Введение в физику сверхпроводимости

Больгинов Виталий Валериевич

Понедельник, аудитория 420 ГЛК

Лекция 2

Сверхпроводящая пластина в магнитном поле. Нелокальные сверхпроводники. Кинетическая индуктивность. Комплексная проводимость сверхпроводников. Скин-эффект и поверхностный импеданс.

Двухжидкостная модель.

Уравнения Лондонов.

Линейная электродинамика

Электрическое поле в сверхпроводнике? Первое уравнение Лондонов.

Электрическое поле в сверхпроводнике будет ускорять сверхпроводящие электроны по второму закону Ньютона):

en_s* $m(d\mathbf{v}_s/dt) = e\mathbf{E}$ *en_s

$\mathbf{dj_s/dt = E}$ $(e^2 n_s/\mathrm{m})$; $\Lambda \mathbf{dj_s/dt = E}$; $\Lambda = m/(n_s e^2) = \mu_0 \lambda_L^2$ **(L I)**

Существование *постоянного* электрического поля в сверхпроводнике *невозможно* в *рамках* линейной *электродинамики*, поскольку оно будет немедленно скомпенсировано перераспределением сверхпроводящих электронов.

Существование импульсного поля возможно, если его *длительность мала* по сравнению со временем отклика сверхпроводящих носителей

или если оно изменяется *непрерывно*.

?

Сверхпроводники в высокочастотном электромагнитном поле.

В случае гармонического сигнала сверхток *меняет знак*, сверхпроводящие электроны *замедляются и ускоряются*, что возможно только, если в сверхпроводнике появляется электрическое поле E.

$$R_\omega \neq 0 \quad @ \quad R_0 = 0 \qquad ?!$$

Двухжидкостная модель Гортер-Казимира (1934 г.):

$n = n_s(T) + n_n(T)$, $\qquad n_s(T)=n^*[1-(T/T_c)^4]$

Переменное поле E приводит в движение и нормальную (диссипативную) компоненту!

Полный ток в сверхпроводнике (сумма нормального и сверхпроводящего тока) определяется комплексной проводимостью σ:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (a); \qquad \mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n \quad (b); \ (c);$$

$$\sigma = \sigma(\omega, n_s(T), n_n(T))???$$

Проводимость нормального металла в переменном поле.

В нормальном металле в стационарном случае (модель Друде):

$e\mathbf{E} - m\langle \mathbf{v}_n \rangle/\tau = 0$ $\qquad$ $e\mathbf{E} = m\langle \mathbf{v}_n \rangle/\tau$

(τ - среднее время свободного пробега электронов)

В нестационарном случае нормальные электроны будут ускоряться:

$m\, d\langle \mathbf{v}_n \rangle/dt = e\mathbf{E} - m\langle \mathbf{v}_n \rangle/\tau$ *или* $\qquad$ $\mathbf{j}_n = ne\mathbf{v}$, $\qquad$ $\mathbf{v} = \mathbf{j}_n/ne$

$$[m/(n_n e)]d\mathbf{j}_n/dt = e\mathbf{E} - [m/(n_n e)]\,\mathbf{j}_n/\tau \qquad \textbf{(2.26)}$$

Тогда поле **E** *выражается как:* $\qquad$ **???**

$$\mathbf{E} = [m/(n_n e^2)]d\mathbf{j}_n/dt + [m/(n_n e^2)]\,\mathbf{j}_n/\tau \rightarrow \boldsymbol{E} = [m/(n_n e^2)]\{d\mathbf{j}_n/dt + \mathbf{j}_n/\tau\}*\{n_s/n_s\}$$

Сверхпроводник $\Lambda = m/(n_s e^2)$

$$\boldsymbol{E} = \Lambda(n_s/n_n)\{d\boldsymbol{j}_n/dt + \boldsymbol{j}_n/\tau\} \qquad \textbf{(2.26a)},$$

ср. $\qquad \Lambda d\boldsymbol{j}_s/dt = \boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E} = \Lambda(n_s/n_n)\{d\boldsymbol{j}_n/dt + \boldsymbol{j}_n/\tau\}$$

Комплексная проводимость сверхпроводника.

Пусть электромагнитное поле в сверхпроводнике, а вслед за ним и токи меняются с частотой ω по гармоническому закону: $\mathbf{E},\ \mathbf{j}_s,\ \mathbf{j}_n \sim e^{i\omega t}$

$$\mathbf{E} = \Lambda(n_s/n_n)\{ d\mathbf{j}_n/dt + \mathbf{j}_n/\tau\} \qquad \mathbf{(2.26a)},$$

поскольку $d\boldsymbol{j}_n^{(\omega)}/dt = i\omega\, \boldsymbol{j}_n^{(\omega)}$

$E = \Lambda(n_s/n_n)(i\omega\, j_n + j_n/\tau)$ *или* $E = \Lambda(n_s/n_n)(1/\tau)(i\omega\tau + 1)\, j_n$

$j_n = (n_n\tau/n_s\Lambda)\{1/(i\omega\tau+1)\}E,$ $\qquad j_n = (n_n\tau/n_s\Lambda)\{(1 - i\omega\tau)/[1+(\omega\tau)^2]\}E$

поскольку $1/(1+i\omega\tau) = (1-i\omega\tau)/[1+(\omega\tau)^2]$

Сверхпроводник $\Lambda d\mathbf{j}_s/dt = \mathbf{E}$ *дифференцированием получим* $\Lambda\omega j_s = E$ *или*

$$j_s = -i(1/\Lambda\omega)E$$

Полный ток в сверхпроводнике:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n = \sigma\mathbf{E} = [-i(1/\Lambda\omega) + (n_n\tau/n_s\Lambda)\{(1-i\omega\tau)/[1+(\omega\tau)^2]\}]\,\mathbf{E}$$

Комплексная проводимость сверхпроводника (III).

Полный ток в сверхпроводнике:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = j_s + j_n = [-i(1/\Lambda\omega) + (n_n\tau/n_s\Lambda)\{(1-i\omega\tau)/[1+(\omega\tau)^2]\}]\ \mathbf{E}$$

Выделяя действительную и мнимую часть из $\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2$, получим для действительной части проводимости:

$$\Lambda = m/e^2 n_s \rightarrow n_s\Lambda = m/e^2 \qquad\qquad \sigma = n e^2 \tau/m$$

$$\sigma_1 = (n_n\tau/n_s\Lambda) / [1+(\omega\tau)^2] = (n_n e^2 \tau/m) / [1+(\omega\tau)^2] = (n_n/n)\sigma / [1+(\omega\tau)^2]$$

Действительная часть проводимости определяется исключительно нормальными электронами !!!

Мнимая часть проводимости определяется как нормальными, так и сверхпроводящими электронами, поскольку и те, и другие вносят вклад в индуктивные высокочастотные свойства сверхпроводников:

$$*(\omega/\omega)$$

$$\sigma_2 = [-(1/\Lambda\omega) - (\tau\, n_n/\Lambda n_s)(\omega\tau)/[1+(\omega\tau)^2]\} = (1/\Lambda\omega)\{1+(n_n/n_s)(\omega\tau)^2/[1+(\omega\tau)^2]\}$$

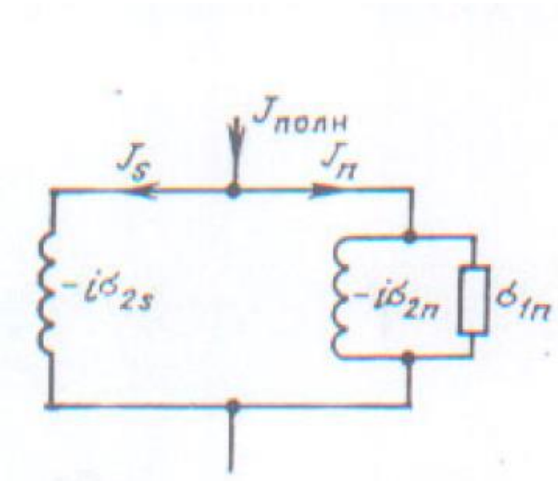
$$\sigma_2 = \sigma_{2s} + \sigma_{2n} = (1/\Lambda\omega) + (n_n e^2\tau/m)(\omega\tau)/[1+(\omega\tau)^2] = (1/\Lambda\omega) + (n_n/n)\sigma\,(\omega\tau)/[1+(\omega\tau)^2]$$

