Введение в физику сверхпроводимости

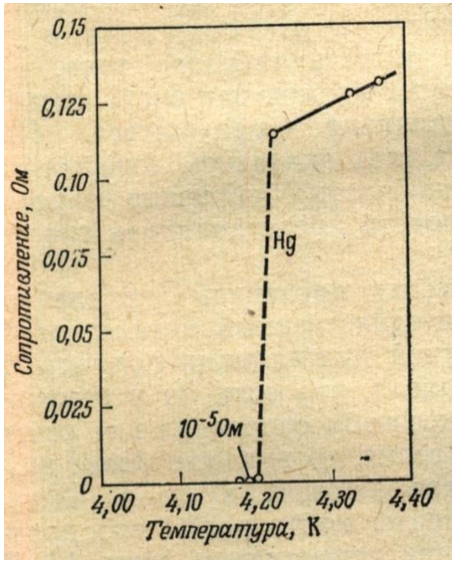
Больгинов Виталий Валериевич

Понедельник, аудитория 420 ГЛК

Лекция 4

Термодинамика сверхпроводников. Функционал и уравнения Гинзбурга-Ландау.

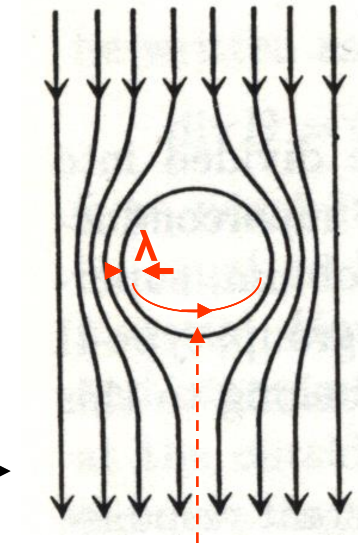
Погружение в сверхпроводимость



Эффекты первого уровня:

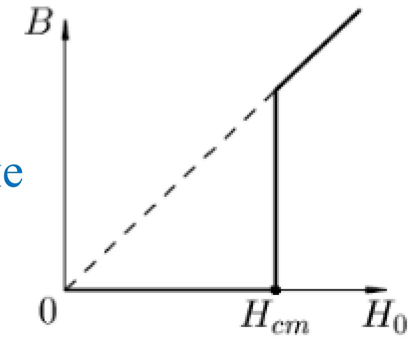
Идеальная проводимость

Идеальный диамагнетизм.



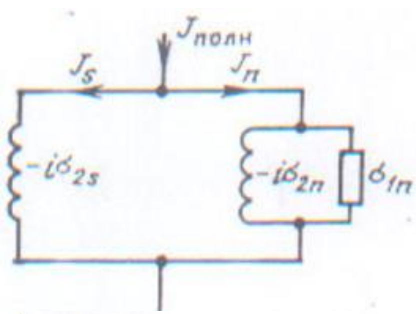
Второй уровень:

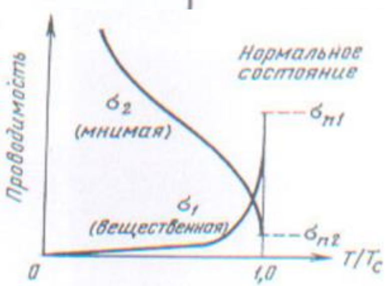
Двухжидкостная модель. $n = n_n + n_s$



Первое уравнение Лондонов.

Комплексная проводимость.



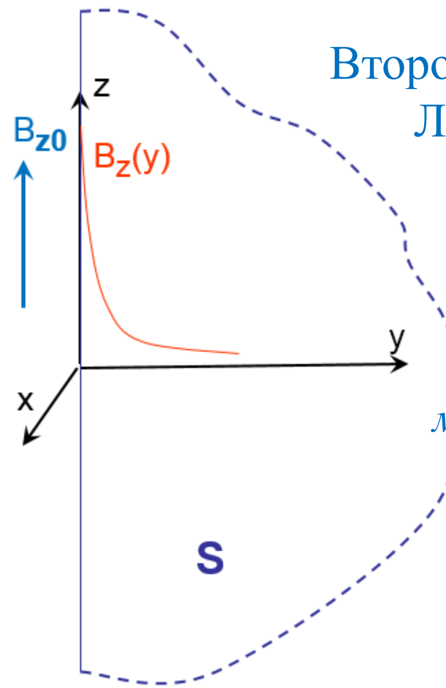


$\Lambda d\mathbf{j}_s/dt = \mathbf{E}$

$\Lambda = m/(n_s e^2)$

$\Lambda = \mu_0 \lambda_L^2$

$\mu_0 \lambda_L^2 d\mathbf{j}_s/dt = \mathbf{E}$



Второе уравнение Лондонов

Экспоненципльное проникновение магнитного поля в сверхпроводник.

λ_L^2 (rot rot $\mathbf{H}$)] = -$\mathbf{H}$

$B_z(y) = B_0 e^{-y/\lambda}$

Уровни понимания сверхпроводимости

3. Теория Гинзбурга-Ландау

Эффект близости в NS-гетероструктурах, сверхпроводники 1 и 2 рода, когерентные явления (вихри Абрикосова, эффект Джозефсона), и еще много всего…

Координатная зависимость n_s.
Макроскопическая квантовая когерентность.

4. Теория БКШ

Понятие о механизме сверхпроводящего состояния, туннельные эффекты, неравновесные явления.

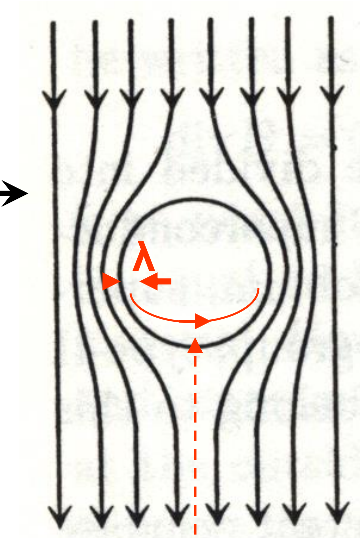
~~5. Микроскопическая теория~~

~~Применение методов математической физики для расчета физических явлений в сверхпроводниках и гетероструктурах.~~

Термодинамика сверхпроводников

Эффекты первого уровня:

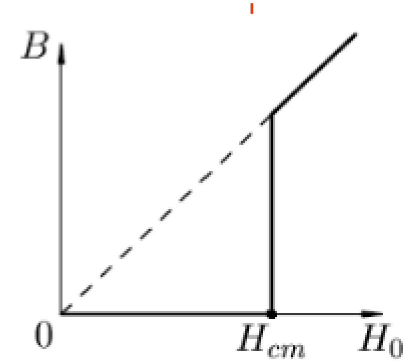
Идеальный диамагнетизм.



Теория Гинзбурга-Ландау.

?

Построение теории: вычисление энергии, минимизация, получение уравнений состояния.



Какой потенциал надо минимизировать

для построения теории сверхпроводимости?

Внутренняя энергия U

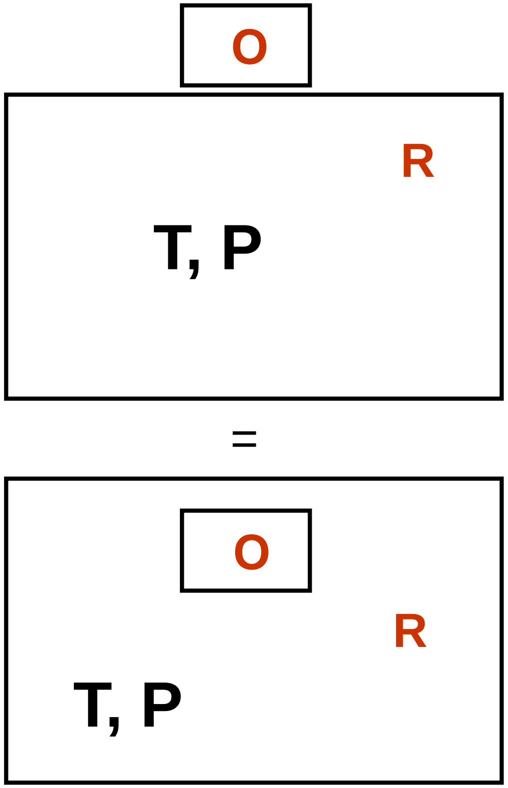
Свободная энергия Гельмгольца $F_A = U_A - TS_A$

Свободная энергия Гиббса $G = U - TS + pV = F + pV$

Термодинамический потенциал $\Omega = -kT\ln(Z)$

?

Основные понятия



Изолированная система: ***образец*** *(=малая подсистема)* ***O***
+ ***резервуар*** *(=термостат)* ***R***
с постоянными (т.е. задаваемыми "руками") **Т и Р.**
Какие бы изменения в ***O*** *не происходили, они не способны изменить параметры (T,P,H) термостата.*

Первое начало термодинамики

Пусть W - работа, совершаемая над подсистемой ***O***, т.е. **образцом**

A - работа, совершаемая подсистемой ***O*** $(A = -\mathcal{W})$

U - внутренняя энергия подсистемы ***O***

Перенос в систему некоторого количества тепла (dQ) приводит к увеличению U

\+ совершение системой работы (dW): $\delta Q = dU + \delta A$

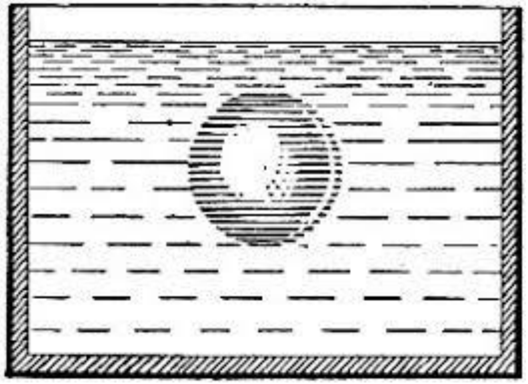
Увеличение внутренней энергии тела U происходит за счет поступления в него тепла δQ и совершения над ним работы $d\mathcal{W}$. $dU = \delta Q + d\mathcal{W}$

Адиабатически изолированная система

O Первое начало термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A \longrightarrow \delta Q = dU = 0 \longrightarrow dU = 0$$

В адиабатически изолярованной системе минимума в равновесии достигает внутренняя энергия (U). $\longrightarrow$ Теория Лондонов ?



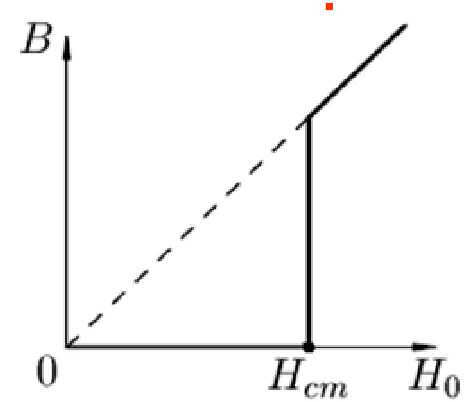
Адиабатически изолированная система

О Первое начало термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A \longrightarrow \delta Q = dU = 0 \longrightarrow dU = 0$$

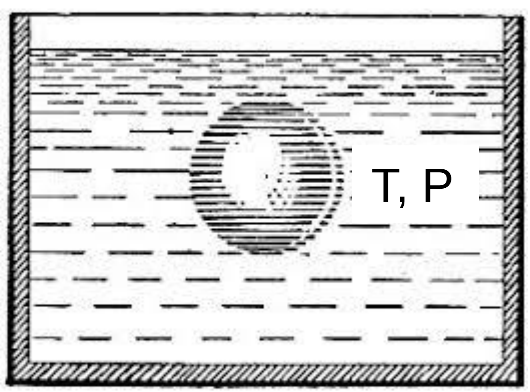
В адиабатически изолированной системе минимума в равновесии достигает внутренняя энергия (U). ⟶ Теория Лондонов

?



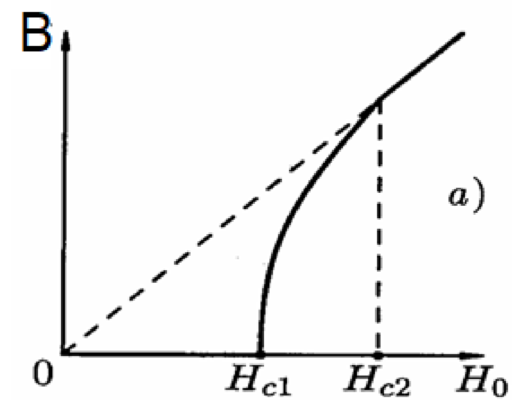
Описательная теория

Недостатки



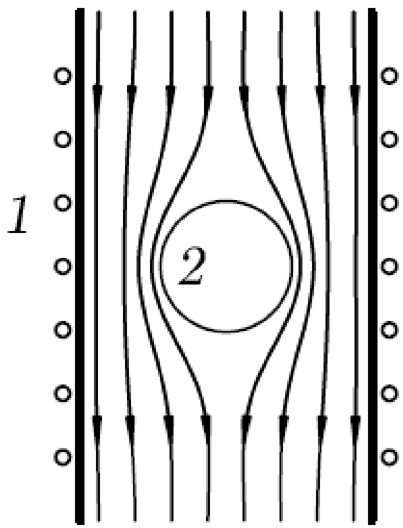
1. *Не объясняет существование сверхпроводников 1 и 2 рода.*

2. Не учитывает квантовой природы электронов.



