

# Введение в физику сверхпроводимости

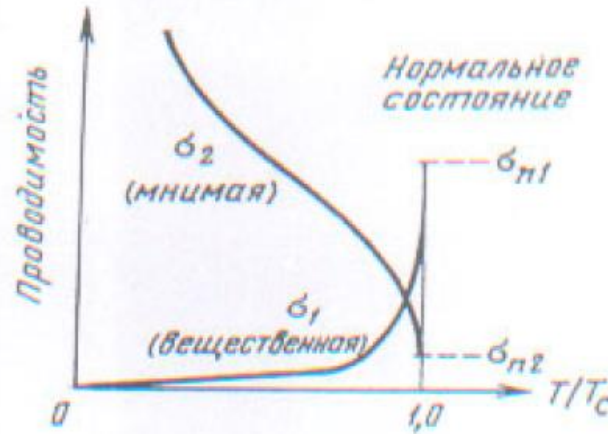
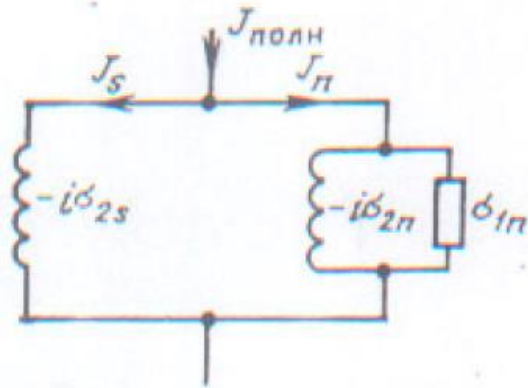
Больгинов Виталий Валериевич

Понедельник, аудитория 420 ГЛК

## **Лекция 3**

**Кинетическая индуктивность сверхпроводников. Скин-эффект и  
поверхностный импеданс.**

# Действительная проводимость сверхпроводника



$$\Delta dj_s/dt = E$$

$$\sigma_{1n} = (n_n e^2 \tau / m) / [1 + (\omega \tau)^2] \quad (2.27)$$

$$T \rightarrow 0, \quad n_n \rightarrow 0, \quad \sigma_{1n} \rightarrow 0$$

$$T \rightarrow T_c \quad n_n \rightarrow n, \quad (\text{норм. пров.})$$

$$\sigma_{2s} = n_s e^2 / (m \omega) = (n_s e^2 \tau / m) / \omega \tau \rightarrow \sigma / \omega \tau \text{ при } T \rightarrow 0$$

$$\sigma_{2s} \rightarrow 0,$$

$$T \rightarrow T_c$$

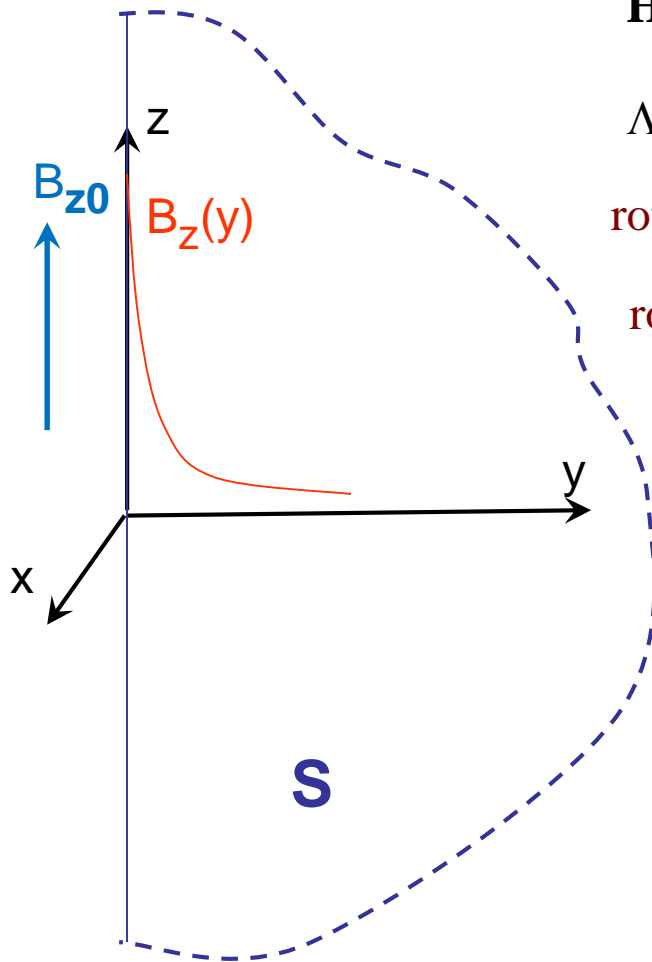
$$\sigma_{2n} = n_n e^2 (\omega \tau)^2 / m \omega [(1 + (\omega \tau)^2)] \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow 0$$

$$\sigma_{2n} = (n_n e^2 \tau / m) (\omega \tau) / m [(1 + (\omega \tau)^2)] \rightarrow \sigma (\omega \tau) / [(1 + (\omega \tau)^2)]$$

$$\text{при } T \rightarrow T_c$$

# Второе уравнение Лондонов

Описывает распределение магнитного поля и тока в сверхпроводнике.  
Получается из *минимизации* внутренней энергии.



$$\mathbf{H} + \lambda_L^2 \text{rot rot } \mathbf{H} = 0$$

$$\Lambda(\text{rot } \mathbf{j}_s) = -\mathbf{B}$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = - (1/\lambda_L^2) \mathbf{A}$$

$$\text{rot rot } \mathbf{j} = - (1/\lambda_L^2) \mathbf{j}$$

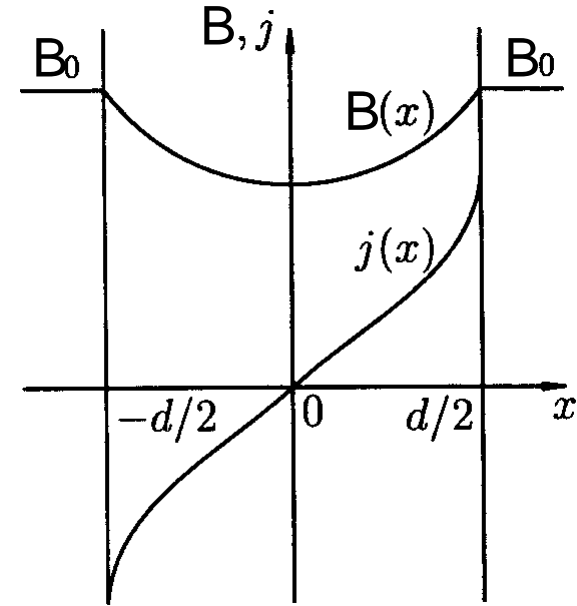
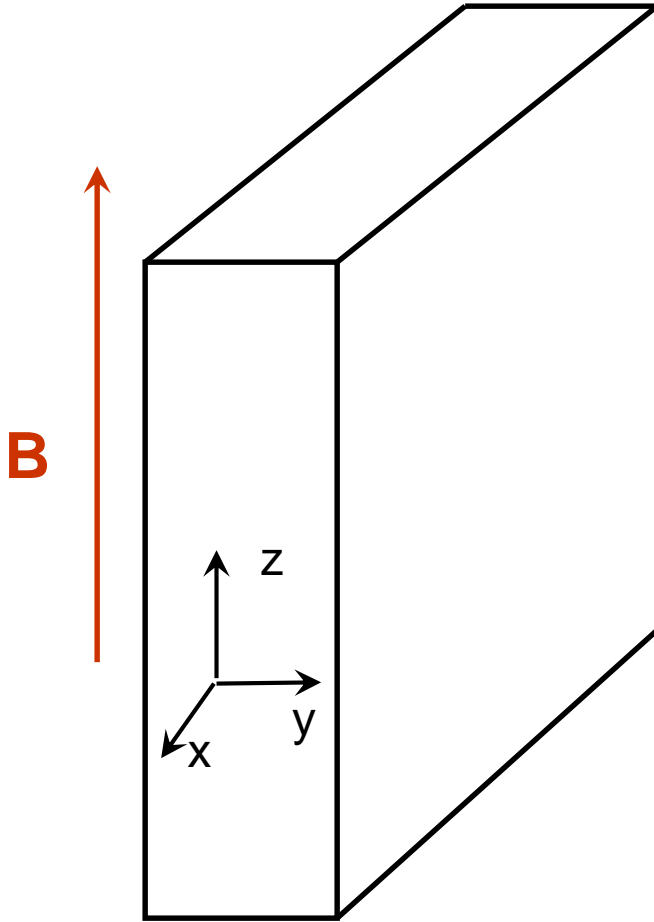
$$B_z(y) = B_0 e^{-y/\lambda}$$

Магнитное поле затухает вглубь  
сверхпроводника на  
характерной длине  $\lambda_L$   
(лондоновская длина)

Используя ур. Максвелла  $\mathbf{j}_s = (1/\mu_0) \text{rot } \mathbf{B}$   
или в рассматриваемой геометрии:  $j_{sx}(y) =$   
 $(1/\mu_0) dB/dy$ :

$$j_{sx}(y) = - (B_0 / \lambda_L \mu_0) e^{-y/\lambda}$$

# Пронкновение магнитного поля и тока в тонкую сверхпроводящую пластину



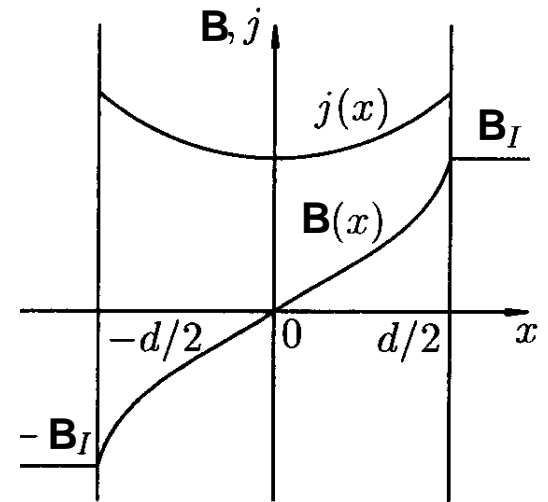
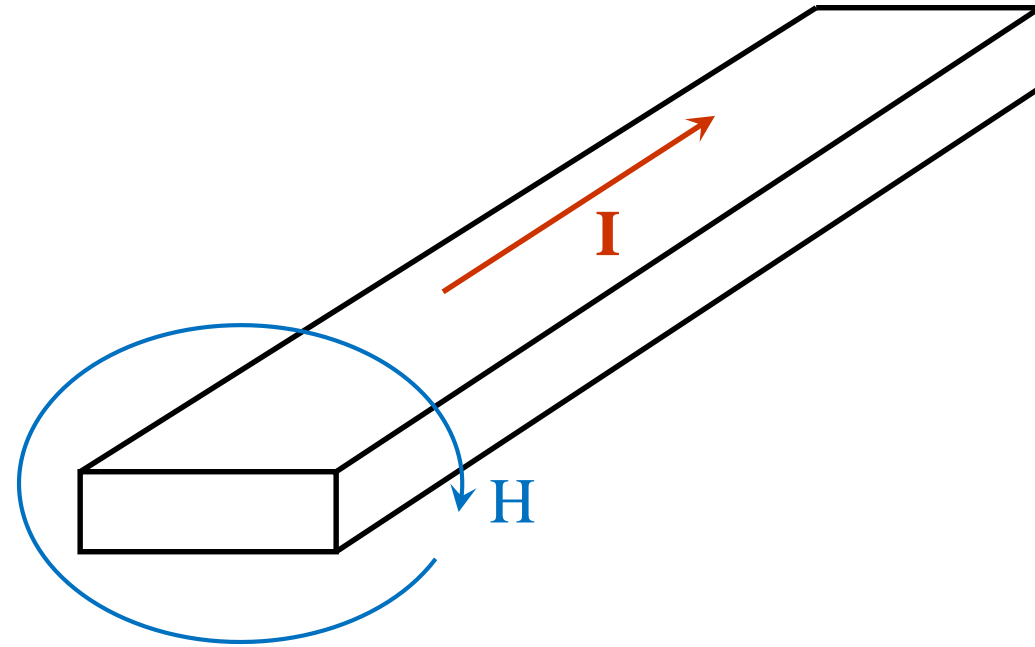
$$B(x) = B_0 \operatorname{ch}(x/\lambda) / \operatorname{ch}(d/2\lambda)$$

$$j_y^s(x) = (B_0 / \mu_0 \lambda) \operatorname{sh}(x/\lambda) / \operatorname{ch}(d/2\lambda)$$

**В случае тонкой пленки** ( $d \ll \lambda$ );  $d/\lambda \ll 1$

$$\operatorname{ch}(x/\lambda) \text{ и } \operatorname{ch}(d/2\lambda) \rightarrow 1 \quad B(x) \rightarrow B_0; \quad \operatorname{sh}(x/\lambda) = x/\lambda \quad j(x) = (B_0 / \mu_0 \lambda^2) x;$$

# Применение уравнений Лондонов. Распределение поля и тока в сверхпроводящей пластине с током



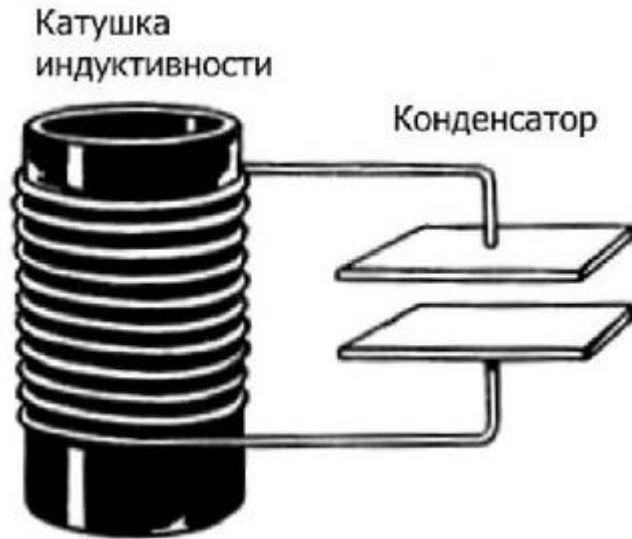
$$j_{sy}(x) = [I/(2\lambda)] \text{ch}(x/\lambda) / \text{sh}(d/2\lambda)$$

$$B_z(x) = B_I \text{sh}(x/\lambda) / \text{sh}(d/2\lambda)$$

Тон. пленка  $B(x) = (\mu_0 I/dw)x$

Тон. пленка  $j_{sy} = I/d$

# Геометрическая индуктивность.



Перекачка энергии из электрического поля в конденсаторе в магнитное поле в соленоиде.