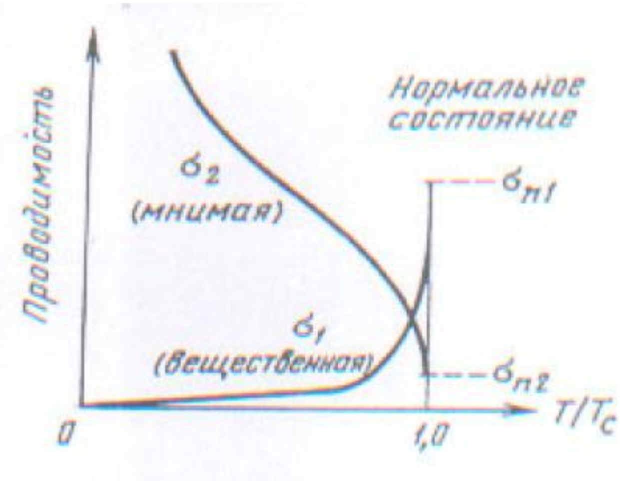
$$\boxed{\Lambda = m/(e^2 n_s) \rightarrow n_s\Lambda = m/e^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\Lambda\omega}\left[1 + \frac{n_n}{n_s}\frac{(\omega\tau)^2}{1+(\omega\tau)^2}\right]$$

Действительная проводимость сверхпроводника

$$\Lambda dj_s/dt = E$$





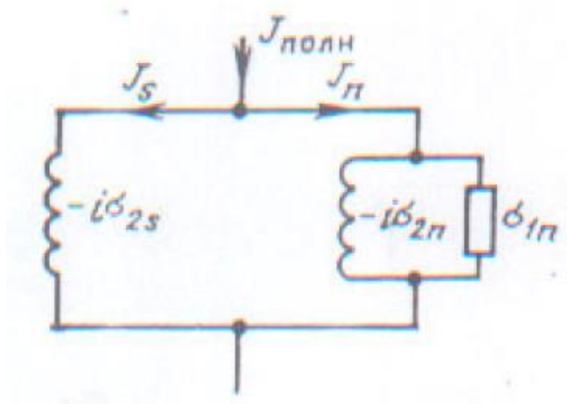
$\sigma_{1n} = (n_n e^2 \tau/m)/[1+(\omega\tau)^2]$ (2.27)

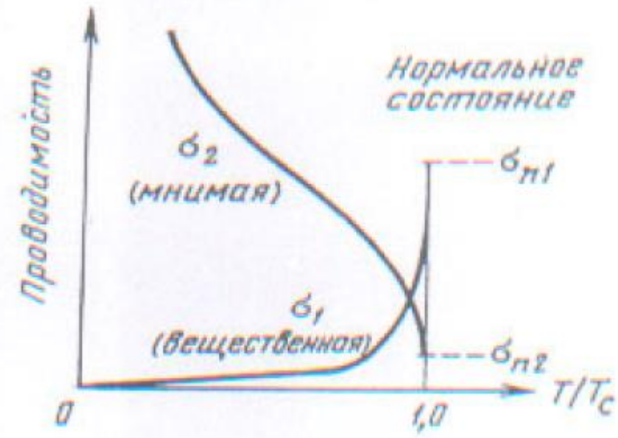
$T \to 0,\ n_n \to 0,\ \sigma_{1n} \to \mathbf{0}$

$T \to T_c\ n_n \to n$, (норм. пров.)

Комплексная проводимость сверхпроводника (III).

?





$\sigma_{2s} = n_s e^2/(m\omega) = (n_s e^2 \tau/m)/\omega\tau \rightarrow \sigma/\omega\tau$ при $T \rightarrow 0$

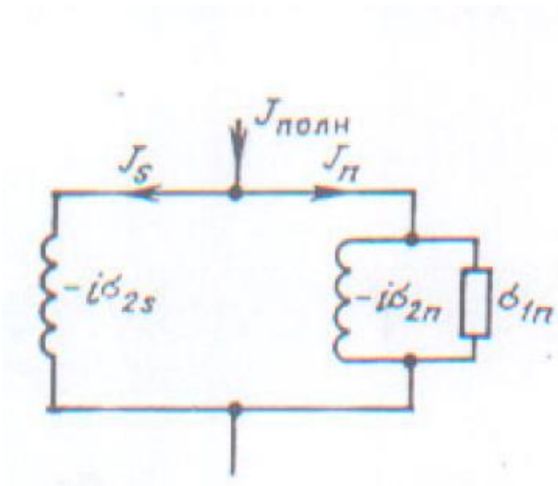
$\sigma_{2s} \rightarrow 0,$ $\qquad T \rightarrow T_c$

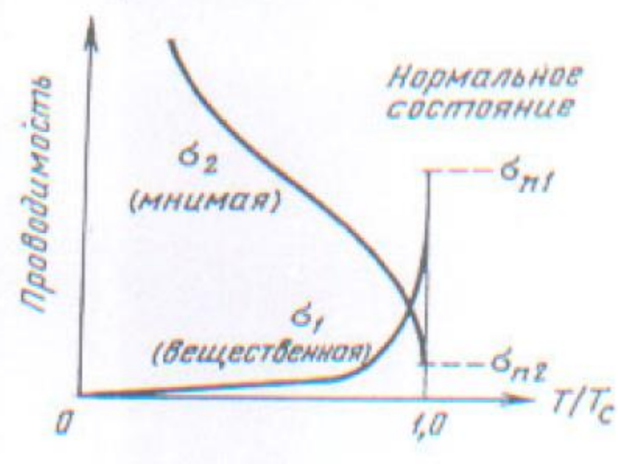
$\sigma_{2n} = n_n e^2 (\omega\tau)^2/m\omega[(1+(\omega\tau)^2] \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$

$\sigma_{2n} = (n_n e^2 \tau/m)(\omega\tau)/m[(1+(\omega\tau)^2] \rightarrow \sigma(\omega\tau)/[(1+(\omega\tau)^2]$ $\qquad$ *при* $T \rightarrow T_c$

При $T \rightarrow T_c$ *действительная и мнимая части проводимости выходят на соответствующие характеристики нормального металла.*

Комплексная проводимость сверхпроводника (III).





The End

Второе уравнение Лондонов

Описывает распределение магнитного поля и тока в сверхпроводнике.
Получается из минимизации внутренней энергии.

Рассмотрим сверхпроводник, помещенный в магнитное поле.
Из эффекта Мейсснера:

Добавка к энергии сверхпроводника в магнитном поле =
= энергия поля + энергия токов

Плотность энергии магнитного поля (СИ):
$w_H = \mu_0 H^2/2$

Плотность энергии сверхпроводящих токов:
$w_{кин} = n_s m \mathbf{v}_s^2/2 = \mathbf{j}_s^2 m/(2n_s e^2) = (\mu_0 \lambda_L^2/2)(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^2;$

$\boxed{\mathbf{j}_s = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}}$ ***(ур. Максвела)***

$\Lambda = m/e^2 n_s$ $\lambda_L = [m/(\mu_0 n_s e^2)]^{1/2}$

Минимизируем добавку к свободной (?) энергии:

$F_s = F_{s0} + (\mu_0/2) \int dV\, [H^2 + \lambda_L^2 (\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^2]$

$H \Rightarrow H(\mathbf{r}) + \delta H$

$\delta_H F_s = 0$

Вариационное исчисление

Свободная энергия:

$F_s = F_{s0} + (\mu_0/2)\int dV\,[H^2 + \lambda_L^2\,(\boldsymbol{rot H})^2]$

H → H + δH

$(H + \delta H)^2 - H^2 \Rightarrow \cancel{H^2} + 2H\delta H + \cancel{(\delta H)^2} - \cancel{H^2}$

$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} + \mathrm{rot}\,\delta\boldsymbol{H})^2 \approx (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H})^2 + 2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\,\delta\boldsymbol{H}$

$\boxed{\lambda_L = [m/(\mu_0 n_s e^2)]^{1/2}}$

$\delta_H F_s = (\mu_0/2)\int dV\,[2H\delta H + 2\lambda_L^2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{H}]$ $\qquad \delta_H F_s = 0$

$H = H(x)$ @ $\delta_H F_s = F_s(H + \delta H) - F_s(H) = 0$

$(\mathbf{a}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}) = \boldsymbol{b}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} - \mathrm{div}[\boldsymbol{ab}]$

$\mathbf{a} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H},\ \mathbf{b} = \delta\mathbf{H}$

$\mu_0 \int dV\,\{[\boldsymbol{H}\,\delta\boldsymbol{H} + \lambda_L^2\,(\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{H})\delta\boldsymbol{H} - \mathrm{div}\,[\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\ \delta\boldsymbol{H}\,]\} = 0$

$\int dV\,\mathrm{div}\,[\delta\boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\mathbf{H}\,] = \oiint_S dS\,[\delta\boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\,] = 0$ Теорема Стокса

$\delta_H F_s = (\mu_0/2)\int dV\,[2\mathbf{H}\delta\mathbf{H} + 2\lambda_L^2\,\delta\mathbf{H}\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{H}\,]$

Векторная алгебра

$\delta_{\mathrm{H}} F_s = (\mu_0/2) \int dV\, [2\mathbf{H}\delta\mathbf{H} + 2\lambda_L^{\,2} \text{ rot } \mathbf{H} \text{ rot } \delta\mathbf{H}]$

$$\text{rot}\,\mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F}$$

rot **H** rot δ**H** = **(a,b,c)**

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

a = rot **H** **b** = ∇ $\boldsymbol{c} = \delta\mathbf{H}$

$$\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}] + \overline{b} \cdot [\overline{c} \times \overline{a}] + \overline{c} \cdot [\overline{a} \times \overline{b}] = 0$$ **- тождество Якоби.**

(**a** rot **b**)=***b*** rot ***a*** - div[***ab***]

a = rot **H**, **b** = δ**H**

?

