Введение в физику сверхпроводимости

Больгинов Виталий Валериевич

Понедельник, аудитория 420 ГЛК

Лекция 5

Уравнения и модельные задачи теории Гинзбурга-Ландау.

Функционал Гинзбурга-Ландау

$g_S = f_S + \mathbf{HB} = f_N + w_{пот} + w_{кин} + w_{магн} + \mu_0 \mathbf{B}^2/2 - \mathbf{HB}$

$$w_{pot} = \alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4$$

$\mathbf{H} \rightarrow \text{const}$ $\quad\quad$ $\mathbf{B} = \text{rot}\,\mathbf{A}$

$$w_{kin} = \left|i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi\right|^2 / 4m$$

$w_{магн} = \mu_0 \mathbf{B}^2/2$ $\quad\quad$ $w_{магн} = \mu_0(\text{rot}\,\mathbf{A})^2/2$

$$g_S = f_N + \alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4 + \left|i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi\right|^2 / 4m + \mu_0(\text{rot}\ \vec{A})^2 - \vec{\mathrm{H}}\ \text{rot}\ \vec{A}$$

Плотность энергии:

$$G_S = F_N + \int_V \left[\alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4 + \left|i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi\right|^2 / 4m + \mu_0(\text{rot}\ \vec{A})^2 - \vec{\mathrm{H}}\ \text{rot}\ \vec{A}\right] dV$$

$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}, t)\exp\{i\theta(\mathbf{r}, t)\}$ $\quad\quad$ $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ $\quad\quad$ $\vec{H} = const(\vec{r})$

Первая вариация функционала Г-Л

$$G_S = F_N + \int_V \left[\alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4 + \left| i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi \right|^2 / 4m + \mu_0 (\mathrm{rot}\ \vec{A})^2 - \vec{\mathrm{H}}\ \mathrm{rot}\ \vec{A} \right] dV$$

Чтобы получить уравнения ГЛ надо найти min функционала ГЛ по *Ψ, Ψ* и A:*

$$\delta_{\Psi} G_s = 0; \qquad \delta_{\Psi*} G_s = 0; \qquad \delta_{\mathbf{A}} G_s = 0$$

$$\alpha\Psi + \beta\,\Psi|\Psi|^2 + (1/4m)(-i\hbar\nabla - 2eA)^2\Psi = 0; \qquad \text{GL-1}$$

$$(i\hbar e/2m)(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + (2e^2/m)|\Psi|^2\mathbf{A} + (1/\mu_0)\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

GL-2

$$\left(i\hbar\vec{\nabla}\Psi + 2e\vec{A}\right)\vec{n} = 0$$

Приведенные уравнения Г-Л: $\Psi = \psi\ \Psi_0$ $\qquad \Psi_0^2 = -\alpha/\beta$

????

ψ - ???

Приведенные уравнения теории ГЛ-I

$\alpha\Psi+\beta\,\Psi|\Psi|^2+(1/4m)\,(-i\hbar\nabla-2eA)^2\Psi=0;$ **(ГЛ Ia)**

$(i\hbar\nabla\Psi+2eA\Psi)\,\mathbf{n}=0,$ где n - единичный вектор, нормальный к поверхности св-ка.

$(1/\mu_0)\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A}=-(i\hbar e/2m)(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)-(2e^2/m)\,|\Psi|^2\,\mathbf{A}$ *(ГЛ IIa)*

Приведенный параметр порядка: $\psi=\Psi(\mathbf{r})/\Psi_0$, $\Psi(\mathbf{r})=\psi\Psi_0=\psi(|\alpha|/2\beta)^{1/2}=(n_{s0})^{1/2}\psi$

где $|\Psi_0|^2=n_{s0}/2=-(\alpha/\beta);$ $H_{cm}{}^2=\beta\,n_{s0}{}^2/\mu_0=\alpha^2/(\mu_0\beta);$

$\alpha\,\psi\,(\alpha/\beta)^{1/2}+\beta\,(\alpha/\beta)^{3/2}\,\psi|\psi|^2+(1/4m)\,(-i\hbar\nabla-2e\mathbf{A})^2\psi\,(\alpha/\beta)^{1/2}=0;$

$\psi\,\alpha^{3/2}/\beta^{1/2}+\alpha^{3/2}/\beta^{1/2}\psi|\psi|^2+(1/4m)\,(-i\hbar\nabla-2e\mathbf{A})^2\psi\,(\alpha/\beta)^{1/2}=0;$

$[\hbar/4m\alpha]\,[i\nabla+(2e/\hbar)A]^2\psi-\psi+\psi|\psi|^2=0$ $\xi^2=\hbar/4m|\alpha|$ [m]

$\xi^2\,[i\nabla+(2\pi/\Phi_0)A]^2\psi-\psi+\psi|\psi|^2=0$ $\Phi_0=h/2e=2\pi\hbar/2e$ [Вб]

$(i\hbar\nabla\Psi+2e\mathbf{A}\Psi)\,\mathrm{n}=0 \quad\rightarrow\quad (i\hbar\nabla\psi+2e\mathbf{A}\psi)\,\mathrm{n}=0$

Приведенные уравнения теории ГЛ - II

Приведенный параметр порядка: $\psi = \Psi(\mathrm{r})/\Psi_0$, $\Psi(\mathrm{r}) = \psi\Psi_0 = \psi\,(\alpha/\beta)^{1/2} = (n_{s0}/2)^{1/2}\psi$

где $|\Psi_0|^2 = n_{s0} = -(\alpha/\beta)$; $H_{cm}{}^2 = \beta\, n_{s0}{}^2/\mu_0 = \alpha^2/(\mu_0\beta)$;

$\hbar/2e = \Phi_0/2\pi$

$$(1/\mu_0)\ \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{A} = -(i\hbar e/2m)(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - (2e^2/m)\,|\Psi|^2\,\mathbf{A}$$

$\lambda^2 = m/(\mu_0\, n_{s0}\, e^2)$

Приведенные уравнения теории ГЛ-II

Приведенный параметр порядка: $\psi = \Psi(\mathrm{r})/\Psi_0$, $\Psi(\mathrm{r}) = \psi\Psi_0 = \psi(\alpha/\beta)^{1/2} = (\mathbf{n}_{s0}/2)^{1/2}\psi$

где $|\Psi_0|^2 = \mathbf{n}_{s0}/2 = -(\alpha/\beta)$; $H_{cm}{}^2 = \beta\,\mathbf{n}_{s0}{}^2/\mu_0 = \alpha^2/(\mu_0\beta)$;

$$(1/\mu_0)\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A} = -(i\hbar e/2m)(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - (2e^2/m)\,|\Psi|^2\,\mathbf{A}$$

$$(1/\mu_0)\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A} = -(i\hbar e/2m)(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)\,\{\mathbf{n}_{s0}/2\} - (2e^2/m)\,|\psi|^2\{\mathbf{n}_{s0}/2\}\mathbf{A}$$

$$\lambda^2 = \mathrm{m}/(\mu_0\,\mathrm{n}_{s0}\,\mathrm{e}^2)$$

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A} = -i\,[\mu_0\mathrm{n}_{s0}\mathrm{e}^2/\mathrm{m}][\hbar/4e](\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\mathbf{A}(e^2\mu_0\mathbf{n}_{s0}/m)$$

$$\hbar/2e = \Phi_0/2\pi$$

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A} = -i\,[\Phi_0/(4\pi\lambda^2)](\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\mathbf{A}/\lambda^2$$

Приведенные уравнения теории ГЛ-II

rot rot **A**= $-i\,[\Phi_0/(4\pi\lambda^2)](\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\mathbf{A}/\lambda^2$

$$\psi = |\psi| e^{i\theta},$$

Приведенные уравнения теории ГЛ-II

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -i\,[\Phi_0/(4\pi\lambda^2)](\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\mathbf{A}/\lambda^2 \qquad \psi = |\psi|e^{i\theta},$$

$$\psi^*\nabla\psi = |\psi|\exp(-i\theta)\cdot\nabla|\psi|\cdot\exp(+i\theta) + |\psi|\exp(-i\theta)\cdot|\psi|\cdot\exp(+i\theta)i\nabla\theta = |\psi|\nabla|\psi| + i|\psi|^2\nabla\theta$$

$$\psi\nabla\psi^* = |\psi|\exp(+i\theta)\cdot\nabla|\psi|\cdot\exp(-i\theta) - |\psi|\exp(+i\theta)\cdot|\psi|\cdot\exp(-i\theta)i\nabla\theta = |\psi|\nabla|\psi| - i|\psi|^2\nabla\theta$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -i[\Phi_0/4\pi\lambda^2]\{2i|\psi|^2\nabla\theta\} - |\psi|^2\mathbf{A}/\lambda^2$$

$$\boxed{\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2}\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta - \mathbf{A}\right).}$$