$$W = LI^2/2, \quad L - \text{индуктивность.}$$

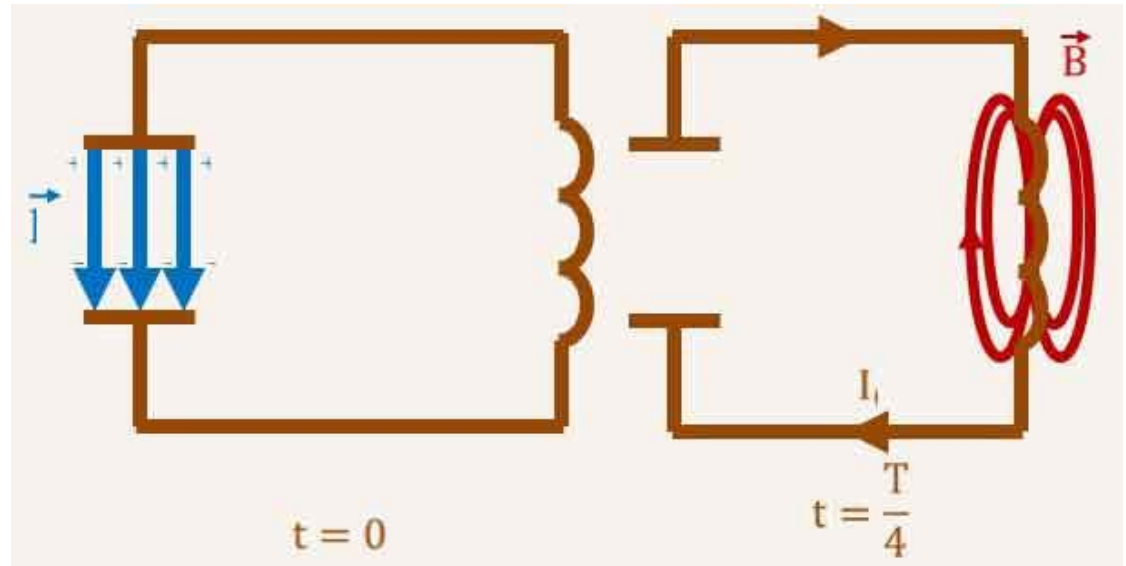
Определение через магнитный поток витка.

$$\Phi = LI$$

*Геометрическая индуктивность*

Реактивное  
сопротивление

$$i\omega L$$



# Кинетическая индуктивность.

В сверхпроводнике важную роль играет **кинетическая индуктивность**, связанная с энергией, потраченной на разгон сверхпроводящих пар (запасенной в кин. энергии сверхпроводящей компоненты тока) в соответствии с первым уравнением Лондонов (ур. L I):

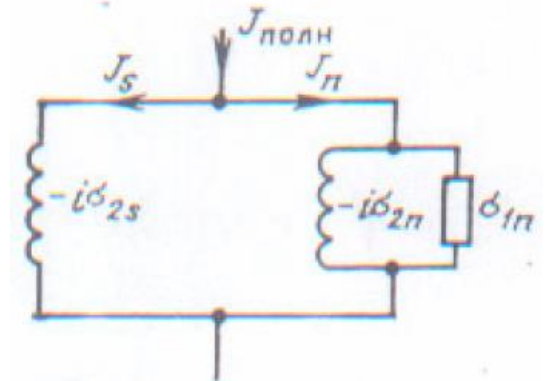
Комплексная проводимость для гармонических сигналов

$$\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2$$

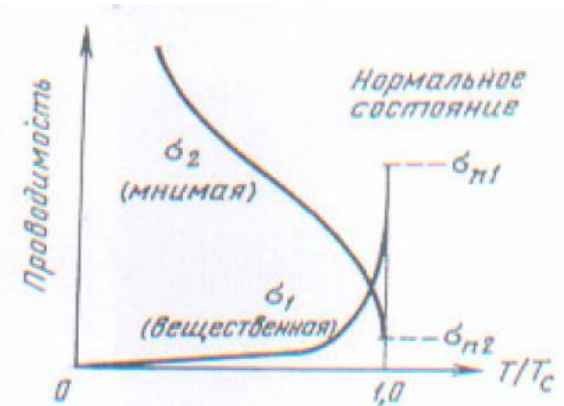
$$\sigma_{1n} = (n_n/n)\sigma_n / [1+(\omega\tau)^2] \rightarrow 0 \text{ @ } T \rightarrow 0, n_n \rightarrow 0$$

$$\sigma_{2n} = (n_n/n)\sigma_n [\omega\tau] / [(1+(\omega\tau)^2)] \rightarrow 0 \text{ @ } T \rightarrow 0$$

$$\sigma_{2s} = n_s e^2 / (m\omega) \rightarrow \sigma_n / \omega\tau \text{ @ } T = 0$$



Сверхпроводник = индуктивность при  $T \ll T_c$



# Кинетическая индуктивность.

В сверхпроводнике важную роль играет **кинетическая индуктивность**, связанная с энергией, потраченной на разгон сверхпроводящих пар (запасенной в кин. энергии сверхпроводящей компоненты тока) в соответствии с первым уравнением Лондонов (ур. L I):

Комплексная проводимость для гармонических сигналов

$$\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2$$

$$\sigma_{1n} = (n_n/n)\sigma_n / [1+(\omega\tau)^2] \rightarrow 0 \text{ @ } T \rightarrow 0, n_n \rightarrow 0$$

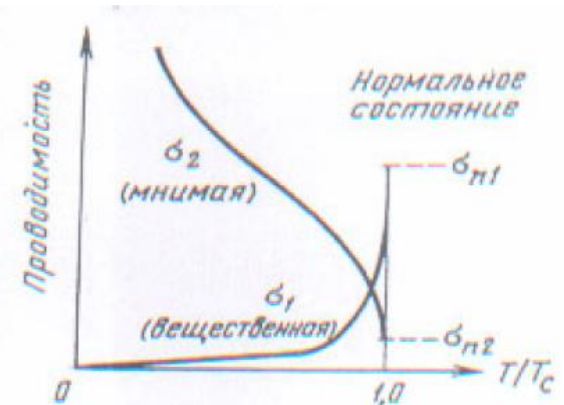
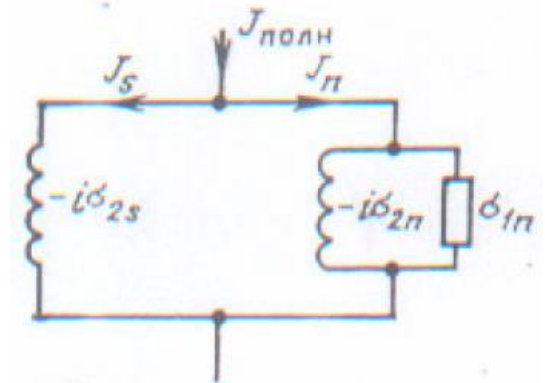
$$\sigma_{2n} = (n_n/n)\sigma_n [\omega\tau] / [(1+(\omega\tau)^2)] \rightarrow 0 \text{ @ } T \rightarrow 0$$

$$\sigma_{2s} = n_s e^2 / (m\omega) \rightarrow \sigma_n / \omega\tau \text{ @ } T = 0$$

Сверхпроводник = индуктивность при  $T \ll T_c$

Как перейти от удельных величин к конкретным?

Как учесть форму сверхпроводника?





# Кинетическая индуктивность.

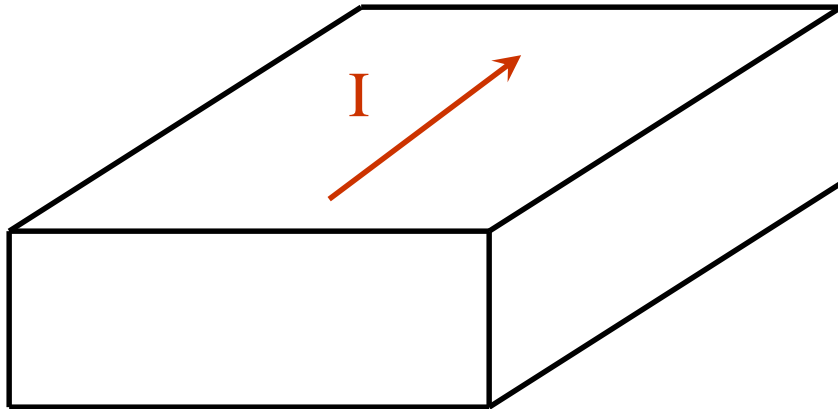
*Считаем кинетическую энергию, считаем полный ток и делим друг на друга.*

*Учитываем 2 уравнение Лондонов.*

$$E_k = \int n_s (m v_s^2 / 2) dV; \quad j = n_s e v_s \rightarrow v_s = j / n_s e$$

$$E_k = \int n_s (m j_s^2 / 2 n_s^2 e^2) dV = (1/2) \int (m / n_s e^2) j_s^2 dV \quad \Lambda = m / (e^2 n_s) = \mu_0 \lambda_L^2$$

*Интегрирование здесь ведется по объему сверхпроводника.*



*Учитываем 2 уравнение Лондонов.*

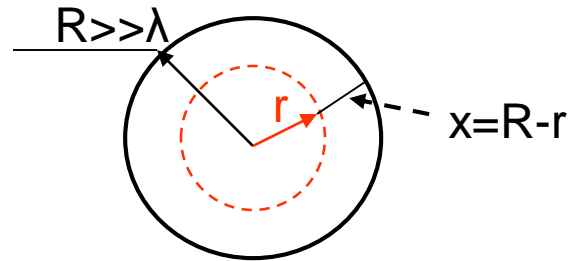
$$L_k = \Lambda (\int j_s^2 dV) / I^2$$

$$I = \int j_s dV$$

# Кинетическая индуктивность сверхпроводящих структур (на единицу длины).

Сверхпроводящий провод с радиусом  $R \gg \lambda$ .

(и длиной  $l$ )



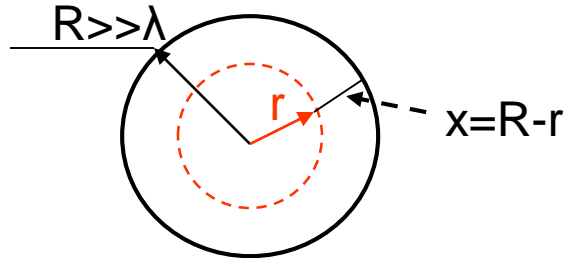
$$L_k = \Lambda \left( \int j_s^2 dV \right) / I^2$$

$$L_k = \Lambda \int (j_s^2 / I^2) dV$$

# Кинетическая индуктивность сверхпроводящих структур (на единицу длины).

Сверхпроводящий провод с радиусом  $R \gg \lambda$ .

(и длиной  $l$ )



$$L_k = \Lambda (\int j_s^2 dV) / I^2$$

$$L_k = \mu \lambda^2 (\int j_s^2 dV) / I^2$$

$$j^s = j_0^s \exp(-x/\lambda)$$

$$\int j_s^2 dV \approx \int j_{s0}^2 e^{-2x/\lambda} 2\pi R dx = \lambda j_{s0}^2 \pi R \quad (2.18)$$

**Полный ток:**  $I = \int j_s dS \approx 2\pi R \int j_s dx = 2\pi R j_{s0} \lambda$

$$L_k = \mu_0 \lambda^2 * \lambda j_{s0}^2 \pi R / (2\pi R j_{s0} \lambda)^2$$

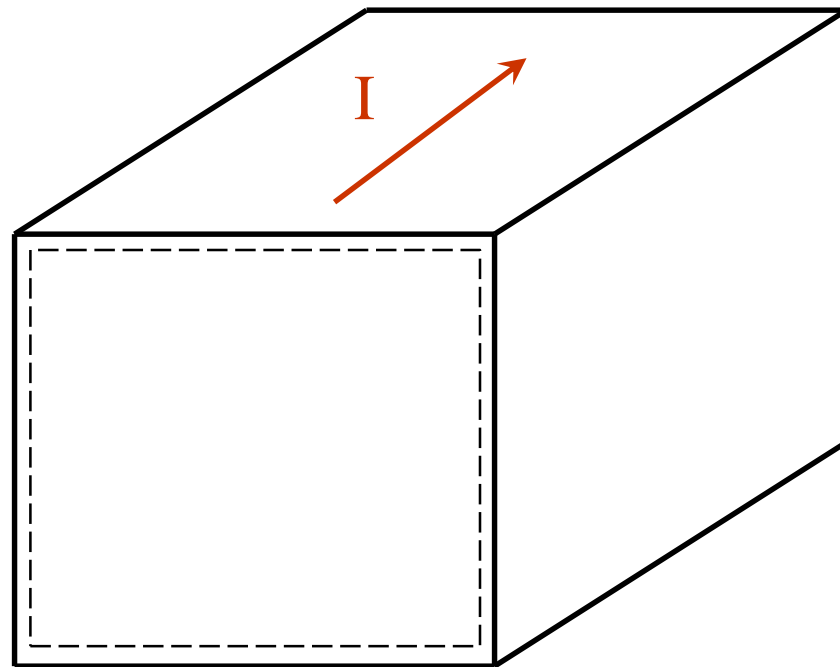
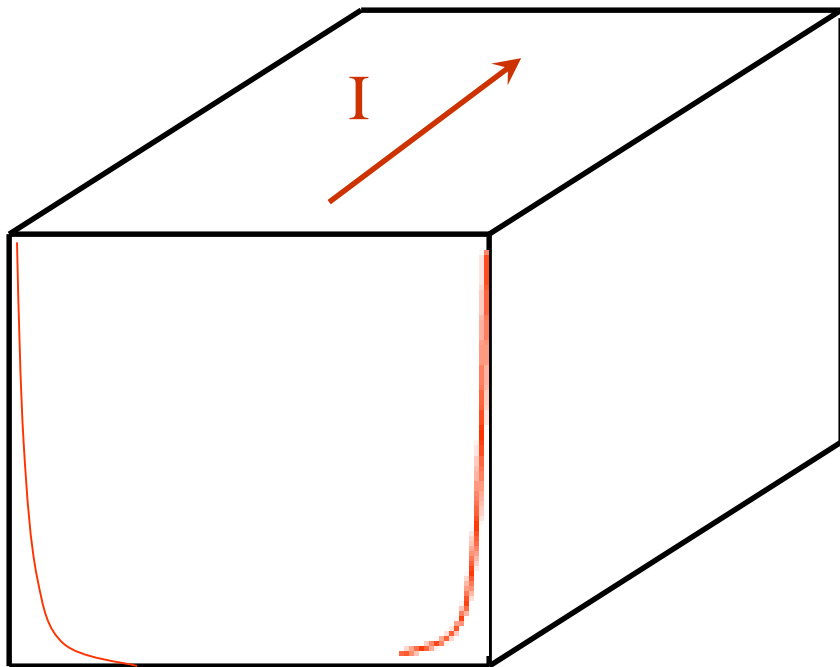
$$L_k(1 \text{ м}) = \mu_0 \lambda / 4\pi R \quad (2.20)$$

Погонная кинетическая индуктивность

# Кинетическая индуктивность толстого сверхпроводящего бруска квадратного сечения $w \times w$ длиной $l$ .

$$L_k = \Lambda \int (j_s^2 / I^2) dV$$

$$L_k = \Lambda \left( \int j_s^2 dV \right) / I^2$$



# Кинетическая индуктивность толстого сверхпроводящего бруска квадратного сечения $w \times w$ длиной $l$ .

Каждую сторону рассматриваем как сверхпроводящее полупространство.

$$L_k = \Lambda (\int j_s^2 dV) / I^2$$

$$j = j_0 \exp(-x/\lambda)$$

Для одной грани:

$$\int j_s^2 dV = j_{s0}^2 \int_0^\infty \exp(-2x/\lambda) w l dx = j_{s0}^2 [\lambda/2] * w * l$$

Для всех граней:

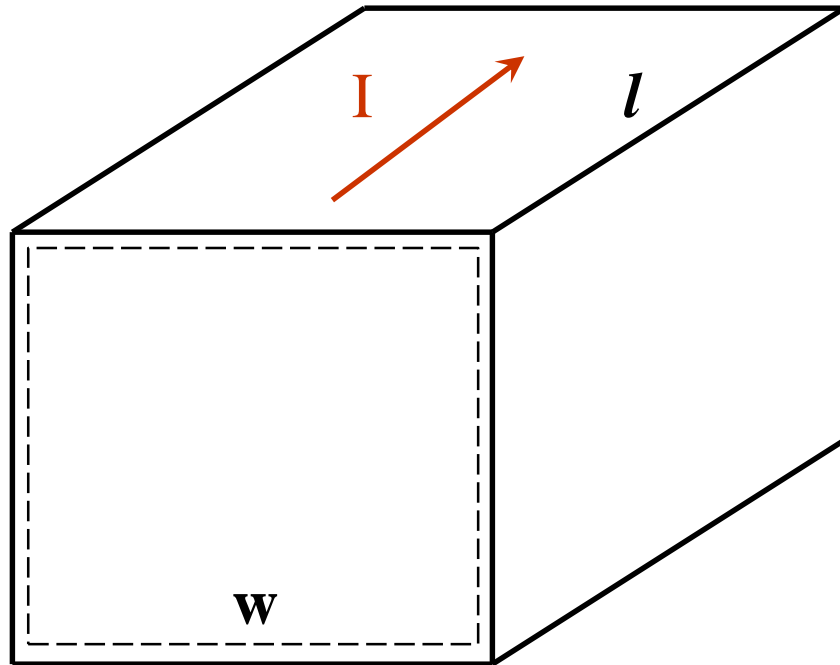
$$4 \int (j_s^2) dV = 4 * j_0^2 [\lambda/2] * w * l$$

Полный ток:

$$I = 4 \int j_0 e^{-x/\lambda} w dx = 4 j_0 \lambda w$$

Кинетическая индуктивность:

$$L_k = [\mu_0 \lambda^2] * 4 * j_0^2 [\lambda/2] * w * l / [4 j_0 \lambda w]^2 = [\mu_0 \lambda / 8] * [l / w]$$

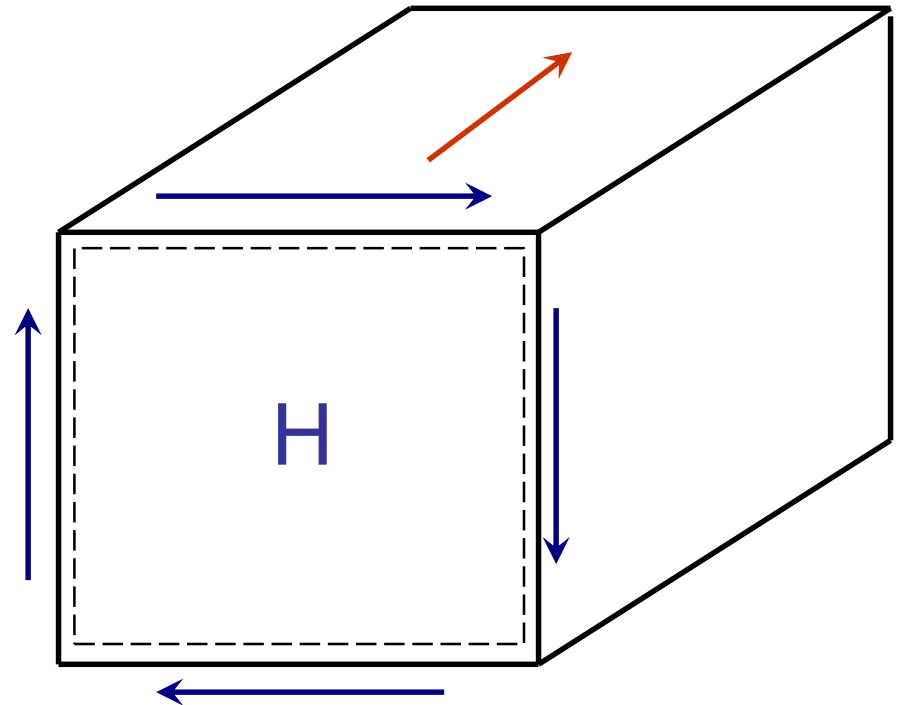
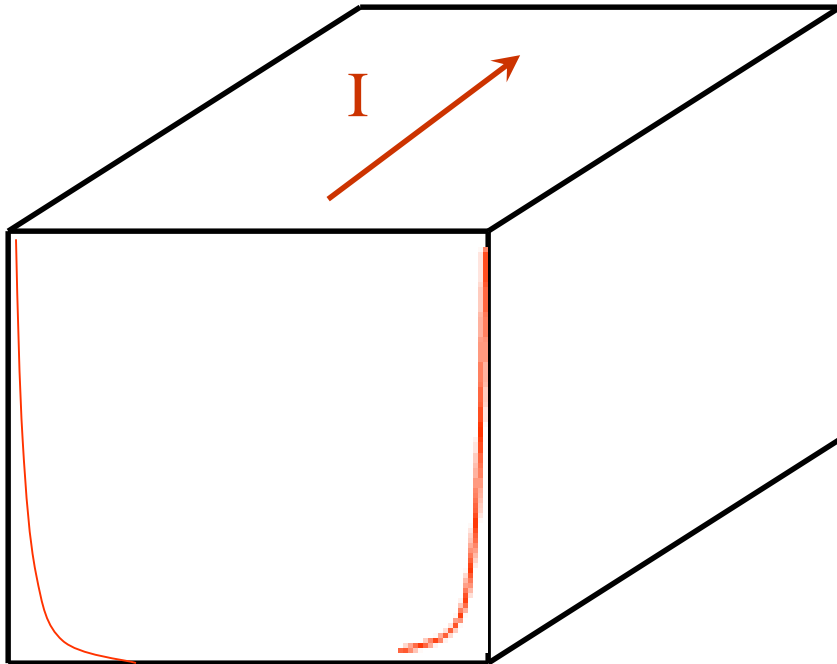


# Геометрическая индуктивность толстого сверхпроводящего бруска квадратного сечения $w \times w$ длиной $l$ .

$$L_k = \Lambda \int (j_s^2 / I^2) dV$$

Полный ток:

$$I = 4 \int j_0 e^{-x/\lambda} w dx = 4 j_0 \lambda w$$



# Геометрическая индуктивность толстого сверхпроводящего бруска квадратного сечения $w \times w$ длиной $l$ .

$$L_k = [\mu_0 \lambda / 2] * [l / w]$$

*Геометрическая индуктивность* пластины (ее часть, связанная с энергией поля внутри сверхпроводника):

$$L_M I^2 = 4 * \mu_0 \int_{-\infty}^0 H(x)^2 dV = 4 * \mu_0 [H_I^2] \int e^{-2x/\lambda} w l dx = 4 * [\mu_0 \lambda / 2] * H_I * w * l;$$

использовано:  $H = H_I e^{-x/\lambda}$

$$L_M = 4 * [\mu_0 \lambda / 2] * [I / 4w]^2 * w * l / I^2 = [\mu_0 \lambda / 8] * [l / w]$$

использовано:  $H_I = I / 4w$

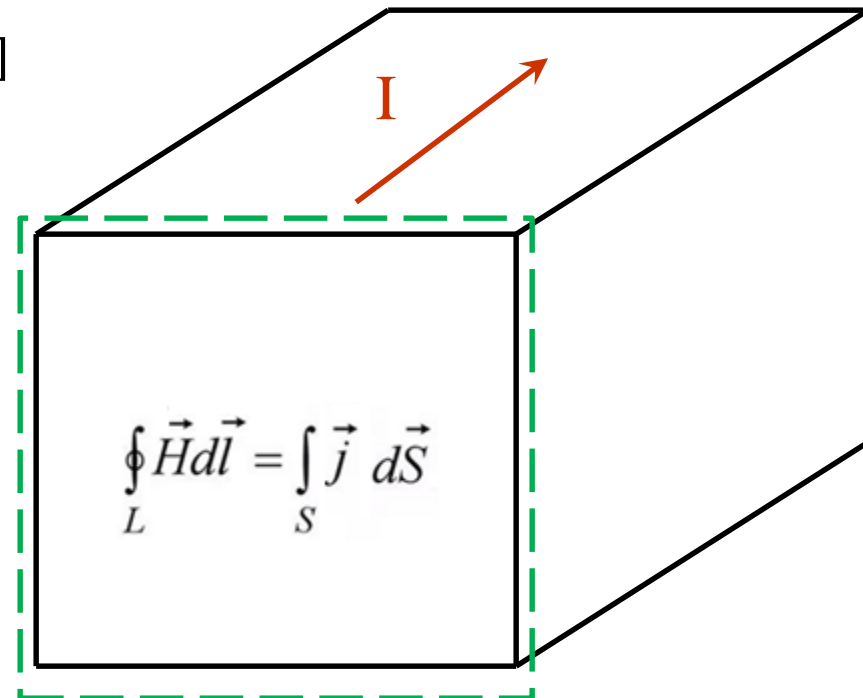
$$L_{полн} = L_M + L_k = [\mu_0 \lambda / 4] * [l / w],$$

$$L_{\square} = \mu_0 \lambda / 4$$

Для типичной  $\lambda \cong 75$  нм

$$L_{\square} \cong 5 \text{ фГн.}$$

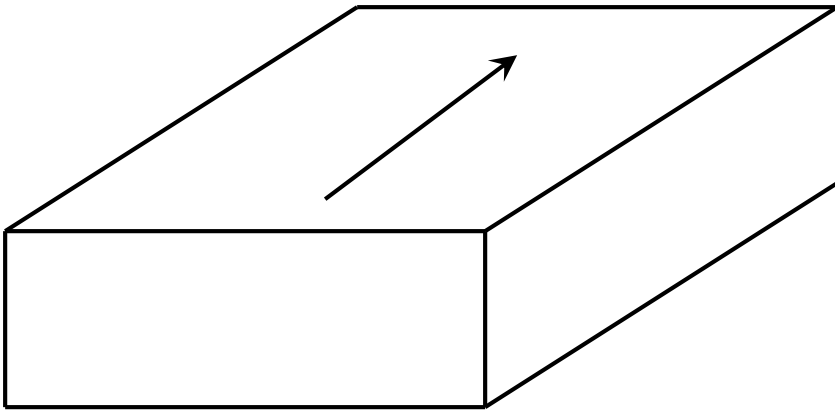
$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) d\vec{S}$$



# Кинетическая индуктивность тонких сверхпроводящих пленок

$$L_{\square} = L_M + L_K = \mu_0 \lambda / 4$$

Что если брусок сплющить?  
Индуктивность сверхпроводящей пластины.





# Кинетическая индуктивность толстой пластины шириной $w$ длиной $l$ .

Каждую сторону рассматриваем как сверхпроводящее полупространство.

$$j = j_0 \exp(-x/\lambda)$$

$$L_k = \Lambda \int (j_s^2 / I^2)$$

Для одной грани:

$$\int j_s^2 dV = j_{s0}^2 \int_0^\infty \exp(-2x/\lambda) w l dx = j_{s0}^2 [\lambda/2] * w * l$$

Для всех граней:

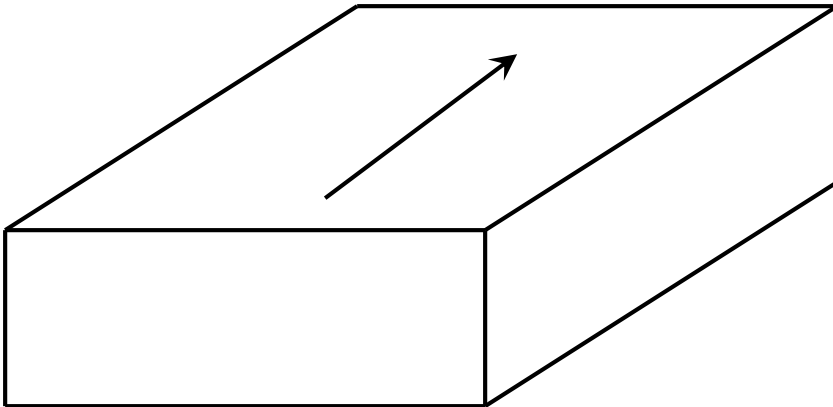
$$\int (j_s^2) dV = 2 * j_0^2 [\lambda/2] * w * l$$

Полный ток:

$$I = 2 \int j_0 e^{-x/\lambda} w dx = 2 j_0 \lambda w$$

Кинетическая индуктивность:

$$L_k = [\mu_0 \lambda^2] * 2 * j_0^2 [\lambda/2] * w * l / [2 j_0 \lambda w]^2 = [\mu_0 \lambda / 4] * [l / w]$$



# Кинетическая индуктивность тонких сверхпроводящих пленок

*Геометрическая индуктивность* пластины (ее часть, связанная с энергией поля внутри сверхпроводника):

$$L_M I^2 = 2 * \mu_0 \int H(x)^2 dV = 2 * \mu_0 [H_I^2] \int e^{-2x/\lambda} w l dx = 2 * [\mu_0 \lambda / 2] * H_I * w * l;$$

использовано:  $H = H_I e^{-x/\lambda}$

$$L_M = 2 * [\mu_0 \lambda / 2] * [I / 2w]^2 * w * l / I^2 = [\mu_0 \lambda / 4] * [l/w]$$

использовано:  $H_I = I / 2w$

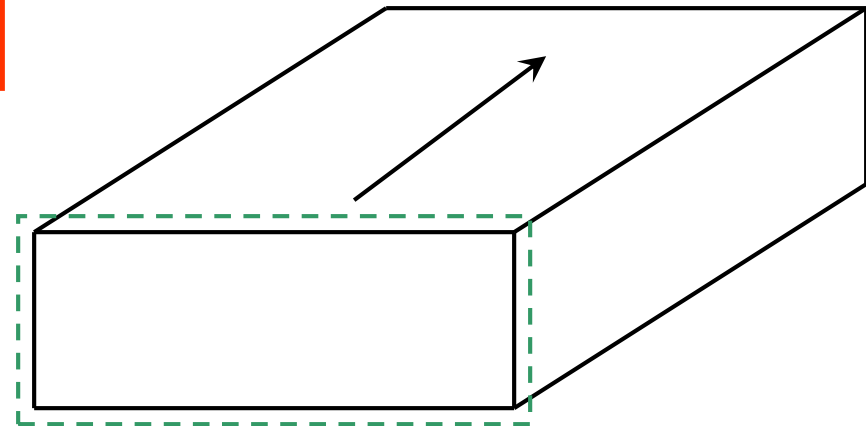
$$L_{полн} = L_M + L_k = [\mu_0 \lambda / 2] * [l/w],$$