?

- Смешанное произведение кососимметрично по отношению ко всем своим аргументам:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b});$$

X

$\delta_{\mathrm{H}} F_s = (\mu_0/2) \int dV\, [2\mathbf{H}\delta\mathbf{H} -- 2\lambda_L^{\,2}\, \delta\mathbf{H} \text{ rot rot } \mathbf{H}\,]$

Различные формы записи второго уравнения Лондонов

$\delta_H F_s = (\mu_0/2)\int dV\,[2\mathbf{H}\delta\mathbf{H} + 2\lambda_L^2\,\delta\mathbf{H}\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{H}] = 0$

$\lambda_L = [m/(\mu_0 n_s e^2)]^{1/2}$

$\mu_0 \int dV\,[\mathbf{H} + \lambda_L^2\,(\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{H})]\,\delta\mathbf{H} = \mathbf{0}$

$\mathbf{H} + \lambda_L^2\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{H} = 0$

$\lambda_L^2\,(\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{H})] = -\boldsymbol{H}$

$\Lambda(\mathrm{rot}\,\mathbf{j}_s) = -\mathbf{B}$

$\boldsymbol{j}_s = \mathrm{rot}\,\mathbf{H};$ $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H};$ $\Lambda = \mu_0\lambda_L^2$

Наличие магнитного поля в сверхпроводнике приводит к появлению незатухающего вихревого сверхтока !

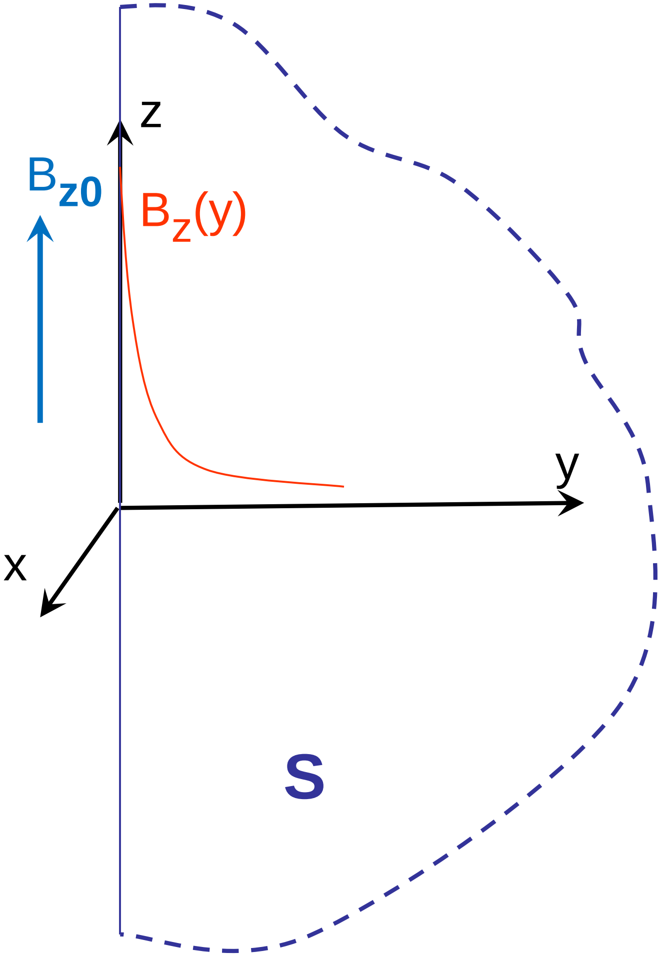
$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ Векторный потенциал $\rightarrow \Lambda \boldsymbol{j}_s(\mathrm{r}) = -\boldsymbol{A}(\mathrm{r});$

Линейная электродинамика.

$\Lambda \boldsymbol{j}_s(\mathrm{r}) = -\boldsymbol{A}(\mathrm{r})$; ур. Максвелла $\boldsymbol{j}_s = \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \boldsymbol{j}_s$ и определение $\mathbf{B} = \mu_0\boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ дают:

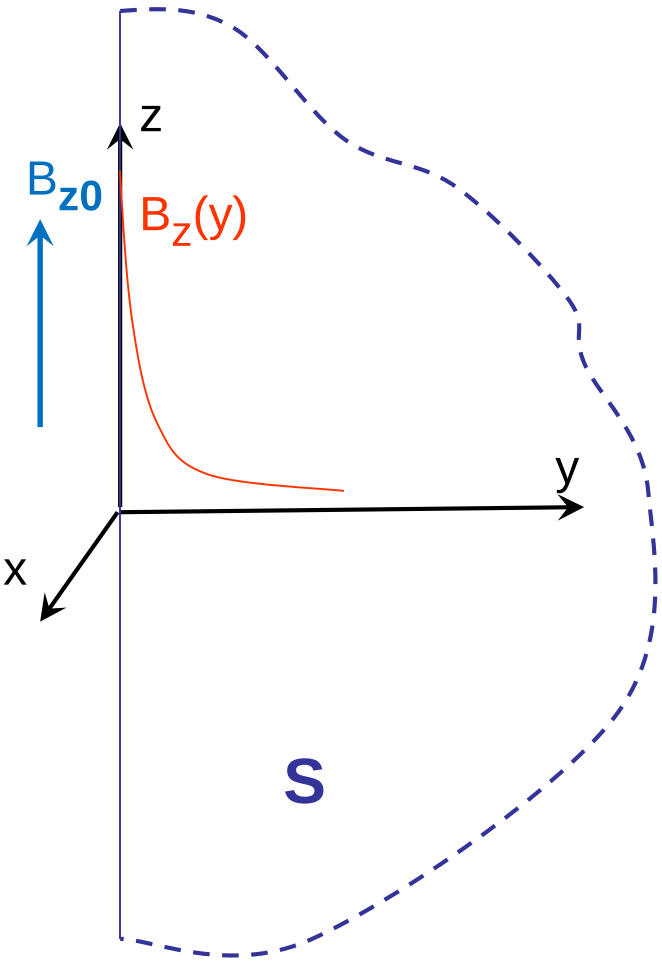
$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A} = -(1/\lambda_L^2)\mathbf{A}$$

Распределение поля и тока в S-полупространстве



$\lambda_L^{\,2}$ (rot rot **H**)] = -**H** $\lambda_L^{\,2}$ (rot rot **B**)] = - **B**

Распределение поля и тока в S-полупространстве



$\lambda_L{}^2$ (rot rot **H**)] = -**H** $\qquad$ $\lambda_L{}^2$ (rot rot **B**)] = - **B**

rot **B** → $d^2B_z(y)/dy^2$ $\qquad$ **B** = $\mu_0 \boldsymbol{H}$

Внешнее однородное поле $B_z=B_0$. ***вдоль оси*** z

$$d^2B_z(y)/dy^2 = (1/\lambda_L{}^2)\,B_z(y) \qquad \textbf{\textit{(1.9)}}$$

Граничные условия: y =0 ←→ $B= B_0$; ***y=∞*** ←→ B= 0

Решение: $B_z(y)=B_0\, e^{\pm y/\lambda}$

Из второго гран. условия - выбор в решении знака "-".

$$B_z(y)=B_0\, e^{-y/\lambda} \qquad \textbf{\textit{(1.10)}}$$

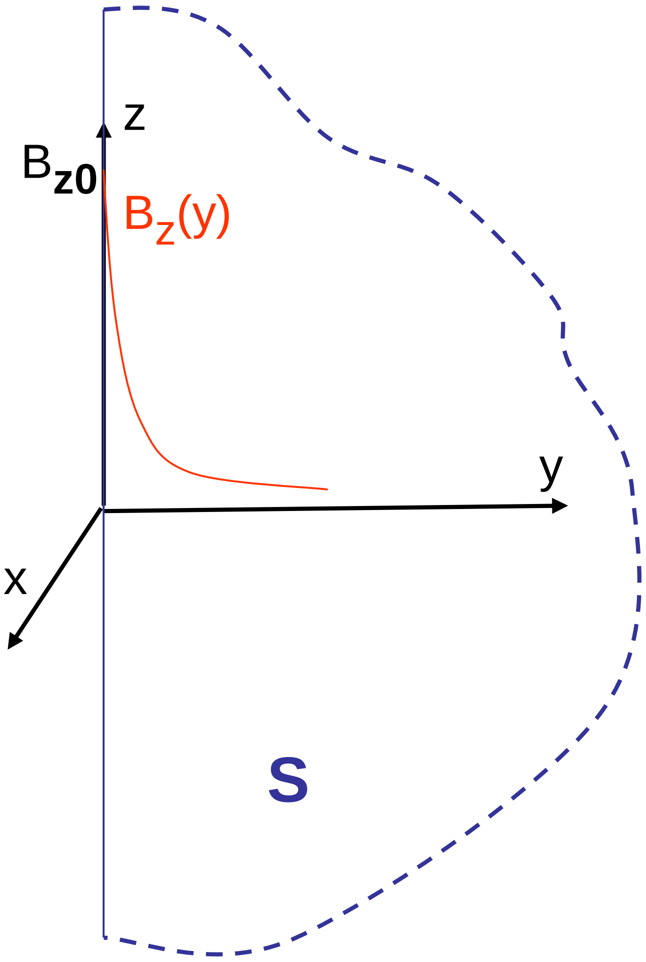
Магнитное поле затухает вглубь сверхпроводника на характерной длине λ_L (лондоновская длина)