*3. Предсказывает **неустойчивость** сверхпроводников к переходу в **смешанное состояние**.*

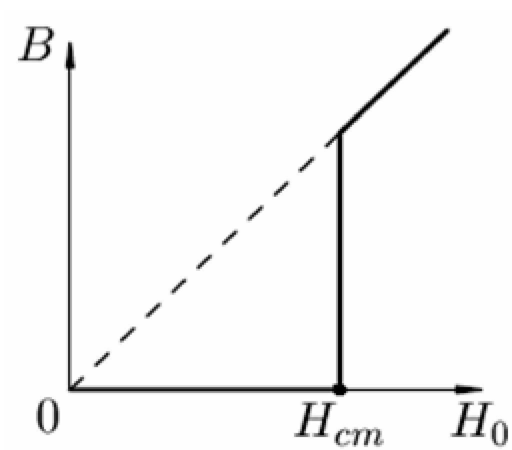
Геометрический фактор сверхпроводников.

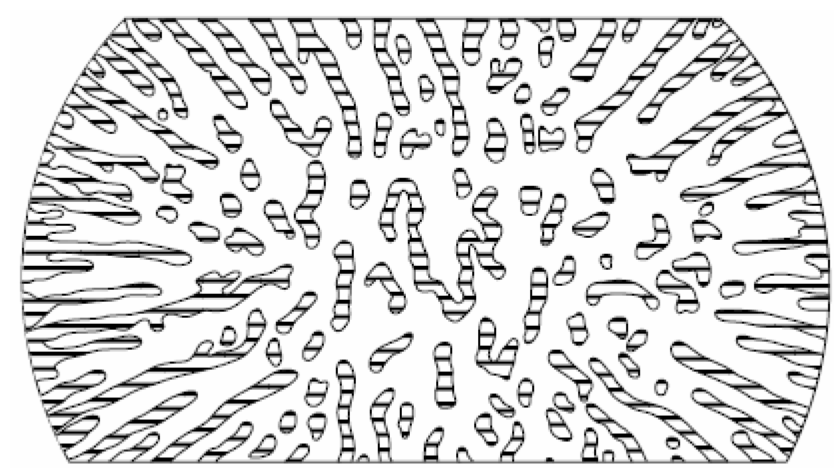


$$H_m > H_0$$

$$H_m = \frac{H_0}{1-n}.$$

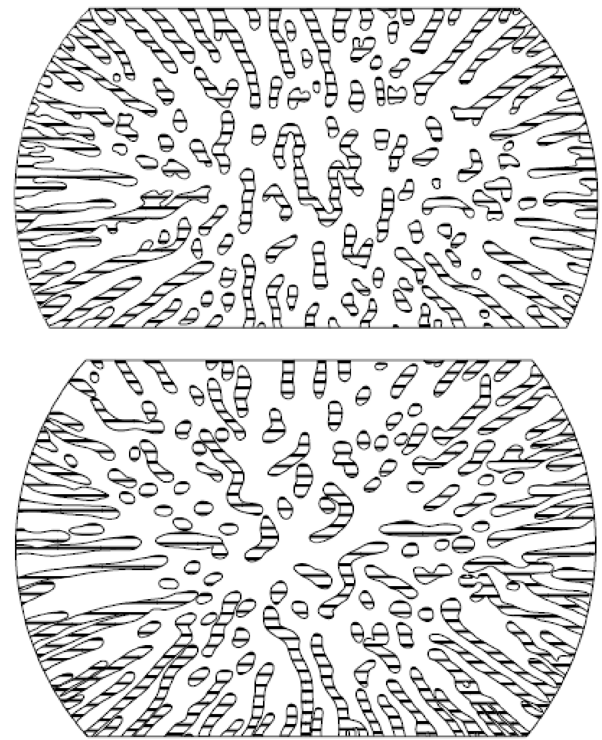
1. Сверхпроводник *вытесняет магнитные линии*.
2. Происходит *сгущение* силовых линий у края сверхпроводника.
3. Магнитное поле у края *увеличивается*.
4. Разрушение сверхпроводимости может начаться *раньше*.
5. Коэффициент определяется *формой* (размагничивающим фактором).

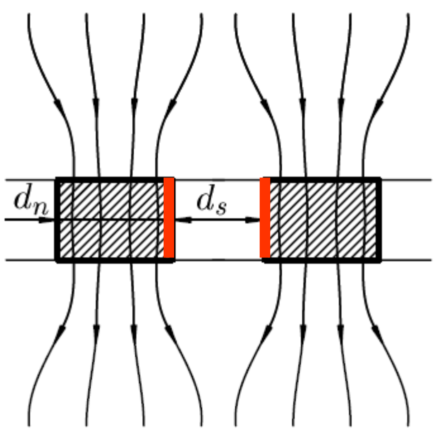




Геометрический фактор. Промежуточное состояние.

1. В полях $H_m < H < H_{cm}$ образец находится в *смешанном* состоянии.
2. Силовые линии магнитного поля проходят через *нормальные* области.
3. Размер нормальной области *подстраивается* автоматически, чтобы величина магнитного поля была равна H_{cm}.



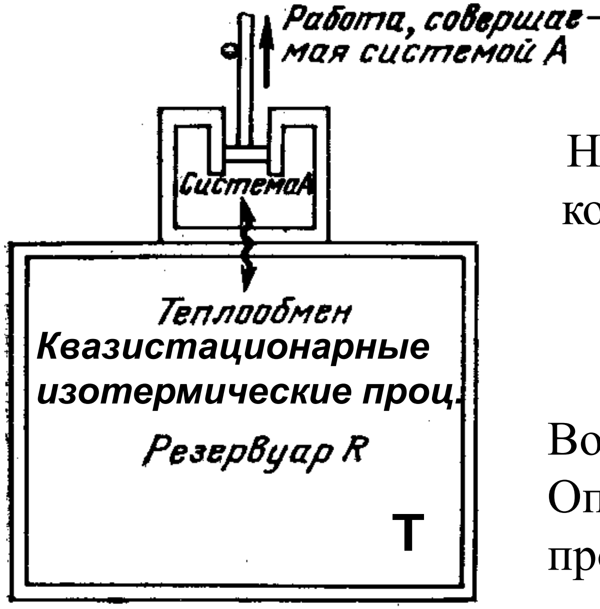


$$H_m = \frac{H_0}{1-n}.$$

$$E_{NS}^{(Lond)} < 0$$

?!

Второе начало термодинамики



когда резервуар задает только T

$T_A = T_R = T$

Неравенство Клаузиуса: в круговом процесса приведенное количества тепла, полученное от термостата отрицательно.

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leqslant 0$$

Возможность введения абсолютной шкалы температур. Определение энтропии для квазистационарных обратимых процессов.

$$S_2 - S_1 = \int\limits_{1 \to 2} \frac{\delta Q}{T}. \qquad dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{квст}}$$

Для произвольных процессов: $$S_2 - S_1 \geqslant \int\limits_{1 \to 2} \frac{\delta Q}{T}$$

Приращение внутренней энергии в квазистационарных процессах:

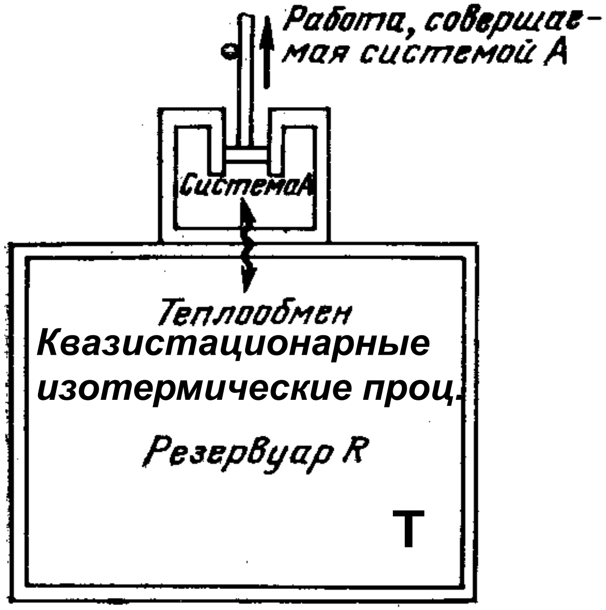
$$\delta Q = TdS = dU + pdV$$

$$dU = TdS - pdV \longrightarrow U = U(S,V)$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$$

$$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$$

Изотермические процессы



когда резервуар
задает только T

$T_A = T_R = T$

$0 \geq + dF$

$$S_2 - S_1 = \int_{1\to 2} \frac{\delta Q}{T}. \longrightarrow TdS \geq \delta Q = dU + \delta A$$

$$\delta A \leq -dU + TdS = -d(U - TS) = -dF$$

Свободная энергия (Гельмгольца):

$F = U - TS$ $\qquad\qquad$ $\delta W \geq dF$

1. Работа, совершенная над образцом в изотермическом процессе, приводит к увеличению свободной энергии.

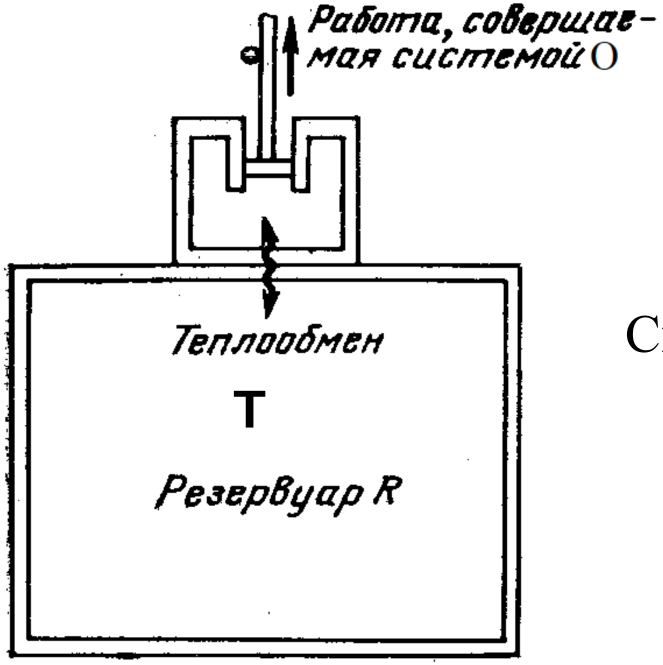
2. В равновесии ($\delta W = 0$) свободная энергия Гельмгольца системы с фиксированной температурой минимальна ($dF = 0$).

Свободная энергия в *произвольных* квазистационарных процессах:

$$dF = dU - d(TS) = (TdS - pdV) - TdS - SdT = -pdV - SdT \quad \rightarrow \quad F = F(V,T)$$

$$p = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \qquad S = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \qquad ? \qquad S = kT\ln(\Gamma) \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{C_V}{T}$$

Как совершить работу над сверхпроводником?



Работа совершенная над образцом в изотермическом процессе приводит к увеличению свободной энергии.