Обобщенное уравнение Лондонов $|\psi| = 1$

$\lambda^2 = m/(\mu_0 n_{s0} e^2)$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 j_s = \mu_0 n_s e\mathbf{v} = [\mu_0 n_s e^2/m]\{(\hbar/2e)\nabla\theta - \mathbf{A})$$

$$\boxed{\hbar\nabla\theta = 2m\mathbf{v} + 2e\mathbf{A}}$$

Квантование магнитного потока ($\Phi_0 = h/2e$)

$\boxed{\hbar\nabla\theta = 2m\mathbf{v} + 2e\mathbf{A}}$ *обобщенное уравнение Лондонов*

$$\psi = |\psi|e^{i\theta},$$

$$\oint_C \longrightarrow \boxed{\hbar\nabla\theta = 2m\mathbf{v} + 2e\mathbf{A}}$$

$v_s \approx 0$ $\oint_C \nabla\theta\, d\mathbf{l} = 2\pi n,$

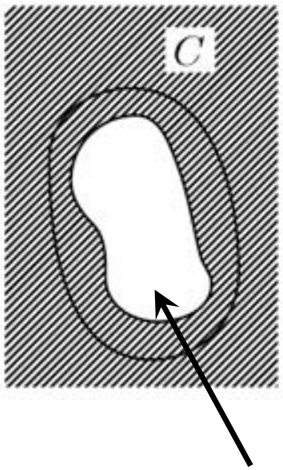
$$\oint \mathbf{A}d\boldsymbol{l} = \oint \mathrm{rot}\mathbf{A}d\mathbf{S} = \oint \mathbf{B}d\mathbf{S} = \Phi$$

$\hbar\, 2\pi n = 0 + 2e\Phi$

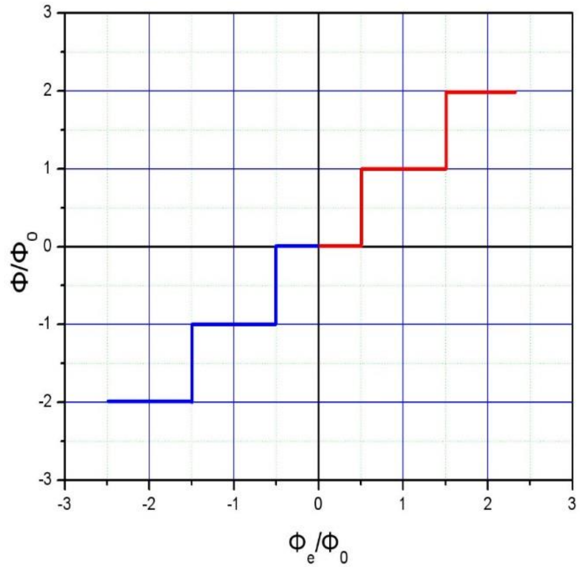
$\Phi = \{\hbar/2e\}2\pi n = \{h/2e\}n = \Phi_0\, n$

$\Phi_0 = h/2e = 2.07 \cdot 10^{-15}$ *Вб*

$\Phi_0 = hc/2e = 2.07 \cdot 10^{-7}$ *Мкс*



$\vec{B} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$



1. За счет подстройки сверхтока магнитный поток может принимать только значения, кратные Φ_0 (квант магнитного потока).

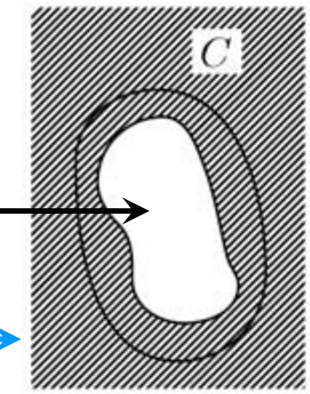
2. Не обязательна полная экранировка H: можно дополнить до 1 кванта.

Градиентная инвариантность теории ГЛ.

$$\text{rot rot}\,\mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2}\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta - \mathbf{A}\right). \qquad \psi = |\psi|e^{i\theta},$$

$\vec{B} = \text{rot}\ \vec{A}$

ψ комплексна



Следствие 1. Векторный потенциал влияет на фазу волновой функции.

Следствие 2. Движущей силой сверхпроводящего тока является градиент фазы сверхпроводящей волновой функции.

A' = **A** + $\nabla\varphi$

B = rot ***A*** = rot ***A'***

rot $\nabla\varphi$ = 0

Преобразование вида:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\varphi,$$

$$\psi = \psi' \exp\left[i\frac{2\pi}{\Phi_0}\varphi(\mathbf{r})\right].$$

$$\theta' = \theta + (2\pi/\Phi_0)\,\varphi$$

Оставляет уравнения Г-Л неизменными.

Следствие 3. Для односвязного сверхпроводника всегда можно выбрать калибровку **A**, чтобы сверхпроводящая волновая функция была вещественной.

Первое уравнение Гинзбурга-Ландау

$\alpha\Psi+\beta\,\Psi|\Psi|^2+(1/4m)\,(-i\hbar\nabla-2eA)^2\,\Psi=0;$

$$\left(i\hbar\vec{\nabla}+2e\vec{A}\right)\Psi\;d\vec{S}=0$$

$(i\hbar\boldsymbol{\nabla}\Psi+2e\mathbf{A}\Psi)\,\mathrm{d}\mathbf{S}=0$

$\mathrm{d}\mathbf{S}=\mathbf{n}dS \quad\rightarrow\quad (i\hbar\nabla\Psi+2eA\Psi)\mathbf{n}=0$

$$\left(i\hbar\vec{\nabla}\Psi+2e\vec{A}\Psi\right)\vec{n}=0$$

Определим вектор сверхскорости $\underline{(1/2m)^*}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}\Psi-2e\mathbf{A}\Psi)=\mathbf{v}$

$$\vec{\mathrm{v}}\;\vec{n}=0$$

Нет переноса тока через границу сверхпроводника!

Такое же уравнение верно и для Ψ^**!*

Хотяяяяя…

Граничные условия теории ГЛ

$$\xi^2 [i\nabla + (2\pi/\Phi_0)A]^2\psi - \psi + \psi|\psi|^2 = 0 \qquad \text{(ГЛ-1b)}$$

$$[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\psi\,\mathbf{n} = 0; \qquad \mathbf{v_S}\,\mathbf{n} = 0$$

Чтобы получить уравнения ГЛ надо найти min функционала ГЛ по Ψ и Ψ^* и A:

$$\delta_\Psi G_s = 0; \qquad \delta_{\Psi^*} G_s = 0;$$

$$\delta|\Psi|^2 = \approx (\Psi^* + \delta\Psi^*)\Psi + (\Psi + \delta\Psi)\Psi^* \qquad \delta_\Psi G_s = \ldots \oiint_S \delta\Psi^*\,\mathbf{v}\,d\mathbf{S} + \oiint_S \delta\Psi\,\mathbf{v}^*d\mathbf{S}$$

$\mathbf{v_S} = 0$ *Слишком сильное условие* $\qquad v_S^{(n)} = 0$ *Слишком сильное условие*

?

$\vec{v}_S \Leftrightarrow \vec{j}_S^{\,GL} \longrightarrow$ *Лучше опрерировать сверхтоком*

$$\text{rot rot}\,\mathbf{A} = -i\,[\Phi_0/(4\pi\lambda^2)](\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\mathbf{A}/\lambda^2$$

$$\boxed{\vec{B} = \text{rot}\vec{A}} \qquad \boxed{\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}_S}$$

$$\mathbf{j}_S = -i\,[\Phi_0/(4\pi\lambda^2)](\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\mathbf{A}/\lambda^2$$

Граничные условия теории ГЛ

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = -i\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{|\psi|^2}{\lambda^2}\mathbf{A}.$$

$\mu_0 \mathbf{j}_S = [\Phi_0/4\pi\lambda^2]\{-i\psi^*\nabla\psi + i\psi\nabla\psi^* - 4\pi|\psi|^2\mathbf{A}/\Phi_0\}$ $\mathbf{v}_S = [i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\psi$

$\mu_0 \mathbf{j}_S = [\Phi_0/4\pi\lambda^2]\{-i\psi^*\nabla\psi + i\psi\nabla\psi^* - 4\pi|\psi|^2\mathbf{A}/\Phi_0\}$ $2 + 2 = 4$

$\mu_0 \mathbf{j}_s = [\Phi_0/4\pi\lambda^2]\{-i\psi^*\nabla\psi - 2\pi\psi\psi^*\mathbf{A}/\Phi_0 + i\psi\nabla\psi^* - 2\pi\psi\psi^*\mathbf{A}/\Phi_0\}$

Вынесем за скобку и умножим на нормаль:

$$\mathbf{n}\mu_0 \mathbf{j}_s = [\Phi_0/4\pi\lambda^2]\{-\psi^*(i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A})\psi\,\mathbf{n} - \psi(-i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A})\psi^*\,\mathbf{n}\} = 0$$

$[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\psi\,\mathbf{n} = 0;$ $\longleftrightarrow$ $[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\psi\,\mathbf{n} = 0;$

$\mathbf{v}_S\,\mathbf{n} \sim \psi;$ $\mathbf{v}_S\,\mathbf{n} = \psi/b$

$\mathbf{n}\,\mathbf{j}_s = [\Phi_0/(4\pi\lambda^2)]\{-|\psi|^2/b + |\psi|^2/b\} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} [i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\,\mathbf{n}\psi = i\psi/b \\ [-i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\,\mathbf{n}\psi^* = -i\psi^*/b \end{array}}$$

b - ???