$$L_{\square} = \mu_0 \lambda / 2$$

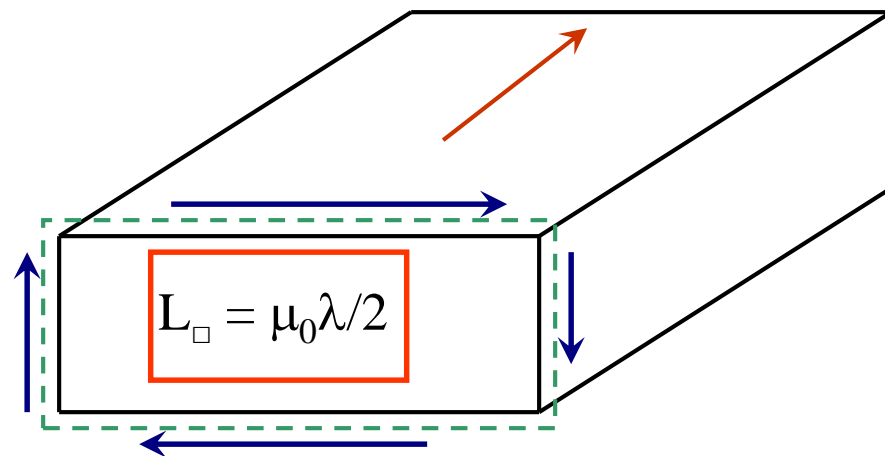
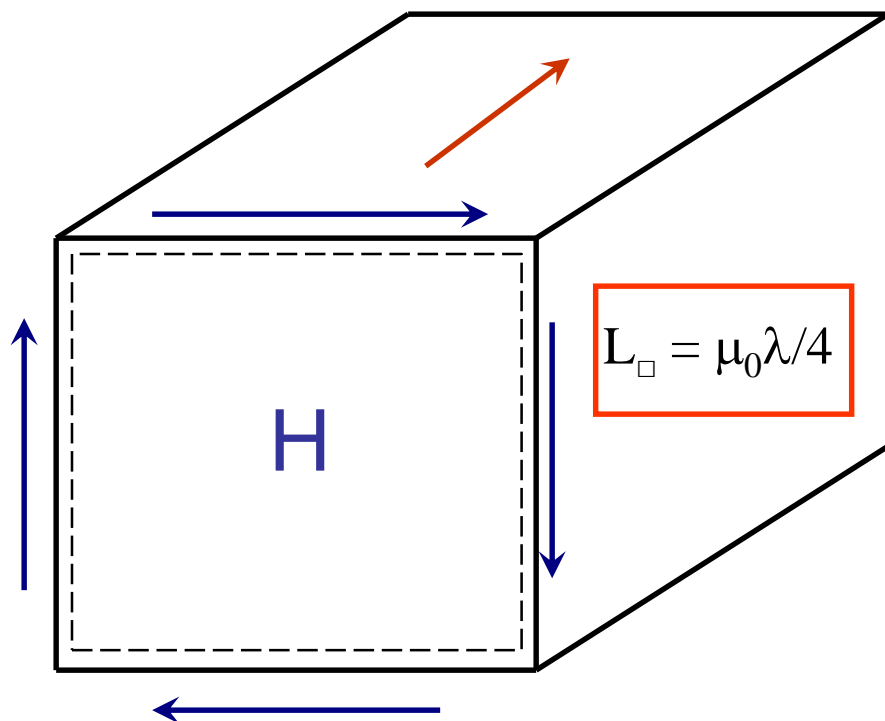
Для типичной  $\lambda \cong 75$  нм

$$L_{\square} \cong 10 \text{ фГн.}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$



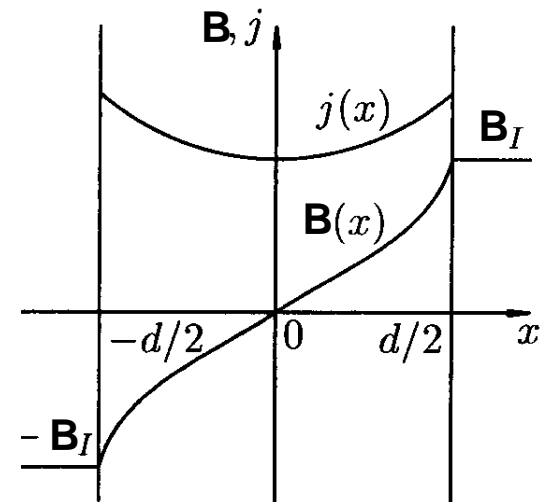
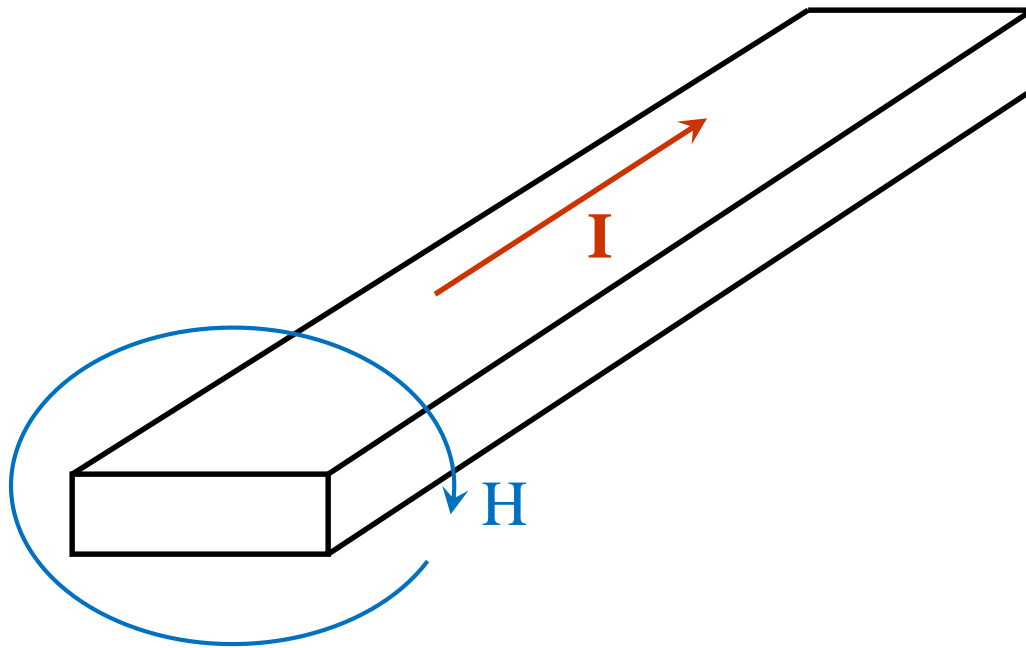
# Кинетическая индуктивность бруска и пластины



# Кинетическая индуктивность тонких сверхпроводящих пленок

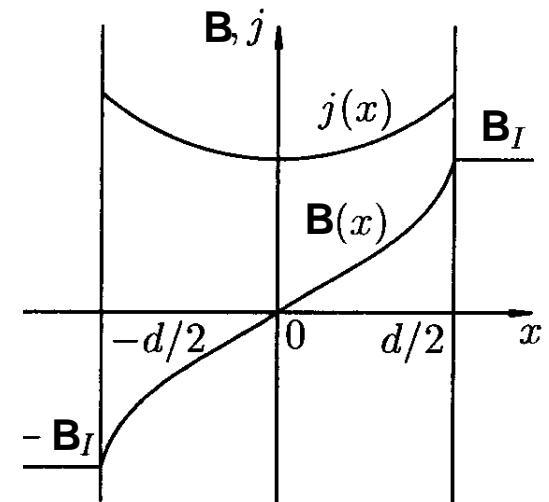
$$L_k = \Lambda \int (j_s^2 / I^2) dV$$

*Сверхпроводящая пленка с  $d \ll \lambda$ :*



# Кинетическая индуктивность тонких сверхпроводящих пленок

$$L_k = \Lambda \int (j_s^2 / I^2) dV$$



*Сверхпроводящая пленка с  $d \ll \lambda$ :*

$$I \approx \text{const}, \quad j_s \approx I / wd \quad j_s / I \approx 1 / wd \quad \text{на квадрат } l = w$$

$$L_k^\square = \mu_0 \lambda^2 \int (j_s^2 / I^2) w l dx = \mu_0 \lambda^2 \int (1 / wd)^2 w l dx = d * \mu_0 \lambda^2 / d^2 * [l / w]$$

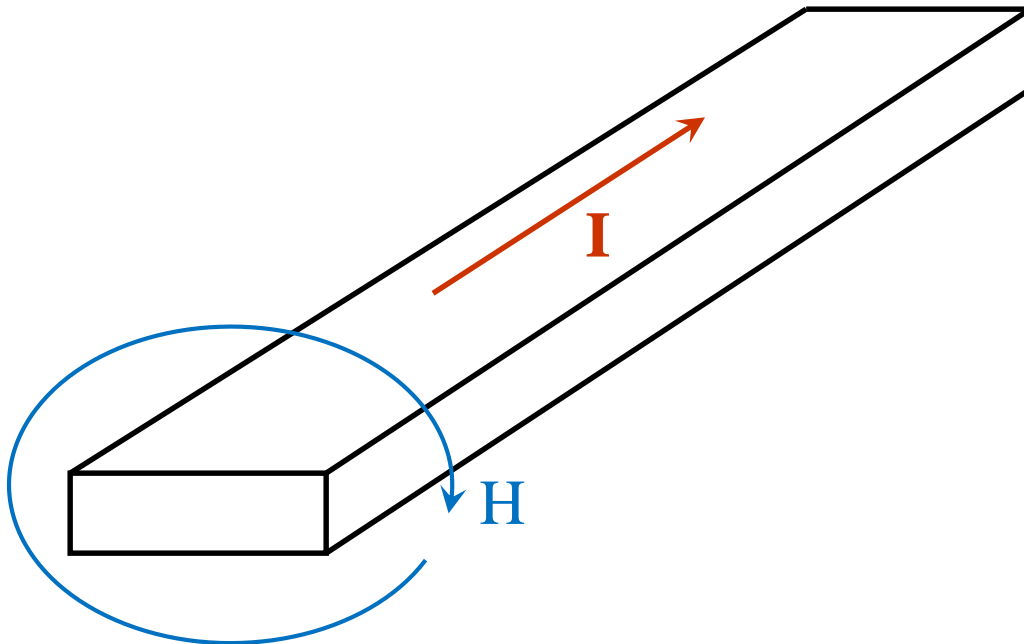
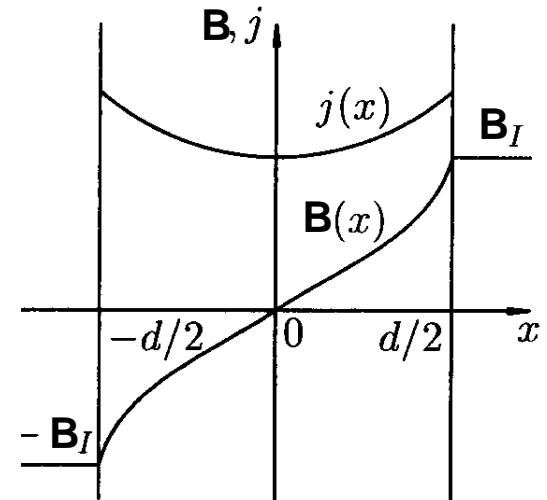
$$L_k^\square = \mu_0 \lambda^2 / d = \mu_0 \lambda * (\lambda / d)$$

*С уменьшением толщины кинетическая индуктивность повышается в  $\lambda/d$  раз из-за ослабления экранировки.*

$$\text{Для типичной } \lambda \cong 75 \text{ нм и толщины } d=10 \text{ нм: } L_k^\square \cong 7 * 10^{-13} \text{ Гн} = 0.7 \text{ пГн.}$$

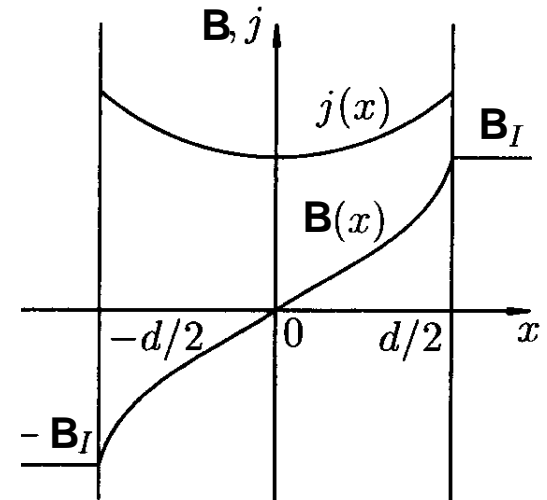
# Геометрическая индуктивность тонких сверхпроводящих пленок

$$L_k = \mu_0 \int H^2 dV / I^2$$



# Геометрическая индуктивность тонких сверхпроводящих пленок

$$L_k = \mu_0 \int H^2 dV / I^2$$



*Сверхпроводящая пленка с  $d \ll \lambda$ :*

$$H_I = 2I / w, \quad H(x) \approx 2xH_I / d = 4xI / wd$$

$$L_H = \mu_0 \int (4xI / wd)^2 w l dx / I^2 = \mu_0 (4 / wd)^2 w l \int x^2 dx = (d^3 / 12) * \mu_0 (4 / d)^2 * [l / w]$$

$$L_H^\square = (4/3) \mu_0 d$$

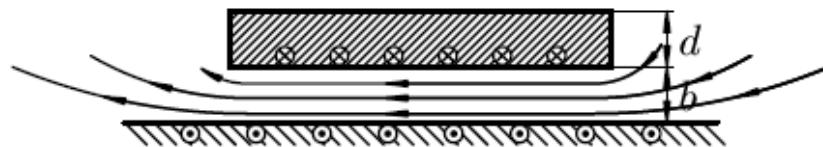
Для типичной толщины  $d = 10$  нм:  $L_H^\square \approx 1.67 * 10^{-14}$  Гн  $\cong 0.02$  пГн.

$$L_H^\square = 0.03 L_K^\square$$

# Кинетическая индуктивность сверхпроводящих пленок

Индуктивность толстой сверхпроводящей пленки над  
сверхпроводящим экраном.

Сверхпроводящая пластина *из ниобия* с током  $I$  расположена на  
расстоянии  $b$  над полубесконечным сверхпроводящим экраном *из  
свинца*





# Индуктивность толстой сверхпроводящей пленки над сверхпроводящим экраном.

Сверхпроводящая пластина с током  $I$  расположена на расстоянии  $b$  над полубесконечным сверхпроводящим экраном

Поле  $H_0 = 2H_I = I/w$  "заперто" в "магнитном" зазоре  $t_m = \lambda_1 + b + \lambda_2$ , сверхток течет по внутренней поверхности пленки и экрана.

Индуктивность пленки на квадрат  $= \mu_0 \lambda_1$

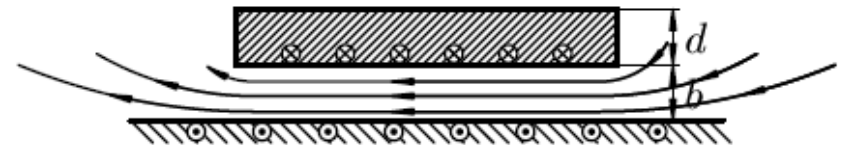
Индуктивность изображения на квадрат  $= \mu_0 \lambda_2$

Индуктивность, связанная с полем в пожеутке  $b$ :

$$L_H^{\square} = \mu_0 (2H_I)^2 w^2 b / I^2 = \mu_0 (2I/2w)^2 w^2 b / I^2$$

$$L_H^{\square} = \mu_0 b.$$

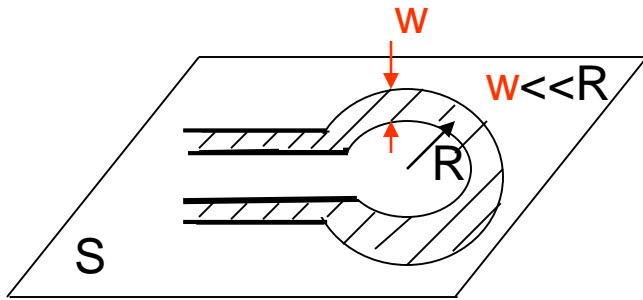
$$H_I = I/2w, \quad I = H_I * w$$



$$\text{Полная индуктивность на квадрат: } L_{\text{total}}^{\square} = \mu_0 (\lambda_1 + \lambda_2 + b) \quad (2.22)$$

Уменьшаем  $b$ ?