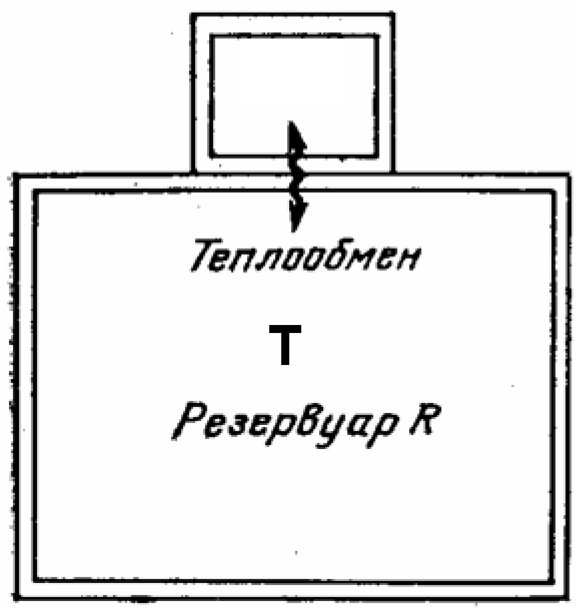
Свободная энергия (Гельмгольца):

$$\delta W = -p\,dV \rightarrow 0$$

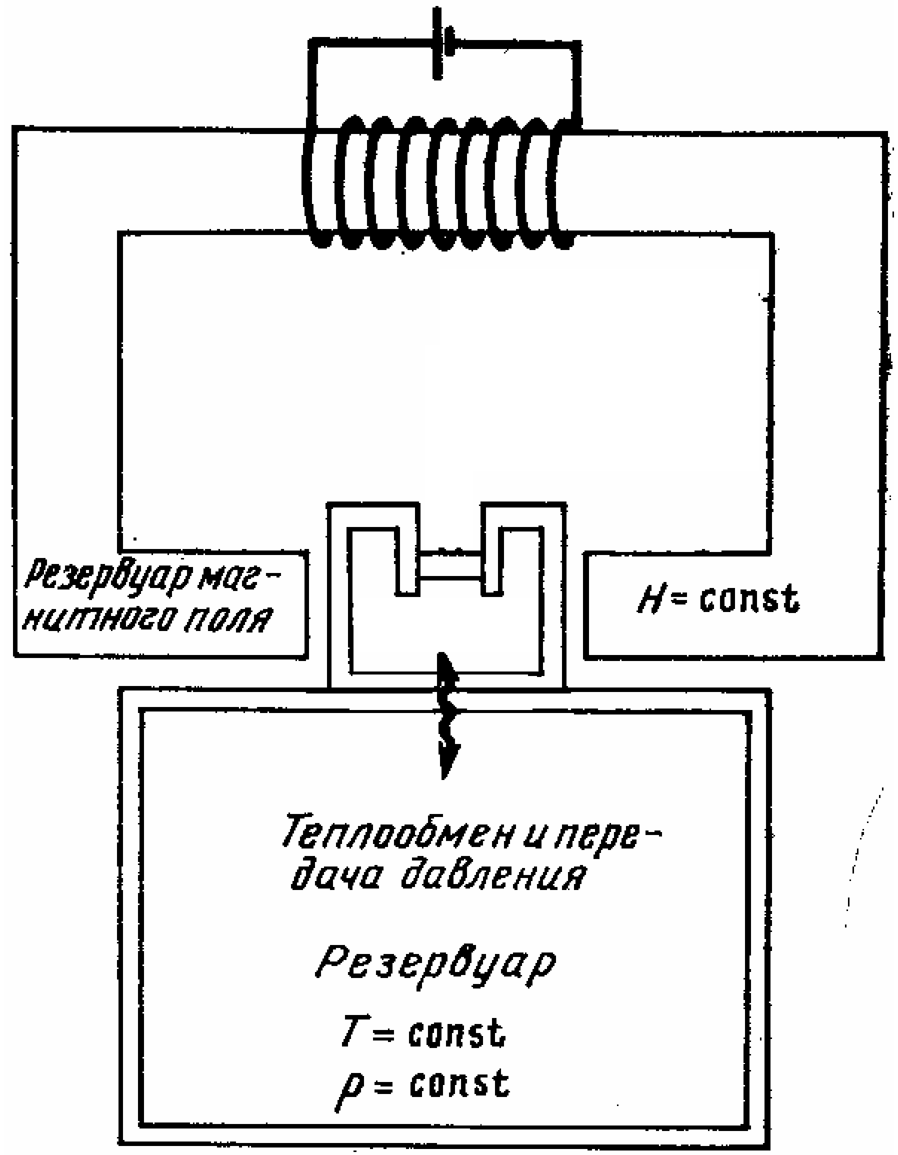
Квазистационарные изотермические проц.

когда резервуар задает только T

$T_A = T_R = T$



Как совершить работу над сверхпроводником?



$$\delta W \geq dF$$

$$F = U - TS$$

Включение магнитного поля

приводит увеличению

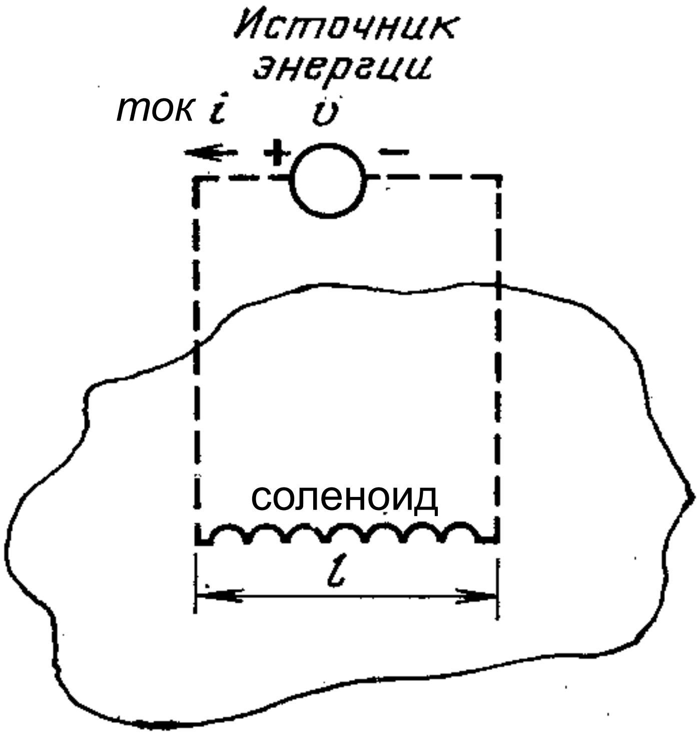
внутренней энергии

(+ E_{kin})

$$dF \neq -p\,dV - S\,dT \qquad F \neq F(V,T)$$

?

Работа источника магнитного поля



$\delta W = I\, U\, dt$ – *работа источника энергии*

Выразим I и U через характеристики магнитного поля

Магнитное поле на оси соленоида длиной L из N витков:

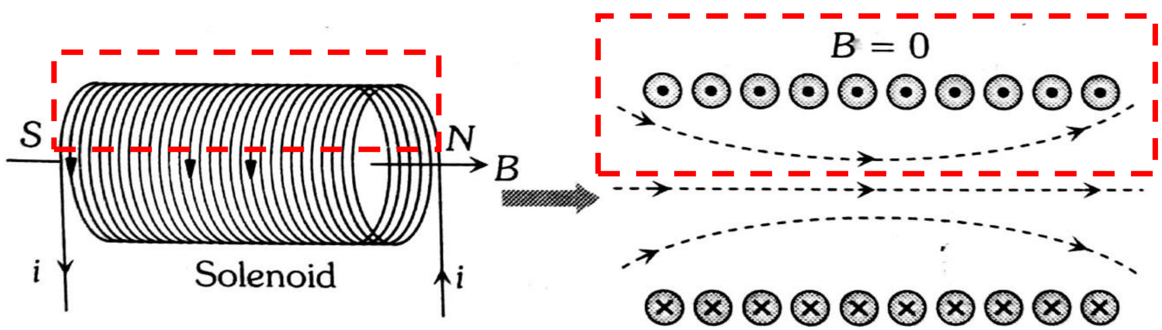
$$L\,H = N\,I \quad \rightarrow \quad I = LH / N$$

ЭДС индукции в соленоиде при увеличении тока $\boldsymbol{i}$:

$$\varepsilon = -\,d\Phi / dt = -NS\, dB / dt = -U$$

$S = \pi R^2$-*площадь витка*

$$U dt = d\Phi = NS\, dB$$



Работа источника:

$$\delta W_{ист} = I|\varepsilon|\, dt = SL\, \mathbf{H}d\mathbf{B}$$

$\delta w_{ист} = \mathbf{H}d\mathbf{B}$ на ед. объема

Напряженность и индукция

$\delta w_{ист} = \mathbf{H}d\mathbf{B}$

$B = \mu_0 H$ или $B \neq \mu_0 H$?

Каждый заряд движется в самосогласованном поле всех остальных зарядов.

Микроуровень $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} \rightarrow (1/\mu_0)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{j}$,

Усредним (макроуровень):

$$(1/\mu_0)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{j}_{своб} + \mathbf{j}_{связ}$$

$$(1/\mu_0)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \boldsymbol{j}_{своб} + \langle e n_{связ}\mathbf{v}\rangle$$

$\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}B = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}D = \rho$$

Тогда уравнение приобретет вид:

$\mathrm{rot}\,[(1/\mu_0)\mathbf{B} - \mathbf{M}] = \boldsymbol{j}_{своб}$ или $\mathrm{rot}\,\mathbf{H^*} = \mathbf{j}$,

где *макроскопическое поле намагничивания (напряженность):*

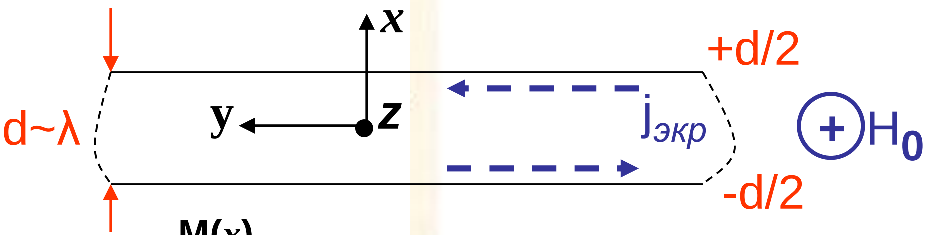
$\mu_0\mathbf{H^*} = \mathbf{B} - \mu_0\,\mathbf{M}$

$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H^*} + \mathbf{M})$

В образцах с геометрией протяженной вдоль направления поля (длинных цилиндрах, пластинах и т.д.) $\mathbf{H^*} = \mathbf{H_0}$ - внешнему приложенному полю.

Намагниченность сверхпроводящей пластины

Вернемся к сверх. пластине с толщ. d



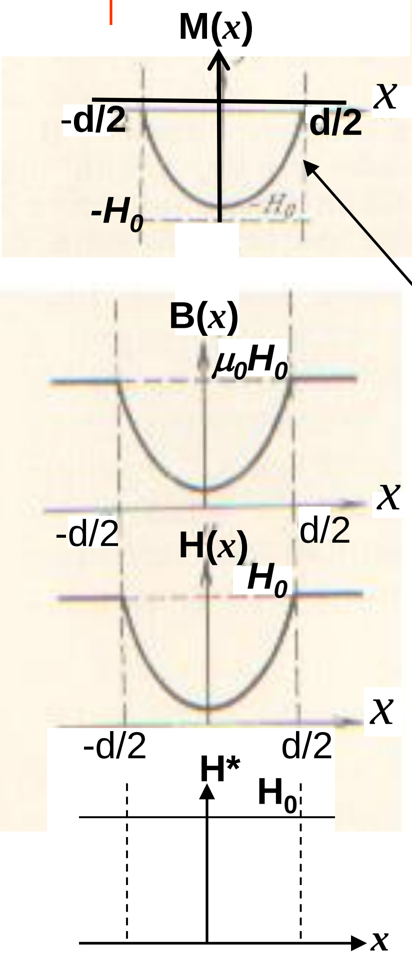
$$B_z(x) = B_0 ch(x/\lambda)/ch(d/2\lambda)$$

$$j_y(x) = (B_0/\mu_0\lambda)\, sh(x/\lambda)/ch(d/2\lambda)$$

Диамагнетик: $\boldsymbol{j}_{св} = \mathrm{rot}\boldsymbol{M}_{экр} \;\rightarrow\; dM_z/dx = j_y(x) \;\rightarrow\; \int$

Намагниченность, созданная токами на расстоянии x от поверхности:

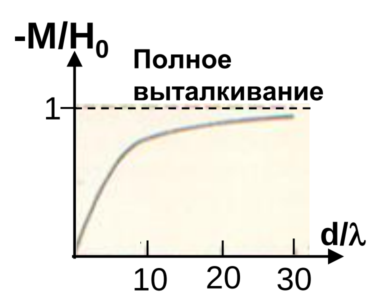
$$M(x) = \int_{d/2}^{x} j(x)dx = B_0/\mu_0 \{[ch(x/\lambda)/ch(d/2\lambda)]-1\} \qquad (3.15)$$



Можно видеть, что поле намагничивания $H^* = (1/\mu_0)B(x) - M(x)$, ***действительно, в любой точке равно внешнему полю*** $H_0 = B_0/\mu_0$.

Средний по объему магнитный момент:

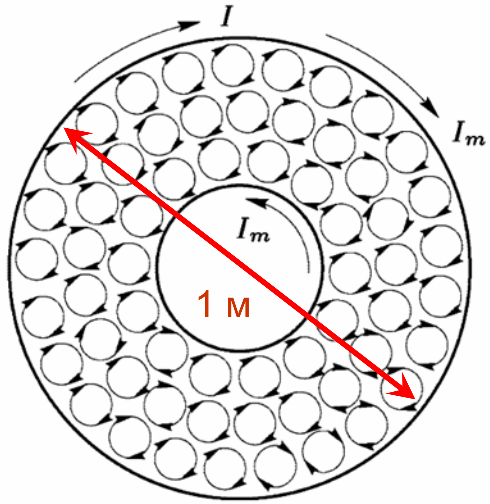
$$M = [1/(d/2)]\int_0^{d/2} M(x)dx = $$
$$= B_0/\mu_0\,[(2\lambda/d)\, th(d/2\lambda) - 1]$$



в пределе толстой пластины $d \gg \lambda$:

$th(d/2\lambda) \rightarrow 1,\;\; 2\lambda/d \rightarrow 0 \qquad M = -H_0 \qquad B = 0$

для $d/(2\lambda) \rightarrow \infty$



Сверхпроводник как магнетик

-- Сверхпроводящие электроны – свободны. Сверхток подчиняется уравнениям Максвела.