Граничные условия теории ГЛ

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A} = -i\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{|\psi|^2}{\lambda^2}\mathbf{A}.$$

$$\mu_0 \mathbf{j}_S = [\Phi_0/4\pi\lambda^2]\{-i\psi^*\nabla\psi + i\psi\nabla\psi^* - 4\pi|\psi|^2\mathbf{A}/\Phi_0\}$$

$$\mathbf{v}_S = [i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\psi$$

$$\mu_0 \mathbf{j}_S = [\Phi_0/4\pi\lambda^2]\{-i\psi^*\nabla\psi + i\psi\nabla\psi^* - 4\pi|\psi|^2\mathbf{A}/\Phi_0\}$$

2 + 2 = 4

$$\mu_0 \mathbf{j}_s = [\Phi_0/4\pi\lambda^2]\{-i\psi^*\nabla\psi - 2\pi\psi\psi^*\mathbf{A}/\Phi_0 + i\psi\nabla\psi^* - 2\pi\psi\psi^*\mathbf{A}/\Phi_0\}$$

Вынесем за скобку и умножим на нормаль:

$$\mathbf{n}\mu_0 \mathbf{j}_s = [\Phi_0/4\pi\lambda^2]\{-\psi^*(i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A})\psi\,\mathbf{n} - \psi(-i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A})\psi^*\,\mathbf{n}\} = 0$$

$$[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\psi\,\mathbf{n} = 0; \longleftrightarrow [i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\psi^*\,\mathbf{n} = 0;$$

$\mathbf{v}_S\,\mathbf{n} \sim \psi;$ $\mathbf{v}_S\,\mathbf{n} = \psi/b$ **?**

$$\boxed{\begin{aligned}&[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\mathbf{n}\psi = i\psi/b\\ &[-i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\mathbf{n}\psi^* = -i\psi^*/b\end{aligned}}$$

$$\mathbf{n}\,\mathbf{j}_s = [\Phi_0/(4\pi\lambda^2)]\{-|\psi|^2/b + |\psi|^2/b\} = 0$$

b - ???

Температурная зависимость

Характерные длины:

$\xi^2 = -\hbar^2/(4m\alpha)$; *длина когерентности Гинзбурга-Ландау*

$\lambda^2 = -m\beta/(\mu_0 e^2\alpha)$; глуб. *проникновения маг. поля*

Коэффициенты разложения:

$\alpha(T) = ?$

$\beta(T) = ?$

$\xi^2(T) = ?$

$\lambda^2(T) = ?$

Температурная зависимость

Коэффициенты разложения:

$$\alpha(T) = \alpha_0(T\text{-}Tc) < 0,$$

$$\beta = \mathrm{const}(T) > 0$$

Характерные длины:

$\xi^2 = -\hbar^2/(4m\alpha)$; $\xi \sim [1-(T/T_c)]^{-1/2}$ - *длина когерентности Гинзбурга-Ландау*

$\lambda^2 = -m\beta/(\mu_0 e^2\alpha)$; $\lambda \sim [1-(T/T_c)]^{-1/2}$ – Лондоновская длина глуб. *проникновения маг. поля*

Параметр Гинзбурга-Ландау:

Отношение: $\kappa = \lambda / \xi$ - ?

Температурная зависимость

Коэффициенты разложения:

$$\alpha(T) = \alpha_0(T\text{-}Tc) < 0,$$

$$\beta = \mathrm{const}(T) > 0$$

Характерные длины:

$\xi^2 = -\hbar^2/(4m\alpha)$; $\xi \sim [1-(T/T_c)]^{-1/2}$ - *длина когерентности Гинзбурга-Ландау*

$\lambda^2 = -m\beta/(\mu_0 e^2\alpha)$; $\lambda \sim [1-(T/T_c)]^{-1/2}$ – глуб. *проникновения маг. поля*

Параметр Гинзбурга-Ландау:

Отношение: $\kappa = \lambda / \xi$ - ?

Отношение: $\kappa = \lambda / \xi = \mathrm{const}\ (T)$ - характеристика материала

$\lambda * \xi = ?$

Температурная зависимость

$\lambda * \xi = ?$

$\xi^2 = - \hbar^2/(4m\alpha)$; $\xi \sim [1-(T/ T_c)]^{-1/2}$ - *длина когерентности Гинзбурга-Ландау*

$\lambda^2 = - m\beta / (\mu_0 e^2\alpha)$; $\lambda \sim [1-(T/ T_c)]^{-1/2}$ – глуб. *проникновения маг. поля*

$\alpha(T) = - \mu_0 H_{cm}^2(T)/ n_{s0}(T)$

α - *выигрыш в энергии на 1 сверхпроводящий электрон:* $F_n - F_{s0} = \mu_0 H_{cm}^2/2$

$\Phi_0 = h/2e = 2\pi\hbar/2e$ [Вб]

$n_{s0}(T) = - \alpha(T) / \beta \sim [1-T/ T_c]$

$\mu_0 H_{cm}^2(T)= \alpha^2(T) / \beta \rightarrow H_{cm}(T) \sim \alpha \sim [1-(T/ T_c)]$

Температурная зависимость

$\lambda * \xi = ?$

$\xi^2 = -\hbar^2/(4m\alpha)$; $\xi \sim [1-(T/T_c)]^{-1/2}$ - *длина когерентности Гинзбурга-Ландау*

$\lambda^2 = -m\beta/(\mu_0 e^2\alpha)$; $\lambda \sim [1-(T/T_c)]^{-1/2}$ – глуб. *проникновения маг. поля*

$n_{s0}(T) = -\alpha(T)/\beta \sim [1-T/T_c]$

$\Phi_0 = h/2e = 2\pi\hbar/2e$ [Вб]

$\alpha(T) = -\mu_0 H_{cm}^2(T)/n_{s0}(T)$

$\mu_0 H_{cm}^2(T) = \alpha^2(T)/\beta \rightarrow H_{cm}(T) \sim \alpha \sim [1-(T/T_c)]$

$$\mu_0 H_{cm} = \Phi_0 / (2\sqrt{2}\,\pi\lambda\xi)$$

Температурная зависимость

Коэффициенты разложения:

$\alpha(T) = \alpha_0(T\text{-}Tc) < 0$, $\beta = \mathrm{const}(T) > 0$ $\qquad$ $\alpha(T) = -\mu_0 H_{cm}^2(T)/n_{s0}(T)$

α - выигрыш в энергии на 1 сверхпроводящий электрон: $F_n - F_{s0} = \mu_0 H_{cm}^2/2$

$n_{s0}(T) = -\alpha(T)/\beta \sim [1 - T/T_c]$

$\mu_0 H_{cm}^2(T) = \alpha^2(T)/\beta \rightarrow H_{cm}(T) \sim \alpha \sim [1-(T/T_c)]$

Характерные длины:

$\xi^2 = -\hbar^2/(4m\alpha)$; $\quad \xi \sim [1-(T/T_c)]^{-1/2}$ - *длина когерентности Гинзбурга-Ландау*

$\lambda^2 = -m\beta/(\mu_0 e^2\alpha)$; $\quad \lambda \sim [1-(T/T_c)]^{-1/2}$ – глуб. *проникновения маг. поля*

Параметр Гинзбурга-Ландау:

Отношение: $\kappa = \lambda/\xi = \mathrm{const}(T)$ - характеристика материала

Произведение: $\lambda * \xi \sim [1-(T/T_c)]^{-1}$ - характеристическая площадь

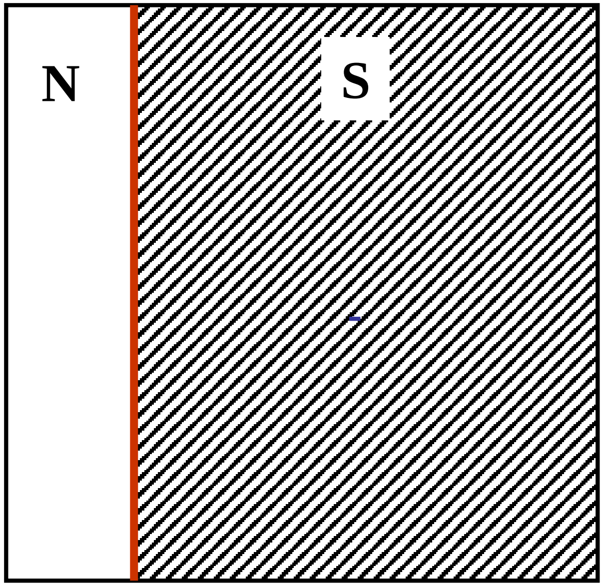
$\lambda * \xi \sim [1-(T/T_c)]^{-1} \sim H_{cm}^{-1}(T)$

$\boldsymbol{\mu_0 H_{cm} = \Phi_0 / (2\sqrt{2}\,\pi\lambda\xi)}$

Перерыв ?

