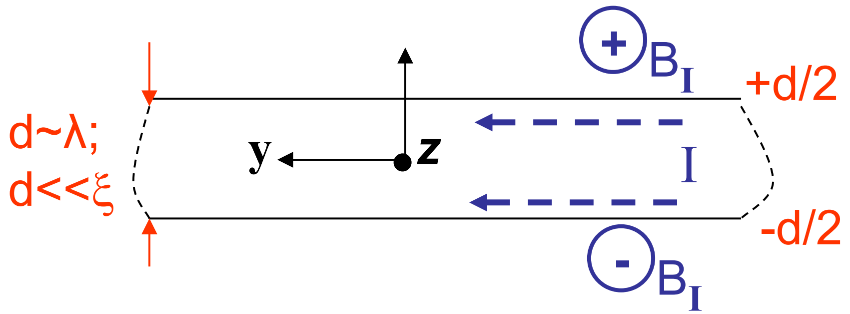
Бесконечная сверхпроводящая пластина с толщиной d~λ , d<<ξ с током вдоль пленки

$$(2\pi/\Phi_0)^2\mathbf{A}^2\psi - \psi + \psi|\psi|^2 = 0$$

$$d^2A_y / dx^2 = |\psi|^2 A_y / \lambda^2$$

А что у нас с граничными условиями?

Критический ток тонкой пленки (Г-Л)



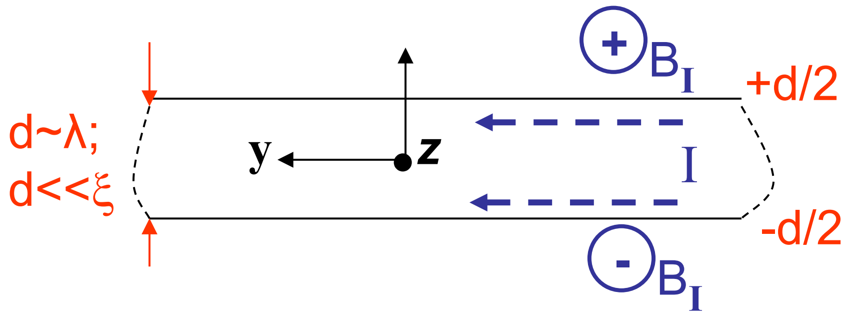
Бесконечная сверхпроводящая пластина с толщиной d~λ , d<<ξ с током вдоль пленки

$$(2\pi/\Phi_0)^2\mathbf{A}^2\psi - \psi + \psi|\psi|^2 = 0$$

$$d^2A_y / dx^2 = |\psi|^2 A_y / \lambda^2$$

А чему равно магнитное поле?

Критический ток тонкой пленки (Г-Л)



Бесконечная сверхпроводящая пластина с толщиной d~λ , d<<ξ с током вдоль пленки

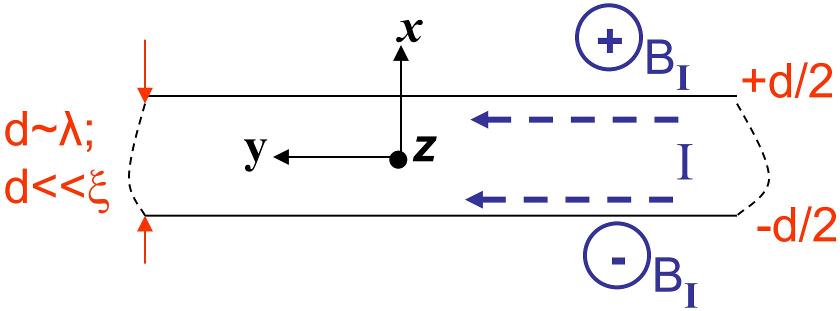
$$\left(2\pi/\Phi_0\right)^2 \mathbf{A}^2 \psi - \psi + \psi\,|\psi|^2 = 0$$

$$d^2 A_y / dx^2 = |\psi|^2 A_y / \lambda^2$$

$$B(\pm d/2) = \pm B_I = \pm \mu_0 \boldsymbol{I} / 2w$$

Запишем общее решение и подставим граничные условия.

Решение Г-Л (II)



Бесконечная сверхпроводящая пластина с толщиной d~λ , d<<ξ с током вдоль пленки

d<<ξ ←→ $\nabla\psi \cong 0$ □□ $-\xi^2[(2\pi/\Phi_0)A]^2\psi - \psi + \psi^3 = 0$ **(ГЛ I)**

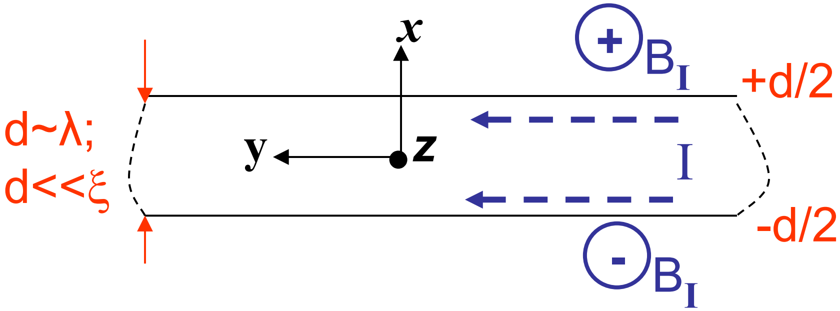
Ток задан внешним источником $\mu_0 J_s = d^2A/dx^2 = (\psi^2/\lambda^2)A$ **(ГЛ II)**

Общее решение ГЛ II: $A(x) = a\,\mathrm{ch}(\psi x/\lambda) + b\,\mathrm{sh}(\psi x/\lambda)$;

$B(x) = dA/dx = a\,(\psi/\lambda)\,\mathrm{sh}(\psi x/\lambda) + b\,(\psi/\lambda)\,\mathrm{ch}(\psi x/\lambda)$;

А что у нас с граничными условиями?

Решение Г-Л (II)



Бесконечная сверхпроводящая пластина с толщиной d~λ , d<<ξ с током вдоль пленки

d<<ξ ←→ $\nabla\psi \cong 0$ □□ $\quad$ $-\xi^2[(2\pi/\Phi_0)A]^2\psi - \psi + \psi^3 = 0$ **(ГЛ I)**

Ток задан внешним источником $\quad$ $\mu_0 J_s = d^2A/dx^2 = (\psi^2/\lambda^2)A$ **(ГЛ II)**

Общее решение ГЛ II: $A(x) = a\,\mathrm{ch}(\psi x/\lambda) + b\,\mathrm{sh}(\psi x/\lambda)$;

$B(x) = dA/dx = a\,(\psi/\lambda)\,\mathrm{sh}(\psi x/\lambda) + b\,(\psi/\lambda)\,\mathrm{ch}(\psi x/\lambda)$;

$B_I = \mu_0 I / 2w$ из ур-й Максвела

Подставляя $B(\pm d/2) = \pm B_I$ *получим* $b=0$; $a = (B_I\lambda)/[\psi\,\mathrm{sh}(\psi d/2\lambda)]$

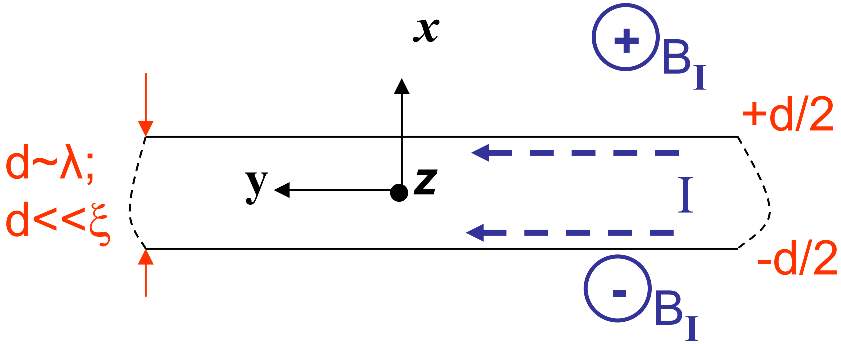
Решение ГЛ II: $\quad B(x) = B_I\,\mathrm{sh}(\psi x/\lambda)/\mathrm{sh}[(\psi d/2\lambda]$

$$A(x) = [\lambda B_I/\psi]\,\mathrm{ch}(\psi x/\lambda)/\mathrm{sh}[\psi d/2\lambda]$$

???