# Индуктивность сверхпроводящей петли над сверхпроводящим экраном



*уменьшение индуктивности, возникающее при размещении сверхпроводящего элемента (петли) над сверхпроводящей экранирующей плоскостью ("ground plane")*

*Индуктивность такой петли в норм состоянии (из справочника):*

$$L_n = R\mu_0 [\ln(16 R/w) - 2] \quad (2.23)$$

$R=100$  мкм,  $w = 10$  мкм дают  $L_n \cong 4 \cdot 10^{-10}$  Гн

*Если сверхпроводящая петля расположена над сверхпроводящей экранирующей плоскостью, ее индуктивность равна:*

$$L_s = (2\pi R/w) \mu_0 (\lambda_1 + \lambda_2 + b); \quad (2\pi R/w - \text{число квадратов}) \quad (2.24)$$

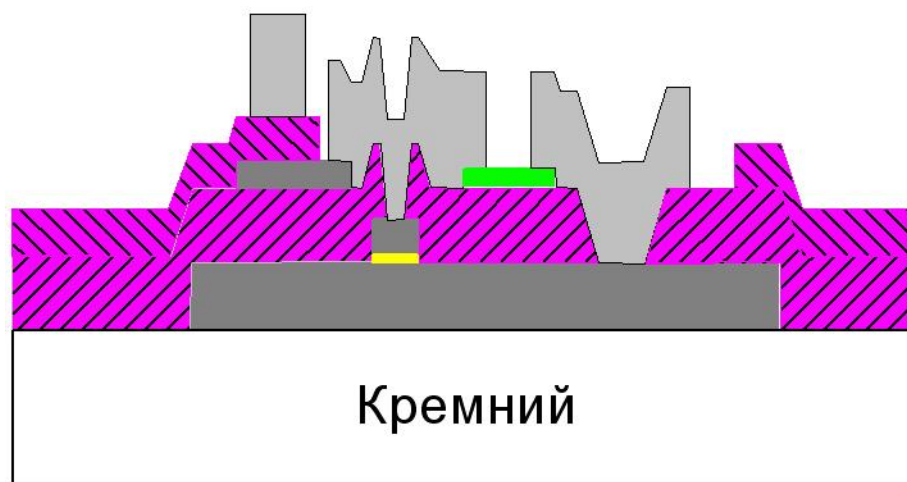
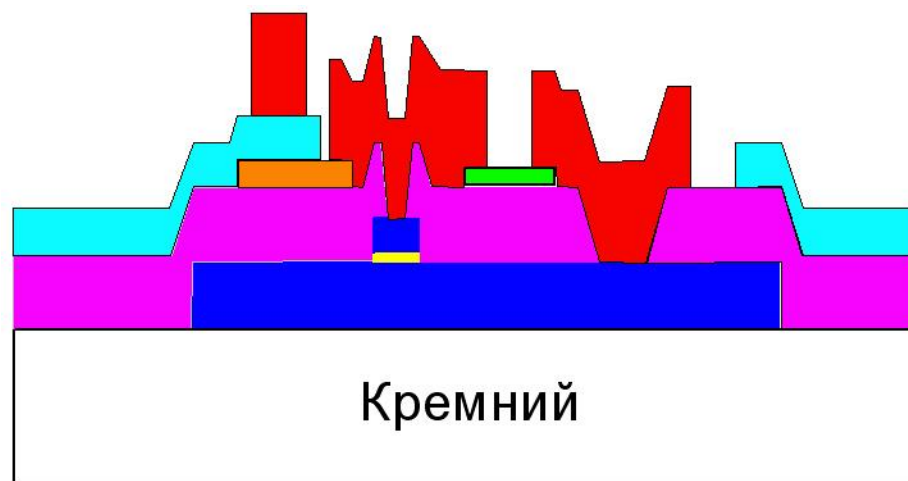
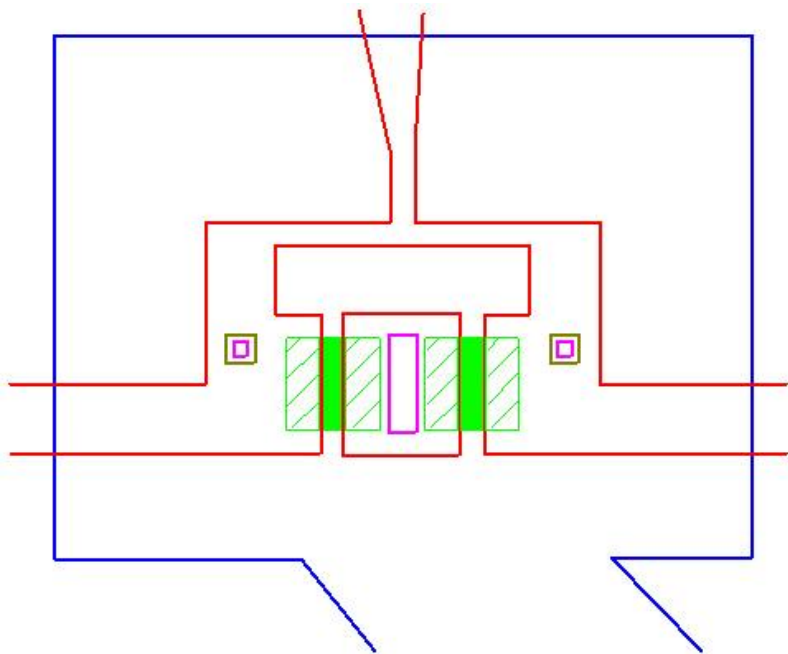
*Оценки по формулам ур.(2.23 и 2.24) дают для*

$\lambda \cong 40$  нм и  $b=200$  нм :

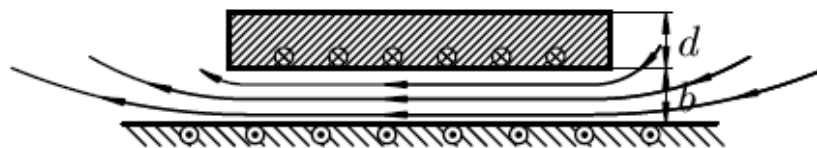
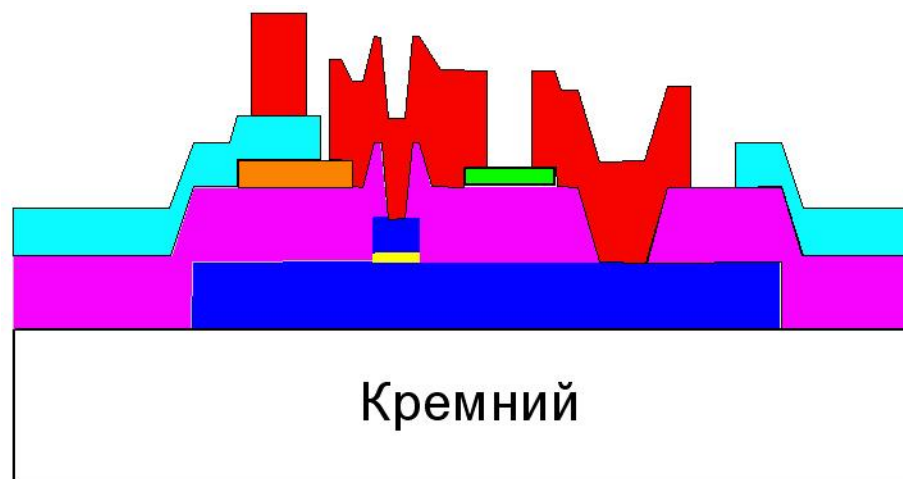
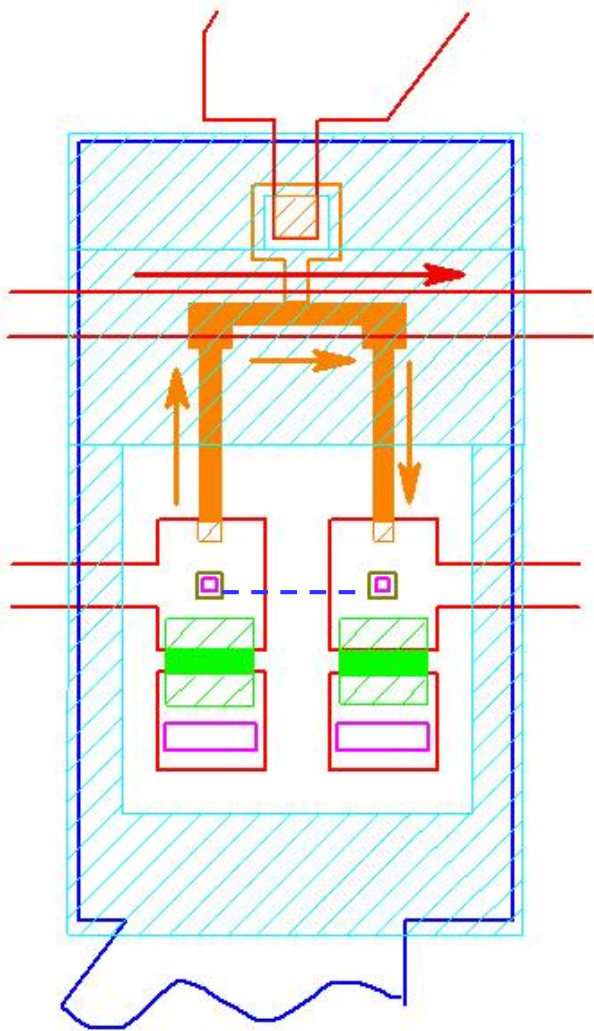
$$L_s \cong 2 \cdot 10^{-11} \text{ Гн,}$$

***т.е. индуктивность упала в 20 раз !***

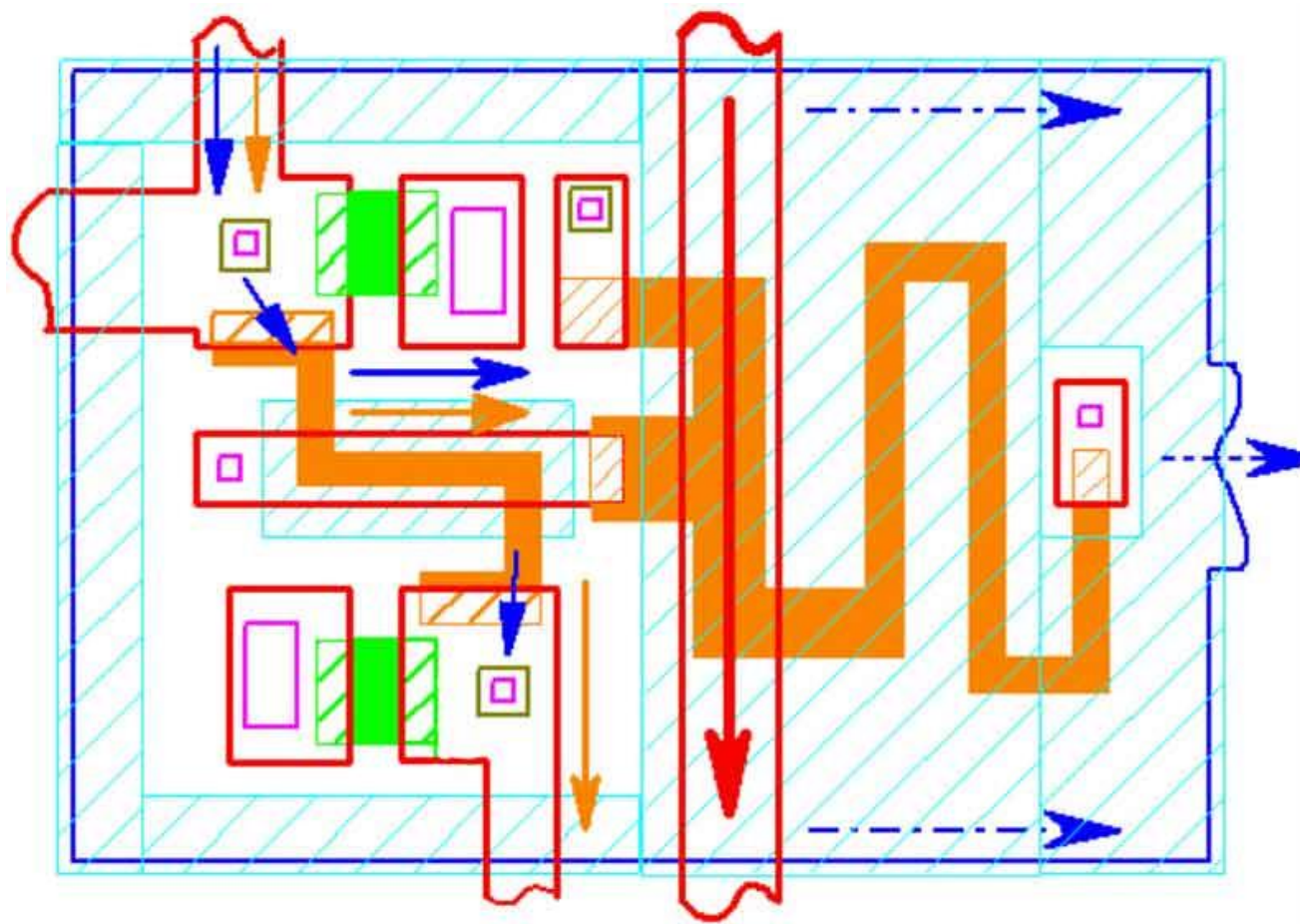
*Размещение сверхпроводящего элемента (петли) над  
сверхпроводящей экранирующей плоскостью ("ground plane")*



*Размещение сверхпроводящего элемента (петли) над сверхпроводящей экранирующей плоскостью ("ground plane")*



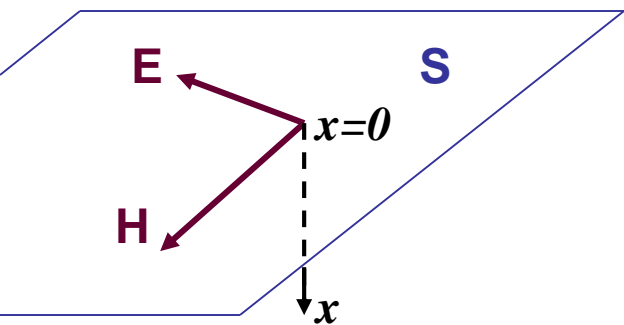
*Размещение сверхпроводящего элемента (петли) над  
сверхпроводящей экранирующей плоскостью ("ground plane")*



Скин-эффект в сверхпроводниках.

# Нормальный скин-эффект.

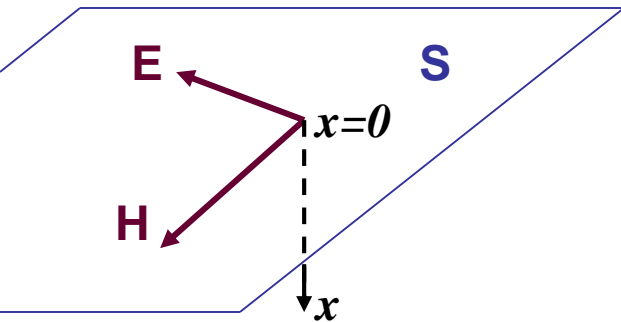
Пусть на сверхпроводящее полупространство падает *электромагнитная волна*



?