Эффект близости на NS-границе

Рассмотрим изменение сверхпроводящего параметра порядка на границе с нормальным металлом справа и слева от границы.



$$-\psi + \psi|\psi|^2 + \xi^2\,[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)A]^2\psi = 0$$

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A} = -i\,[\Phi_0/(4\pi\lambda^2)](\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\mathbf{A}/\lambda^2$$

$$[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)\mathbf{A}]\,n\,\psi = 0$$

Есть ли возможность пространственно-неоднородной ситуации $\psi = \psi(\mathbf{r})$ при А = 0 ?

Первый интеграл 1 ур-я Г-Л

$$-\xi^2\, d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

Одинаков для всех допустимых ψ(x). Понижение степени дифф. ур-я.

+ g(x)? *f(x)? $\boxed{-\xi^2\, d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;}$ *f(x)? + g(x)?

Первый интеграл 1 ур-я Г-Л

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

Одинаков для всех допустимых ψ(x). Понижение степени дифф. ур-я.

$+ \, g(x)?$ $\quad *f(x)?$ $\quad \boxed{-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;}$ $\quad *f(x)?$ $\quad + \, g(x)?$

$f(x) = d^2\psi/dx^2$

???

Первый интеграл 1 ур-я Г-Л

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

Одинаков для всех допустимых $\psi(x)$. Понижение степени дифф. ур-я.

$+ g(x)?$ $\quad *f(x)?$ $\quad \boxed{-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;}$ $\quad *f(x)?$ $\quad + g(x)?$

$f(x) = d^2\psi/dx^2$ $\quad -\xi^2 (d^2\psi/dx^2)(d\psi/dx) - \psi(d\psi/dx) + \psi^3(d\psi/dx) = 0;$

Ищем дифференциалы каких-то функций.

Первый интеграл 1 ур-я Г-Л

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

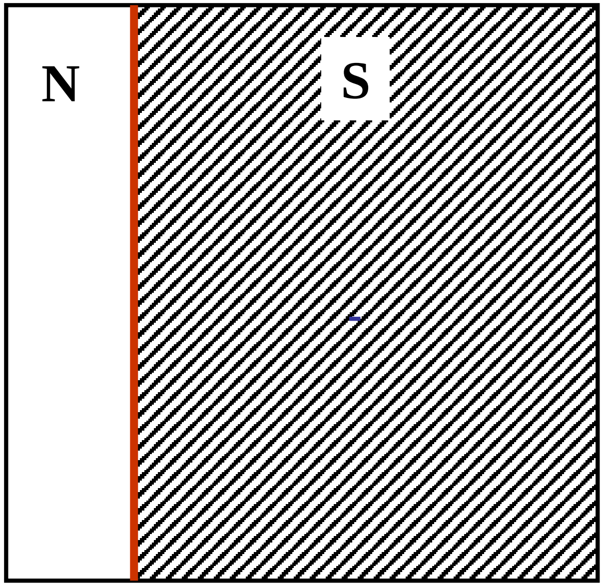
Одинаков для всех допустимых ψ(x). Понижение степени дифф. ур-я.

$+\ g(x)?\quad *f(x)?\quad \boxed{-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;}\quad *f(x)?\quad +\ g(x)?$

$f(x) = d^2\psi/dx^2 \qquad -\xi^2 (d^2\psi/dx^2)(d\psi/dx) - \psi(d\psi/dx) + \psi^3(d\psi/dx) = 0;$

$$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = C,$$

C = ??



Первый интеграл 1 ур-я Г-Л

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

Одинаков для всех допустимых ψ(x).

Понижение степени дифф. ур-я.

$+\ g(x)?$ $\quad *f(x)?$ $\quad \boxed{-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;}$ $\quad *f(x)?$ $\quad +\ g(x)?$

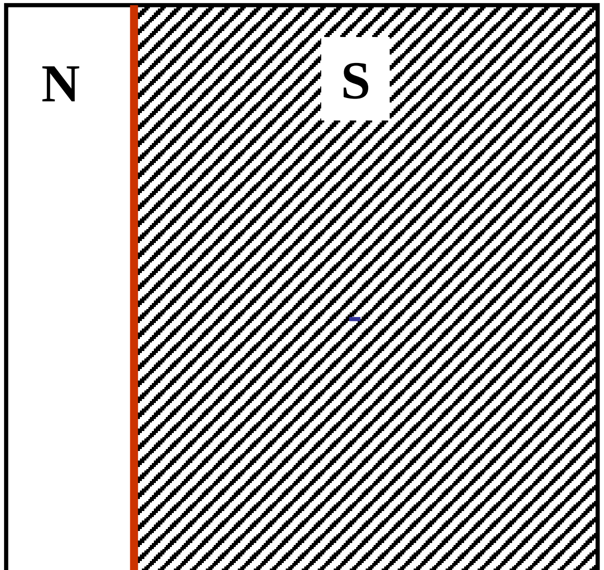
$f(x) = d^2\psi/dx^2$ $\qquad -\xi^2 (d^2\psi/dx^2)(d\psi/dx) - \psi(d\psi/dx) + \psi^3(d\psi/dx) = 0;$

$$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = C,$$

C = -1/2

$$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + (1/2)\psi^4 = -1/2$$

Как извлечь корень?



Интегрируем первый интеграл

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

Одинаков для всех допустимых ψ(x). Понижение степени дифф. ур-я.

+ $g(x)$? *$f(x)$? $\boxed{-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;}$ *$f(x)$? + $g(x)$?

$f(x) = d^2\psi/dx^2$ $-\xi^2 (d^2\psi/dx^2)(d\psi/dx) - \psi(d\psi/dx) + \psi^3(d\psi/dx) = 0;$

$$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = C,$$

$$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + (1/2)\psi^4 = -1/2 \longrightarrow (1/2)(\psi^2-1)^2 = \xi^2(d\psi/dx)^2$$

$$\xi^2(d\psi/dx) = (1/\sqrt{2})(\psi^2-1)$$

Интегрируем

Решение уравнения Г-Л

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

Одинаков для всех допустимых ψ(x). Понижение степени дифф. ур-я.

+ g(x)? *f(x)? $\boxed{-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;}$ *f(x)? + g(x)?

$f(x) = d^2\psi/dx^2$ $-\xi^2 (d^2\psi/dx^2)(d\psi/dx) - \psi(d\psi/dx) + \psi^3(d\psi/dx) = 0;$

$$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = C,$$

$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + (1/2)\psi^4 = -1/2 \longrightarrow (1/2)(\psi^2-1)^2 = \xi^2(d\psi/dx)^2$

$\xi(d\psi/dx) = (1/2)(\psi^2-1) \longrightarrow d\psi/(\psi^2-1) = dx/\xi\sqrt{2} \xrightarrow[y = x/\xi\sqrt{2}]{} d\psi/(\psi^2-1) = dy$

$\mathrm{atanh}(\psi) = y + C = (x-x_0)/\xi\sqrt{2}$

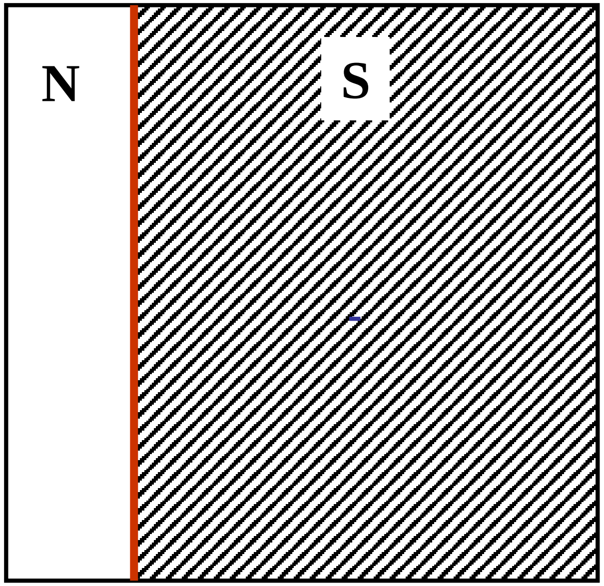
$$\psi = \mathrm{th}\,[(x-x_0)/\sqrt{2}\xi].$$

Масштаб!!!