Вблизи T

Случай тонкой пленки



Бесконечная сверхпроводящая пластина с толщиной d~λ , d<<ξ с током вдоль пленки

$B_I = \mu_0 \boldsymbol{I} / 2\text{ш}$

из ур-й Максвела

Решение ГЛ II: $B(x) = B_I\, \mathrm{sh}(\psi\, x/\lambda)/\mathrm{sh}[(\psi\, d/2\lambda]$

$$A(x) = [\lambda B_I/\psi\,]\, \mathrm{ch}(\psi\, x/\lambda)/\mathrm{sh}[\psi\, d\, /\, 2\lambda]$$

Вблизи T_c: ψ *–мало* $\leftarrow\rightarrow$ $\psi\ \ d\,/\,2\lambda <<1$: *ch*$\rightarrow$*1; sh*$\rightarrow\psi\, d/2\lambda$: $A(x) = 2\lambda^2 B_I/\psi^2 d$

$$B(x) = B_I\, 2x/d$$

Постоянный векторный потенциал (постоянная плотность сверхтока) по толщине пленки

$\xi^2_{\text{пленки}}[(2\pi/\Phi_0)A]^2\psi - \psi + \psi^3 = 0$ (ГЛ I):

ψ **= ???**

Параметр порядка

Подставим $A(x) = 2\lambda^2 B_I/(\psi^2 d)$ в **(ГЛ I)**

$\xi^2[(2\pi/\Phi_0)A]^2\psi - \psi + \psi^3 = 0$ (ГЛ I):

$[(2\pi\,\xi^2/\Phi_0)A]^2 - 1 + \psi^2 = 0$ (ГЛ I) $\qquad \xi^2[(2\pi/\Phi_0)A]^2 = 1 - \psi^2$

$[\lambda^2 B_I/(\psi^4 d^2)]\,(2\pi\xi 2\lambda/\Phi_0)^2 = 1 - \psi^6$

Учитывая, что $\Phi_0/(2\sqrt{2}\pi\mu_0\lambda\xi) = H_{cm}$, получим:

$$2\lambda^2 H_I^2/(H_{cm}^2 d^2) = \psi^4 - \psi^6 \quad (4.6)$$

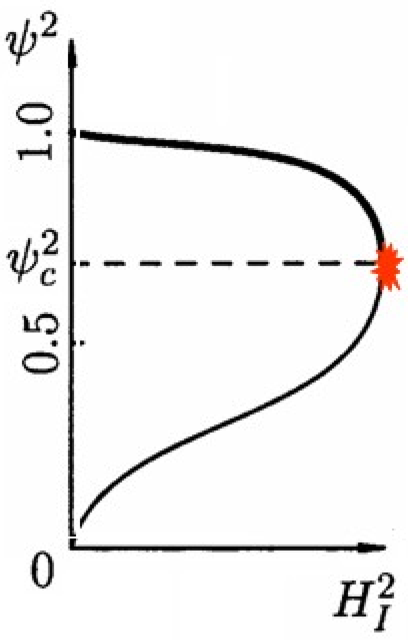
$$H_I = H_I(\psi^2)\ ?$$

$$H_I = H_I(\psi^2) \rightarrow \psi^2(I)$$

$H_I = I/2w$

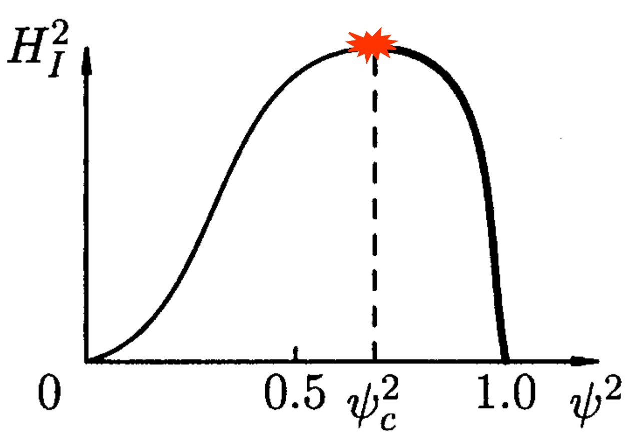
из ур-й Максвела

Предельное поле тока



$2\lambda^2 \mathbf{H_I}^2/(d\ ^2H_{cm}{}^2) = \psi^4 - \psi^6$

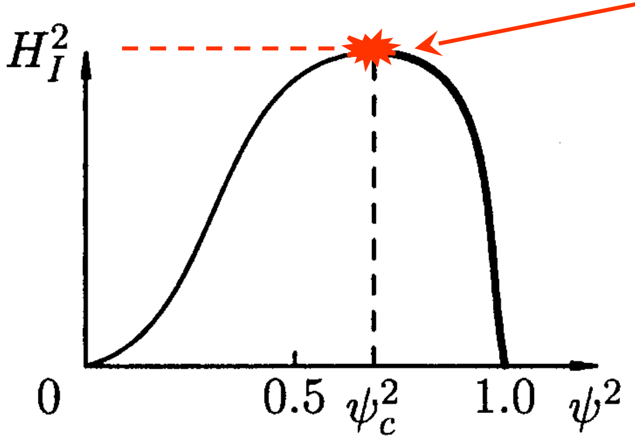
$H_I = H_I(\psi^2)$



Найдем максимум H_I

Критическая концентрация

$2\lambda^2 \mathbf{H_l}^2/(d^2 H_{cm}^2) = \psi^4 - \psi^6$



Максимум функции:

$\mathbf{d(H_l^2)/d}(\psi^2)=0;$

$2(\psi^2) - 3(\psi^2)^2=0;$

$\psi_c^2=2/3$

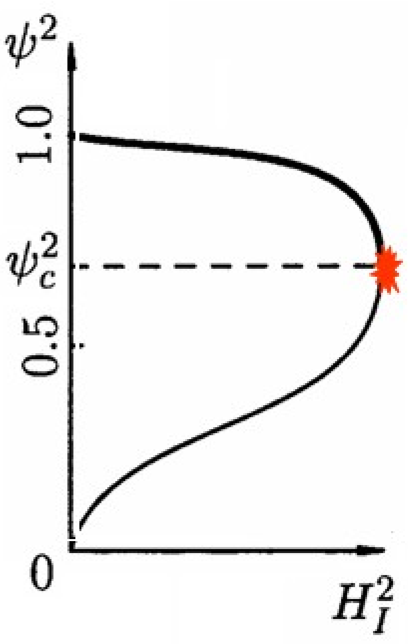
$H_I = H_I(\psi^2) \rightarrow \psi^2(\boldsymbol{I})$

$\boldsymbol{\psi^2}$ от $\boldsymbol{H_l^2}$ – функция неоднозначная:

Левая ветвь-неустойчива, поскольку при $\boldsymbol{H_l}$ =0 ($\boldsymbol{I}$ =0) нет причин для разрушения сверхпроводимости. Сверхпроводимость прекращается при некоторой ***критической плотности*** $\boldsymbol{\psi_c^2}$ достигаемой при $\boldsymbol{H_l}$, соответствующей максимуму функции (*нет n_s для больших H*): $\psi_c^2=2/3$!