Используя ур. Максвелла $\boldsymbol{j}_s = (1/\mu_0)$ rot $\boldsymbol{B}$

или в рассматриваемой геометрии: $j_{sx}(y) = (1/\mu_0)\, dB/dy$:

$$j_{sx}(y) = -\,(B_0/\lambda_L\mu_0)\, e^{-y/\lambda} \qquad \textbf{\textit{(1.11)}}$$

Проникновние поля и тока в S-полупространстве



$B_z\ (y)=B_0\ e^{-y/\lambda}$

Эффект Мейснера

Магнитный поток:

$\Phi = \int L{*}B_0 e^{-y/\lambda} dy = B_0{*}L{*}\lambda$

Магнитное поле проникает на глубину λ.

$j_{sx}\ (y)=j_0 e^{-y/\lambda}$

Полный сверхток:

$j_s = \int w{*}j_0 e^{-y/\lambda}\ dy = j_0{*}w{*}\lambda$

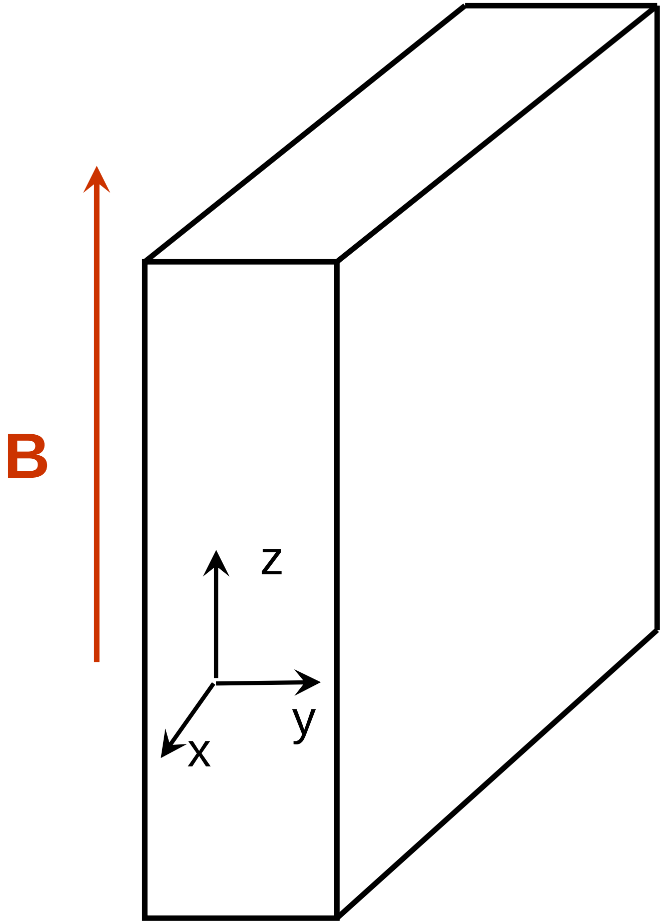
Электрический ток течет в слое толщиной λ.

Материалы

Лекция 1: параграфы 1, 2, 5, 6, 9.3, 9.4, 9.5, 11

Лекция 2: параграфы 9.1, 9.2, 10, 12

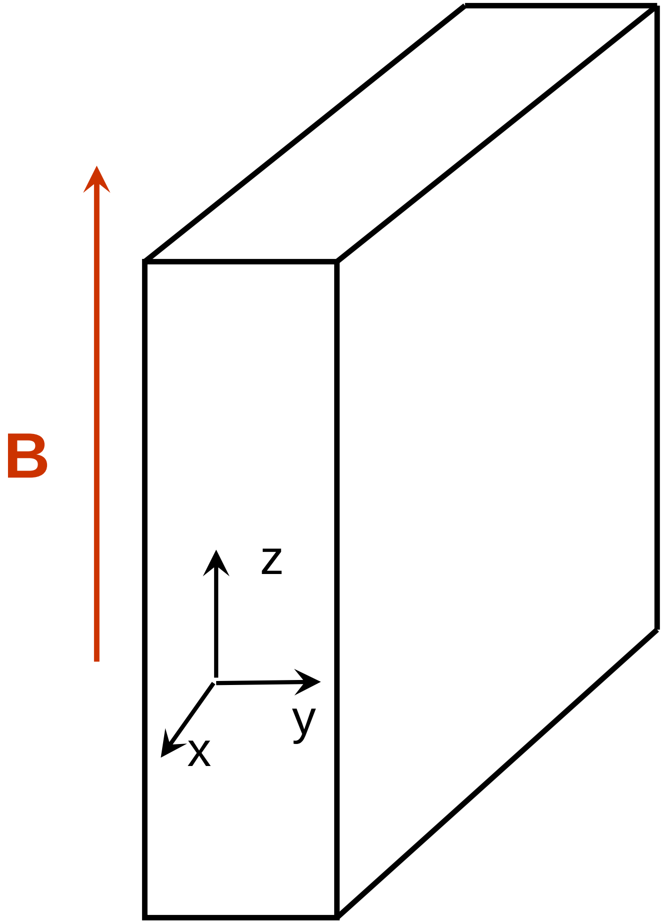
Пронкновение магнитного поля в тонкую сверхпроводящую пластину



Второе уравнение Лондонов

$$\lambda_L^{\,2}\,(\mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{H})] = -\mathbf{H}$$

Пронкновение магнитного поля в тонкую сверхпроводящую пластину

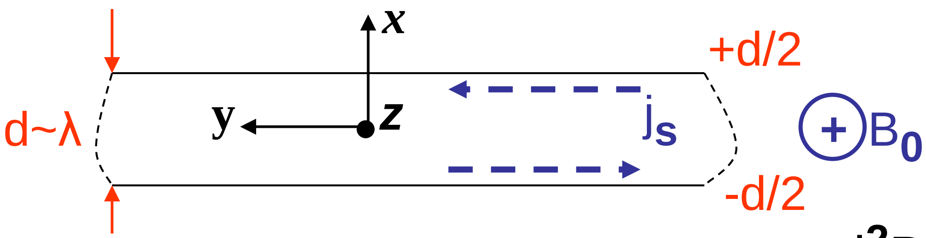


Второе уравнение Лондонов

$$\lambda_L^{\,2}\,(\mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{H})] = -\mathbf{H}$$

А в тонкую пленку?

Применение уравнений Лондонов. Распределение поля и тока в сверхпроводящей пластине, помещенной в магнитное поле.



Бесконечная сверхпроводящая пластина с толщиной d~λ в параллельном магнитном поле

Поле меняется только по x
(из симметрии)

$$d^2B/dx^2 = (1/\lambda^2)B; \qquad B(\pm d/2) = B_0 \qquad \textbf{(2.7)}$$

$$B(x) = B_1\, ch(x/\lambda) + B_2\, sh(x/\lambda) \qquad \textbf{(2.8)}$$

действительно:

$$dB/dx = B_1(1/\lambda)sh(x/\lambda) + B_2(1/\lambda)ch(x/\lambda);$$

$$d^2B/dx^2 = (1/\lambda^2)[B_1 ch(x/\lambda) + B_2\, sh(x/\lambda)];$$

$$+d/2: \quad B_0 = [B_1\, ch(d/2\lambda) + B_2\, sh(d/2\lambda)];$$

$$-d/2: \quad B_0 = [B_1\, ch(d/2\lambda) - B_2\, sh(d/2\lambda)];$$

$$B_1 = B_0 / ch(d/2\lambda)]; \qquad B_2 = 0;$$

$$B_z(x) = B_0\, ch(x/\lambda)/ch(d/2\lambda)$$

Гиперболические функции и их свойства

$sh\, x = (e^x - e^{-x})/2;$ $\qquad$ $sh\, x = -sh(-x)$

$ch\, x = (e^x + e^{-x})/2;$ $\qquad$ $ch\, x = ch(-x)$

$(sh\, x)' = ch\, x;$ $\qquad$ $(ch\, x)' = sh\, x;$

$x \to 0$ $\qquad$ $x \to \infty$

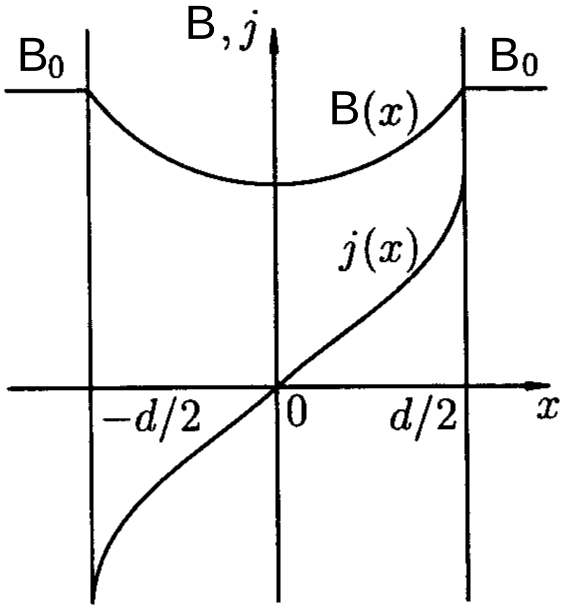
$sh\, 0 = 0;$ $\qquad$ $sh\, \infty = \infty;$