Вычисление константы

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

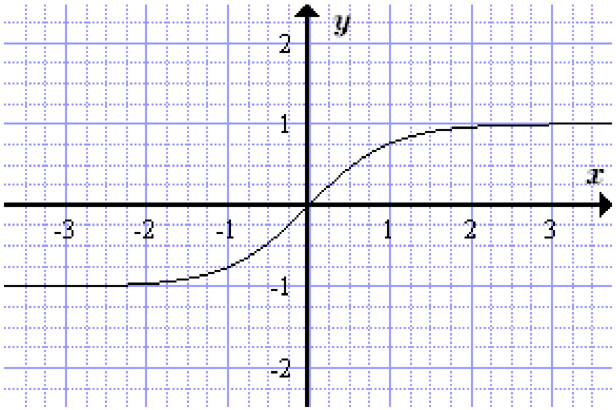
$$\psi = \mathrm{th}\,[(x - x_0)/\sqrt{2}\xi].$$

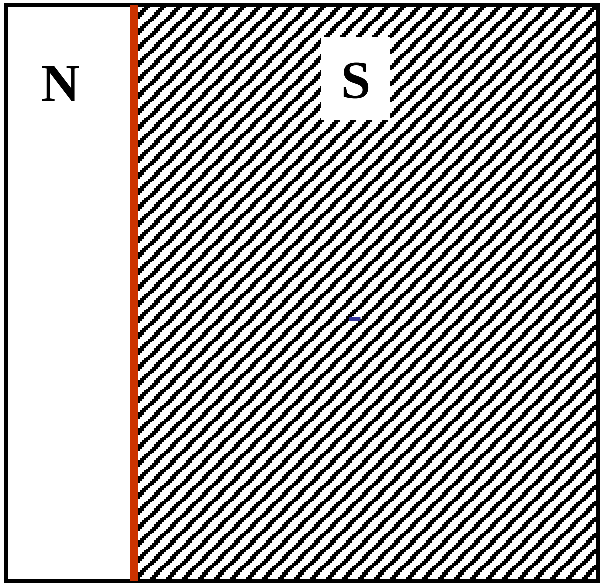


Вычисление константы

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

$$\psi = \mathrm{th}\left[(x - x_0)/\sqrt{2}\xi\right].$$



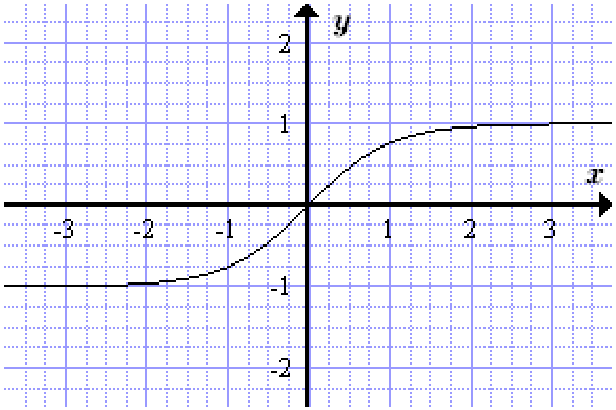


$$x_0 = ???$$

Вычисление константы

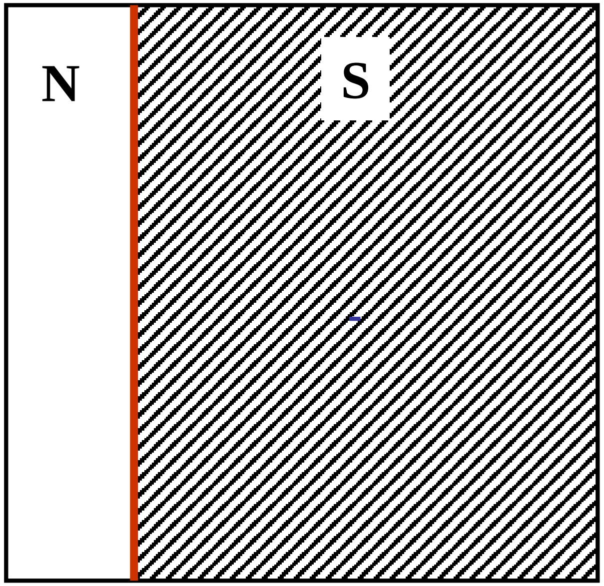
$- \xi^2 d^2\psi / dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$

$$\psi = \operatorname{th}[(x - x_0)/\sqrt{2}\xi].$$



$$\left(i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}\psi \right)\vec{n} = \frac{\psi}{b}$$

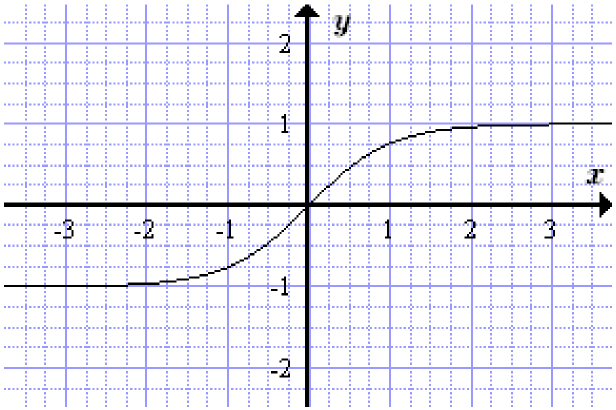
$x_0 = ???$



Вычисление константы

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

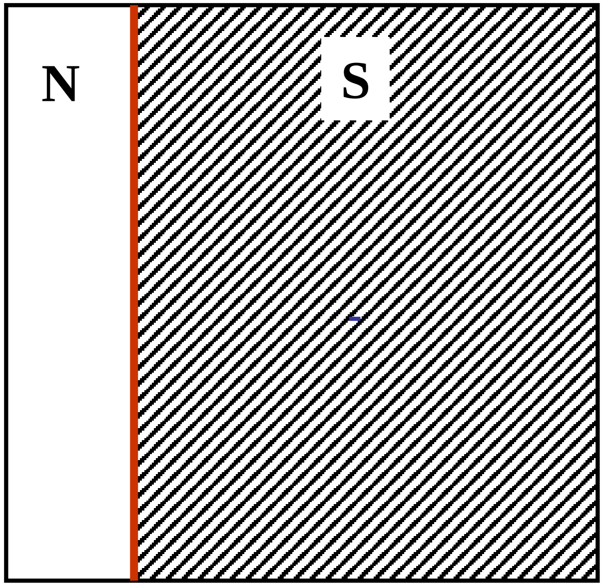
$$\psi = \mathrm{th}\,[(x - x_0)/\sqrt{2}\xi].$$



$$\left(i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}\psi\right)\vec{n} = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x=0) = \frac{\psi}{b}$$

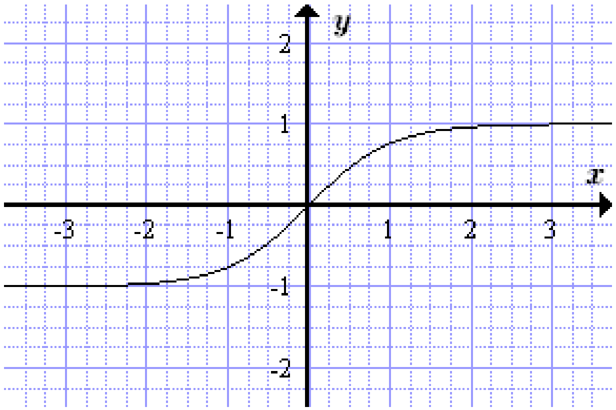
$$x_0 = ???$$



Вычисление константы

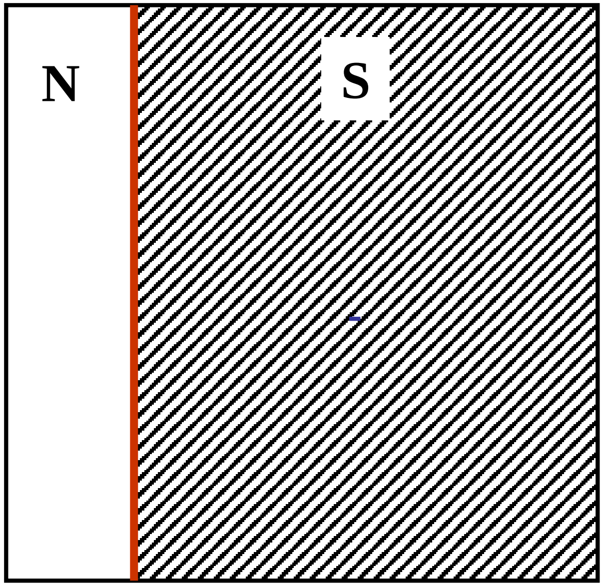
$- \xi^2 d^2\psi / dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$

$$\boxed{\psi = \mathrm{th}\,[(x - x_0)/\sqrt{2}\xi].}$$



$$\left(i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}\psi \right)\vec{n} = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x = 0) = \frac{\psi}{b}$$