Подставим и найдем H_I

Предельное поле тока



$2\lambda^2 \mathbf{H_I}^2/(d^2 H_{cm}^2) = \boldsymbol{\psi}^4 - \boldsymbol{\psi}^6$

Максимум функции:

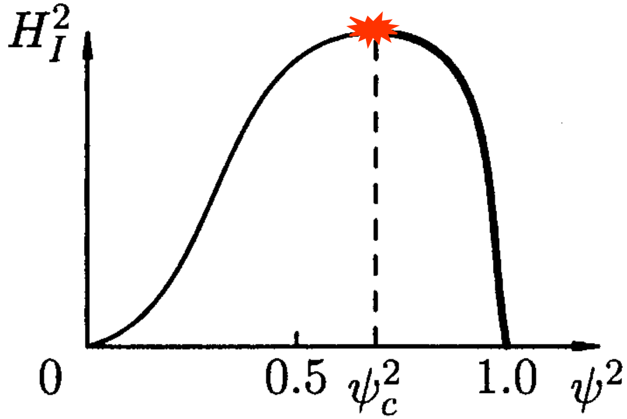
$\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{max}}^{\mathbf{2}} = 2/3$

$\boldsymbol{\psi}^2$ от $\boldsymbol{H_I}^2$ – функция неоднозначная:

Реализуется состояние с максимальной величиной ψ, то есть n_S.

Подставим и найдем максимальный H_I

Критический ток распаривания ГЛ



Подставим $\psi_c{}^2 = 2/3$ в (4.6):

$$2\lambda^2 \mathbf{H_I}^2/(d^2 H_{cm}^2) = \psi^4 - \psi^6 \qquad (4.6)$$

$$(\mathbf{H_I})_{max} = [\sqrt{2}/(3\sqrt{3})]\,(\mathbf{d}/\lambda)\mathbf{H}_{cm}$$

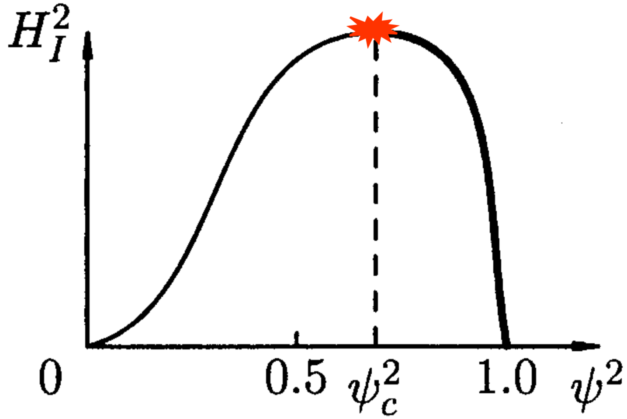
Зависимость от ***d*** обратная, чем для ***$H_к$*** критического поля тонкой пленки!

$H_к = 2\sqrt{2}\,(\lambda/d)H_{cm}$

При ***d*** **<** λ**:** ***$H_к$ > H_{cm}* ,** тогда как ***$(H_I)_{max}$ < H_{cm}*** .

Как найти – I_c?

Критический ток распаривания ГЛ



Подставим $\psi_c{}^2$=2/3 в (4.6):

$$2\lambda^2 H_I{}^2/(d^2 H_{cm}{}^2) = \psi^4 - \psi^6 \qquad (4.6)$$

$(H_I)_{max} = [\sqrt{2}/(3\sqrt{3})]\,(d/\lambda)H_{cm}$

Зависимость от ***d*** обратная, чем для $H_к$ критического поля тонкой пленки!

$H_к = 2\sqrt{2}\,(\lambda/d)H_{cm}$

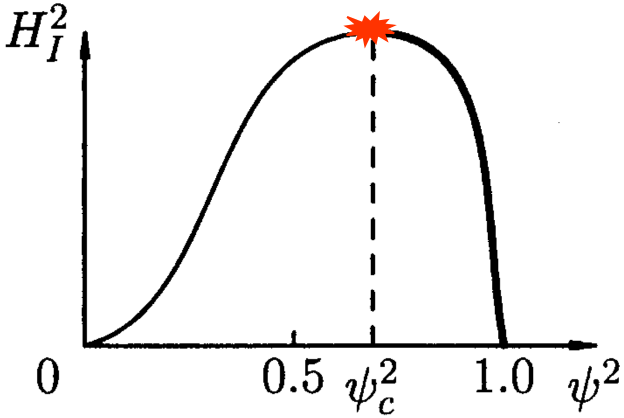
При ***d*** < λ: $H_к > H_{cm}$, тогда как $(H_I)_{max} < H_{cm}$.

$H_I = I/2w$

Как найти – I_c?

А лучше – $j_c = I_c/(wd)$

Критическая плотность тока распаривания ГЛ



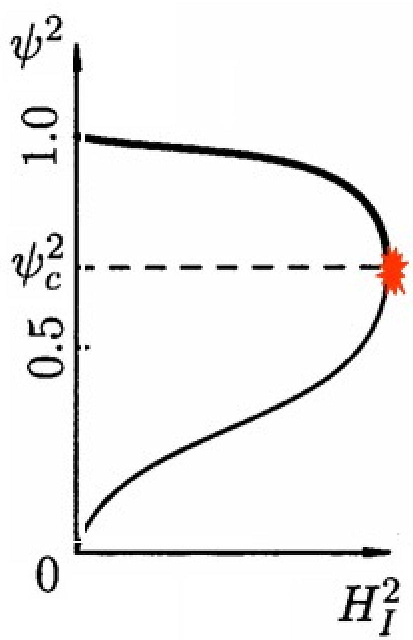
Подставим ψ_c^2=2/3 в (4.6):

$$2\lambda^2 H_I^2/(d^2 H_{cm}^2) = \psi^4 - \psi^6$$

$$(H_I)_{max} = [\sqrt{2}/(3\sqrt{3})]\,(d/\lambda)H_{cm}$$

$$I_c = j_c * d * \text{ш}$$

$$H_I = I/2\text{ш} = j_c\{d*\text{ш}\}/2\text{ш} = j_c d/2$$



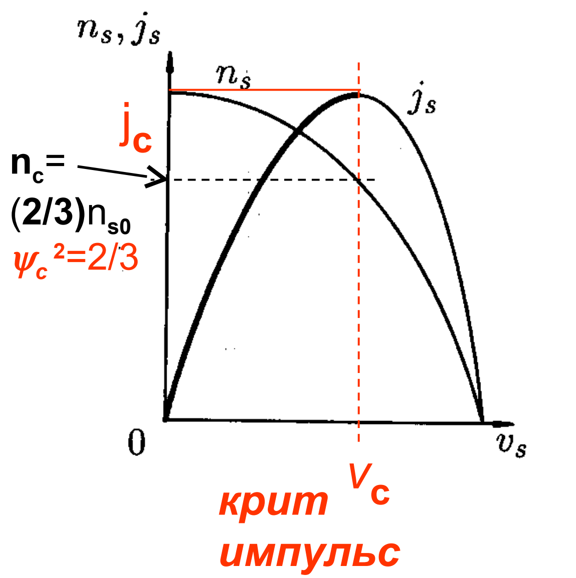
$$j_c d/2 = [\sqrt{2}/(3\sqrt{3})]\,(d/\lambda)H_{cm}$$

$$j_c = [2\sqrt{2}/(3\sqrt{3})]\,(H_{cm}/\lambda)$$

Критическая плотность тока Г-Л – материальная константа!

$$j_c \sim (H_{cm}/\lambda) \sim (1-T/T_c)/(1-T/T_c)^{-1/2} \sim (1-T/T_c)^{3/2}$$