$sh\, x = x;$

$ch\, 0 = 1;$ $\qquad$ $ch\, \infty = \infty;$

$ch\, x \to 1;$

Распределение поля и тока в сверхпроводящей пластине, помещенной в магнитное поле.



$B(x) = B_0 ch(x/\lambda)/ch(d/2\lambda)$

Найдем сверхток из уравнения Максвела

$j^s = (1/\mu_0)(\nabla \times B) = (1/\mu_0)\, dB/dx$ rot $\mathbf{H} = \mathbf{j}_s$

$j^s_y(x) = (B_0/\mu_0\lambda)\, sh(x/\lambda)/ch(d/2\lambda)$

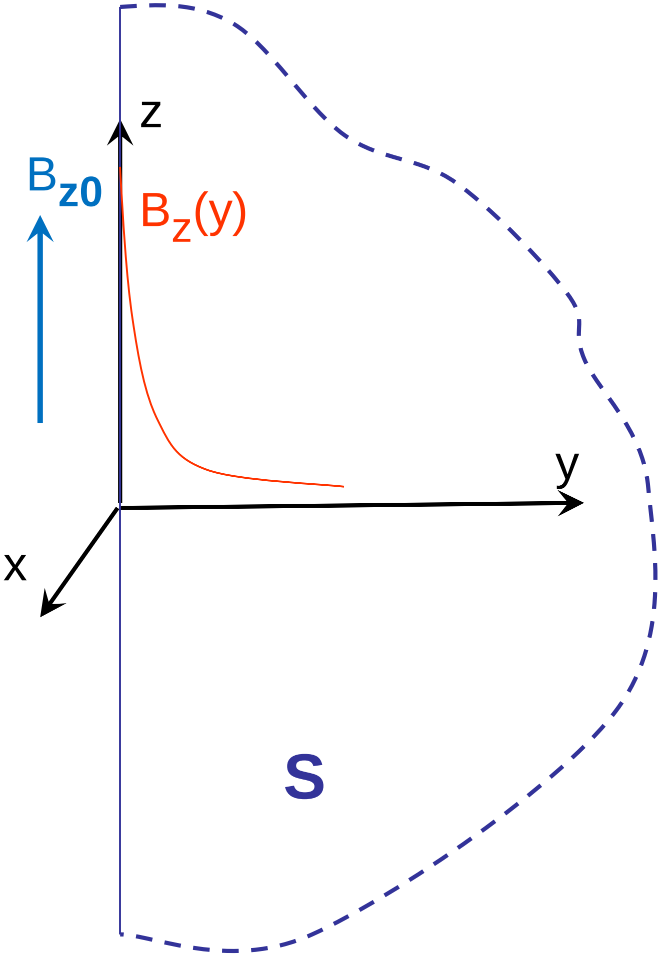
В случае тонкой пленки ($d \ll \lambda$); $d/\lambda \ll 1$

$ch(x/\lambda)$ и $ch(d/2\lambda) \rightarrow 1$ $B(x) \rightarrow B_0$; $sh(x/\lambda) = x/\lambda$ $j(x) = (B_0/\mu_0\lambda^2)x$;

магнитное поле полностью и однородно проникает в пленку, а ток линейно нарастает к поверхности пленки и меняет знак в ее центральном слое.

Присутствие магнитного поля всегда приводит к возникновению тока в сверхпроводнике, даже если это поле совершенно не экранируется!

Распределение поля и тока в S-полупространстве



$$\lambda_L^{\,2}\ (\mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{H})] = -\mathbf{H}$$

Внешнее однородное поле $B_z = B_0$. ***вдоль оси*** z

$$d^2B_z(y)/dy^2 = (1/\lambda_L^2)\, B_z(y) \qquad \textbf{\textit{(1.9)}}$$

Граничные условия: y =0 ←→ B= B_0; ***y=∞*** ←→ B= 0

Решение: $B_z(y) = B_0\, e^{\pm y/\lambda}$

Из второго гран. условия - выбор в решении знака "-".

$$B_z(y) = B_0\, e^{-y/\lambda} \qquad \textbf{\textit{(1.10)}}$$

Магнитное поле затухает вглубь сверхпроводника на характерной длине λ_L (лондоновская длина)

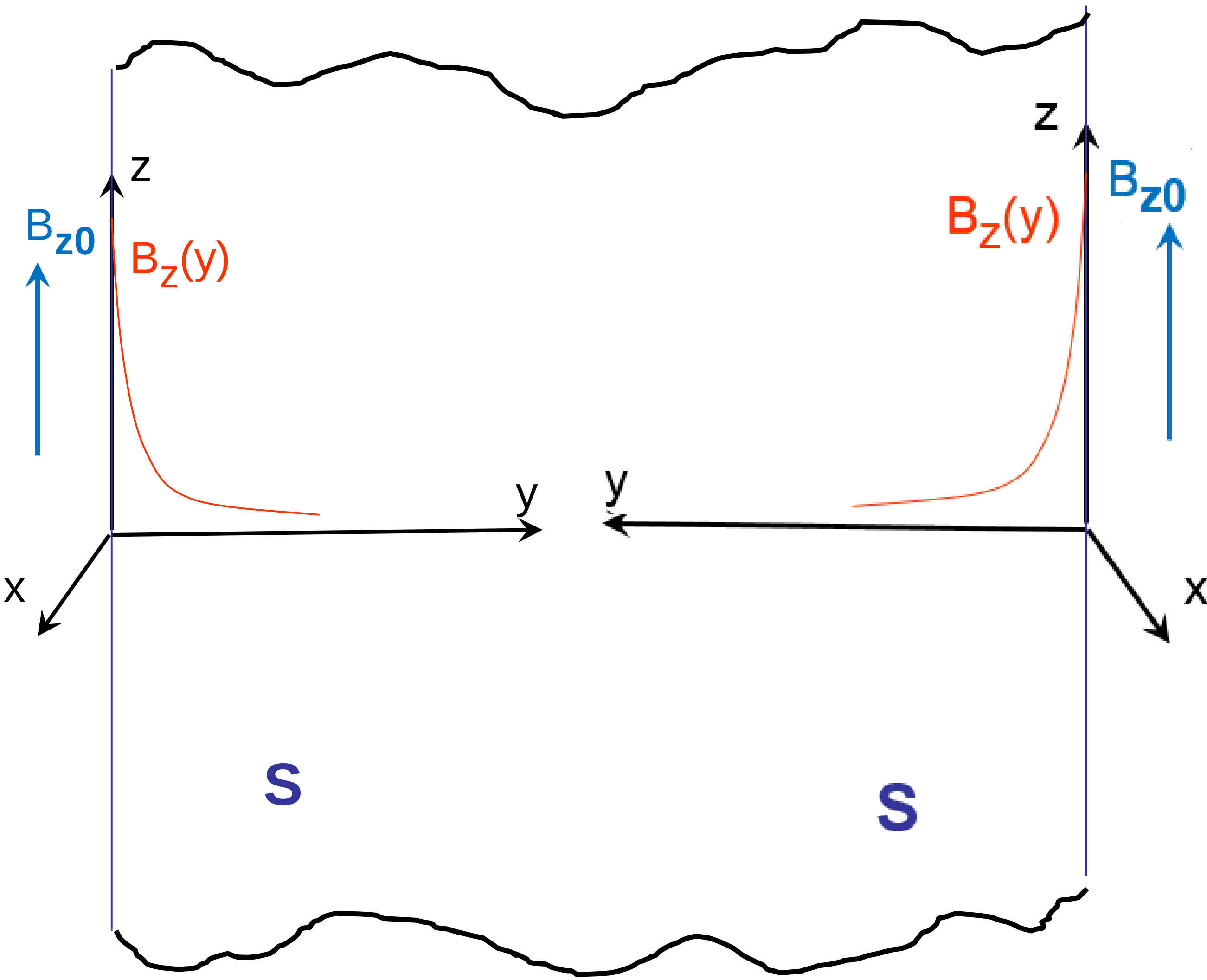
Используя ур. Максвелла $\boldsymbol{j_s} = (1/\mu_0)\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{B}$