\+ Сверхток возникает по внутренним причинам и не требует внешнего источника

+/- Сверхток локализован у поверхности сверхпроводника. Аналогия с током связанных зарядов.

Магнитное поле сверхтока можно рассматривать как намагниченность при больших R.

$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H^*} + \mathbf{M}) = \mathbf{0}$ $\quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ $\quad \rightarrow \quad \mu = 0,\ \mathbf{M} = -\mathbf{H}$ $\quad \mathbf{M} = \chi\mathbf{H_e}$ $\quad \chi = -1$

$\delta w_{ист} = +\mathbf{H^*dB}$ на ед. объема

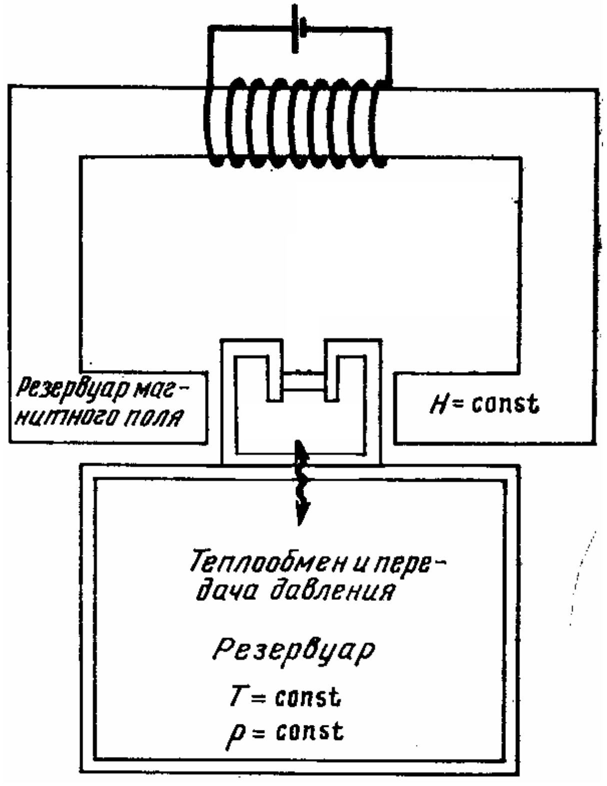
$\delta w_{ист} = \mu_0\mathbf{H^*}d(\mathbf{H^*} + \mathbf{M}) = \mu_0\, d(\mathbf{H^{*2}}/2) + \mu_0\mathbf{H^*}d\mathbf{M}$

$dw_н = \mu_0\, \boldsymbol{H^{*2}}/2$ - работа на создание магнитного поля $\boldsymbol{H^*}$ (поля намагничивания)

$dw_{\mathbf{M}} = \mu_0\boldsymbol{H^*}d\mathbf{M}$ - элемент работы (подсистемы А) *работа по намагничиванию*

$dw_н = \boldsymbol{H^*}d\boldsymbol{B}$ – элемент работы намагничивания с учетом создания магнитного поля

Свободная энергия магнетика



$\delta w = \mathbf{H*dM}$ $\qquad \delta A = -\,\mathbf{H*dM}$

$$\delta Q = TdS = dU - \mathbf{H}d\mathbf{M}$$

$$dU = TdS + \mathbf{H}d\mathbf{M} \longrightarrow U = U(S,M)$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_M \qquad H = \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_S$$

$$dF = dU - d(TS) = (TdS + HdM) - TdS - SdT = HdM - SdT \quad \rightarrow \quad F = F(M,T)$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_M \qquad H = \left(\frac{\partial F}{\partial M}\right)_S$$

$\mathbf{M} \leftrightarrow \mathbf{B}$?

$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$

Энергия сверхпроводника в магнитном поле (макроуровень)

Свободная энергия (Гельмгольца): $F = U - TS$

$$H = 0 \;\rightarrow\; H = H_0$$

1. Работа соверенная над телом в изотермическом процессе приводит к увеличению свободной энергии. $\delta W \geq dF$

2. В равновесии ($\delta A = 0$) свободная энергия Гельмгольца системы с фиксированной температурой минимальна ($dF = 0$).

$$+\int_{M=0}^{M=-H_0} HdM = -\int_{M=0}^{M=-H_0} HdH = +\int_{-H_0}^{0} HdM = H^2/2\Big|_0^{-H_0}$$

3.1. Критическое поле массивного материала (критическое термодинамическое магнитное поле). Пусть длинный сверхпроводящий цилиндр из сверхпроводника первого рода помещен в однородное продольное поле H_0. Найдем то значение этого поля, при котором произойдет разрушение сверхпроводимости, т. е. найдем H_{cm}.

Если $H_0 < H_{cm}$, то существует эффект Мейсснера – Оксенфельда, т. е. $\mathbf{B} = 0$ и магнитный момент единицы объема цилиндра $\mathbf{M}$ равен

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H}_0/4\pi. \tag{3.1}$$

При изменении внешнего поля $\mathbf{H}_0$ на величину $d\mathbf{H}_0$ источник магнитного поля совершит работу над единицей объема сверхпроводника, равную

H*d*M ?

$$-\mathbf{M}\,d\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0\,d\mathbf{H}_0/4\pi. \tag{3.2}$$

Следовательно, при изменении поля от 0 до H_0 источник поля совершит работу

-H*d*M ?

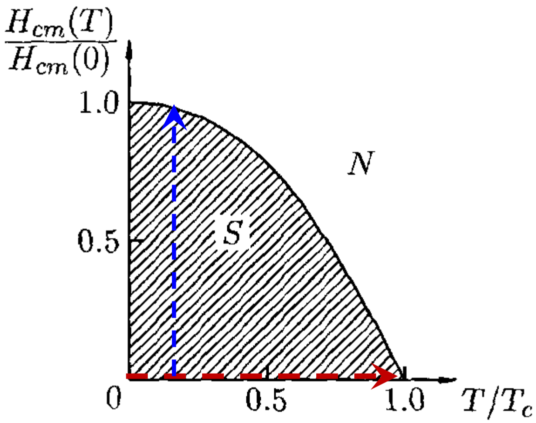
$$-\int_0^{H_0} \mathbf{M}\,d\mathbf{H}_0 = H_0^2/8\pi. \qquad \mu_0\mathbf{H^2}/2 \tag{3.3}$$

Эта работа запасена теперь в свободной энергии сверхпроводника, находящегося в магнитном поле H_0. Таким образом, если плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного поля равна F_{s0}, то плотность свободной энергии сверхпроводника в магнитном поле равна

$$F_{sH} = F_{s0} + H_0^2/8\pi. \tag{3.4}$$

$\mu_0\mathbf{H^2}/2$

Энтропия и теплоемкость сверхпроводника в точке перехода $T=T_c$, $H=0$



$$H_c(T) = H_c^{(0)}\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$$

Рассмотрим переход сверхпроводника в нормальное состояние под действием магнитного поля.

$$F_n = F_s(0) + \mu_0 H^2{}_{cm}/2, \longrightarrow F_n - F_s = \mu_0 H^2{}_{cm}/2,$$

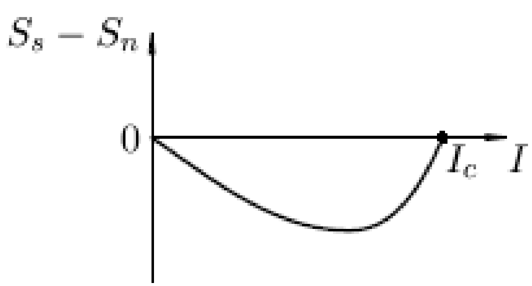
Таким образом, $\boldsymbol{H_{cm}}$ характеризует выгодность сверхпроводящего состояния по сравнению с нормальным.

$$S = -(\partial F/\partial T)_{W,M} \rightarrow S_n - S_s = -\mu_0 H_{cm}(\partial H_{cm}/\partial T)_W$$

$$(\partial H_{cm}/\partial T)_{T_c} < 0 \quad \Rightarrow S_n > S_s \longrightarrow H_{cm}(T_c)=0 \rightarrow S_n = S_s \text{ при } T=T_c$$

1. При $T < T_c$ производная $\partial H_{cm}/\partial T < 0$ (эксперимент). Значит сверхпроводящее состояние *более упорядочено*, чем нормальное.

2. Теорема Нернста: энтропия всех тел при $T = 0$ равна нулю. Значит производная $H_{cm}(T)$ при $T=0$ имеет *нулевую производную*.



3. $S_n = S_s$ при $T=T_c$. Переход в сверхпроводящее состояние при $T = T_c$ – *второго рода*. Можно применять теорию фазовых переходов второго рода Ландау.

Энтропия и теплоемкость при $T<T_c$, $H\neq 0$

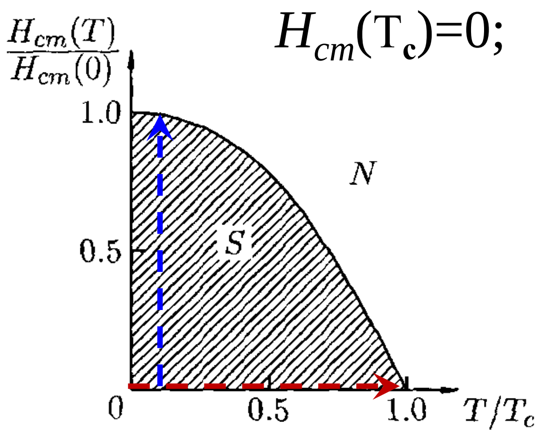
$$F_n - F_s = \mu_0 H^2{}_{cm}/2, \qquad S_n - S_s = -\mu_0 H_{cm}\left(\partial H_{cm}/\partial T\right)_W$$

$$dF = -SdT, \quad S = -\left(\partial F/\partial T\right)_W$$

При $T < T_c$ переход в нормальное состояние происходит под действием магнитного поля. $\boldsymbol{H_{cm}}$ характеризует выгодность сверхпроводящего состояния по сравнению с нормальным. Разность энтропий не равна нулю, следовательно происходит переход первого рода с поглощением скрытой теплоты.

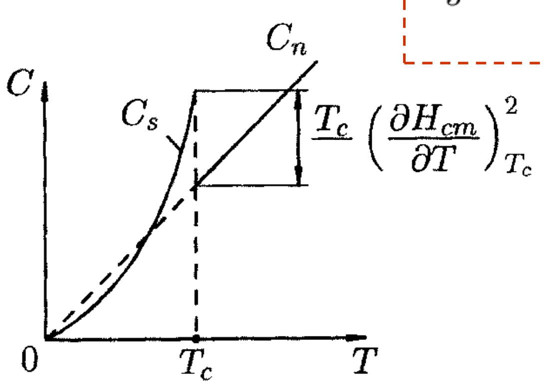
$$C_s - C_n = \frac{T}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T}\right)^2 + H_{cm}\frac{\partial^2 H_{cm}}{\partial T^2}\right]$$

$H_{cm}(T_c)=0;$



$$C = T\partial S/\partial T$$

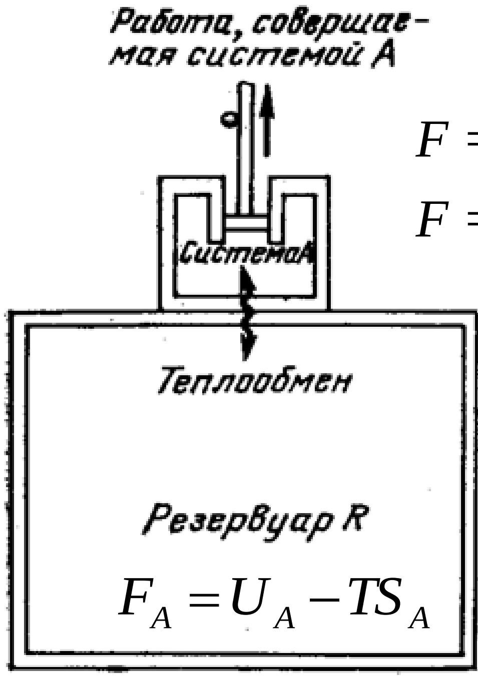
$$C_s - C_n = \frac{T_c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T}\right)^2_{T_c}$$



Формула Рутгерса.