# Нормальный скин-эффект.

Пусть на сверхпроводящее полупространство падает электромагнитная волна



Плоская, гармоническая

$$E, H, j_s, j_n = \text{const} * \sin(kx + \omega t)$$

1. Легко реализуемы экспериментально.
2. Удобно использовать при анализе дифференциальных уравнений.
3. Негармонические периодические сигналы могут быть разложены в ряд Фурье по гармониками  $\sin(k\omega t)$  или  $\cos(k\omega t)$ .
4. Непериодические сигналы могут быть разложены в интеграл Фурье по частотам.



# Гармонические сигналы

$$E, j_s, j_n = \text{const} * \sin(\omega t)$$

$$E, j_s, j_n = \text{const} * e^{i\omega t}$$

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i * \sin(\omega t)$$

$$d \{e^{i\omega t}\} / dt = i\omega * e^{i\omega t}$$

$$\Lambda d j_s / dt = E(t) \quad \rightarrow \quad \Lambda d \{ \sigma_s E(t) \} / dt = E(t) \quad @ \quad j_s = \sigma_s E(t)$$

$$\Lambda \sigma_s dE(t) / dt = E(t) \quad \Rightarrow \quad \Lambda \sigma_s i\omega E(t) = E(t) \quad \Rightarrow \quad \Lambda \sigma_s i\omega = 1$$

$$\sigma_s = 1 / i\Lambda\omega = -i / \mu_0 \lambda_L^2 \omega$$

$$\text{Плоская волна: } E(x, t) = E_0 \exp(-ikx) * \exp(i\omega t) = E_0 \exp(-ikx + i\omega t)$$

$$k = 2\pi / \lambda$$

Не путать!!!

$$\partial E(x, t) / \partial x = -ik * E(x, t)$$

$$\partial E(x, t) / \partial t = i\omega * E(x, t)$$

# Жонглирование мнимой единицей

$$i^2 = -1 \qquad 1/i = i/i^2 = -i$$

$$1/(1+i) = (1 - i)/\{(1 + i)*(1 - i)\} = (1 - i)/\{(1 - i^2)\} = (1 - i)/2$$

$$1/(1+i\omega\tau) = (1-i\omega\tau)/\{(1+i\omega\tau)*(1-i\omega\tau)\} = (1-i\omega\tau)/\{1-(i\omega\tau)^2\} = \\ = (1-i\omega\tau)/\{1+(\omega\tau)^2\}$$

---

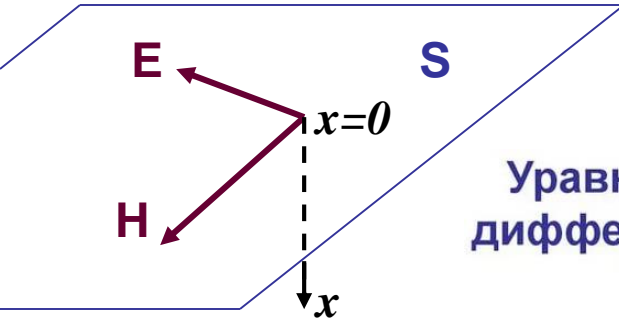
Умножение  $(1 - i)$  на мнимую единицу = комплексное сопряжение

$$(1 - i)*i = i - i^2 = 1 + i$$

Мнимая единица под квадратным корнем

$$\pm 2i = \pm 2i - 1 = 1 \pm 2i + i^2 = (1 \pm i)^2 \text{ — можно извлечь квадратный корень}$$

# Нормальный скин-эффект.



Уравнения Максвелла в  
дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Система уравнений Максвелла  
в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

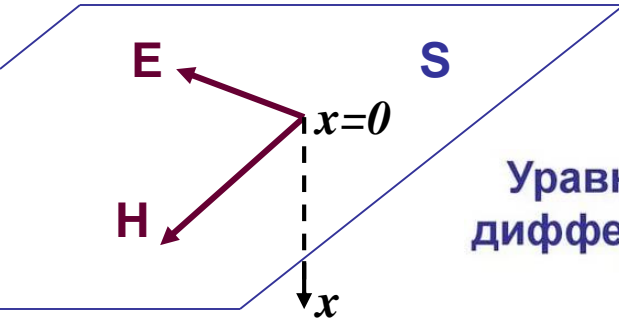
$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

Как получить уравнение для  
микроволнового поля в металле?

# Нормальный скин-эффект.



$$\underline{j = \sigma E}$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\underline{\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\underline{\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

Система уравнений Максвелла в интегральной форме

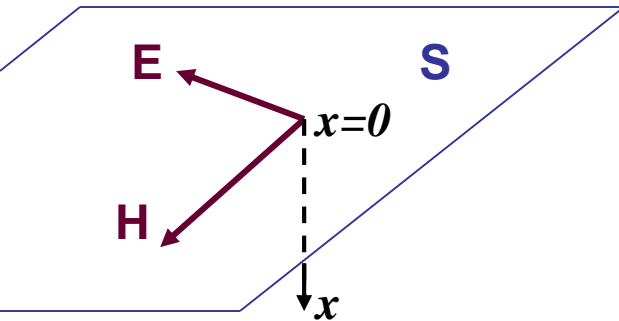
$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

# Нормальный скин-эффект.



*поверхность проводящего полупространства:  
отношение  $E/H$  в электромагнитной волне,  
взаимодействующей со сверхпроводником,  
однородно вдоль поверхности  
сверхпроводника ( $x=0$ ).*

Из уравнений Максвелла, связывающих  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}; \quad (\text{a})$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{b})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \sigma \text{rot } \mathbf{E}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t = -\mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t; \quad (\text{b})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\mu_0 \sigma \partial \mathbf{H} / \partial t$$

Уравнения Максвелла в  
дифференциальной форме

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

# Жонглирование оператором Гамильтона

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Градиент скалярной функции (направление наибольшего возрастания).

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \quad \text{grad } u(\mathbf{r}) = \nabla u(\mathbf{r});$$

---

Дивергенция вектора (наличие источников и стоков силовых линий векторного поля)

---

Ротор (вихрь) векторного поля  $\vec{a}$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\text{div } \vec{u} = \vec{\nabla} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

---

Завихренность векторного поля.

$$\text{rot } \mathbf{a} = [ \nabla \times \mathbf{a} ]$$

# Двойное векторное произведение

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = [\nabla \times [\nabla \times \mathbf{H}]]$$

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} = \nabla, \mathbf{c} = \mathbf{H} \rightarrow$$

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$$

$$\text{div } \mathbf{H} = \partial H_x / \partial x + \partial H_y / \partial y + \partial H_z / \partial z$$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

$$\text{grad div } \mathbf{H} = i (\partial^2 H_x / \partial x^2 + \partial^2 H_x / \partial x \partial y + \partial^2 H_x / \partial x \partial z + \dots) \\ + \dots$$

Ротор (вихрь) векторного поля  $\vec{a}$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

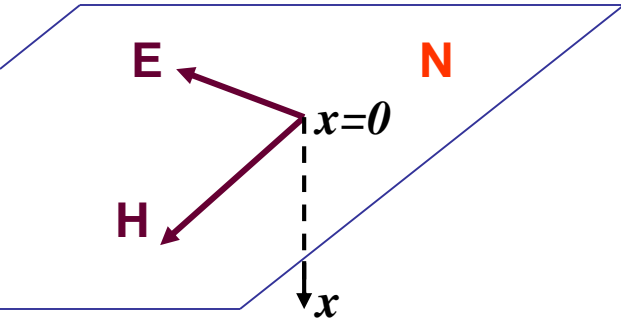
$$\nabla^2 = (\nabla \nabla) = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = i * \nabla^2 H_x + j * \nabla^2 H_y + k * \nabla^2 H_z$$

$$= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

# Нормальный скин-эффект.

Из уравнений Максвелла:  $\text{div} \mathbf{H} = 0$



$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\mu_0 \sigma \partial \mathbf{H} / \partial t$$

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$$

$$-\kappa^2 H^{(\omega)}$$

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = -\mu_0 \sigma \partial \mathbf{H} / \partial t$$

$$i\omega H^{(\omega)}$$

---

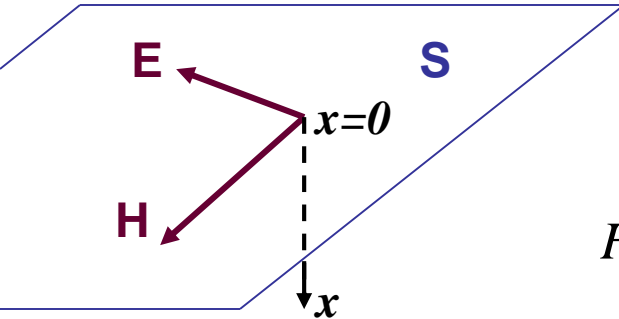
$$H(x,t) = H_\omega \exp(-\{ikx + i\omega t\}) = H_\omega \exp(-ikx) * \exp(-i\omega t)$$



# Скин-эффект в нормальном металле.

Из уравнений Максвелла:  $\text{div} \mathbf{H} = 0$

$$d^2 H / dx^2 = -\mu_0 \sigma \partial H / \partial t$$



Волна  $\mathbf{H}$  распространяется вглубь проводника (вдоль  $x$ ).

$$H^{(\omega)}(x, t) = H_0 \exp(-\{ikx + i\omega t\}) = H_0 \exp(-ikx) * \exp(-i\omega t)$$

~~$$\kappa^2 H^{(\omega)}(x, t) = -i \mu_0 \sigma \omega H^{(\omega)}(x, t)$$~~

Выражение для волнового вектора:  $\kappa^2 = -i \sigma \mu_0 \omega = -2i/\delta^2$ ,

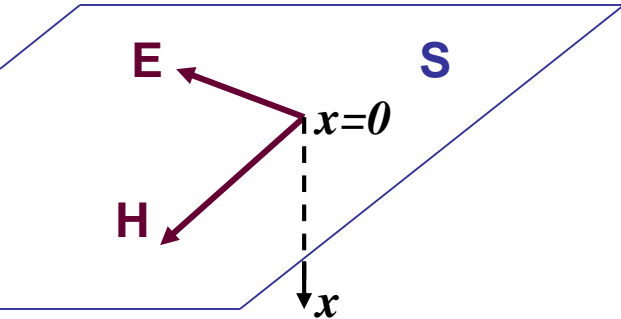
$$\delta = (2/\mu_0 \sigma \omega)^{1/2}$$

$$\kappa = (1 - i)/\delta \quad (2.32), \text{ поскольку } -2i = 1 - 2i + i^2 = (1 - i)^2$$

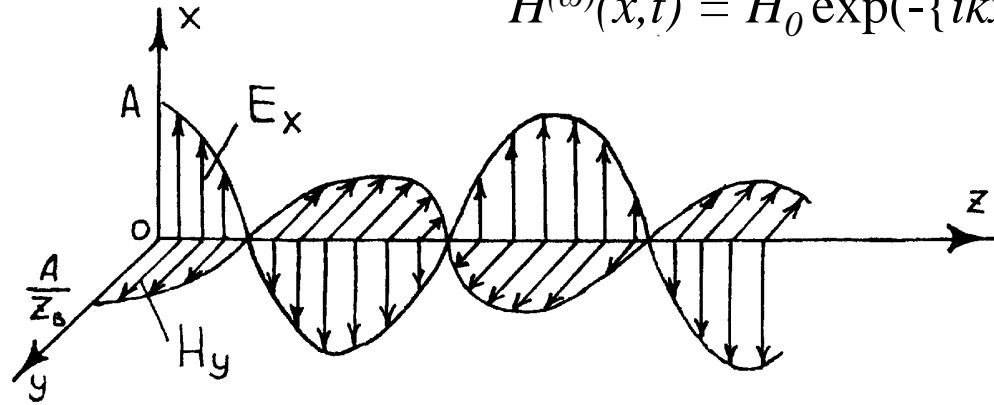
$$H_x^{(\omega)} = H_0^{(\omega)} \exp(-x/\delta) \exp\{-i(x/\delta - \omega t)\}$$

где  $\delta = (2/\mu_0 \sigma \omega)^{1/2}$  – скин-глубина

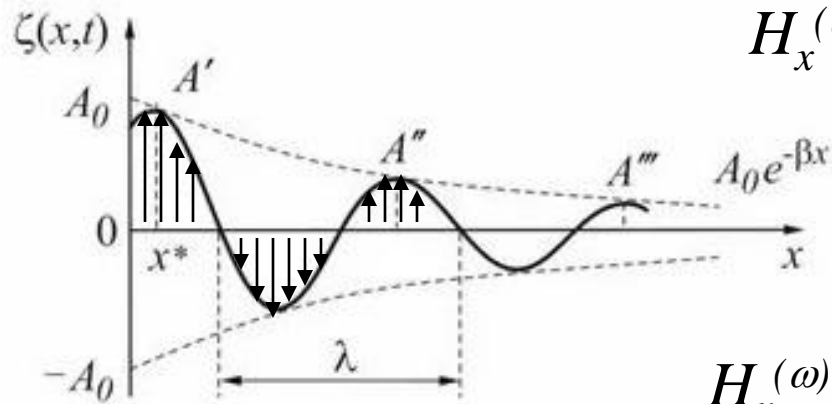
# Электромагнитная волна



Вакуум ( $k_x$  — действительный):  
 $H^{(\omega)}(x,t) = H_0 \exp(-\{ikx + i\omega t\})$



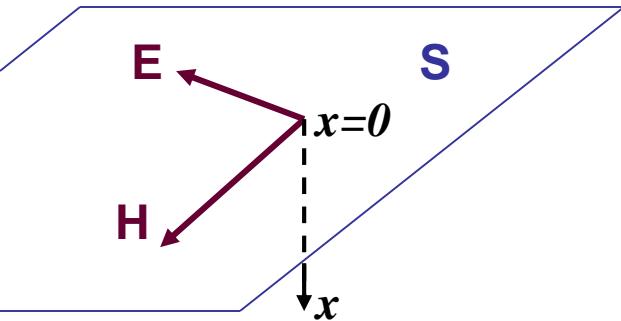
Металл:  $k_x$  — комплексный,  $\text{Re}(k_x) = \text{Im}(k_x)$ :



$$H_x^{(\omega)} = H_0^{(\omega)} \exp(-x/\delta) \exp\{-i(x/\delta - \omega t)\}$$

$$H_x^{(\omega)} = H_0^{(\omega)} \exp(-x/\delta) \exp\{-i(x/\delta - \omega t)\}$$

# Скин-эффект в сверхпроводниках.



$$\kappa = (1 - i)/\delta \quad (2.32)$$

$$\delta = (2/\sigma \mu_0 \omega)^{1/2}$$

$$\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2$$

$$\Lambda = m/(e^2 n_s) = \mu_0 \lambda^2$$

$$\omega^* \tau = 2\pi \tau / T$$

Для  $T$  не слишком близких к  $T_c$ , не слишком высоких частот и не слишком чистого (лондоновского) сверхпроводника:  
 $n_n/n_s \ll 1$  и  $\omega\tau \ll 1$ . В этом приближении

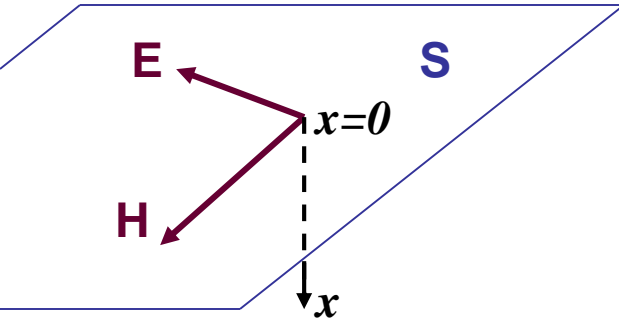
$$\sigma \cong n_n \tau / (n_s \Lambda) - i / (\Lambda \omega),$$

$$\sigma_1 = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\Lambda \omega} \left[ 1 + \frac{n_n}{n_s} \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \right]$$



# Скин-слой в сверхпроводниках. Проводимость



$$\kappa = (1 - i) / \delta \quad (2.32)$$

$$\delta = (2 / \sigma \mu_0 \omega)^{1/2}$$

$$\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2$$

---


$$\sigma \cong n_n \tau / (n_s \Lambda) - i / (\Lambda \omega),$$

$$\sigma \cong (1 / \Lambda \omega) \{ (n_n / n_s) \omega \tau - i \}$$

$$\sigma \cong (1 / \mu_0 \lambda^2 \omega) \{ (n_n / n_s) \omega \tau - i \}$$

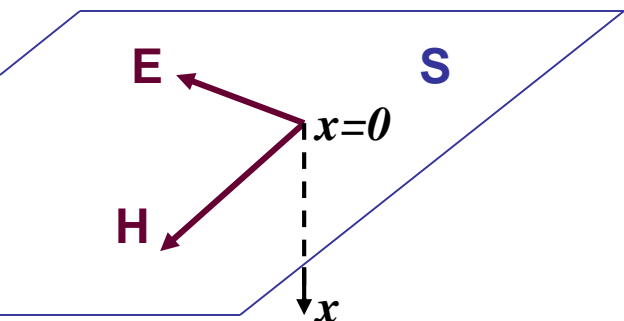
$$\mu_0 \omega \sigma = (\{ n_n / n_s \} \omega \tau - i) / \lambda^2 \approx -i / \lambda^2$$

Проводимость мнимая!