$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(x_0/\sqrt{2}\xi\right)} = \frac{\tanh\left(x_0/\sqrt{2}\xi\right)}{b} \Rightarrow b = \mathrm{ch}\left(x_0/\sqrt{2}\xi\right)\mathrm{sh}\left(x_0/\sqrt{2}\xi\right)$$

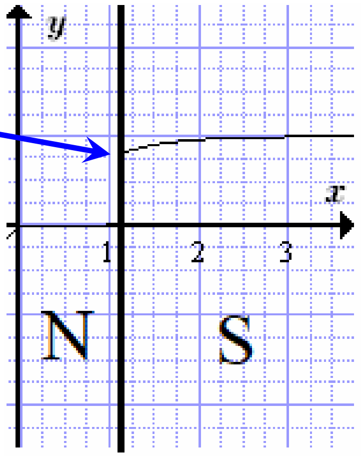
$$\boxed{\mathrm{sh}\left(\sqrt{2}x_0/\xi\right) = b}$$

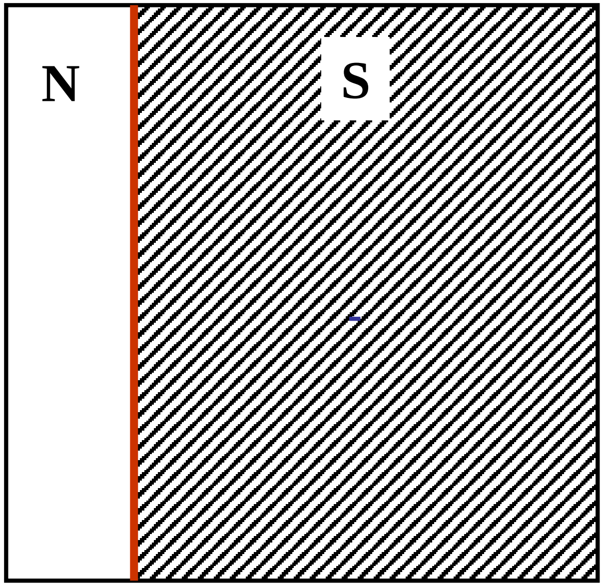
Масштаб!

Упрощенное рассмотрение

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x=0) = \frac{\psi}{b}$$



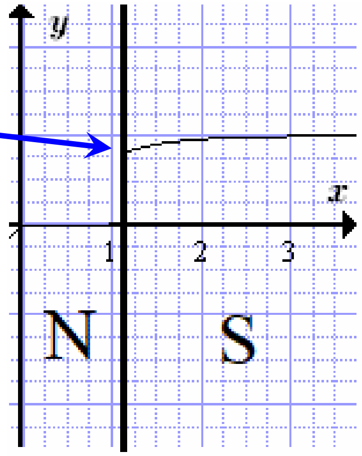


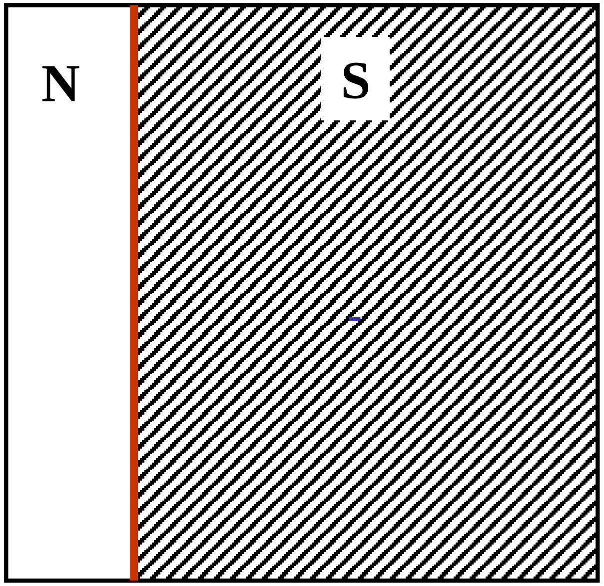
Посчитаем отклонение от равновесного значения.

Упрощенное рассмотрение

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x=0)=\frac{\psi}{b}$$





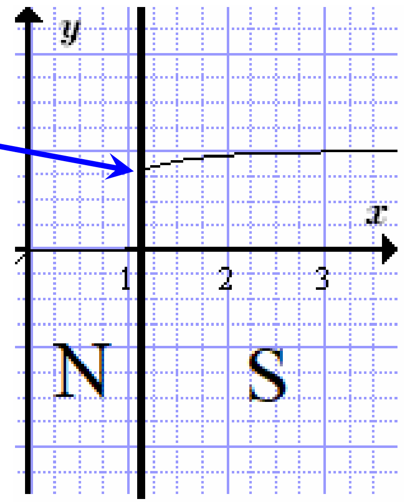
Посчитаем отклонение от равновесного значения.

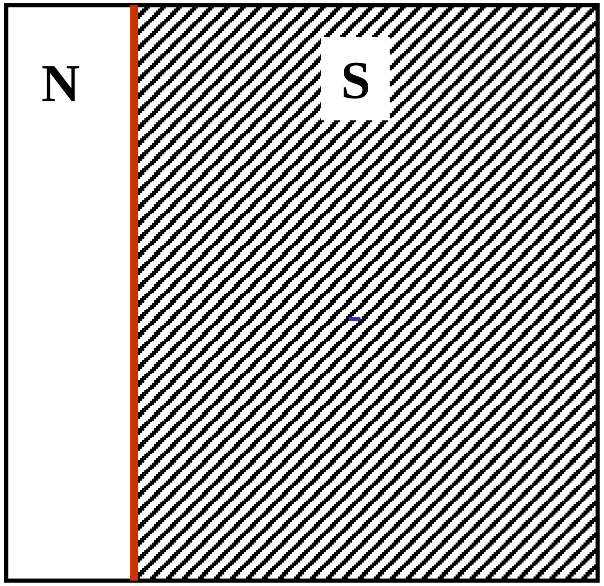
Приближенное решение: $\psi(x)=1-f(x)$, *где* $f(x)<<1$.

Упрощенное рассмотрение

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x=0) = \frac{\psi}{b}$$





Посчитаем отклонение от равновесного значения.

Приближенное решение: $\psi(x)=1-f(x)$, *где* $f(x)<<1$.

Тогда: $\xi^2 d^2f/dx^2 - 1 + f(x) + (1-f(x))^3 = 0;$

$(1-f(x))^3 \approx 1 - 3f(x) \leftrightarrow \xi^2 d^2f/dx^2 - 2f(x) = 0;$

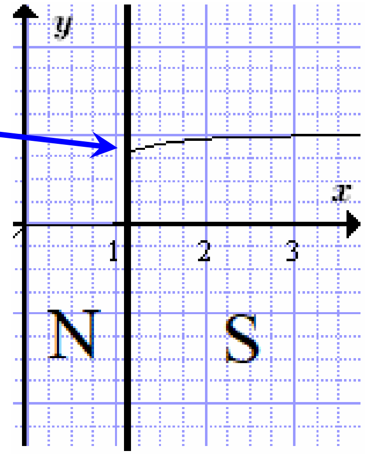
Решение: $f(x) = f_0 \exp[\pm\sqrt{2}(\{x-x_0\}/\xi)];$

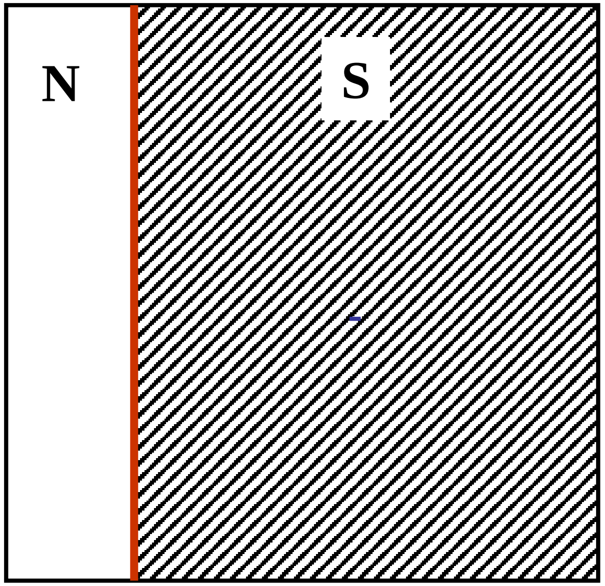
Гран. условия?

Упрощенное рассмотрение

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x=0) = \frac{\psi}{b}$$





Посчитаем отклонение от равновесного значения.

Приближенное решение: $\psi(x)=1-f(x)$, *где* $f(x)<<1$.