Термодинамические потенциалы

Свободная энергия Гельмгольца



$$F_A = U_A - TS_A$$

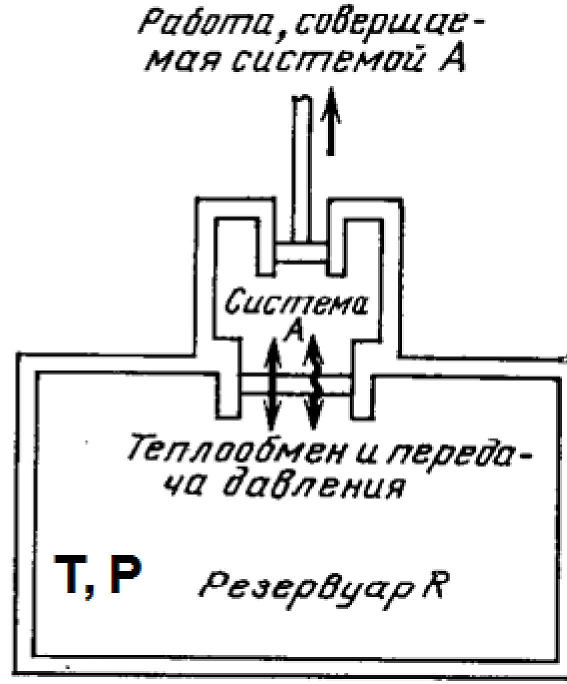
$$F = F(M,T)$$

$$F = F(B,T)$$

Какой потенциал надо минимизировать для построения теории сверхпроводимости?

$$H = \left(\frac{\partial F}{\partial M}\right)_S \quad ?$$

Свободная энергия Гиббса



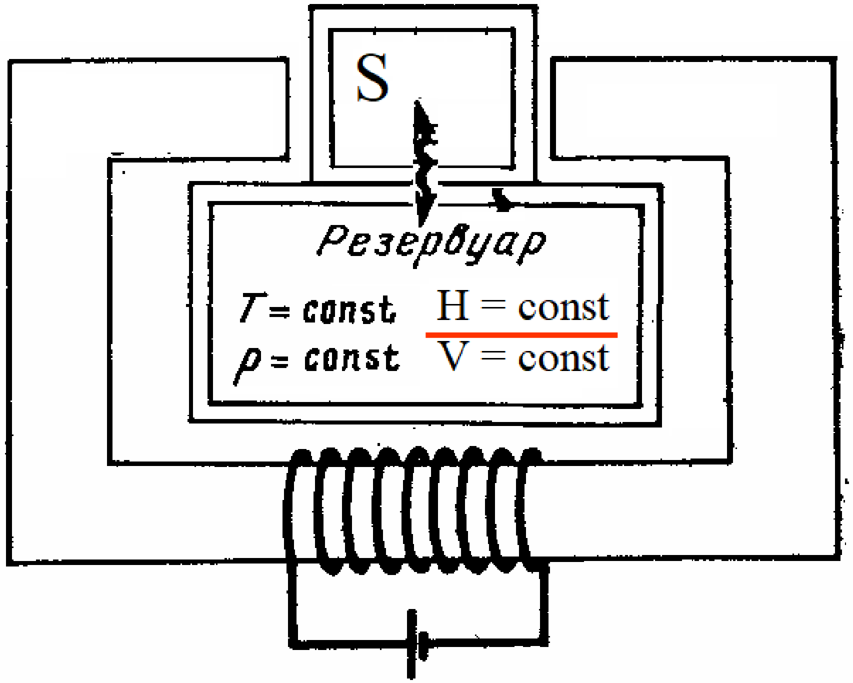
$$TdS \geq \delta Q = dU + (\delta A_{внеш} + \delta A_{внутр}) \longrightarrow TdS - dU - \delta A_{внутр} \geq \delta A_{внеш}$$

$$\delta A_{внеш} \leq -(dU + pdV - TdS) = -dG \qquad G = U + pV - TS = F + pV$$

Что такое V? $V = V_{терм}$, $dV \approx dV_{терм}$, $\delta A_{внеш} \neq pdV_{внеш}$, $\delta A_{внеш} = 0$???

$$dG \leq \delta W_{внеш} = 0\ ?$$

Потенциал Гиббса



Для твердотельных магнетиков (при постоянном H):

$$TdS \geq dU + \delta A_{внутр} + \delta A_{внеш}$$

$$TdS - dU - \delta A_{внутр} \geq \delta A_{внеш}$$

$$\delta A_{внутр} = -\mathbf{H}d\mathbf{B}$$

$$\delta A_{внеш} \leq -(dU - \mathbf{H}d\mathbf{B} - TdS) = -dG$$

$$G = U - TS - \mathbf{HB} = F - \mathbf{HB}$$

Формально: $dG = dF + d(\mathbf{HB}) = (HdB - SdT) - HdB - BdH = -SdT - BdH$

B = 0 ?

$$G = G(T,H)$$

$$F = F(T,B)$$

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_H \qquad \boxed{\vec{B} = -\left(\frac{\partial G}{\partial \vec{H}}\right)_T}$$

$$G = \int g(\vec{r}, T, H)dV$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, T, H)$$

Перерыв

Фазовые переходы I и II рода.

Переходы I рода

Функция G – непрерывна, первые производные испытывают скачок.

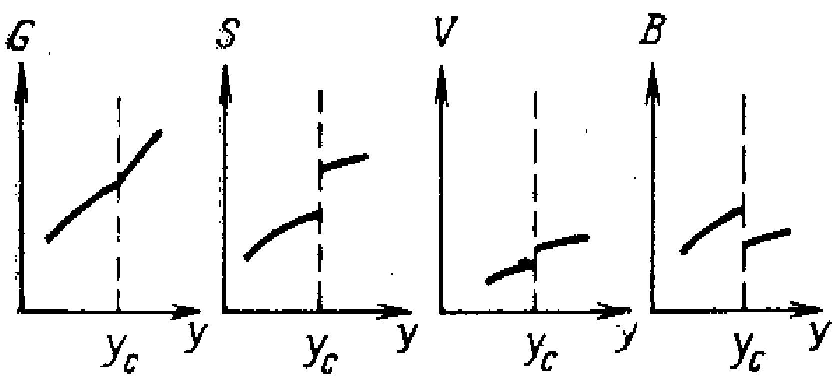
$$S = -\left(\partial G / \partial T\right)_{P,H} \qquad (3.22)$$

$$V = \left(\partial G / \partial P\right)_{T,H}$$

$$TdS = \delta Q$$

$$B = -\left(\partial G / \partial H\right)_{P,T}$$

Проходит с выделением/поглощением тепла.



Переходы II рода

Функция G и первые производные – непрерывны, скачок испытывают вторые производные.

dQ = TdS

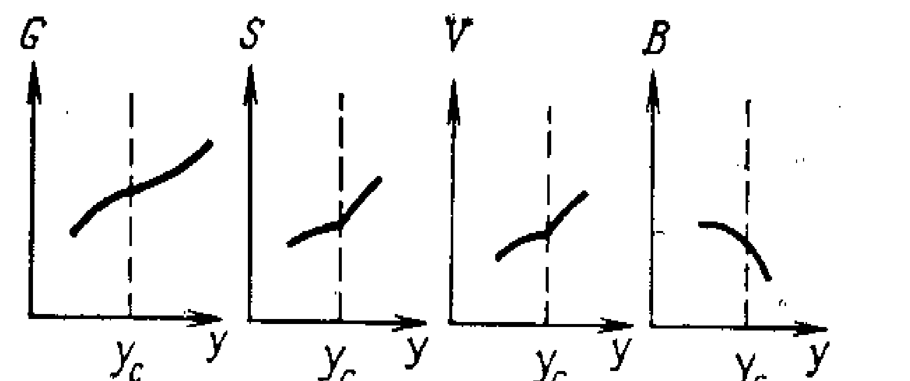
Удельная теплоемкость:

$$C = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{H,P} = \frac{T}{V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{H,P} = \frac{T}{V}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right)_{H,P}$$

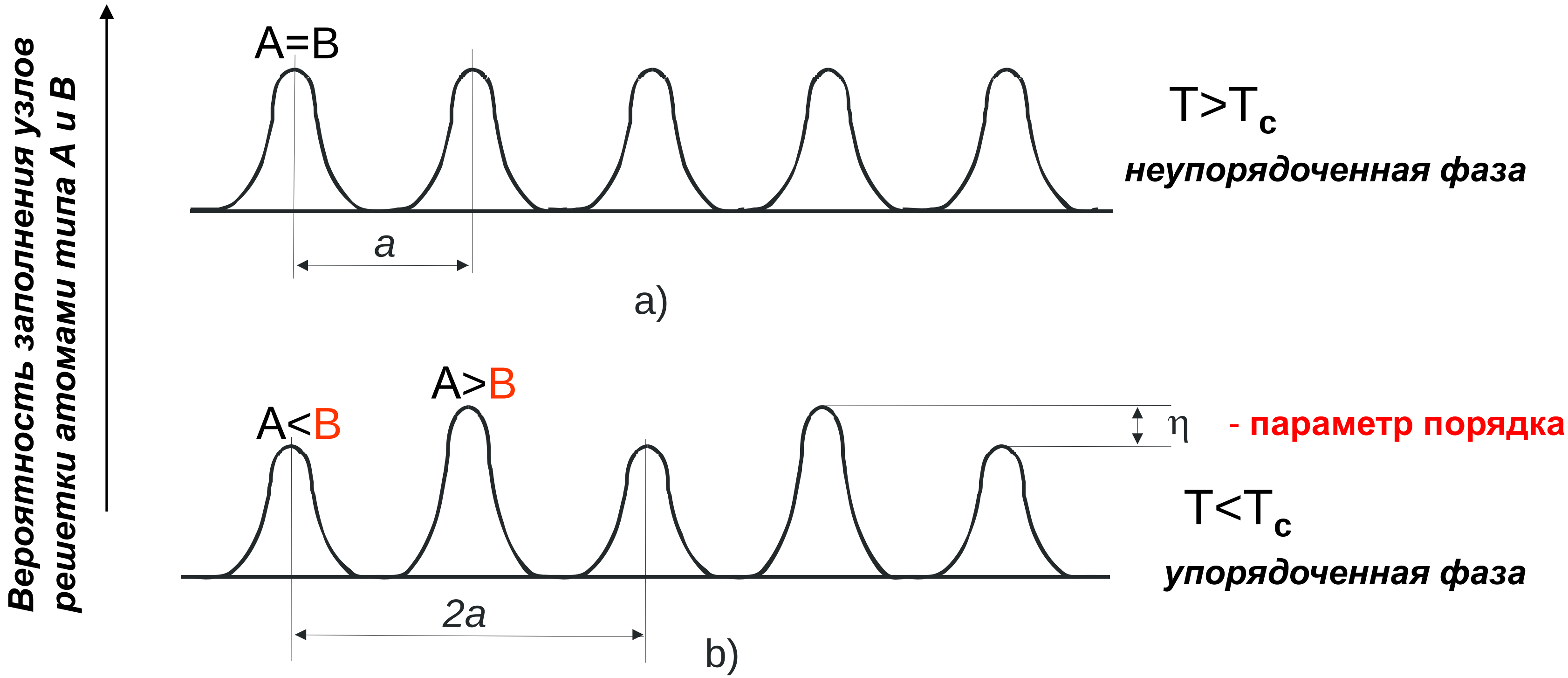
Скрытая теплота перехода = 0

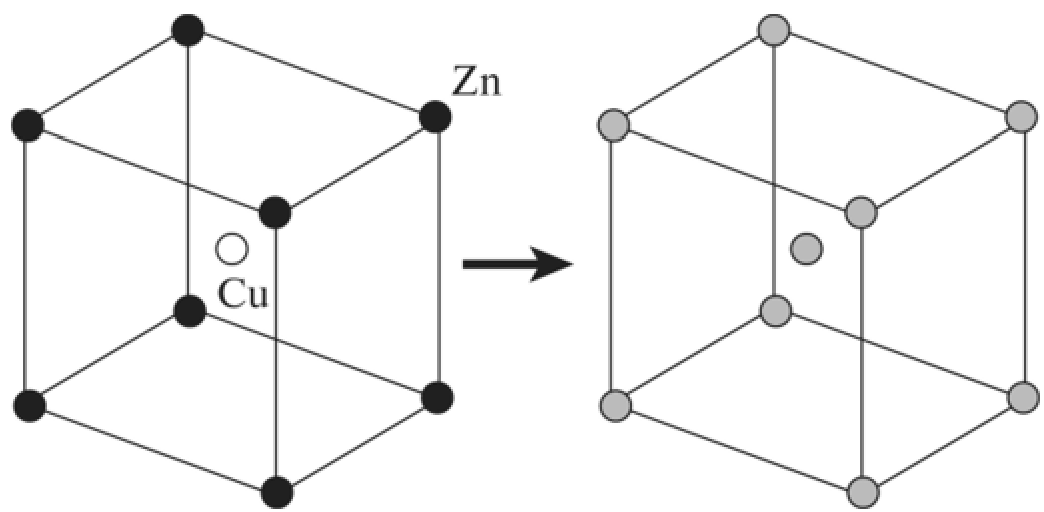
$\Delta Q = T\Delta S = T(S_1 - S_2) = 0$ $\quad S_1 = S_2$ (3.23)

Энтропии равны в точке фазового перехода II рода!