Критический импульс



Минимизируем "упрощенный" функционал ГЛ, добавив к плотности свободной энергии Гельмгольца кинетическую энергию сверхтока:

$$f_s(T,r) = f_n(T) + \alpha\,|\Psi|^2(r) + (\beta/2)\,|\Psi|^4\,(r)$$

$$f^*_s\,(T,r) = f_n(T) - |\alpha|\,n_s(r) + (\beta/2)\,n_s{}^2(r) + n_s(m v_s{}^2)/2$$

$$j_c \sim (H_{cm}/\lambda)$$

$$\delta_{\,ns} f^*_s = 0 = -|\alpha| + \beta\, n_s + (m v_s{}^2)/2$$

$$\psi_c{}^2 = 2/3$$

min при: $n_s = [\,|\alpha| - (m v_s{}^2)/2]\,/\beta \;=\; n_{s0} - (m v_s{}^2)/(2\beta)$

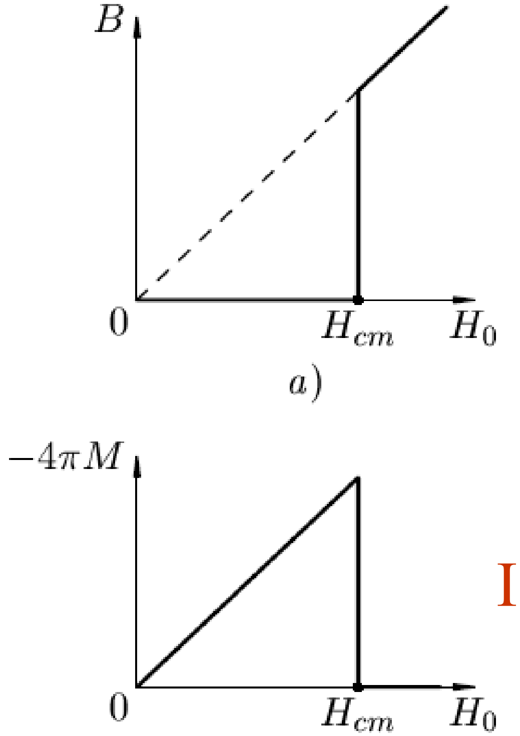
Сверхтекучий импульс является распаривающим фактором!

Не хватает n_s при $v > v_c$, чтобы переносить ток больше j_c !

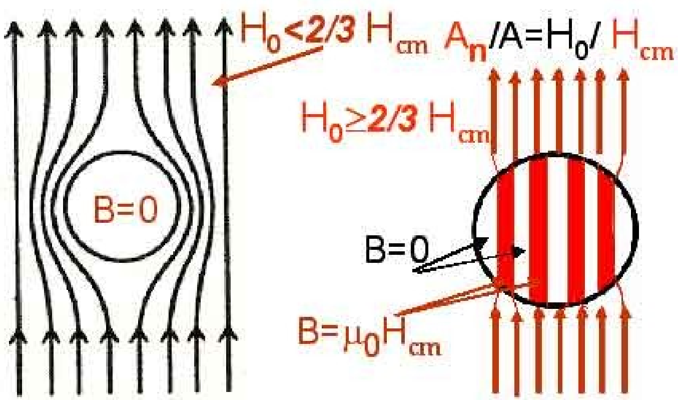
с другой стороны $j_s = n_s e\, v_s = n_{s0} e\, v_s - e\,(m v_s{}^3)/(2\beta)$

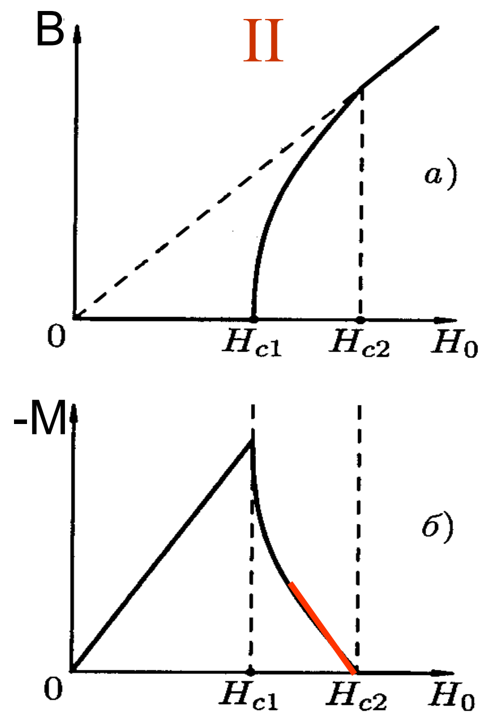
Энергия NS-границы

Сверхпроводники I и II рода Смешанное состояние.



Уже к 1940-50 годам было замечено, что сверхпроводники делятся на 2 класса (далее СП-1 и СП-2) по отношению к проникновению магнитного поля. Для СП-1 характерен асболютный диамагнетизм вплоть до разрушения сверхпроводимости в полях H_{cm}. Вблизи H_{cm} может возникать смешанное состояние, характеризующееся чередованием нормальной и сверхпроводящей фазы.



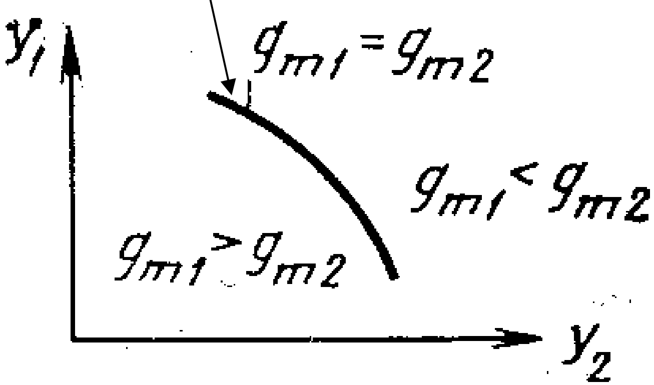


В СП-2 магнитное поле начинает проникать в гораздо меньших полях, а разрушения сверхпроводимости происходит к гораздо больших.

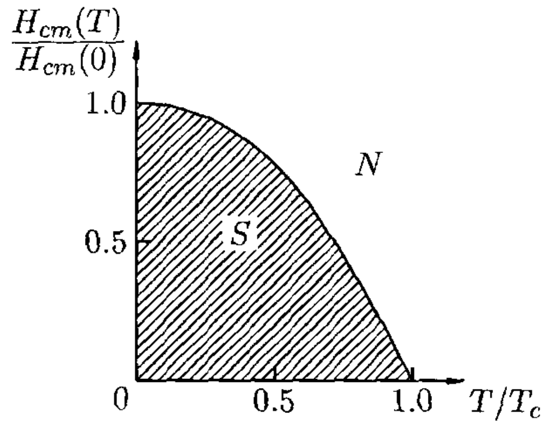
Вопросы о природе смешанного состояния и причинах разделения сверхпроводников на первый/второй род стимулировали рассмотрение задачи об *энергии границы раздела* нормальный металл/сверхпроводник.

Аналогия с фазовым переходом

Поверхность равновесного фазового перехода



$$y_{1,2} = T, P, H$$



$$H_c(T) = H_c^{(0)}\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$$

Надо построить *функционал* *для энергии NS-границы*

G(x) - ?

G(x) = δ(x)?

В процессах, где минимума достигает свободная энергия Гиббса:

dG = 0 в равновесии .