Для  $T$  не  
слишком  
близких  
к  $T_c$ !

# Скин-слой в сверхпроводниках.

$$H_0 \exp(-ikx) \exp(i\omega t)$$



$$\kappa = (1-i)/\delta \quad (2.32)$$

$$\Lambda = m/(e^2 n_s) = \mu_0 \lambda^2$$

$$\delta = (2/\mu_0 \sigma \omega)^{1/2}$$

$$\sigma \cong (1/\mu_0 \lambda^2 \omega) \{ (n_n/n_s) \omega \tau - i \}$$

$$\mu_0 \omega \sigma \approx -i / \lambda^2$$

$$\text{Из (2.31): } \delta = \sqrt{2 / [-i/\lambda^2]}^{1/2} \cong \lambda \sqrt{-2/i} = \lambda \sqrt{2} i$$

$$\delta = \lambda(1+i)$$

$$\text{т.к. } 1/(-i) = i \quad \text{и} \quad 2i = (1+i)^2$$

Комплексная **глубина скин-слоя**

$$\text{Re}(\delta) = \text{Im}(\delta)$$

**Волновое число:**

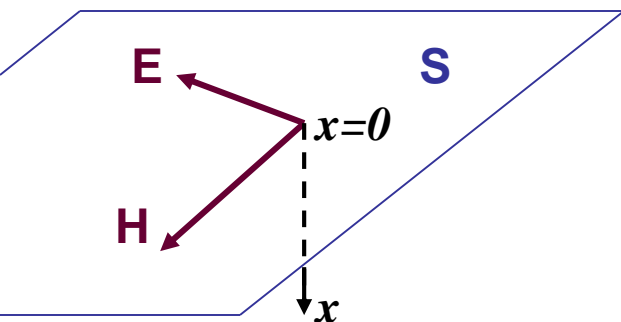
$$\text{Из (2.32): } \kappa = (1/\lambda)(1-i) / (1+i) = (1/\lambda) * (1-i)^2 / 2 = -2i / 2\lambda = -i / \lambda$$

$$H^{(\omega)}(x, t) = H_0 \exp(-\{ikx + i\omega t\})$$

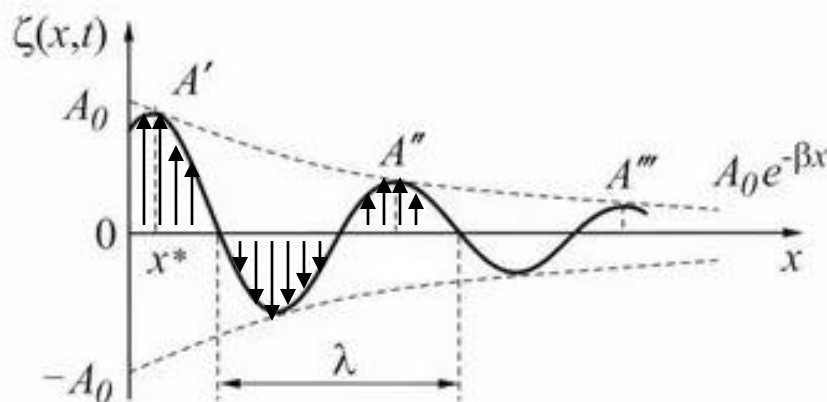
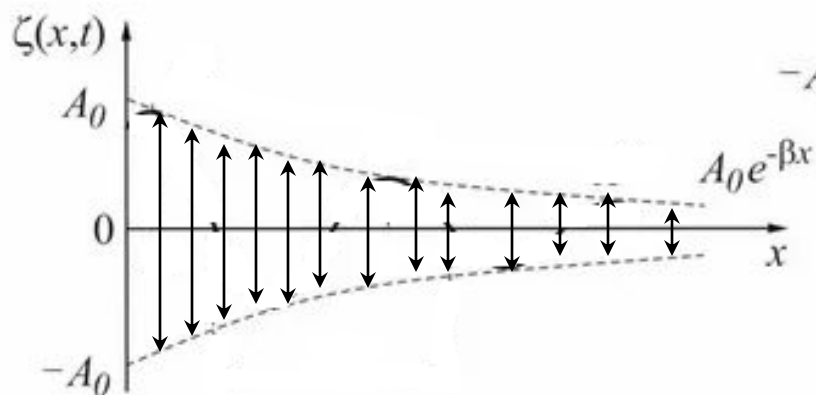
$$H^{(\omega)} = H_0 * \exp(-x/\lambda) * \exp\{i\omega t\}$$

# Скин-слой в сверхпроводниках.

$$H_0 \exp(-ikx) \exp(i\omega t)$$



$$H_x^{(\omega)} = H_0^{(\omega)} \exp(-x/\delta) \exp\{-i x/\delta\} \exp\{-i\omega t\}$$



$$H^{(\omega)} = H_0 * \exp(-x/\lambda) * \exp\{i\omega t\}$$

Затухание волны на длине  $\lambda$ .

Нет изменения фазы осцилляций – монотонное затухание.

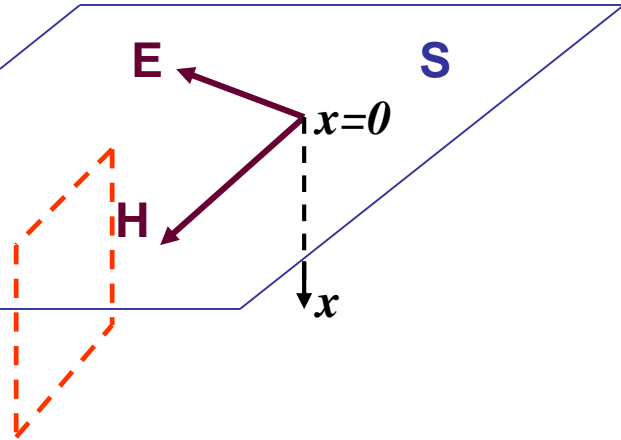
Причина – пренебрегаем откликом нормальных электронов.

Более точный расчет – осцилляции амплитуды с большим периодом.

*При сверхвысоких частотах (ГГц) скин-глубина может быть  $< \lambda$  !*

# Поверхностный импеданс

# Поверхностный импеданс металлов

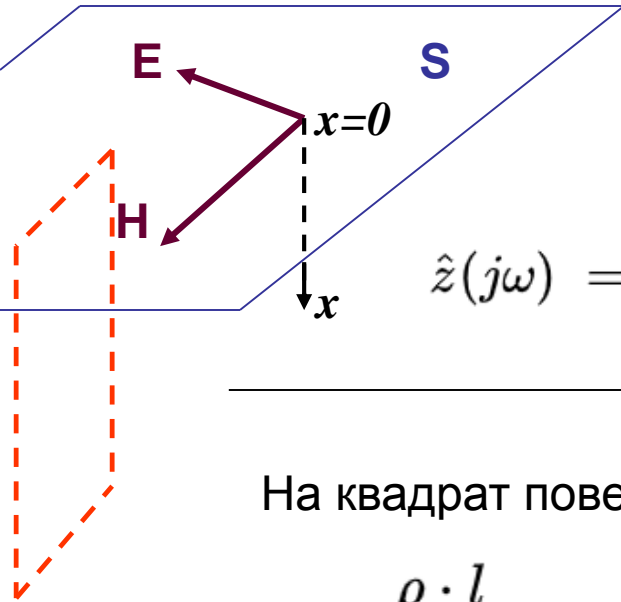


$$Z = -E / H$$

??????



# Поверхностный импеданс металлов



$$Z = -E_0 / H_0 \quad ???$$

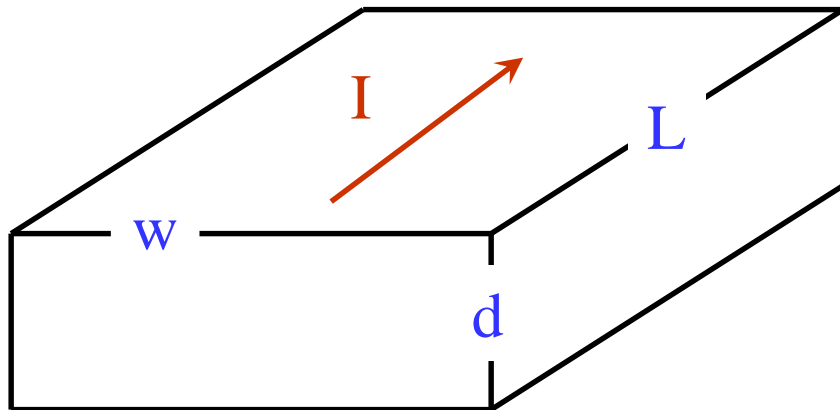
$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

$$\hat{z}(j\omega) = \frac{\hat{u}(j\omega, t)}{\hat{i}(j\omega, t)} = \frac{U(\omega)e^{j(\omega t + \phi_u(\omega))}}{I(\omega)e^{j(\omega t + \phi_i(\omega))}} = \frac{U(\omega)e^{j\phi_u(\omega)}}{I(\omega)e^{j\phi_i(\omega)}} = \frac{\hat{U}(j\omega)}{\hat{I}(j\omega)}$$

На квадрат поверхности

$$R_{\square} = \rho / d$$

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} \longrightarrow R = \rho L / wd \quad R_{\square} = R / N, \quad N = L / w$$

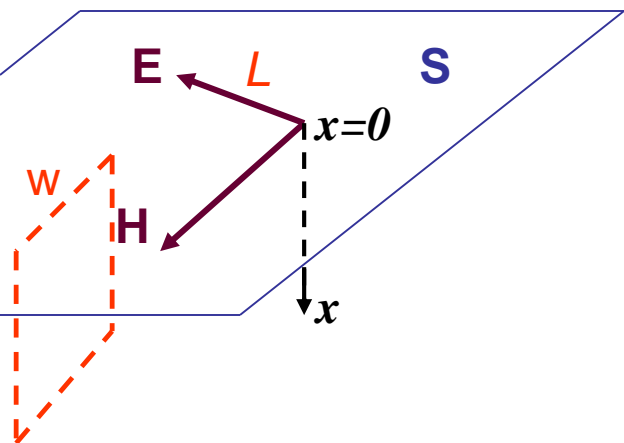


$$R = U / I = EL / jwd = (E/j)(N/d)$$

$$R = (E/jd)N$$

$$E = \rho j \quad R = (\rho/d)N = R_{\square} N$$

# Поверхностный импеданс металлов



$$z = U / I$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

$$H^{(\omega)} = H_0 * \exp(-x/\lambda) * \exp\{i\omega t\}$$

Уравнения Максвелла в  
дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$\mathbf{H}$ -вдоль оси  $z$ ,  $\mathbf{E}$  - вдоль  $y$ , тогда

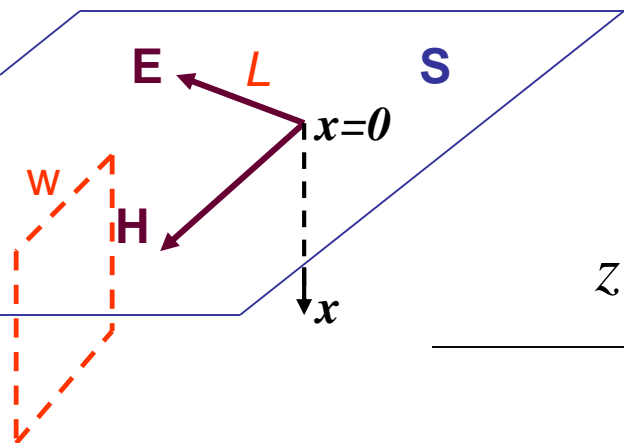
$$j_y(x) = dH_z/dx$$

Полный *поверхностный* ток:

$$I_{\text{нов}} = w \int_0^{\infty} j(x) dx = w \int_0^{\infty} (-dH_z/dx) dx =$$

$$= -w \int_H^0 dH_z = H(0)w$$

# Поверхностный импеданс металлов



$$Z = U / I$$

$$H^{(\omega)} \sim \exp(-x/\lambda)$$

$$Z = E(0)L / H(0)w = \{E(0)/H(0)\} \{L/w\} = Z N$$

$$Z = E(0)/H(0)$$

Уравнения Максвелла в  
дифференциальной форме

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

$H$ -вдоль оси  $z$ ,  $E$  - вдоль  $y$ , тогда

$$j_y(x) = dH_z/dx = -H(x,t)/\lambda$$

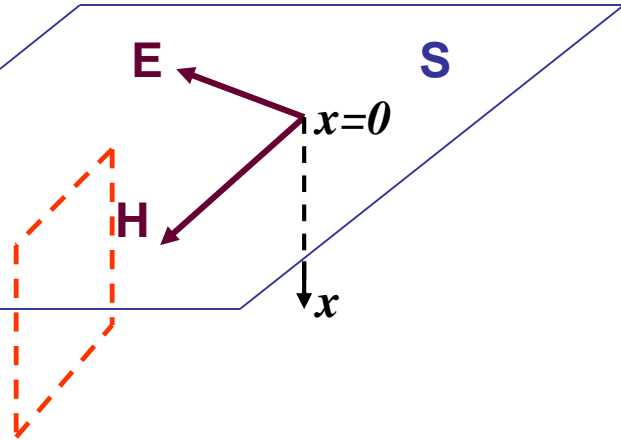
$$H^{(\omega)} = H_0 * \exp(-x/\lambda) * \exp\{i\omega t\}$$

$$j_y(0) = -H(0)/\lambda, \quad H(0) = -j_y(0) \lambda$$

$$Z = -E(0)/H(0) = E(0)/j_y(0)\lambda = (E(0)/j_y(0))/\lambda$$

$$Z = \rho/\lambda \leftrightarrow R_{\square}, z_{\square}$$

# Поверхностный импеданс металлов



Уравнения Максвелла в  
дифференциальной форме

$$\vec{\text{rot}} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{div} B = 0$$

$$\vec{\text{rot}} H = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\text{div} D = \rho$$

$$j = \sigma E$$

$$Z = E(0)/H(0)$$

$$H(x,t) = H_{\omega} \exp(-\{ikx+i\omega t\})$$

$$E(x,t) = E_{\omega} \exp(-\{ikx+i\omega t\})$$

$$\text{rot } \mathbf{H}(x,t) = \sigma \mathbf{E}(x,t)$$

*H*-вдоль оси *z*, *E* - вдоль *y*, тогда

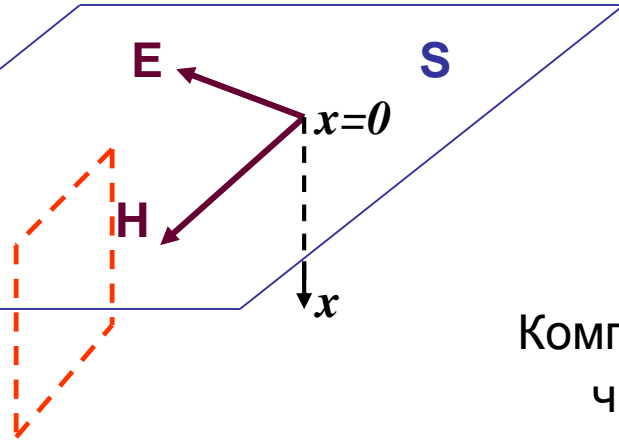
$$\partial H_z(x,t)/\partial x = \sigma E_y(x,t)$$

$$-ikH_z(x,t) = \sigma E_y(x,t)$$

$$Z = E(x,t)/H(x,t) = ik/\sigma$$

$$Z = ik/\sigma = \text{const } (x,t)$$

# Случай нормального металла



$$Z = ik/\sigma$$

$$\kappa = (1-i) / \delta$$

$$\delta = (2 / \mu_0 \sigma \omega)^{1/2}$$

Комплексное волновое  
число  $Re(\delta) = Im(\delta)$

Действительная толщина  
скин-слоя  $Im(\delta) = 0$

Считаем  $Z$

$$Z = i(1-i)/(\delta\sigma) = (1+i)/(\delta\sigma) = \sqrt{(1+i)^2}/(\delta\sigma) = \sqrt{2i}/(\delta\sigma)$$