Фазовый переход II рода с изменением порядка





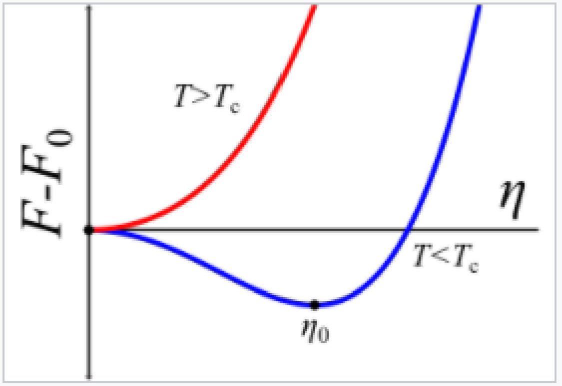
в точке перехода T_c

параметр порядка

проходит через ноль

Общие соотношения

Разложим вблизи T_c функционал плотности свободной энергии *F(T)* в ряд Тейлора по малому параметру η



$$F(x)=\sum_0^\infty \frac{\partial^{(n)}F}{\partial x^n}(0)\frac{x^n}{n!}=F(0)+F'(0)x+F''(0)\frac{x^2}{2}+F'''(0)\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Разложение по четным степеням

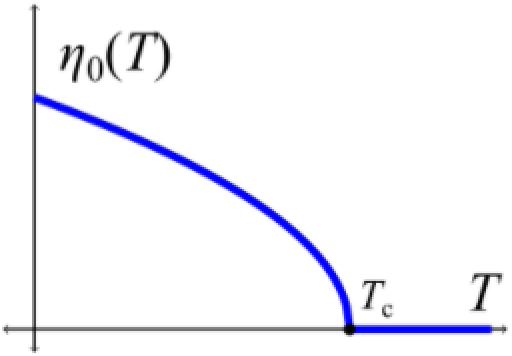
$$\boxed{a(T)\approx a_0(T-T_c)}$$

$$F(T,\eta)-F_0=a(T)\eta^2+\frac{b(T)}{2}\eta^4+\cdots$$

$$\boxed{b(T)>0}$$

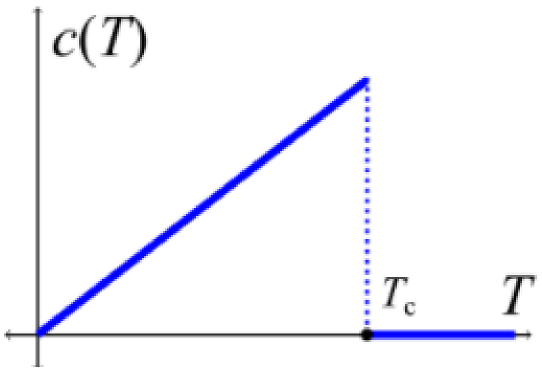
$$\frac{\partial F}{\partial \eta}=2a(T)\eta+2b(T)\eta^3=0$$

Минимум.



$$\eta_0^2=-\frac{a}{b}=-\frac{a_0}{b_0}(T-T_c)\qquad \boxed{a<0}\qquad \eta(T)\propto|T-T_c|^{1/2}$$

$$F-F_0=\begin{cases}-\dfrac{a_0^2}{2b_0}(T-T_c)^2,\\ 0,\end{cases}\quad c_p=-T\frac{\partial^2F}{\partial T^2}=\begin{cases}\dfrac{a_0^2}{b_0}T, & T<T_c\\ 0, & T>T_c\end{cases}$$

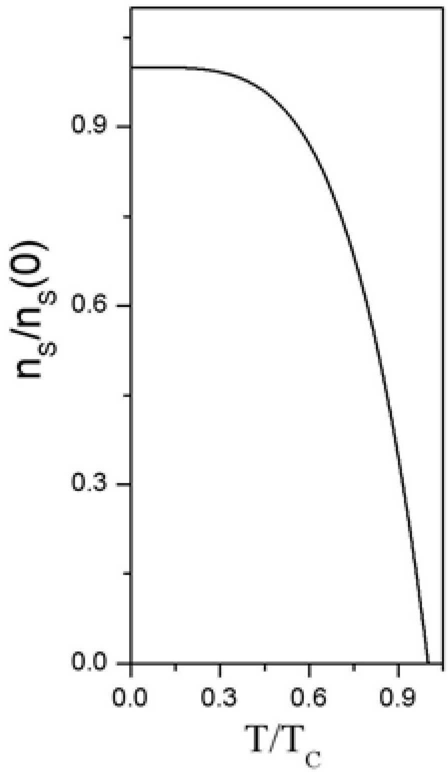


Теория фазовых переходов II рода для сверхпроводников

В качестве параметра порядка удобно выбрать концентрацию сверхпроводящих электронов.

$n_s = 0$ при $T > T_c$ $\qquad n_S = \eta^2$

n_s растет при $T \to 0$ $\qquad \eta = \sqrt{n_S}$



Теория ГЛ в отличии от терии Лондонов справедлива для пространственно-неоднородных сверхпроводников с $n_s(r)$.

Разложим!

$f_S(T,r) = f_n(T) - \alpha\, n_S(r) - (\beta/2)\, n_S^2(r) + \ldots$ $\qquad$ (???)

$F_n - F_s = \mu_0 H^2{}_{cm}/2, \longrightarrow F_s = \underline{F_n} - \mu_0 H^2{}_{cm}/2,$

$$f_S(T,r) = f_n(T) + \alpha n_S(r) + (\beta/2)\, n_S^2(r)$$

$$|\psi|^2 \qquad\qquad |\psi|^4$$

Разложение свободной энергии

$$f_s(T,r)= f_n(T) + \alpha\, n_s(r) + (\beta / 2)\, n_s^2(r) \tag{3.26}$$

Найдем *равновесное* значение n_{s0}, соответствующее равновесному однородному состоянию сверхпроводника (минимуму функционала свободной энергии).

Вариация функционала по n_s равна нулю:

$$\delta_{n_s} f_s = \alpha + \beta n_{s0} = 0 \qquad \alpha + \beta n_{s0} = 0 \qquad n_{s0} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

α или $\beta < 0$

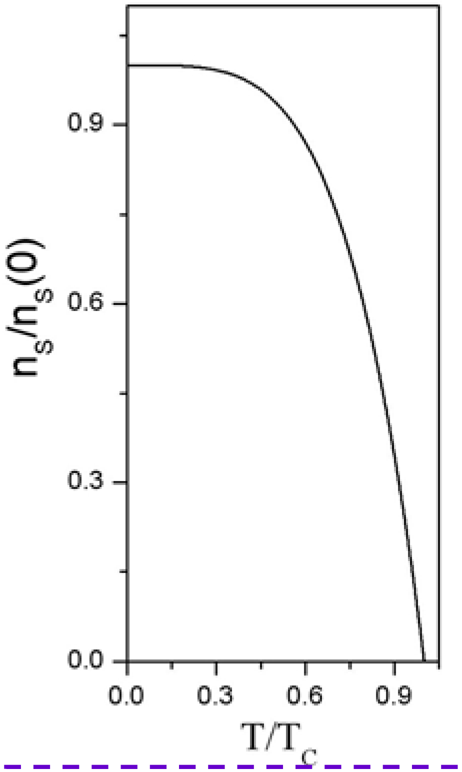
В первом приближении по $(T\text{-}T_c)$ можно принять:

β = const (T) > 0, $\qquad \dfrac{\partial^2 F}{\partial n_S^2} > 0$

$\alpha(T) = -|\alpha_0|[1-(T/T_c)] \qquad \alpha(T_C) = 0$

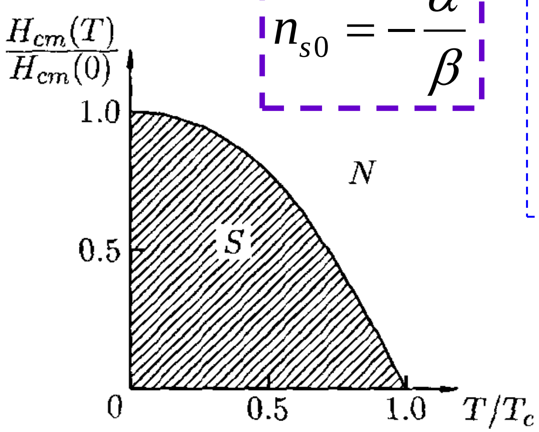
Этим определяется температурная зависимость n_s и область применимости.

Температурная зависимость коэффициентов ГЛ



$$\boxed{F_n - F_s = \mu_0 H^2{}_{cm}/2,}$$

$$\boxed{n_{s0} = -\frac{\alpha}{\beta}}$$



Экспериментально:

Подставим и проверим:

$$f_s(T,r) = f_n(T) + \alpha\, n_s(r) + (\beta/2)\, n_s^2(r)$$

$$\boxed{n_{s0} = -\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$f_{s0}(T) - f_n(T) = -\alpha^2/\beta + (\beta/2)\,(\alpha/\beta)^2 = -\alpha^2/(2\beta) = -\mu_0 H_{cm}^2(T)/2$$

$$\mu_0 H_{cm}^2(T) = \alpha^2(T)/\beta = \beta\, \alpha^2(T)/\beta^2 = \beta\, n_{s0}^2(T)$$

$$\beta = \mu_0 H_{cm}^2(T)/n_{s0}^2(T) = const\,(T) > 0$$

$n_{s0} \sim 1-(T/T_c)^4$ вблизи T_c $n_{s0} \sim [1-(T/T_c)^2] \sim [1 - T/T_c]$

$1 + (T/T_C)^2 \approx 2,\ 1 + T/T_C \approx 2$

$H_{cm} \sim [1-(T/T_c)^2]$ вблизи T_c: $H_{cm} \sim [1-(T/T_c)]$

$$\alpha = -\beta\, n_{s0} = -n_{s0}(T)\,\mu_0 H_{cm}^2(T)/n_{s0}^2(T) \sim -[1 - T/T_c] < 0$$

Эксперимент $\leftrightarrow$ Теория

Ток распаривания. Критический импульс

Протекание тока приводит к увеличению кинетической энергии:

$f_s\,(T,r) = f_n(T) - |\alpha|\, n_s(r) + (\beta/2)\, n_s^2(r)$

$f^*_s\,(T,r) = f_n(T) - |\alpha|\, n_s(r) + (\beta/2)\, n_s^2(r) + n_s(mv_s^2)/2$

Найдем равновесную плотность сверхпроводящих электронов:

$\delta_{ns} f^*_s = 0 = -|\alpha| + \beta\, n_s + (mv_s^2)\,/2$

max при: $n_s = [\,|\alpha| - (mv_s^2)\,/2]\,/\beta \;=\; n_{s0} - (mv_s^2)\,/(2\beta)$

???

$n_s = n_s(v_s^2)$

Классика?

Сверхток является разрушающим фактором!

Существует критическая скорость $v_c = [2|\alpha|/\mathrm{m}]^{1/2}$ при которой $n_s = 0$.

$j_S = n_S e\, v_S = n_{S0} e\, v_S - e\,(mv_S^3)\,/(2\beta) = 0$

Не хватает носителей при $v > v_c$, чтобы переносить ток больше j_c.

Квантово-механическое разложение

Квантовые свойства электронов описываются сверхпроводящей волновой функцией $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$, *нормированной на концентрацию сверхпроводящих электронов.*

$$n_s = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

Сверхпроводящая волновая функция в общем случае комплексна:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}, t) \exp\{i\theta(\mathbf{r}, t)\} \qquad \eta = \Psi(\mathbf{r}, t)$$

Модуль и фаза могут в зависеть от координат и времени.

$$f^*_s(T,r) = f_n(T) - |\alpha|\,|\Psi(\mathbf{r},t)|^2 + (\beta/2)\,|\Psi(\mathbf{r},t)|^2 + E_{кин} \qquad ???$$

$$\boxed{F(T,\eta) - F_0 = a(T)\eta^2 + \frac{b(T)}{2}\eta^4 + \cdots} \qquad E_{kin} \Rightarrow \frac{\hat{p}^2}{2m^*}\Psi \qquad E_{kin} = \frac{m^* \mathrm{v}^2}{2}$$

$$\vec{p} \Rightarrow -i\hbar\nabla \Rightarrow -i\hbar\nabla - q\vec{A}$$

$$\vec{\mathrm{v}} = (\vec{p} - qA)/m^* \Rightarrow -\left(i\hbar\nabla + q\vec{A}\right)/m^* \qquad \hat{E}_{kin} = m^*\left(i\hbar\nabla + q\vec{A}\right)^2/2$$

Обобщенное уравнение Лондонов

$$\vec{\mathrm{v}} = (\vec{p} - 2eA)/2m \longrightarrow$$

$$j_S(H=0) = qn_S\mathrm{v} = qn_S\vec{\mathrm{p}}/m^*$$

$$j_S(H \neq 0) = n_S q(\vec{p} - q\vec{A})/2m$$

Квантовая механика:

Теория Лондонов

$$j_S = -q\frac{i\hbar}{4m}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right)$$

$$\Psi = \sqrt{n_S}\exp\left[i\theta(\vec{r},t)\right]$$

$$\longleftarrow$$

$$\boxed{n_S = const}$$

$$j_S = -q\frac{i\hbar}{4m}\left(\left(i\nabla\theta\right)\Psi^*\Psi - \left(-i\nabla\theta\right)\Psi\Psi^*\right) = qn_S\frac{\hbar}{4m}\left(2\nabla\theta\right)$$

n_S

движущей силой сверхтока является градиент сверхпроводящей фазы

$$qn_S(m^*\vec{\mathrm{v}} - q\vec{A})/2m^* = qn_S\frac{\hbar}{2m^*}\nabla\theta$$

$$\boxed{q = -2e, \quad m^* = 2m}$$

$$\hbar\nabla\theta = m^*\langle\mathrm{v}\rangle - q\vec{A}$$

$$\boxed{\hbar\nabla\theta = 2m\langle\mathrm{v}\rangle + 2e\vec{A}}$$

~~Обобщенное уравнение Лондонов~~

Найдем ток сверхпроводящих электронов в единице объема $j_S = n_S e\mathrm{v}$

$$j_S^{\text{квант}} = q\int \Psi^* \hat{\mathrm{v}}\Psi dV = -\frac{\mathrm{q}}{m^*}\int \Psi^* \left(i\hbar\nabla + q\vec{A}\right)\Psi dV$$

$$\boxed{\Psi = \left|\Psi(\vec{r},t)\right| \exp\left[i\theta(\vec{r},t)\right]}$$

$$-\int \Psi^* q\vec{A}\Psi dV = -q\vec{A}\int \Psi^*\Psi dV = -q\vec{A}n_S$$

$$\boxed{\Psi = \sqrt{n_S}\exp\left[i\theta(\vec{r},t)\right]}$$

$$-i\hbar\int \Psi^*\nabla\Psi dV = -i\hbar\int n_S \exp(-\ldots)(i\nabla\theta)\exp(\ldots)dV = +n_S\int\left(\hbar\nabla\theta\right) dV$$

$$\boxed{j_S^{\text{класс}} = j_S^{\text{квант}}}$$

$$j_S^{\text{класс}} = qn_S\int\langle \mathrm{v}\rangle dV$$

$$\frac{\cancel{qn_S}}{m^*}\int\left(i\hbar\nabla\theta - q\vec{A}\right) dV = \cancel{qn_S}\int\langle \mathrm{v}\rangle dV \longrightarrow \boxed{\hbar\nabla\theta = m^*\langle \mathrm{v}\rangle + q\vec{A}}$$

$$q = 2e, \quad m^* = 2m$$

$$\int\left(-\hbar\nabla\theta + q\vec{A} - m^*\langle \mathrm{v}\rangle\right) dV = 0$$

$$\boxed{\hbar\nabla\theta = 2m\langle \mathrm{v}\rangle + 2e\vec{A}}$$

Структура кинетической энергии

$$\varepsilon_{kin} = \left| i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi \right|^2 / 4m$$ *(в силу эрмитовости оператора импульса)* $-i\hbar\nabla$

$$i\hbar\nabla\Psi + q\vec{A}\Psi \;\Rightarrow\; m\vec{v}_S$$

#ЛондоновНЕТ

#УравнениеЕСТЬ

Подставим $\Psi(r) = |\Psi(\mathbf{r})| \exp[i\theta(\mathbf{r})]$

$$\hbar\nabla\theta = 2m\mathbf{v}_s + 2e\mathbf{A}$$

$$w_{кин} = [1/(4m)]\,|-i\hbar\nabla\Psi - 2e\mathbf{A}\Psi|^2 = \ldots$$

$$\hbar\nabla\theta - 2e\mathbf{A} = 2m\mathbf{v}_s$$

$$\{-i\hbar e^{i\theta}\nabla|\Psi| + \hbar\nabla\theta\,|\Psi|(r)\,e^{i\theta} - 2e\mathbf{A}\,|\Psi|(r)e^{i\theta}\} = -i\hbar e^{i\theta}\nabla|\Psi| + (\hbar\nabla\theta - 2e\mathbf{A})\,|\Psi|(r)e^{i\theta} =$$

$$w_{кин} = [1/(4m)]\,|(2m\mathrm{v}_s|\Psi| - i\hbar\nabla|\Psi|)\,e^{i\theta}|^2 =$$

$$= [1/(4m)]\;[(2m\mathrm{v}_s|\Psi| - i\hbar\nabla|\Psi|)\,\cancel{exp(i\theta)}]\,[(2m\mathrm{v}_s|\Psi| + i\hbar\nabla|\Psi|)\,\cancel{exp(-i\theta)}] =$$

$$= |\Psi|^2 4m^2\mathrm{v}_s^2/4m + (\hbar\nabla|\Psi|)^2(\mathrm{n}_{s0}/\mathrm{n}_{s0})/4\mathrm{m} = \mathrm{n}_s m\mathrm{v}_s^2/2 + [\mathrm{n}_{s0}/4m]\,(\hbar\nabla|\psi|)^2$$

$$\boxed{\psi = \Psi / n_{s0}}$$

В кинетической энергии появился новая часть член – энергия, связанная с градиентом параметра порядка! (“жесткостью” волновой функции)

Плотность функционала Г-Л

$$G = \oint g_S dV$$

$$g_S = f_S + \mathbf{HB} = f_N + w_{nom} + w_{кин} + w_{магн} + \mathbf{B}^2/2\mu_0 - \mathbf{HB}$$

$$w_{pot} = \alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4$$

$$\mathbf{H} \rightarrow \text{const}$$

$$\mathbf{B} = \text{rot}\,\mathbf{A}$$

$$w_{kin} = \left|i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi\right|^2 / 4m$$

$$w_{магн} = (\text{rot}\,\mathbf{A})^2/2\mu_0$$

$$\mathbf{HB} = \mathbf{H}\,\text{rot}(\mathbf{A})$$

$$w_{магн} = \mathbf{B}^2/2\mu_0$$

$$g_S = f_N + \alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4 + \left|i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi\right|^2 / 4m + \mu_0(\text{rot}\ \vec{A})^2 - \vec{\mathrm{H}}\ \text{rot}\ \vec{A}$$

Первая вариация функционала Г-Л

$g_S = f_S + \mathbf{HB} = f_N + w_{пот} + w_{кин} + w_{магн} + \mu_0\mathbf{B}^2/2 - \mathbf{HB}$

$w_{pot} = \alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4$ $\quad$ $\mathbf{H} \rightarrow \mathrm{const}$ $\quad$ $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$

$w_{kin} = \left|i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi\right|^2 / 4m$ $\quad$ $w_{магн} = \mu_0\mathbf{B}^2/2$ $\quad$ $w_{магн} = \mu_0(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2/2$

$$g_S = f_N + \alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4 + \left|i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi\right|^2 / 4m + \mu_0(\mathrm{rot}\ \vec{A})^2 - \vec{\mathrm{H}}\ \mathrm{rot}\ \vec{A}$$

Плотность энергии:

$$G_S = F_N + \int_V \left[\alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4 + \left|i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi\right|^2 / 4m + \mu_0(\mathrm{rot}\ \vec{A})^2 - \vec{\mathrm{H}}\ \mathrm{rot}\ \vec{A}\right] dV$$

$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}, t)\exp\{i\theta(\mathbf{r}, t)\}$ $\quad$ $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ $\quad$ $\vec{H} = const(\vec{r})$

Первая вариация функционала Г-Л

$$G_S = F_N + \int\limits_V \left[\alpha |\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4 + \left| i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi \right|^2 / 4m + \mu_0 (\mathrm{rot}\ \vec{A})^2 - \vec{\mathrm{H}}\ \mathrm{rot}\ \vec{A} \right] dV$$

$$g_s(r) = f_n + \alpha|\Psi|^2(\mathrm{r}) + (\beta/2)|\Psi|^4(\mathrm{r}) + [1/(4m)]\ \left| -i\hbar\nabla\Psi - 2e\mathbf{A}\Psi \right|^2 + \mathbf{B}^2/(2\mu_0) - \mathbf{BH}$$

Чтобы получить уравнения ГЛ надо найти min функционала ГЛ по Ψ, Ψ^* *и* A:

$$\delta_\Psi G_s = 0; \qquad \delta_{\Psi^*} G_s = 0; \qquad \delta_{\mathrm{A}} G_s = 0$$

Первое уравнение ГЛ

Первая вариация функционала Г-Л

$$G_S = F_N + \int_V \left[\alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4 + \left|i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi\right|^2 / 4m + \mu_0(\mathrm{rot}\ \vec{A})^2 - \vec{\mathrm{H}}\ \mathrm{rot}\ \vec{A} \right] dV$$

Чтобы получить уравнения ГЛ надо найти min функционала ГЛ по *Ψ, Ψ* и A:*

$$\boldsymbol{\delta_{\Psi} G_s = 0; \qquad \delta_{\Psi^*} G_s = 0; \qquad \delta_{A} G_s = 0}$$

Первое уравнение ГЛ

Минимизация функционала путем варьирования по *Ψ* (Ψ* = const*):*

$$\delta|\Psi|^2 = (\Psi^* + \delta\Psi^*)(\Psi + \delta\Psi) - |\Psi|^2 = \Psi^*\Psi + \delta\Psi^*\Psi + \Psi^*\delta\Psi + \delta\Psi^*\delta\Psi - |\Psi|^2 =$$
$$= \delta\Psi^*\Psi + \Psi^*\delta\Psi + \cancel{|\delta\Psi|^2} \approx \delta\Psi^*\Psi + \Psi^*\delta\Psi$$

Можно варьировать отдельно по Ψ и Ψ*.
Могут быть тонкости.

$$\delta|\Psi|^4 = \delta\{|\Psi|^2\}^2 = 2|\Psi|^2\,\delta|\Psi|^2 \approx 2|\Psi|^2\{\delta\Psi^*\Psi + \Psi^*\delta\Psi\} \approx 2|\Psi|^2\,\Psi\delta\Psi^* + 2|\Psi|^2\Psi^*\delta\Psi\}$$

Варьируем по Ψ.*

Варьирование кинетической энергии

$$G_S = F_N + \int\limits_V \left[\alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4 + \left|i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi\right|^2 / 4m + \mu_0(\mathrm{rot}\ \vec{A})^2 - \vec{\mathrm{H}}\ \mathrm{rot}\ \vec{A} \right] dV$$

$$g_s(r) = f_n + \alpha|\Psi|^2(\mathrm{r}) + (\beta/2)|\Psi|^4(\mathrm{r}) + [1/(4m)]\ \left| -i\hbar\nabla\Psi - 2e\mathbf{A}\Psi \right|^2 + \mathbf{B}^2/(2\mu_0) - \mathbf{BH}$$

?

Первое уравнение ГЛ

Минимизация кинетической энергии путем варьирования по Ψ:* $\delta_{\Psi^*} G_s = 0 \rightarrow$

Варьирование кинетической энергии

$$G_S = F_N + \int_V \left[\alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4 + |i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi|^2/4m + \mu_0(\mathrm{rot}\ \vec{A})^2 - \vec{\mathrm{H}}\ \mathrm{rot}\ \vec{A} \right] dV$$

$$g_s(r) = f_n + \alpha|\Psi|^2(r) + (\beta/2)|\Psi|^4(r) + [1/(4m)]\ |-i\hbar\nabla\Psi - 2e\mathbf{A}\Psi|^2 + \mathbf{B}^2/(2\mu_0) - \mathbf{BH}$$

Первое уравнение ГЛ

Минимизация кинетической энергии путем варьирования по Ψ^*: $\delta_{\Psi^*}G_s = 0$ →

$$\underline{(1/4m)\delta_{\Psi^*}[(i\hbar\nabla\Psi^* - 2eA\Psi^*)(-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi)]}$$

Учтем $|-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi|^2 = (-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi)(i\hbar\nabla\Psi^* - 2eA\Psi^*)$

$$\delta_{\Psi^*}|-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi|^2 = (-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi)\ \delta_{\Psi^*}(i\hbar\nabla\Psi^* - 2eA\Psi^*)$$

$$\delta_{\Psi^*}(i\hbar\nabla\Psi^* - 2eA\Psi^*) = \underline{(i\hbar\nabla\delta\Psi^* - 2eA\delta\Psi^*)}$$

$$\delta G_s = \int [\underline{\alpha\Psi\delta\Psi^* + \beta|\Psi|^2\Psi\delta\Psi^* + (1/4m)(i\hbar\nabla\delta\Psi^* - 2eA\delta\Psi^*)(-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi)}]\ dV$$

вынести $\delta\Psi^*$ за квадратные скобки мешает только член $i\hbar\nabla\delta\Psi^*$

Преобразование по теореме Гаусса

$$\delta G_s = \int [\alpha\, \Psi\delta\Psi^* + \beta\,|\Psi|^2\,\Psi\delta\Psi^* + (1/4m)\,(i\hbar\nabla\delta\Psi^* - 2eA\delta\Psi^*)(-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi)]\, dV$$

$$\delta E_{кин} = \int [(1/2)(1/2m)\,(i\hbar\nabla\delta\Psi^* - 2eA\delta\Psi^*)(-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi)]\, dV$$

Введем вектор сверхскорости $(1/2m)^*(-i\hbar\nabla\Psi - 2e\mathbf{A}\Psi) = \mathbf{v}$

$$\delta E_{кин} = \int [(1/2)(i\hbar\nabla\delta\Psi^* - 2eA\delta\Psi^*)\mathbf{v}]dV$$