Образец содержит $\nu_{1,2}$ молей вещества в состоянии 1 или 2 с молярной энергией Гиббса $g_{m1,2}$: $G = \nu_1 g_{m1} + \nu_2 g_{m2}$

Сохранение количества вещества: $d\nu_1 = -d\nu_2$

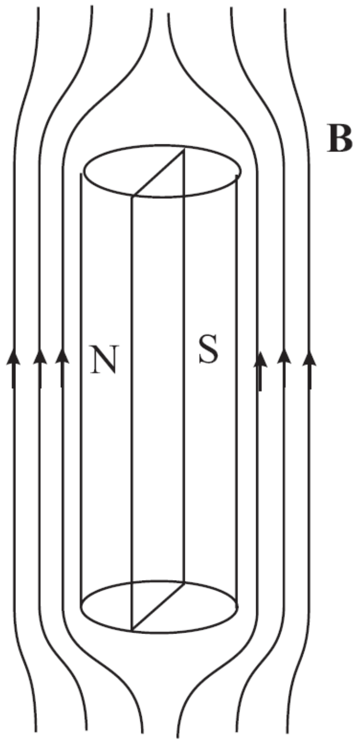
$$dG = g_{m1}\, d\nu_1 + g_{m2}\, d\nu_2 = (g_{m1} - g_{m2})d\nu_1 = 0$$

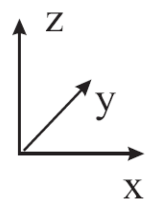
Равновесие фаз при $g_{m1} = g_{m2}$.

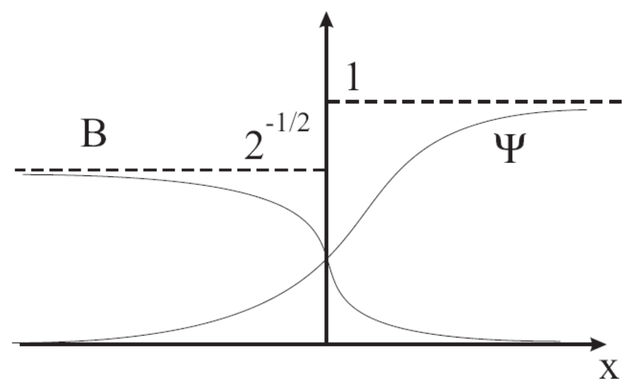
Энергии Гиббса двух фаз в точке фазового перехода равны!

(***В противном случае вещество будет находиться в состоянии с наименьшей энергией Гиббса***.)

Термодинамика. Равновесие фаз.







Предположения.

- Мы рассматриваем участок сверх-проводника в *промежуточном состоянии*.
- Размер нормальной области *подбирается* автоматически так, чтобы поле в ней равнялось $\mu_0 H_{cm}$.
- Сверхпроводник находится во внешнем поле H_{cm}.

Далеко слева (N)

$$G = F - BH,\ B_n = \mu_0 H_{cm}$$

$$F = F_n + \mu_0 H_{cm}{}^2/2$$

$$\downarrow$$

$$G_n = F_n - \mu_0 H_{cm}{}^2/2$$

Действительно, вдали от границы

$$\boldsymbol{G_n = G_s}$$

Величины G отличются только в области границы. Значит суммарная разность определяет энергию границы.

Далеко справа (S)

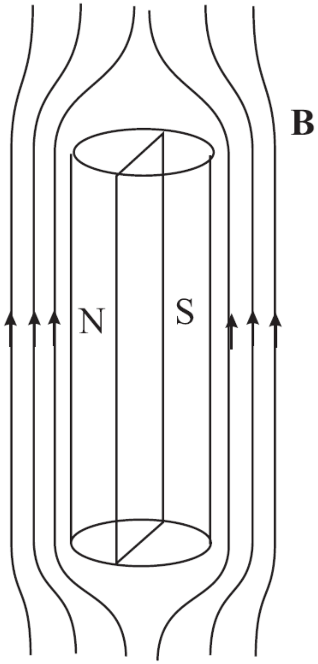
$$G_s = F_s - B_s H,\ B_s = 0$$

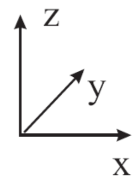
$$G_s = F_s$$

$$F_s = F_n - \mu_0 H_{cm}{}^2/2$$

$$G_s = F_n - \mu_0 H_{cm}{}^2/2$$

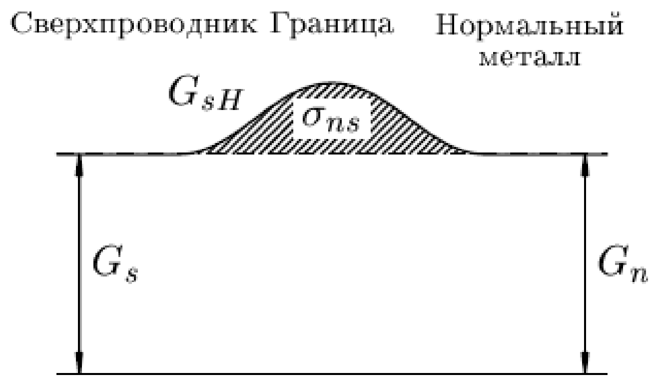
Энергия N-S границы. Теория Лондонов.





$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_{sH} - G_n)\, dx,$$

$$B(x) = \mu_0 H(x) \neq 0$$



$$g_{sH} = f_{sH} - BH,$$

$$\boxed{g_n = f_n - \mu_0 H_{cm}{}^2/2}$$

$$f_{sH} = f_{s0} + (\mu_0/2)\,[H^2 + \lambda^2(\mathrm{rot}\ \mathbf{H})^2]$$

$$f_{s0} = f_n - \mu_0 H_{cm}{}^2/2$$

$$g_{sH} = f_n - \mu_0 H_{cm}{}^2/2 + (\mu_0/2)\,(H^2 + \lambda^2(\mathrm{rot}\ \mathbf{H})^2) - \mu_0 H H_{cm} =$$

$$= g_n + (\mu_0/2)\,\cancel{(H^2 +} \lambda^2(\mathrm{rot}\ \mathbf{H})^2) - \mu_0 H H_{cm}$$

$$\sigma_{ns} = \int (g_{sH} - g_n)\, dx = (\mu_0/2) \int (H^2 + \lambda^2(\mathrm{rot}\ \mathbf{H})^2 - 2HH_{cm})\, dx$$

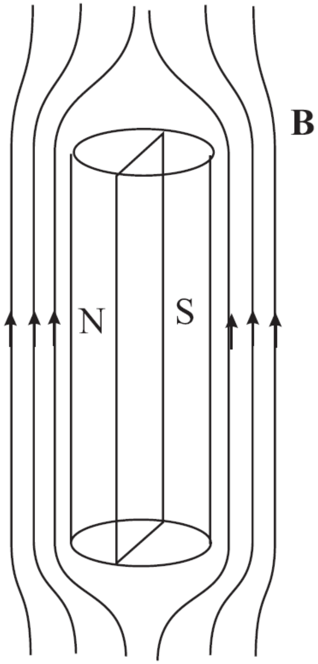
$$|\mathrm{rot}\ \mathbf{H}| = \partial H_z/\partial x = -H_z(x)/\lambda$$

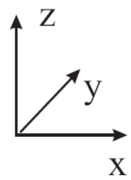
$$\sigma_{ns} = (\mu_0/2) \int (H^2 + \lambda^2(\mathbf{H}/\lambda)^2 - 2HH_{cm})\, dx = (\mu_0/2) \int (2H^2 - 2HH_{cm})\, dx$$

$$H = H_0 \exp(-x/\lambda)$$

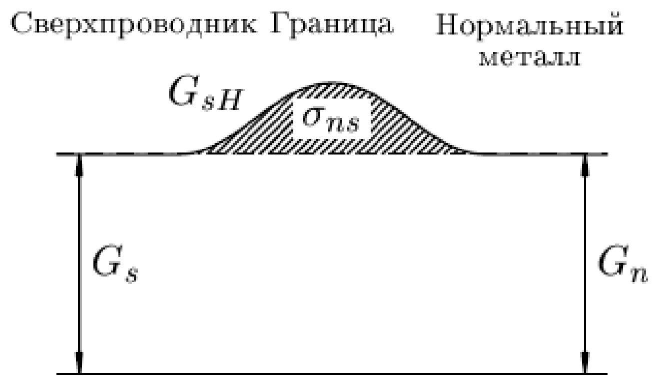
$$\boxed{\sigma_{ns} = \mu_0 \int (H(x) - H_{cm})\, H(x)\, dx}$$

Энергия N-S границы.
Теория Лондонов.