или в рассматриваемой геометрии: $j_{sx}(y) = (1/\mu_0)\, dB/dy$:

$$j_{sx}(y) = -\,(B_0/\lambda_L\mu_0)\, e^{-y/\lambda}$$

$$A_x(y) = -\,(B_0\lambda_L)\, e^{-y/\lambda}$$

Распределение поля и тока в толстой пластине

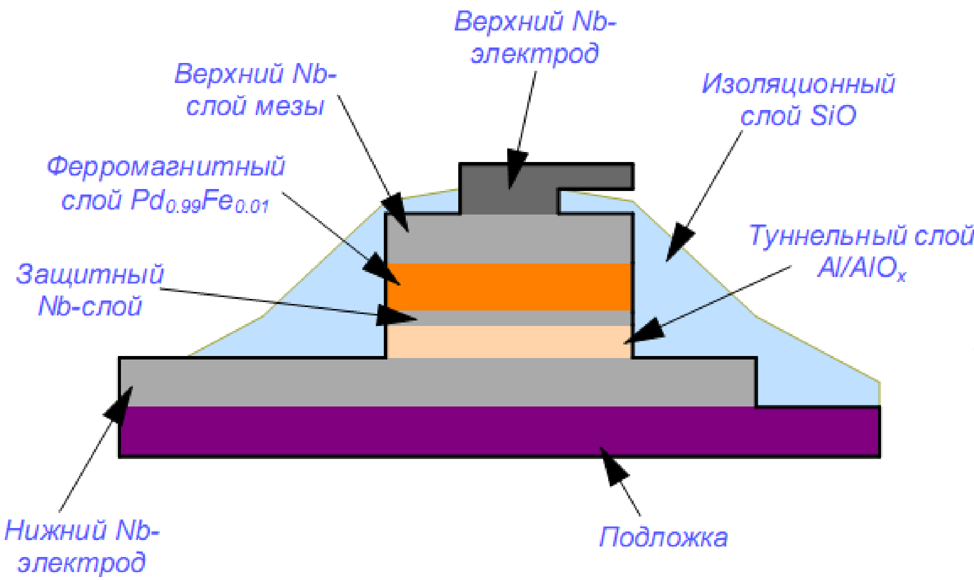


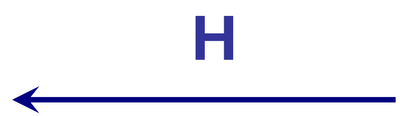
$$\lambda_L{}^2\,(\mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{H})] = -\mathbf{H}$$

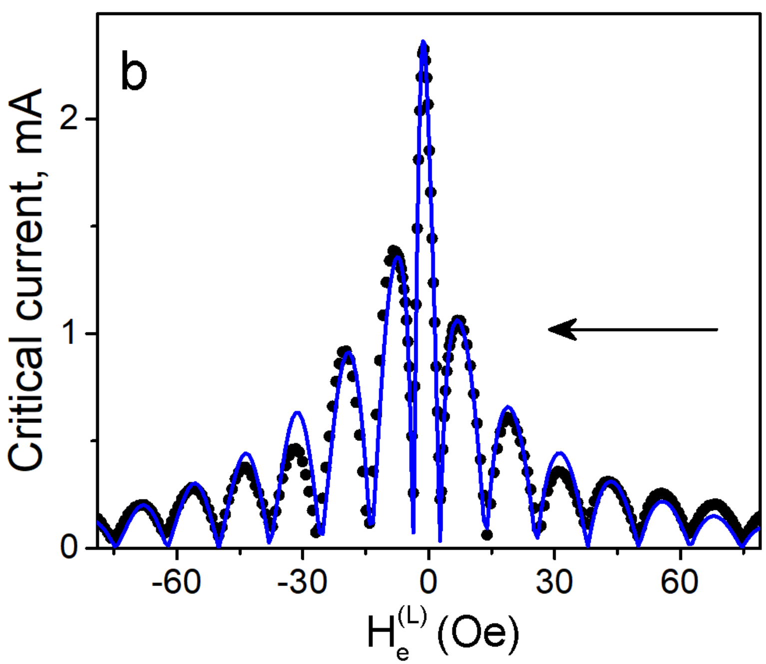
$$B_z\,(y) = B_0\, e^{-y/\lambda}$$

Какая пластина считается толстой?

Насколько реальна толщина $d \sim \lambda$?







Нижний ниобий – 120 нм

Алюминий – 8-10 нм

Разделительный ниобия 10-15 нм

Ферромагнетик – 15-45 нм

Верхний ниобий мезы – 150 нм

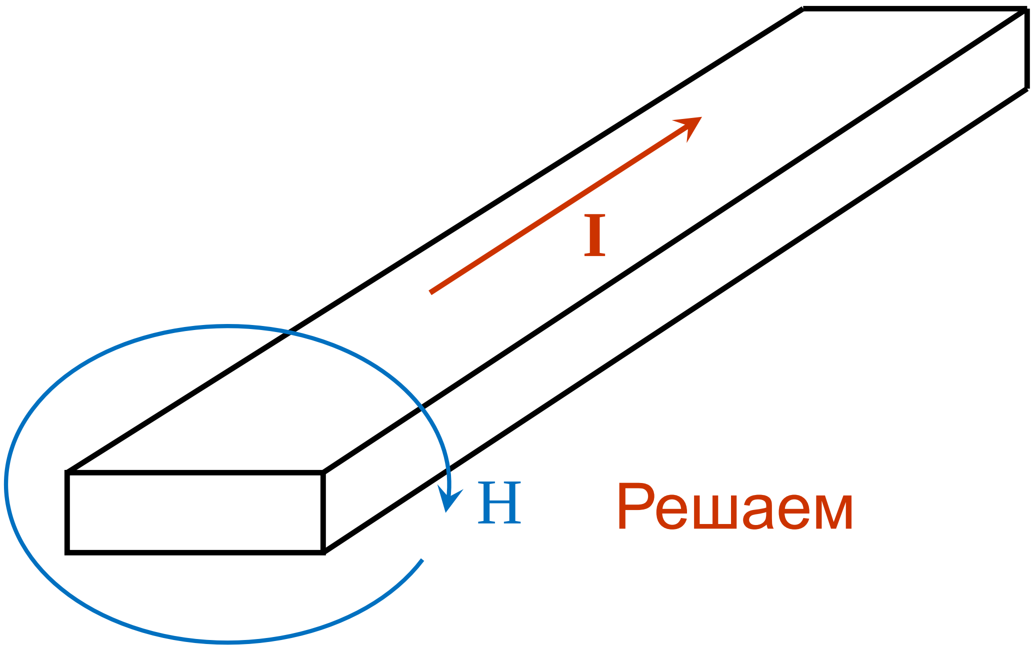
Замыкание – 450 нм

Лондоновская длина в ниобии – 75 нм

Применение уравнений Лондонов. Распределение поля и тока в сверхпроводящей пластине с током

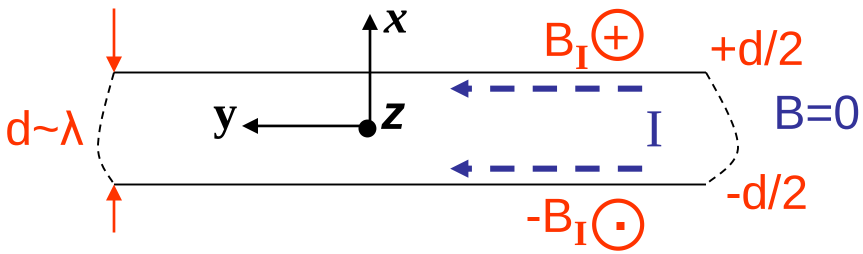
Бесконечная сверхпроводящая пластина с тощиной **d~λ** *и током* ***I=I_y*** , *приложенное поле* ***B=0***

λ_L^2 (rot rot **H**)] = -**H**



Решаем

Применение уравнений Лондонов. Распределение поля и тока в сверхпроводящей пластине с током