Рассмотрим первое слагаемое в $\delta E_{кин}$ $\int [i\hbar\, \mathbf{v}\, \nabla\delta\Psi^*]dV$

Избавимся от градиента = сведем объемный интеграл к поверхностному

Преобразование по теореме Гаусса

Рассмотрим первое слагаемое в $\delta E_{кин}$ $\int [i\hbar\, \mathbf{v}\, \nabla \delta \Psi^*] dV$

Как подменить дифференцируемую функцию?

$$\int dV\{\mathbf{v}\nabla\delta\Psi^*\} = f(\delta\Psi^*\nabla\mathbf{v})$$

$$\nabla(\delta\Psi^*\mathbf{v}) = \delta\Psi^*\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\delta\Psi^* \quad => \quad \mathbf{v}\nabla\delta\Psi^* = \nabla(\delta\Psi^*\mathbf{v}) - \delta\Psi^*\nabla\mathbf{v}$$

тогда $\int dV\{\mathbf{v}\nabla\delta\Psi^*\} = - \int\delta\Psi^*\nabla\mathbf{v}\, dV + \int\nabla(\delta\Psi^*\mathbf{v}) dV$

Применим теорему Гаусса:

$$\int_V \left[div\vec{X}\right] dV = \oiint_S \vec{X} d\vec{S} \qquad \int_V div\left[\delta\Psi^*\vec{\mathrm{v}}\right] dV = \oiint_S \delta\Psi^*\vec{\mathrm{v}} d\vec{S}$$

$$div\vec{X} = \nabla\vec{X} \qquad \nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \equiv grad$$

Первое уравнение Гинзбурга-Ландау

$$\delta_{\Psi*}G_s = \int dV[\alpha\,\Psi\delta\Psi^* + \beta\,|\Psi|^2\,\Psi\delta\Psi^* + (i\hbar\nabla\,\delta\Psi^*\,\mathbf{v}\ -2e\mathbf{A}\delta\Psi^*\,\mathbf{v})] =$$

$$\boxed{\int dV\,\nabla\delta\Psi^*\,\mathbf{v} = -\int\delta\Psi^*\,\nabla\mathbf{v}\,dV + \int\nabla(\delta\Psi^*\,\mathbf{v})dV}$$

$$= \int dV\Big[\alpha\,\Psi\delta\Psi^* + \beta\,|\Psi|^2\,\Psi\delta\Psi^* + (-i\hbar\nabla\,\mathbf{v}\ -\ 2e\mathbf{A}\,\mathbf{v})\ \delta\Psi^*\Big] + (1/4)\ i\hbar\oiint_S \mathbf{v}\ \delta\Psi^* dS =$$

$$= \int dV[\alpha\,\Psi + \beta\,\Psi|\Psi|^2 + (1/4m)\,(-i\hbar\nabla\ -\ 2e\mathbf{A})\mathbf{v}]\delta\Psi^* + (1/4)\ i\hbar\oiint_S \mathbf{v}\delta\Psi^* dS =$$

$$= \int dV[\alpha\,\Psi + \beta\,\Psi|\Psi|^2 + (1/4m)\,(-i\hbar\nabla\ -\ 2e\mathbf{A})^2\,\Psi]\delta\Psi^*\ -\ (1/4m)\ i\hbar\oiint_S (i\hbar\nabla\,\Psi + 2e\mathbf{A}\,\Psi)\ \delta\Psi^* d\mathbf{S}$$

= 0

0

Равно нулю при любой вариации $\delta\Psi^*$

0

$\alpha\,\Psi + \beta\,\Psi|\Psi|^2 + (1/4m)\,(-i\hbar\nabla\ -\ 2e\mathbf{A})^2\,\Psi = 0$ (GL-1)

$(i\hbar\nabla\,\Psi + 2e\mathbf{A}\,\Psi)d\mathbf{S} = 0$

Граничное условие

Первое уравнение Гинзбурга-Ландау

$\alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 + (1/4m)(-i\hbar\nabla - 2eA)^2 \Psi = 0;$

$$\left(i\hbar\vec{\nabla}\Psi + 2e\vec{A}\right) d\vec{S} = 0$$

$(i\hbar\nabla \Psi + 2e\mathbf{A}\Psi)\, d\mathbf{S} = 0$

$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS \quad \rightarrow \quad (i\hbar\nabla\Psi + 2eA\Psi)\mathbf{n} = 0$

$$\left(i\hbar\vec{\nabla}\Psi + 2e\vec{A}\right) \vec{n} = 0$$

Определим вектор сверхскорости $\underline{(1/2m)*}(-i\hbar\nabla\Psi - 2e\mathbf{A}\Psi) = \mathbf{v}$

$$\vec{\mathrm{v}}\ \vec{n} = 0$$

Нет переноса тока через границу сверхпроводника!

Такое же уравнение верно и для Ψ^**!*

Хотяяяяя…

Второе уравнение Гинзбурга-Ландау

Вариация по **A**

Второе уравнение Гинзбурга-Ландау

Чтобы получить второе уравнение ГЛ надо найти min функционала ГЛ по *A*:

$$\delta_A G_s = 0$$

Минимизация функционала путем вариирования по A : $\delta_A G_s = 0$ →

$$\delta_A G_s = \int dV \{ \delta_A [\alpha |\Psi|^2 + (\beta/2) |\Psi|^4] + (1/4m) \delta_A [(i\hbar\nabla \Psi^* - 2e\mathbf{A}\Psi^*)(-i\hbar\nabla \Psi - 2e\mathbf{A}\Psi)] +$$

$$+ \delta_A [(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2 / (2\mu_0) - (\mathbf{H_0} \mathrm{rot}\,\mathbf{A})] \}$$

Второе уравнение Гинзбурга-Ландау

Чтобы получить второе уравнение ГЛ надо найти min функционала ГЛ по *A*:

$$\delta_A G_s = 0$$

***Минимизация функционала путем варьирования по** A **:** δ_A **G$_s$ =0** →*

$$\delta_A G_s = \int dV\{\cancel{\delta_A[\alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4]} + (1/4m)\delta_A[(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\mathbf{A}\Psi^*)(-i\hbar\nabla\Psi - 2e\mathbf{A}\Psi)] +$$

$$+\delta_A[(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2/(2\mu_0) - (\mathbf{H_0}\mathrm{rot}\,\mathbf{A})]\} =$$

$$= \int dV\{(1/4m)\delta_A[-\hbar^2\cancel{\nabla\Psi^*\nabla\Psi} + 4e^2\mathbf{A}^2\Psi^*\Psi + 2i\hbar e\mathbf{A}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)] +$$

$$+\delta_A[(\mathrm{rot}\mathbf{A})^2/(2\mu_0) - (\mathbf{H_0}\,\mathrm{rot}\mathbf{A})]\} =$$

$$= \int dV(1/4m)\{8e^2|\Psi|^2\mathbf{A}\delta\mathbf{A} + 2i\hbar e(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)\delta\mathbf{A}\} + (1/\mu_0)\int dV\{\mathrm{rot}\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\delta\mathbf{A} - \mathbf{H_0}\mathrm{rot}\delta\mathbf{A}\} = 0$$

$$\delta\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) - \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A}$$

$$\delta(\mathrm{rot}\mathbf{A})^2 = \{\mathrm{rot}^2\mathbf{A} + 2\mathrm{rot}\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\delta\mathbf{A} + \mathrm{rot}^2\delta\mathbf{A}\} - \mathrm{rot}^2\mathbf{A} \approx 2\mathrm{rot}\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\delta\mathbf{A}$$

Мешает rotδ**A** !

Второе уравнение Гинзбурга-Ландау

$$\delta_A G_s = \int dV(1/4m)\{8e^2|\Psi|^2\mathbf{A}\delta\mathbf{A} + 2i\hbar e(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)\delta\mathbf{A}\} + (1/\mu_0)\int dV\{\underline{\mathrm{rot}\mathbf{A}}\ \mathrm{rot}\delta\mathbf{A} - \underline{\mathbf{H}_0}\mathrm{rot}\delta\mathbf{A}\}$$

$$\delta_A G_s = \int dV(1/4m)\{\ldots + [(1/\mu_0)\mathrm{rot}\mathbf{A} - \mathbf{H}_0]\ \mathrm{rot}\delta\mathbf{A}\} = \int dV(1/4m)\ \{\ldots + \mathbf{M}\ \mathrm{rot}\delta\mathbf{A}\}$$

rot **A** = **B**, B = μ(**H** + **M**) **M**

$$\vec{M}\ \mathrm{rot}\delta\vec{A} = \vec{M}\ \left[\nabla \times \delta\vec{A}\right]$$

$$\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \equiv grad$$

Дифференцируем произведение?

Чтобы вынести за скобки ***δA*** преобразуем последний член. Используем соотношение:

(**a,** rot **b**) = (**b,** rot **a**) - div **[a,b],** где **a = M, b =** *δ***A,**

M rot ***δA***= ***δA*** rot **M** - div **[M x *δA*]**

$$\delta_A G_s = \int dV(1/4m)\{\ldots + \mathbf{M}\ \mathrm{rot}\delta\mathbf{A}\} = \int dV(1/4m)\{\ldots + \delta A\ \mathrm{rot}\ \mathbf{M} - \mathrm{div}\ [\mathbf{M} \times \delta A]\}$$

$$\int dV(1/4m)\{\ \mathrm{div}\ [\mathbf{M} \times \delta A]\} = \int dS\ [\mathbf{M} \times \delta A]$$

Теорема Гаусса

$$\int dV(1/4m)\{\mathrm{div}\ [\mathbf{M} \times \delta A]\} = \mathbf{0} \longleftarrow$$

δA = 0 ***A = const***

Второе уравнение Гинзбурга-Ландау

$\delta_A G_s = \int dV(1/4m)\{\ldots + \mathbf{M}\ \mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A}\} = \int dV(1/4m)\ \{\ldots + \delta A\ \mathrm{rot}\ \mathbf{M}\ \}$

$\mathbf{M} = (1/\mu_0)\mathrm{rot}\ \mathbf{A} - \mathbf{H_0} \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{rot}\ \mathbf{M} = (1/\mu_0)\mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{A} - \mathrm{rot}\ \mathbf{H_0}$

$\mathbf{H_0} = \mathrm{const}; \quad \mathrm{rot}\ \mathbf{H_0} = 0$

$\delta_A G_s = \int dV(1/4m)\{\ldots + \mathbf{M}\ \mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A}\} = \int dV(1/4m)\ \{\ldots + \delta A\ \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{A}\ \}$

$$\ldots = (1/4m)\{8e^2|\Psi|^2\mathbf{A}\delta\mathbf{A} + 2i\hbar e(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)\delta\mathbf{A}\}$$

$$\delta_A G_s = \int dV[(1/4m)\{8e^2|\Psi|^2\mathbf{A}\delta\mathbf{A} + 2i\hbar e(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)\delta\mathbf{A}\} + \delta\mathbf{A}(1/\mu_0)\ \underline{\mathrm{rot\ rot}\mathbf{A}}\}]$$

$$\delta_A G_s = \int dV[(i\hbar e/2m)(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + (2e^2/m)|\Psi|^2 A + (1/\mu_0)\ \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{A}]\delta\mathbf{A} = 0$$

$$(i\hbar e/2m)(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + (2e^2/m)|\Psi|^2 A + (1/\mu_0)\ \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{A} = 0 \qquad \textbf{GL-2}$$

Формы записи II ур-я Г-Л

$$(i\hbar e/2m)(\boldsymbol{\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*}) + (\boldsymbol{2e^2/m})\,|\boldsymbol{\Psi}|^2 \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{1/\mu_0})\ \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad \textbf{GL-2}$$

Дифференциальное уравнение на векторный потенциал:

$$(\boldsymbol{1/\mu_0})\ \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{A} = -(i\hbar e/2m)(\boldsymbol{\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*}) - (\boldsymbol{2e^2/m})\,|\boldsymbol{\Psi}|^2 \boldsymbol{A}$$

Выражение для сверхтока:

$$(\boldsymbol{1/\mu_0})\ \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{A} = (\boldsymbol{1/\mu_0})\ \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{A} = \mathbf{j}_\mathbf{S}$$

$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}$ $\qquad$ $\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = (1/\mu_0)\ \mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \boldsymbol{j_s}$

$$\mathbf{j}_\mathbf{s} = -(\boldsymbol{i\hbar e/2m})(\boldsymbol{\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*}) - (\boldsymbol{2e^2/m})\,|\boldsymbol{\Psi}|^2 \boldsymbol{A}$$

$$j_S(H=0) = qn_S \mathrm{v} = qn_S \vec{\mathrm{p}}/m^*$$

$$j_S^{\text{кв}} = -q\frac{i\hbar}{4m}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right)$$

$$\vec{\mathrm{v}} = (\vec{p} - 2eA)/2m$$

$$j_S^{\text{кв}} = j_S^{\text{кв}} \longrightarrow \boxed{\hbar\nabla\theta = 2m\langle \mathrm{v}\rangle + 2e\vec{A}}$$

$$j_S^{\text{класс}}(H \neq 0) = n_S q(\vec{p} - q\vec{A})/2m$$