$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_{sH} - G_n)\, dx,$$



$H = H_0 \exp(-x/\lambda)$

$0 < H(x) < H_0$

$$\boxed{\sigma_{ns} = \mu_0 \int (\mathrm{H(x)} - \mathrm{H_{cm}})\mathrm{H(x)}dx \qquad \leq 0}$$

???

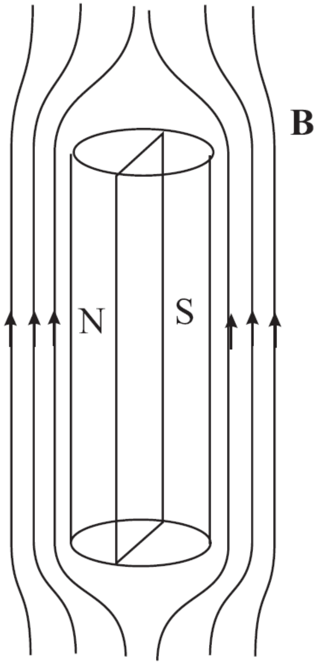
В теории Лондонов энергия границы раздела получается отрицательной всегда.

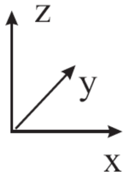
Выгоден переход в смешанное состояние в сколь угодно малых полях.

Противоречит эксперименту.

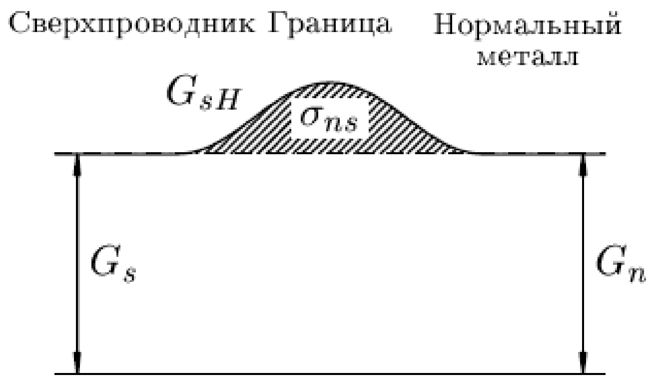
Что даст теория Г-Л?

Энергия N-S границы (Г-Л)





$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_{sH} - G_n)\, dx,$$



$$\boxed{g_{nH} = f_n - \mu_0 H_{cm}{}^2/2}$$

$$g_{sH} = f_{sH} - BH,$$

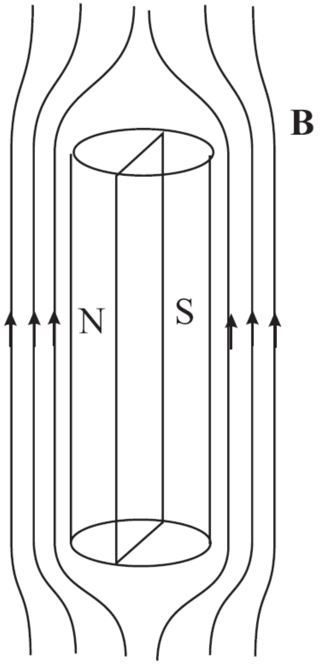
$$B(x) = \mu_0 H(x) \neq 0$$

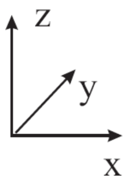
$$f_{s0} = f_n - \mu_0 H_{cm}{}^2/2$$

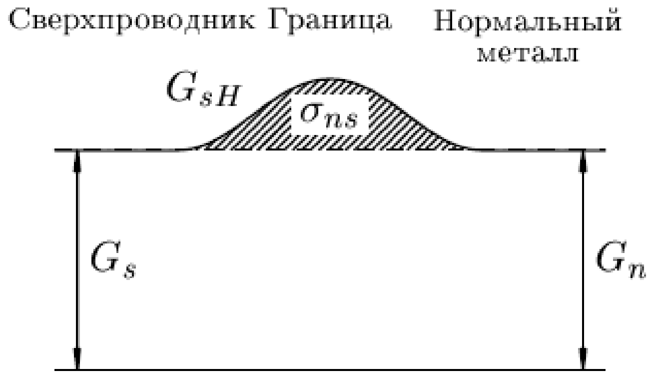
$$\boxed{g_{sH}(x) = f_n + \alpha\, |\Psi|^2 + (\beta/2)\, |\Psi|^4 + (1/4m)\, |-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi|^2 + B_s{}^2/(2\mu_0) - B_S H}$$

1. Начало отсчета энергии сверхпроводника.
2. Потенциальная энергия сверхпроводящего упорядочения.
3. Кинетическая энергия сверхпроводящих токов.
4. Плотность энергии магнитного поля.
5. Плотность работы источника.

Энергия N-S границы (Г-Л)







$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} (g_s - g_n)\, dx$$

$$f_n = g_{nH} + \mu_0 H_{cm}^{2}/2 \qquad\qquad g_{nH} = f_n - \mu_0 H_{cm}^{2}/2$$

$$g_{sH}(x) = f_n + \alpha\,|\Psi|^2 + (\beta/2)\,|\Psi|^4 + (1/4m)\,|-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi|^2 + B_s^{2}/(2\mu_0) - B_S H$$

$$\sigma = \int [\alpha\,|\Psi|^2 + (\beta/2)\,|\Psi|^4 + (1/4m)\,|-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi|^2 + B_s^{2}/(2\mu_0) - B_S H + \mu_0 H_{cm}^{2}/2]\, dx$$

Приведенный функционал Г-Л

$$\Delta f_{потенц} = + \alpha\, |\Psi|^2 + (\beta/2)\, |\Psi|^4 + (1/4m)\, |-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi|^2$$

Приведенный параметр порядка: $|\psi|^2 = |\Psi(r)|^2/|\Psi_0|^2$; $\psi = \Psi(r)/\Psi_0$, $\Psi(r) = \psi\,\Psi_0 = \psi\,(\alpha/\beta)^{1/2}$

где $|\Psi_0|^2 = n_{s0}/2 = -(\alpha/\beta)$

$$|\Psi(r)|^2 = (-\alpha/\beta)\,|\psi|^2 = (n_{s0}/2)|\psi|^2$$

$$f_{sH}(x) = f_n + (-\alpha^2/\beta)\,|\psi|^2 + (\alpha^2/2\beta)|\psi|^4 + (1/4m\alpha)\alpha(-\alpha/\beta)\,|-i\hbar\nabla\psi - 2eA\psi|^2$$

$$H_{cm}{}^2 = \beta\, n_{s0}{}^2/\mu_0 = \alpha^2/(\mu_0\beta); \qquad \alpha^2/\beta = \mu_0 H_{cm}{}^2$$

$$f_{sH}(x) = f_n + (-\mu_0 H_{cm}{}^2)\,|\psi|^2 + (\mu_0 H_{cm}{}^2)|\psi|^4 + (-\hbar^2/4m\alpha)\,(\mu_0 H_{cm}{}^2)\,|-i\nabla\psi - (2e/\hbar)A\psi|^2$$

Длина когерентности ГЛ: $\xi^2 = \hbar^2/(4m|\alpha|) = -\hbar^2/(4m\alpha)$; $\qquad \xi(T) = \xi_0(1-T/T_c)^{-1/2}$