Подставив  $\delta = (2/\sigma \mu_0 \omega)^{1/2}$  из (2.31) получим  $Z = (i\omega\mu_0/\sigma)^{1/2}$  или

$$Z = R_{\square} + iX_{\square}, \text{ где } R_{\square} = X_{\square} = (\omega\mu_0/2\sigma)^{1/2}$$

# Поверхностный импеданс сверхпроводников

$$Z = (i\omega\mu_0/\sigma)^{1/2}$$

$$\sigma \cong (\omega\tau n_n/n_s - i)/\omega\mu_0\lambda^2$$

$$Z = R_{\square} + iX_{\square}$$

$$\sigma \cong (\omega\tau n_n/n_s - i)/\omega\mu_0\lambda^2 \quad \rightarrow \quad \sigma \cong -i(-\omega\tau n_n/ i n_s + 1)/\omega\mu_0\lambda^2$$

$$\sigma \cong -i(i\omega\tau n_n/n_s + 1)/\omega\mu_0\lambda^2 \quad \rightarrow \quad i/\sigma \cong -\omega\mu_0\lambda^2/(1 + i\omega\tau n_n/n_s)$$

$$Z = (-\omega\mu_0\lambda^2\omega\mu_0)^{1/2}[1 + i(n_n/n_s)\omega\tau]^{-1/2} = i\omega\mu_0\lambda[1 + i(n_n/n_s)\omega\tau]^{-1/2}$$

Раскладываем  $(1+x)^n$  в ряд тейлора в окрестности  $x = 0$ :

$$Z = i\omega\mu_0\lambda[1 - (1/2)i(n_n/n_s)\omega\tau] = (n_n/2n_s)\mu_0\lambda\omega^2\tau + i\omega\mu_0\lambda$$

# Поверхностный импеданс сверхпроводников

$$Z = (n_n/2n_s)\mu_0\lambda\omega^2\tau + i\omega\mu_0\lambda = R_{\square} + iX_{\square}$$

*Реактивная* (индуктивная) часть импеданса:

$$X_{\square} = \omega\mu_0\lambda$$

$$L_k^{\square} = \mu_0\lambda/2$$

$$L_M^{\square} = \mu_0\lambda/2$$

$$L_{\text{полн}}^{\square} = L_M^{\square} + L_k^{\square} = \mu_0\lambda.$$

$$X_{\square} = \omega\mu_0\lambda = \omega L_{\text{полн}}^{\square}$$

*R - активная часть поверхностного импеданса*  
(в расчете на квадрат):

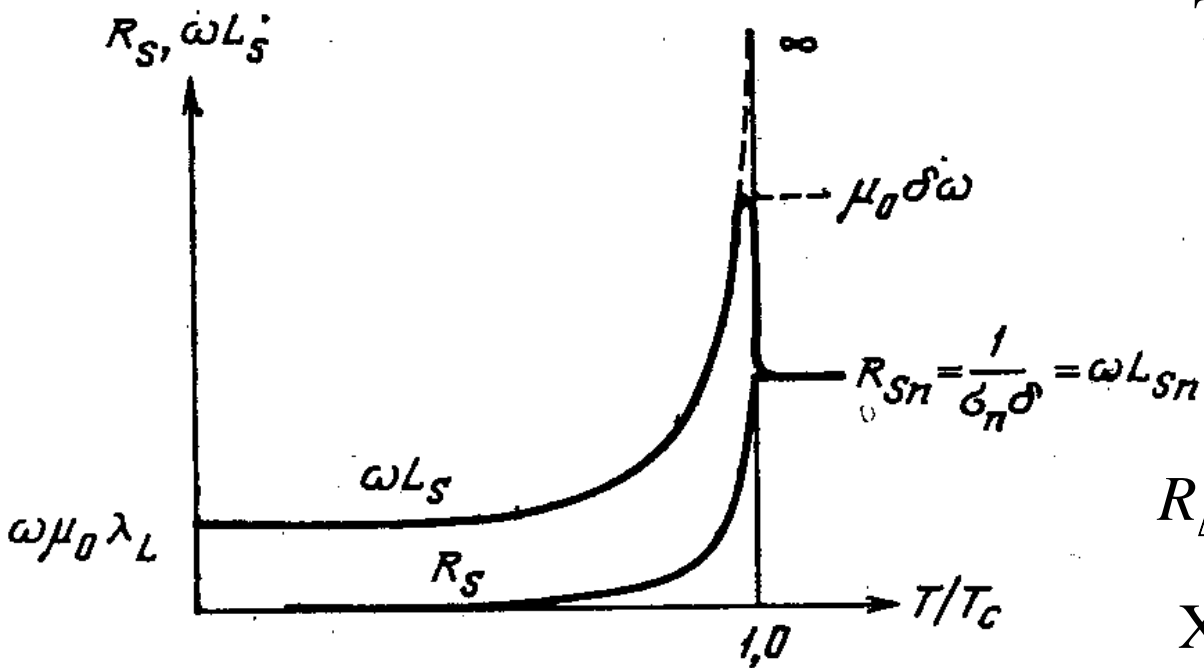
$$R_{\square} = \omega^2\tau\mu_0\lambda_L(n_n/2n_s)$$

$$\lambda_L^2 = m/n_s e^2$$

$$\sigma_n = ne^2\tau/m$$

$$R_{\square} = \omega^2\mu_0^2\lambda^3\sigma_n(n_n/n)/2$$

# Асимптотики поверхностного импеданса при низких температурах



$$T > T_c: R_N = X_N = \mu_0 \delta \omega$$

$$R_{\square} = X_{\square} = (\omega \mu_0 / 2 \sigma)^{1/2}$$

$$T \rightarrow 0$$

$$R_{\square} = \omega^2 \mu_0^2 \lambda^3 \sigma_n (n_n/n)/2 \rightarrow 0$$

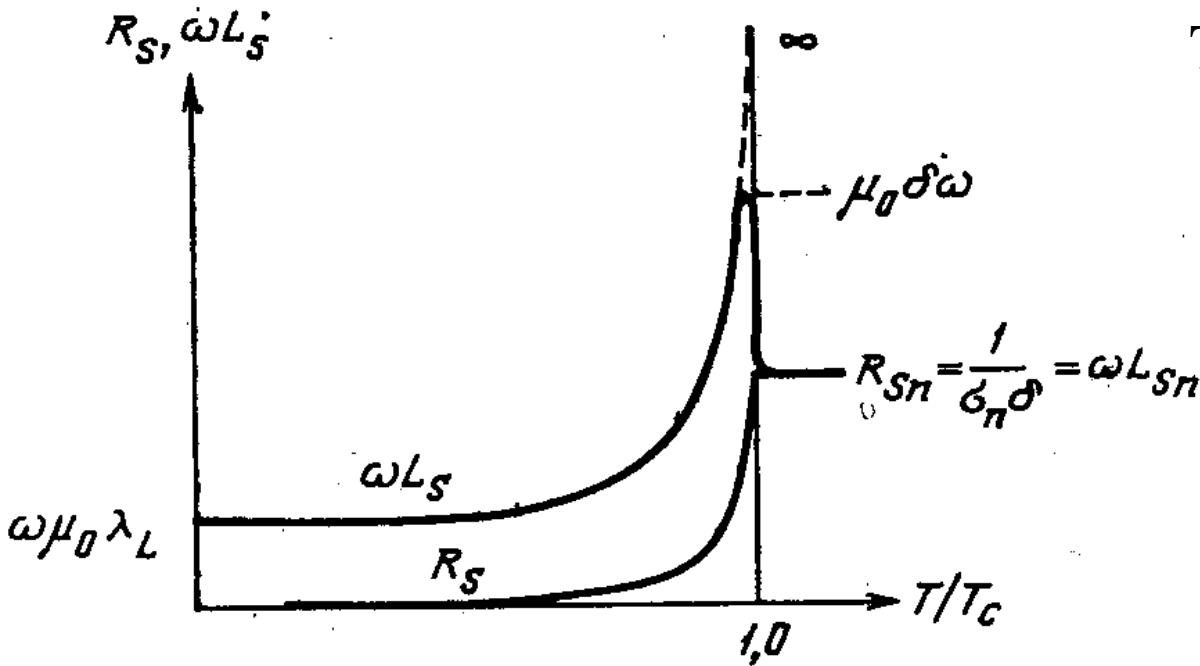
$$X_{\square} = \omega \mu_0 \lambda(T) \rightarrow \omega \mu_0 \lambda(0)$$

Измерение поверхностного импеданса – метод определения  $\lambda$  и  $n_s$

$$\lambda_L = [m / (\mu_0 n_s e^2)]^{1/2}$$



# Нагревание. Реактанс.



$$T \rightarrow T_c, n_s \rightarrow 0, n_n \rightarrow n$$

$$X(T) = \omega \mu_0 \lambda(T)$$

$$\lambda_L = [m / (\mu_0 n_s e^2)]^{1/2}$$

$$\lambda(T) \rightarrow \infty \text{ при } T \rightarrow T_c$$

$$X(T) \rightarrow \infty \text{ при } T \rightarrow T_c$$

Расходимость  $X_{\square}(T) = \omega \mu_0 \lambda(T)$  обрывается при  $\lambda(T) = \delta_n$ , т.е. при выходе на нормальную скин-глубину.

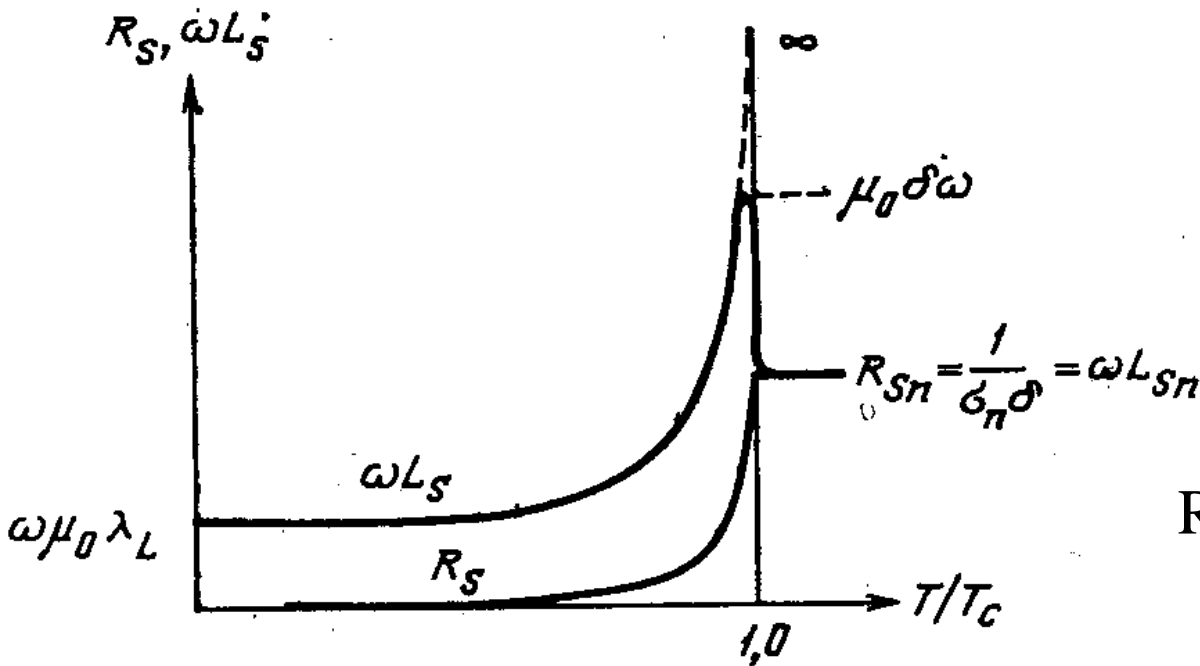
Дальнейшее падение  $X_{\square}(T)$  связано с исчезновением вклада, обязанного реактивным токам сверхпроводящих пар:

$$\sigma_1 = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\Lambda\omega} \left[ 1 + \frac{n_n}{n_s} \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \right]$$

# Активный импеданс около $T_c$

$$T \rightarrow T_c, n_s \rightarrow 0, n_n \rightarrow n$$



$$R_{\square} = \omega^2 \tau \mu_0 \lambda (n_n / 2n_s)$$

$$R_{\square} = \omega^2 \mu_0^2 \lambda^3 \sigma_n (n_n / n) / 2$$

$$\lambda(T) \rightarrow \infty \text{ при } T \rightarrow T_c$$

$$R(T) \rightarrow \infty \text{ при } T \rightarrow T_c ?$$

$$R(T) \rightarrow (\omega \mu_0 / 2 \sigma)^{1/2}$$

Двухжидкостная модель Гортер-Казимира (1934 г.):  $n = n_s(T) + n_n(T)$

# Измерения реактанса

$$X(T) = \omega \mu_0 \lambda(T)$$

температурная зависимость лондоновской длины

важное феноменологическое соотношение

$$\lambda_L(T) = \lambda_L(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2}$$

$$\lambda_L(0) \sim 30 - 100 \text{ нм};$$

$$T \rightarrow T_c$$

$$\lambda_L(T) \rightarrow \infty$$

$$\lambda_L = [m / (\mu_0 n_s e^2)]^{1/2}$$

$$n_s \propto 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4$$

$$n_s \rightarrow 0 \quad @ \quad T \rightarrow T_c$$