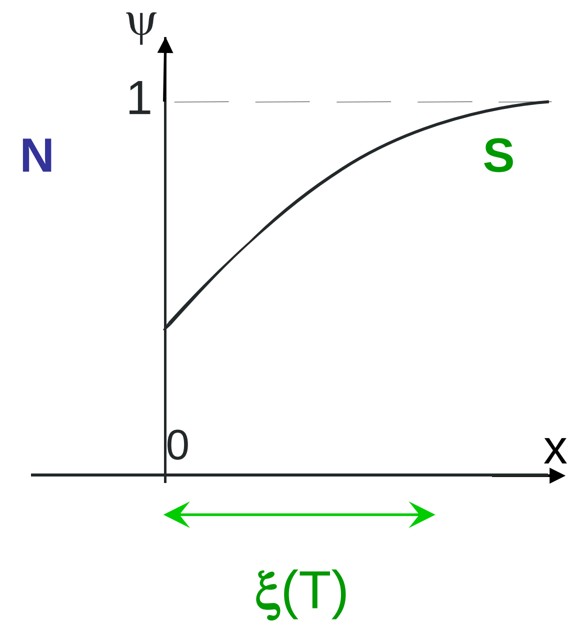
Тогда: $\xi^2 d^2 f/dx^2 - 1 + f(x) + (1-f(x))^3 = 0;$

$(1-f(x))^3 \approx 1 - 3f(x) \leftarrow\rightarrow \quad \xi^2 d^2 f/dx^2 - 2f(x) = 0;$

Решение: $f(x) = f_0 \exp[-\sqrt{2}\,(\{x-x_0\}/\xi)];$ $\quad \psi\,(x=\infty)=1$

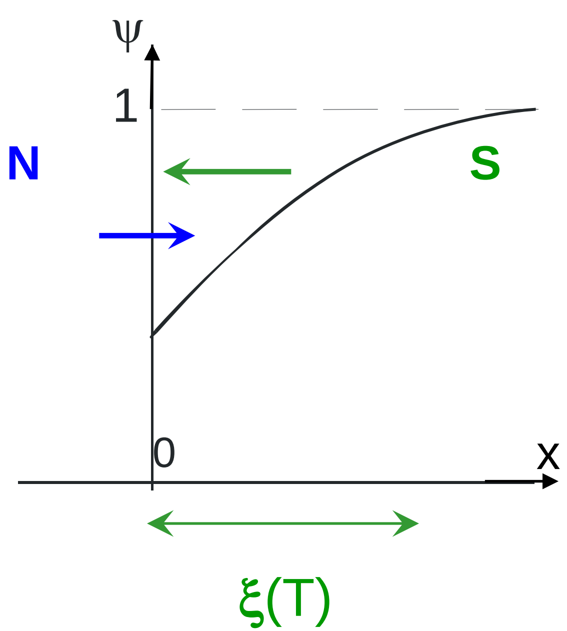
Экспоненциальное восстановление параметра порядка на длине ξ. Масштаб.

Куда делись S-электроны?



Приближенное решение:
ψ(x)=1-f(x), где f(x)<<1. $f(x) = f_0 \exp[-\sqrt{2}\,(x/\xi)]$

Экспоненциальное усиление сверхпроводимости вглубь сверхпроводника.
ξ(T) - характерная длина изменения количества сверхпроводящих электронов.



Сверхпроводимость – статистическое явление.

Сверхпроводящие носители непрерывно зарождаются и разрушаются по действием «распаривающих факторов».

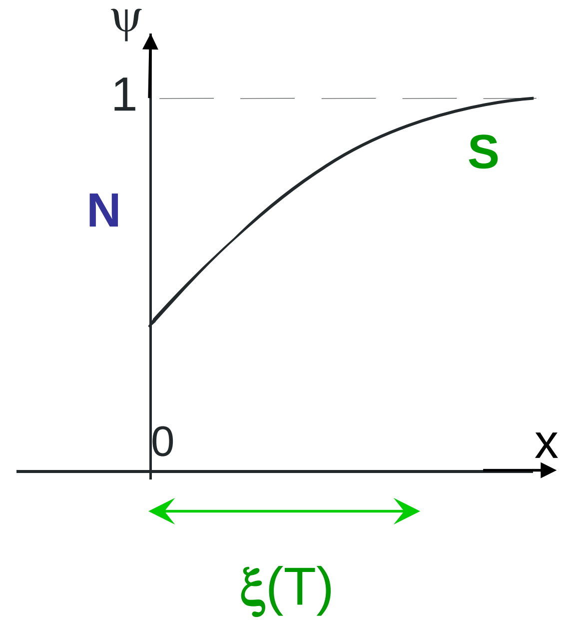
Время жизни (S): $\Delta E \Delta t \;\cong\; \hbar$ $\Delta E \;\cong\; kT_C$

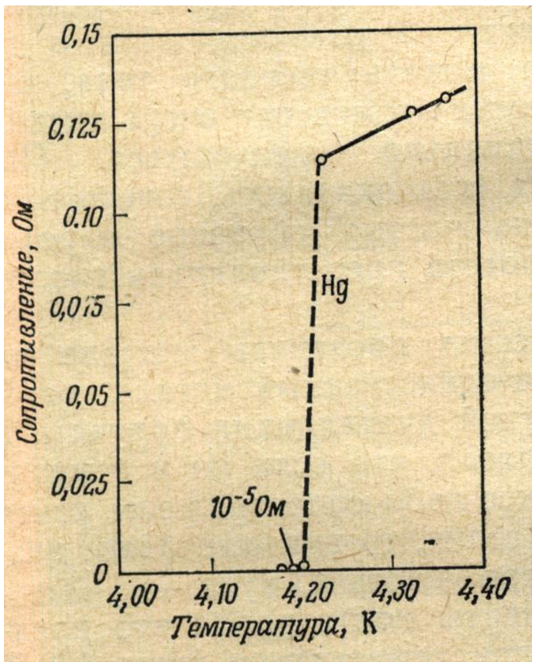
Время жизни (N): $\Delta t \;\cong\; \hbar / \Delta E \;\cong\; \hbar / kT_c$

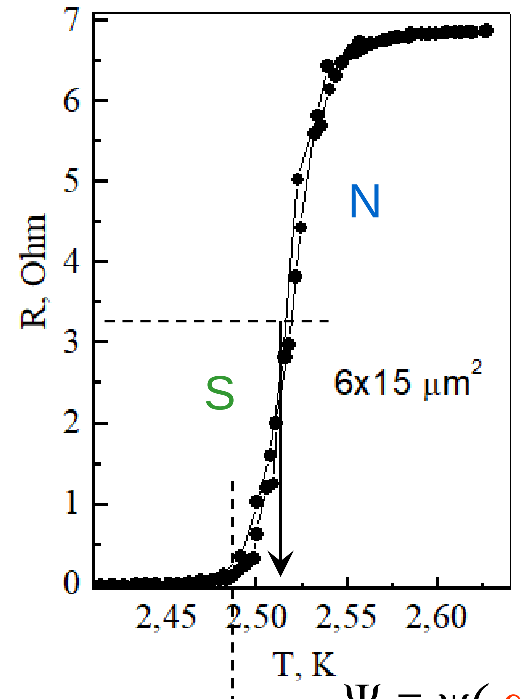
Появление S-электронов в нормальном металле – это возникновение некоторого порядка.

Наведенная сверхпроводимость в N вблизи SN-границы

Предположим, что N – это тот же сверхпроводник, но при T слегка больше T_{cn}*, с небольшим (флуктуационным) параметром парядка* Ψ.







$\alpha(T) = -|\alpha_0|[1-(T/T_c)]$

$\alpha < 0$ @ $T < T_c$

продлим

$\alpha(T) = -|\alpha_0|[1-(T/T_c)]$

$\alpha > 0$ @ $T < T_c$

$\Psi = \psi(-\alpha/\beta)^{1/2}$

I уравнение Г-Л не изменится:

$\alpha\Psi + \beta\,\Psi|\Psi|^2 + (1/4m)(-i\hbar\nabla - 2eA)^2\Psi = 0;$ $\quad \xi^2 = -\hbar/4m\alpha > 0$?