$\Phi_0 = h/2e = 2\pi\hbar/2e$, $\hbar/2e = \Phi_0/2\pi$ $\qquad \sqrt{2}H_{cm} = \Phi_0/(2\pi\mu_0\lambda\xi)$

$$\boxed{\Delta f_{потенц} = f_n + \mu_0 H_{cm}{}^2\left(-|\psi|^2 + |\psi|^4 + \xi^2|-i\hbar\nabla\psi - 2\pi/\Phi_0\, A\psi|^2\right)}$$

Расчет энергии SN-границы

$$\sigma = \int \mu_0 H_{cm}^2 \Big(-|\boldsymbol{\psi}|^2 + (1/2)|\boldsymbol{\psi}|^4 + \xi^2 |-i\nabla\boldsymbol{\psi} - 2\pi/\Phi_0\, \mathrm{A}\boldsymbol{\psi}|^2 +$$
$$+ (1/2)B_S^2/(\mu_0 H_{cm})^2 - B_S H/\mu_0 H_{cm}^2 + 1/2 \Big) dx$$

Вспоминаем

Эффект близости на NS-границе. Сверхпроводник. Точное решение.

$$-\xi^2\, d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

Первый интеграл:

$$-\xi^2 (d\psi/dx)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = C,$$

$$\sigma = \int \mu_0 H_{cm}^2 \Big(\xi^2 |-i\nabla\boldsymbol{\psi} - 2\pi/\Phi_0\, \mathrm{A}\boldsymbol{\psi}|^2 - |\boldsymbol{\psi}|^2 + (1/2)|\boldsymbol{\psi}|^4 +$$

???

$$+ (1/2)(\mathrm{rot}\, \mathrm{A})^2/(\mu_0 H_{cm})^2 - (\mathrm{rot}\, \mathbf{A})\mathbf{H}/\mu_0 H_{cm}^2 + 1/2 \Big) dx$$

Можно ли свести часть членов суммы к константе, выделив первый интеграл уравнение Г-Л?

Ищем первый интеграл уравнений Г-Л в магнитном поле.

Первый интеграл уравнений Г-Л в магнитном поле

$$-\xi^2\nabla^2\psi+\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}\right]^2\psi-\psi+\psi^3=0 \quad \boxed{\times\frac{\partial\psi}{\partial x}} \qquad + \qquad \boxed{\times\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\right]^2}\lambda^2\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}=\psi^2 A/\lambda^2 \quad \boxed{\times\frac{\partial A}{\partial x}}$$

Первый интеграл ГЛ I:

$$[1-(2\pi\xi A/\Phi_0)^2]\,\psi^2-(1/2)\psi^4+\xi^2(d\psi/dx)^2+(2\pi\lambda\xi/\Phi_0)^2(dA/dx)^2=C;$$

(*Проверить, продифференцировав по x и подставив:* $d^2A/dx^2=\psi^2 A/\lambda^2$)

Определим C из гран. условий: $x\rightarrow\infty$: $\psi\rightarrow 1$, $d\psi/dx\rightarrow 0$, $A\rightarrow 0$. $\quad C=1/2$

Преобразуем в равенство:

$$[1-(2\pi\xi A/\Phi_0)^2]\,\psi^2-(1/2)\psi^4+1/2=\xi^2(d\psi/dx)^2+(2\pi\lambda\xi/\Phi_0)^2(dA/dx)^2$$

Заметим $2(\mu_0 H_{cm})^2=(\Phi_0/2\pi\lambda\xi)^2$ *и* $B=dA/dx$

$$[(2\pi\xi A/\Phi_0)^2-1]\psi^2-(1/2)\psi^4+1/2=\xi^2(d\psi/dx)^2+(1/2)B^2/(\mu_0 H_{cm})^2;$$

Энергия SN-границы

$$\sigma = \int \mu_0 H_{cm}{}^2 \Big(\xi^2 (\partial\psi/\partial x)^2 + (2\pi/\Phi_0)^2 A^2 \psi^2 - |\psi|^2 + (1/2)|\psi|^4 +$$

$$+ B^2/(2\mu_0 H_{cm})^2 - B^* H/ /(\mu_0 H_{cm})^2 + 1/2 \Big) dx$$

$$[(2\pi\xi A/\Phi_0)^2 - 1]\ \psi^2 + (1/2)\ \psi^4 + 1/2 = \xi^2 (d\psi/dx)^2 + (1/2) B^2/(\mu_0 H_{cm})^2;$$

$$\sigma = \int \mu_0 H_{cm}{}^2 \Big(2\xi^2 (\partial\psi/\partial x)^2 + (1/2) B^2/(\mu_0 H_{cm})^2 +$$

$$+ B^2/(2\mu_0 H_{cm})^2 - BH/(\mu_0 H_{cm})^2 \Big) dx$$

$$\downarrow$$

$$\sigma = \int \mu_0 H_{cm}{}^2 \Big(2\xi^2 (\partial\psi/\partial x)^2 + B^2/(\mu_0 H_{cm})^2 - BH/(\mu_0 H_{cm})^2 \Big) dx$$

$$\sigma_{ns} = 2\mu_0 H_{cm}{}^2 \int dx\ [\xi^2 (d\psi/dx)^2 + B(B - \mu_0 H)/2(\mu_0 H_{cm})^2\ ]$$

Два вклада в энергию NS-границы

$$\sigma_{ns} = 2\mu_0 H_{cm}^2 \int dx[\xi^2(d\psi / dx)^2 + B(B-\mu_0 H_{cm})/2\mu_0 H_{cm}^2]$$

всегда >0 всегда < 0, т.к. $B < \mu_0 H_{cm}$

$\partial\psi / \partial x \sim 1/\xi$ - изменение ψ порядка 1 происходит на длине ξ

$\xi^2(\partial\psi/\partial x)^2 \sim 1 \rightarrow \int \xi^2(\partial\psi/\partial x)^2 dx \sim \int dx \sim \xi$ (ширина NS-границы)

$|B(B-\mu_0 H)| \rightarrow 0$ *в S-области (B = 0) и N-области*

$-B^2 + B\mu_0 H \leq \mu_0 H^2/2 \leq \mu_0 H_{cm}^2/2$ $\quad 0 < B < H$

$|B(B-\mu_0 H)/2\mu_0 H_{cm}^2| \leq 1/4$

(расхождение с учебником: $|B(B-\mu_0 H) / 2\mu_0 H_{cm}^2| \leq 1$ *, непринципиально)*

$$\int dx[B(\mu_0 H-B)/ 2\mu_0 H_{cm}^2] \geq -(1/4)\int dx \geq -(1/4)\lambda \sim -\lambda$$

Энергия SN-границы для СП I и СП II

$$\sigma_{ns} = 2\mu_0 H_{cm}^2 \, [\xi - \{\lambda/4\}]$$

$\xi >> \lambda$ $\qquad \sigma_{ns} \sim \mu_0 H_{cm}^2 \xi > 0$

Образование N-S границы невыгодно. Разрушение сверхпроводимости в полях порядка H_{cm} (или переход в смешанное состояние). Сверхпроводники 1 рода.

$\xi << \lambda$ $\qquad \sigma_{ns} \sim -\mu_0 H_{cm}^2 \lambda < 0$

Образование N-S границы выгодно. Проникновение магнитного потока (т.е. переход в смешанное состояние) в полях меньше H_{cm}.Сверхпроводники 2 рода.

Ситуация теории Лондонов: $\qquad n_s \approx$ const. $\qquad \xi \leq \lambda / 4$

масштаб изменения n_s << лондоновской длины. $\qquad$?