Ток $I=I_y$ [А/м] ***в полосе единичной ширины по z***

Бесконечная сверхпроводящая пластина с тощиной **d~λ** *и током* $I=I_y$**,** *приложенное поле* $B=0$

$$d^2B/dx^2-(1/\lambda^2)B=0; \quad B(\pm d/2)=\pm B_I \quad \textit{(2.11)}$$

$$B(x)= B_1\, ch(x/\lambda) + B_2\, sh(x/\lambda)$$

Гиперболические функции и их свойства

$sh\, x =(e^x- e^{-x})/2;$ $\qquad sh\, x =- sh(-x)$

$ch\, x =(e^x+e^{-x})/2;$ $\qquad ch\, x = ch(-x)$

$(sh\, x)'= ch\, x;$ $\qquad (ch\, x)'= sh\, x;$

$x \to 0$ $\qquad x \to \infty$

$sh\, 0 = 0;$ $\qquad sh\, \infty = \infty$;
$sh\, x = x;$

$ch\, 0 = 1;$ $\qquad ch\, \infty = \infty$;
$ch\, x \to 1;$

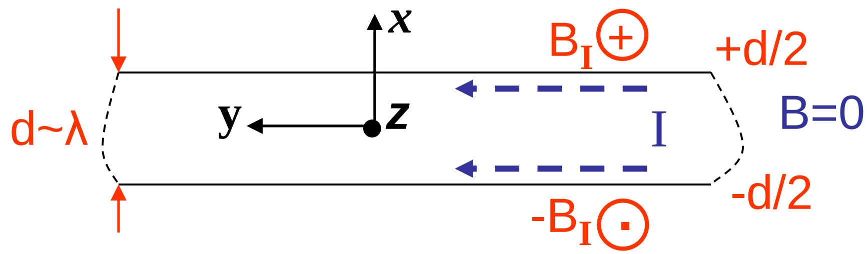
+d/2: $B_I = [B_1\, ch(d/2\lambda) + B_2\, sh(d/2\lambda)]$;

-d/2: $-B_I = [B_1\, ch(d/2\lambda) - B_2\, sh(d/2\lambda)]$;

$B_1= 0; \qquad B_2 = B_I /sh(d/2\lambda)]$;

$B_z(x) = B_I\, sh(x/\lambda)/sh(d/2\lambda)$;

Применение уравнений Лондонов. Распределение поля и тока в сверхпроводящей пластине с током



Бесконечная сверхпроводящая пластина с тощиной ***d~λ*** *и током* ***$I=I_y$***, *приложенное поле* ***B=0***

Ток $I=I_y$ [А/м] ***в полосе единичной ширины по z***

$$d^2B/dx^2-(1/\lambda^2)B=0; \quad B(\pm d/2)=\pm B_I \qquad \textbf{(2.11)}$$

$$B(x)= B_1\, ch(x/\lambda) + B_2\, sh(x/\lambda)$$

Гиперболические функции и их свойства

$sh\, x = (e^x - e^{-x})/2;$	$sh\, x = - sh(-x)$
$ch\, x = (e^x + e^{-x})/2;$	$ch\, x = ch(-x)$
$(sh\, x)' = ch\, x;$	$(ch\, x)' = sh\, x;$
$x \to 0$	$x \to \infty$
$sh\, 0 = 0;$ $sh\, x = x;$	$sh\, \infty = \infty\, ;$
$ch\, 0 = 1;$ $ch\, x \to 1;$	$ch\, \infty = \infty\, ;$

+d/2: $B_I = [B_1\, ch(d/2\lambda) + B_2\, sh(d/2\lambda)]\, ;$

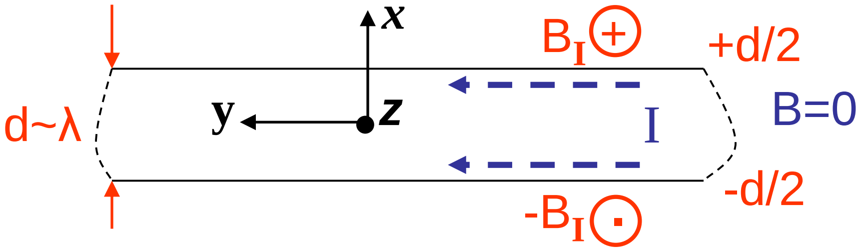
-d/2: $-B_I = [B_1\, ch(d/2\lambda) - B_2\, sh(d/2\lambda)]\, ;$

$$B_1 = 0; \qquad B_2 = B_I / sh(d/2\lambda)]\, ;$$

$$B_z(x) = B_I\, sh(x/\lambda)/sh(d/2\lambda)\, ;$$

А чему равно B_I?

Применение уравнений Лондонов. Распределение поля и тока в сверхпроводящей пластине с током



Ток $\boldsymbol{I=I_y}$ **[А/м]** ***в полосе единичной ширины по z***

$B_z(x) = B_I\, sh(x/\lambda)/sh(d/2\lambda)$

$j^s_y(x) = (1/\mu_0)(\nabla\times \mathbf{B}) = (1/\mu_0)\, dB_z/dx$

$j_{sy}(x) = (B_I/\mu_0\lambda)\, ch(x/\lambda)/sh(d/2\lambda)$

$$\boldsymbol{I} = 2w\int_0^{d/2} j_{sy}(x)\,dx = 2\,(B_I/\mu_0\lambda\; sh(d/2\lambda))\int_0^{d/2} dx\; ch(x/\lambda)\;;$$

$$\boldsymbol{I} = 2\,(B_I/\mu_0\lambda)\,\lambda = 2B_I/\mu_0; \qquad \boxed{B_I = \mu_0 \boldsymbol{I}/2w} \qquad \textbf{(2.14)}$$

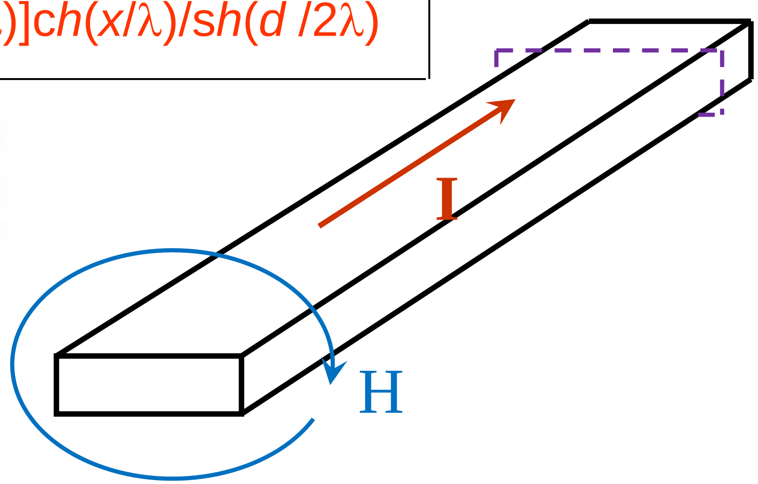
Тон. пленка $B(x) = (\mu_0 I/dw)\boldsymbol{x}$

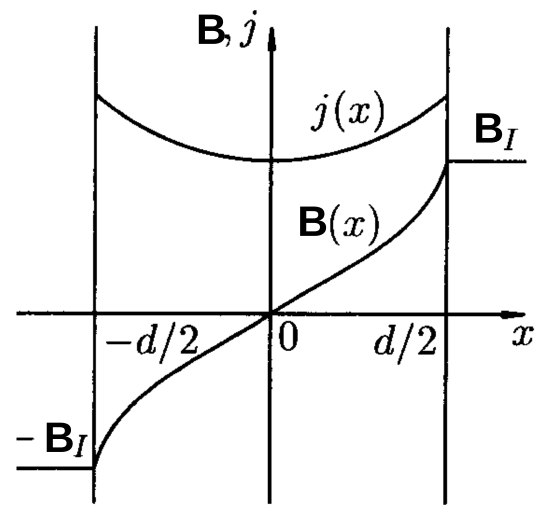
Тон. пленка $j_{sy} = I/d$

$j_{sy}(x) = [\boldsymbol{I}/(2\lambda)]\, ch(x/\lambda)/sh(d/2\lambda)$

$$\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) d\vec{S}$$

$$2Hw = I$$





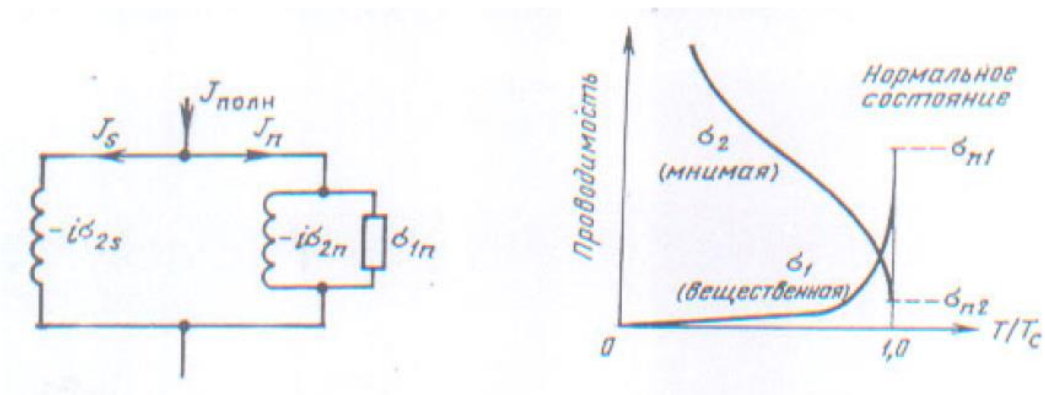
Кинетическая индуктивность сверхпроводников

Комплексная проводимость.