$\pm\psi|\alpha|(|\alpha|/\beta)^{1/2} + |\alpha|^{3/2}/\beta^{1/2}\psi|\psi|^2 + (1/4m)(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})^2\psi(|\alpha|/\beta)^{1/2} = 0;$

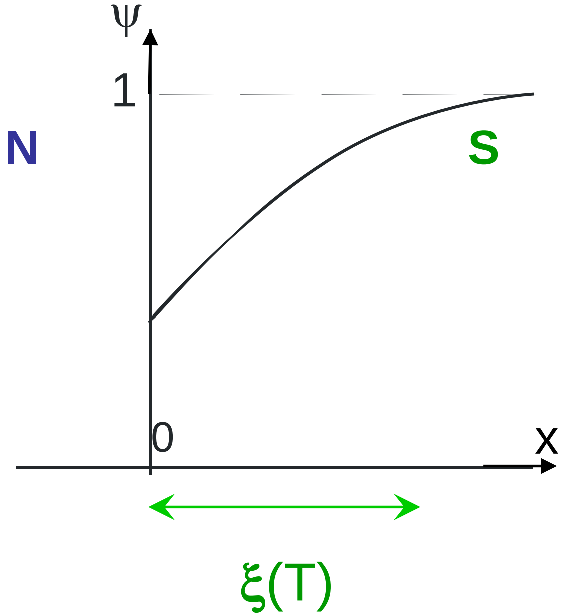
$|\Psi_0|^2 = n_{s0} = +(\alpha/\beta)$

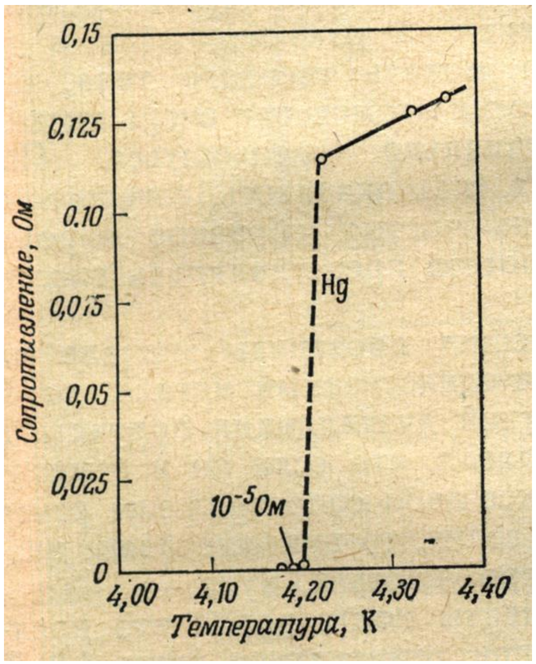
$|\Psi_0|^2 = n_{s0} = |\alpha|/\beta$

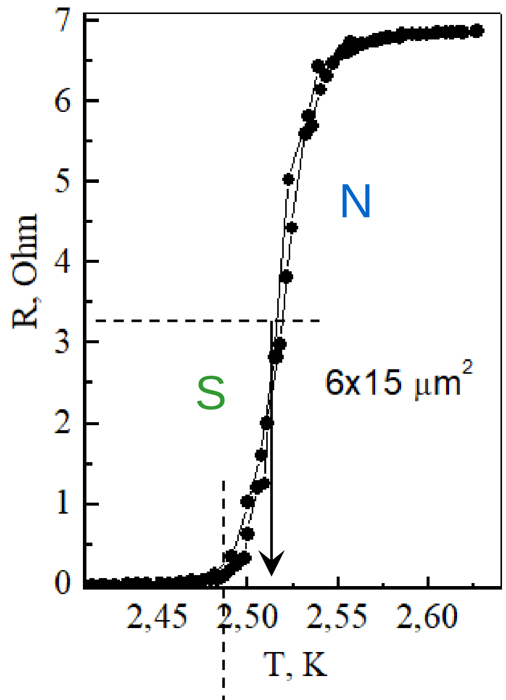
$\xi^2[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)A]^2\psi + \psi + \psi|\psi|^2 = 0$ (N) $\quad \xi^2 = \hbar/4m|\alpha|$!!!

Наведенная сверхпроводимость в N вблизи SN-границы

Предположим, что N –это тот же сверхпроводник, но при T слегка больше T_{cn}*, с небольшим (флуктуационным) параметром парядка* Ψ.







$\alpha(T) = -|\alpha_0|[1-(T/T_c)]$

$\alpha < 0$ @ $T < T_c$

продлим

$\alpha(T) = -|\alpha_0|[1-(T/T_c)]$

$\alpha > 0$ @ $T < T_c$

$\Psi = \psi(|\alpha|/\beta)^{1/2}$

I уравнение Г-Л не изменится:

$\alpha\,\Psi + \beta\,\Psi|\Psi|^2 + (1/4m)(-i\hbar\nabla - 2eA)^2\Psi = 0;$ $\quad \xi^2 = -\,\hbar/4m|\alpha| > 0$?

$|\Psi_0|^2 = n_{s0} = +(\alpha/\beta)$

$|\Psi_0|^2 = n_{s0} = |\alpha|/\beta$

Решим?

$\xi^2\,[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)A]^2\psi + \psi + \psi|\psi|^2 = 0$ (N) $\quad \xi^2 = \hbar/4m|\alpha|$!!!

Наведенная сверхпроводимость в N вблизи SN-границы

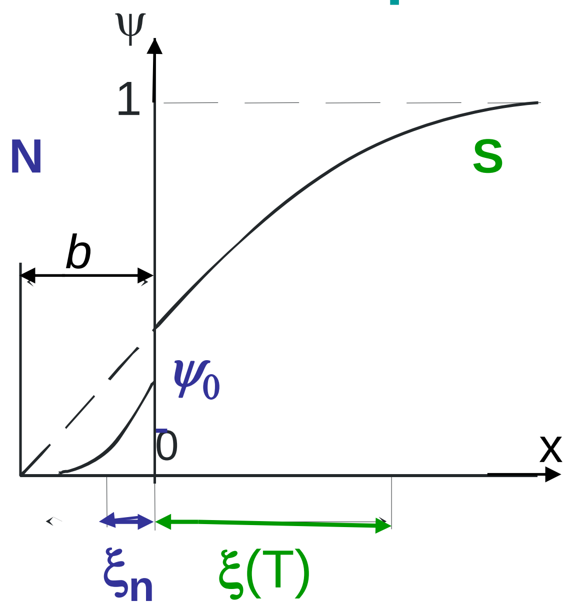
$\alpha(T) = -|\alpha_0|[1-(T/T_c)]$:

$\alpha < 0$ @ $T < T_c$ $\alpha > 0$ @ $T < T_c$

$T \geq T_{cn}$:

$\xi_n^2\,[i\,\nabla]^2\psi + \psi + \psi|\psi|^2 = 0;$ $\xi_n^2 = \hbar^2/(4m\alpha_n)$

$-\xi^2 d^2\psi\,/\,dx^2 + \psi + \psi^3 = 0$ (for 1D-case)



Наведенная сверхпроводимость в N вблизи SN-границы

$\alpha(T) = -|\alpha_0|[1-(T/T_c)]:$

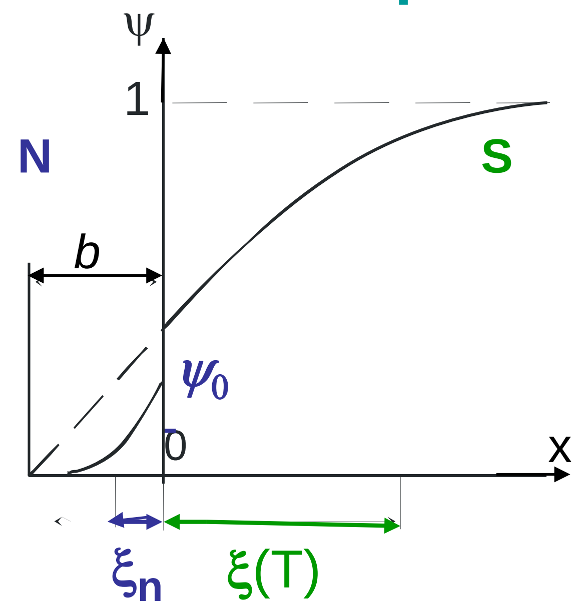
$\alpha < 0 \ @\ T < T_c \qquad \alpha > 0 \ @\ T < T_c$

$\xi_n^2 [i\nabla]^2\psi + \psi + \psi|\psi|^2 = 0; \qquad \xi_n^2 = \hbar^2/(4m\alpha_n)$

$-\xi^2 d^2\psi / dx^2 + \psi + \psi^3 = 0$ (for 1D-case)

$T \geq T_{cn}: \quad \psi(x<0) \ll 1 \leftrightarrow \quad -\xi^2 d^2\psi/dx^2 + \psi = 0;$

$\psi_N(x) = \psi_0 \exp[-|x|/\xi_N]; \ x \to -\infty; \ \psi_N = 0; \qquad x = 0, \ \psi_N = \psi_0$



Экспоненциальное затухание сверхпроводимости вглубь N-слоя.

---

1. *Гран-условие для N-слоя ничего не дает. Нужны еще условия.*
2. *Для разных металлов возможен разрыв.*
3. *Физический смысл* b *приведен на графике.*

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x=0) = \frac{\psi}{b} \Rightarrow \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{b}$$

Одинаковый металл

$$\frac{1}{\psi_S}\frac{\partial\psi_S}{\partial x} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\psi_N}\frac{\partial\psi_N}{\partial x}$$