$\xi \geq \lambda / 4$

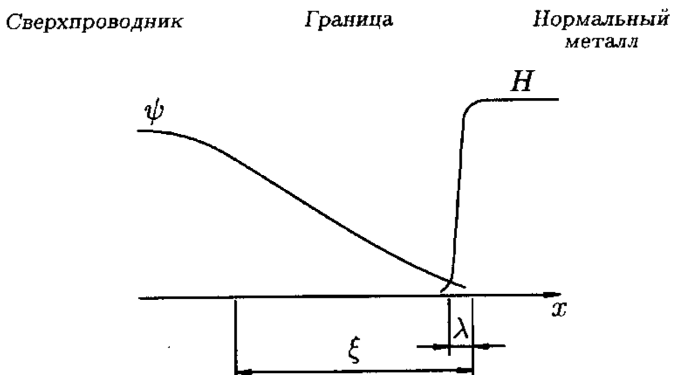
Граница: параметр Гинзбурга-Ландау

$\kappa = \lambda / \xi$, $\kappa_{крит} = \mathbf{1/\sqrt{2}}$ (точный расчет)

не зависит от температуры (свойство материала)

Чем является NS-граница?

СП I $\lambda < \xi$

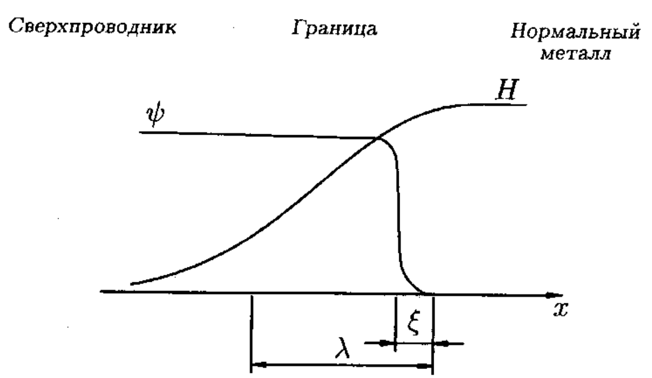


Сверхпроводимость дает понижение внутренней энергии металла на величину ½ $\mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

S

Магнитное поле увеличивает внутреннюю энергию на ½ $\mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

СП II $\lambda > \xi$



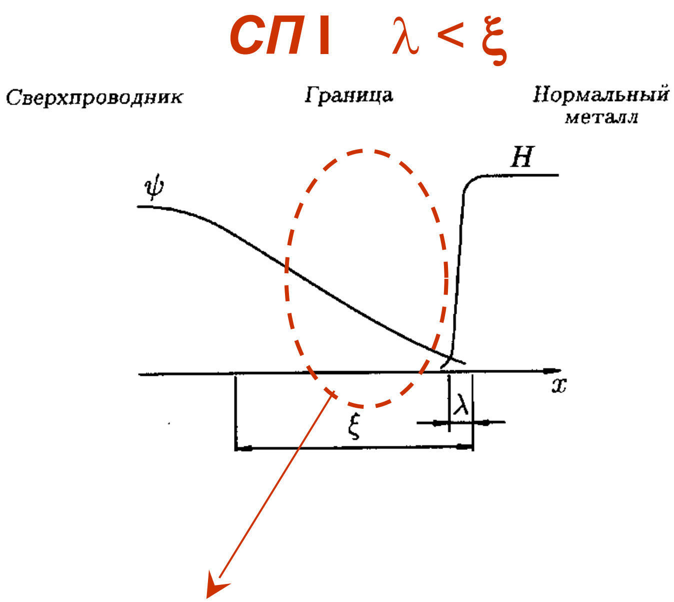
N

Гиббсовские энергии N- и S-областей одинаковы.

По эффекту Мейснера: $B_s = 0$

Размер: max (ξ, λ)

Сверхпроводники 1 рода



Гиббсовские энергии N- и S-областей одинаковы.

Сверхпроводимость дает понижение внутренней энергии металла на величину $\frac{1}{2}\mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

Магнитное поле увеличивает внутреннюю энергию на $\frac{1}{2}\mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

Граница - *сверхпроводящая* область (без магнитного поля) длиной ξ, из которой *вытолкнуты* сверхпроводящие электроны.

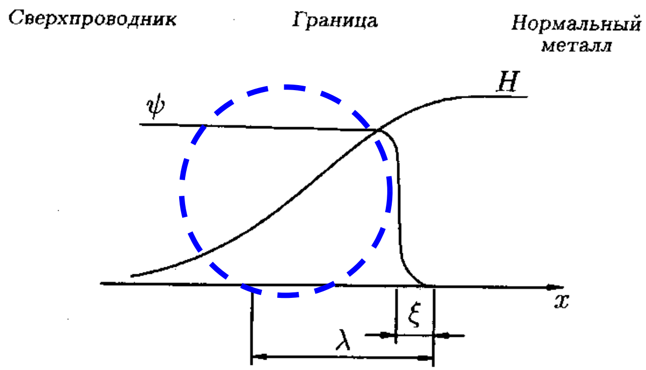
$B_s = 0$

Увеличение энергии на $\frac{1}{2}\mu_0 H_{cm}^2\xi$ на единицу площади поперечного сечения.

Образование NS-границы невыгодно.

Сверхпроводники 2 рода

СП II $\lambda > \xi$



Гиббсовские энергии N- и S-областей одинаковы.

Сверхпроводимость дает понижение внутренней энергии металла на величину $\frac{1}{2}\mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

Магнитное поле увеличивает внутреннюю энергию на $\frac{1}{2}\mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

Граница - *нормальная* область (присутствует магнитное поле) длиной λ, в которой *есть* сверхпроводящие электроны.

↓

Уменьшение энергии на $\frac{1}{2}\mu_0 H_{cm}^2\lambda$ на единицу площади поперечного сечения.

Образование NS-границы выгодно.

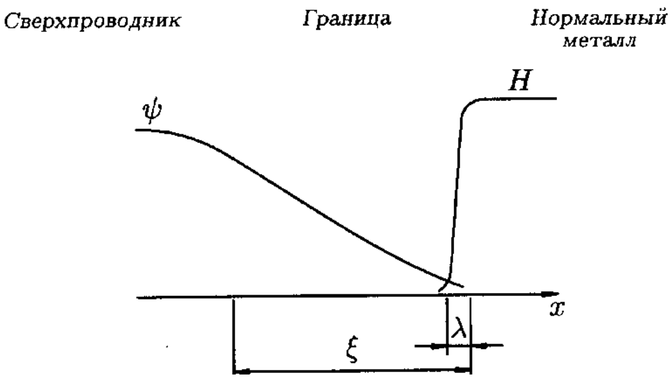
Сверхпроводники 1 и 2 рода

Граница: параметр Гинзбурга-Ландау

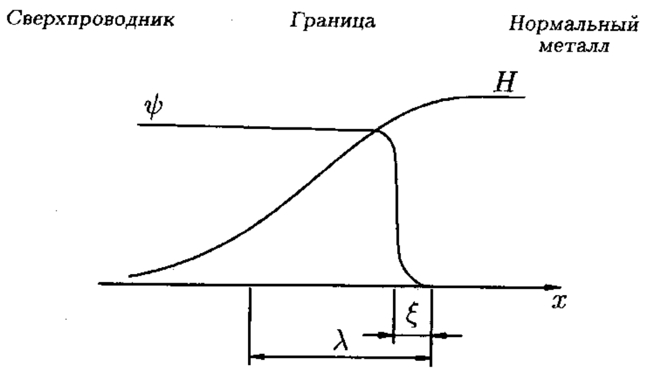
$\kappa = \lambda/\xi$, $\kappa_{крит} = 1/\sqrt{2}$ (точный расчет)

не зависит от температуры

СП I $\lambda<\xi$



СП II $\lambda>\xi$



Каноническая интерпертация:

Шмидт гл. 3 стр. 85-87