σ_{1n} = $(n_n e^2 \tau/m)/[1+(\omega\tau)^2]$ (2.27

σ_{2s} = $n_s e^2/(m\omega)$ -> $\sigma_n/\omega\tau$ при T = 0

σ_{2n} = $n_n e^2(\omega\tau)^2/m\omega[(1+(\omega\tau)^2]$ (2.28 b)



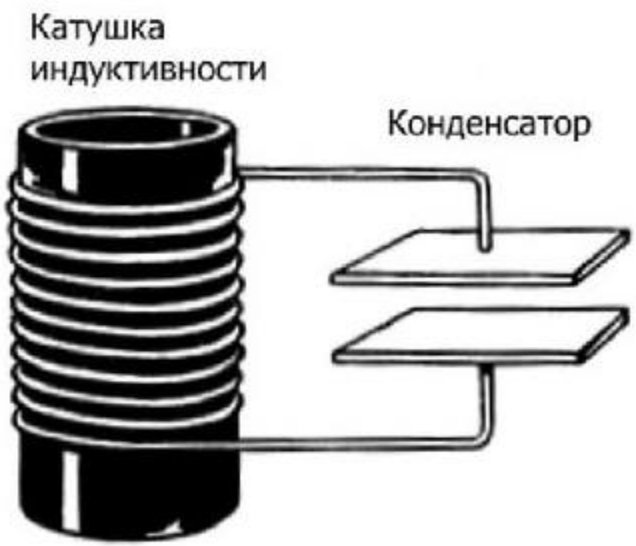
Комплексная проводимость для гармонических сигналов $\sigma = \sigma_1 - \mathbf{i}\sigma_2$

Сверхпроводник = индуктивность при $T << T_c$

Как перейти от удельных величин к конкретным?

Как учесть форму сверхпроводника?

Геометрическая индуктивность.



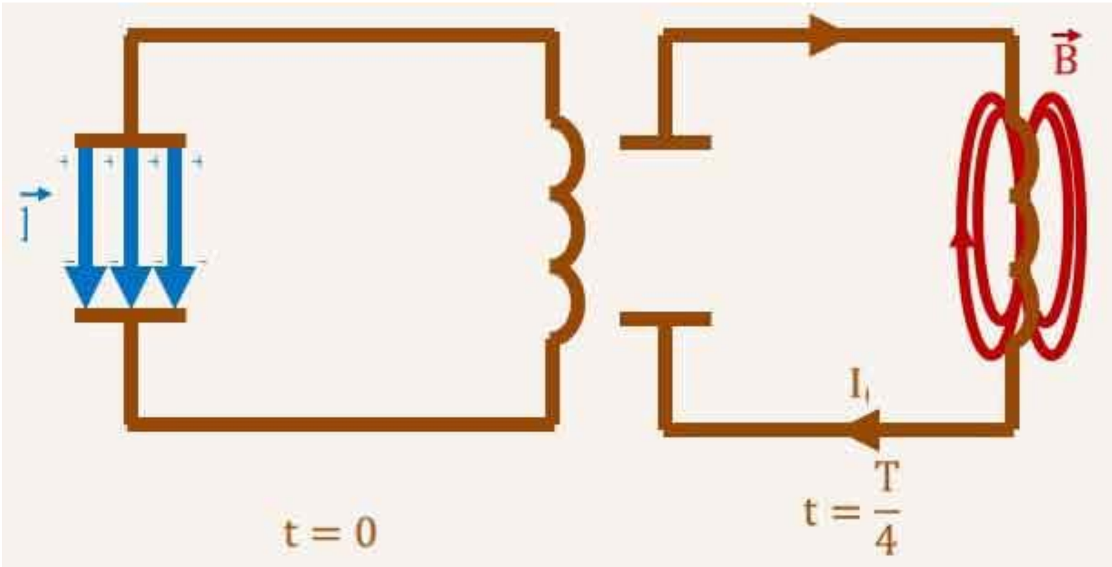
Перекачка энергии из электрического поля в конденсаторе в магнитное поле в соленоиде.

$W = LI^2/2$, L – индуктивность.

Определение через магнитный поток витка.

$$\Phi = L\,I$$

Геометрическая индуктивность



Реактивное сопротивление

$$i\omega L$$

Кинетическая индуктивность.

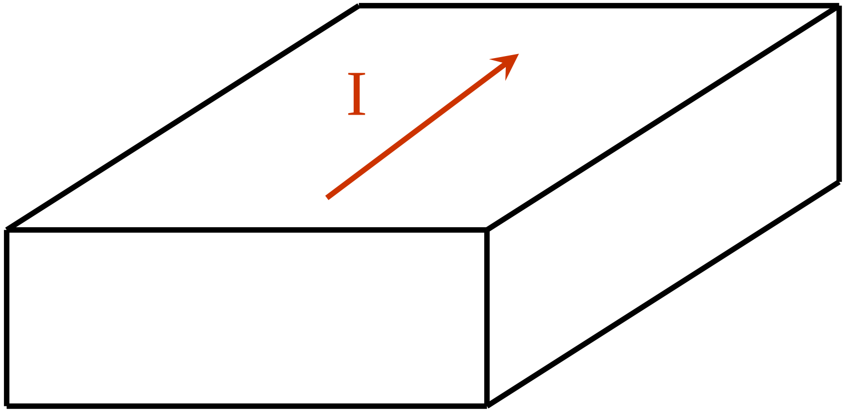
В сверхпроводнике важную роль играет ***кинетическая индуктивность****, связанная с энергией, потраченной на разгон сверхпроводяших пар (запасенной в кин энергии сверхпроводящей компоненты тока) в соответствии с первым уравнением Лондонов (ур.L I):*

$$E_k = \int n_{\mathbf{s}}(mv_{\mathbf{s}}{}^{\mathbf{2}}/2)\, dV; \qquad L_{\mathbf{k}} = 2E_k/I^2$$

$$j = n_s e v_s, \qquad v_s = j \,/\, n_s e \qquad E_k = \int n_{\mathbf{s}}(m\mathbf{j}_{\mathbf{s}}{}^{\mathbf{2}}/2n_{\mathbf{s}}{}^{\mathbf{2}}e^2)dV$$

$$\Lambda = m/(e^{\mathbf{2}}n_{\mathbf{s}}) = \mu_0\, \lambda_{\mathbf{L}}{}^{\mathbf{2}} \qquad 2E_k = \int (m/n_{\mathbf{s}}e^2)\mathbf{j}_{\mathbf{s}}{}^{\mathbf{2}}dV$$

Интегрирование здесь ведется по объему сверхпроводника.



Учитываем 2 уравнение Лондонов.

$$\boxed{L_{\mathbf{k}} = \Lambda\, (\int j_{\mathbf{s}}{}^{\mathbf{2}}\, dV)\, /I^{\mathbf{2}}}$$

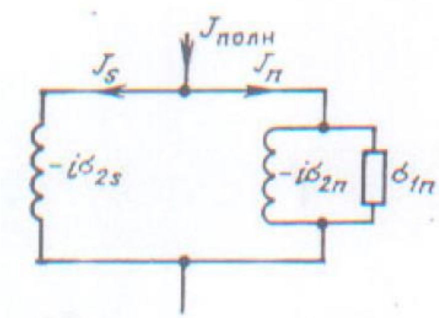
$$\boxed{L_{\mathbf{k}} = \Lambda \int (\, j_{\mathbf{s}}{}^{\mathbf{2}}/I^{\mathbf{2}}\,)\, dV}$$

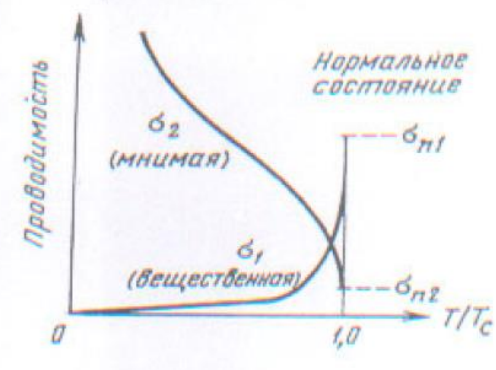
Комплексная проводимость.

$\sigma_{1n} = (n_n e^2 \tau/m)/[1+(\omega\tau)^2]$ (2.27

$\sigma_{2s} = n_s e^2/(m\omega)$ -> $\sigma_n/\omega\tau$ при T = 0

$\sigma_{2n} = n_n e^2(\omega\tau)^2/m\omega[(1+(\omega\tau)^2]$ (2.28 b)





Комплексная проводимость для гармонических сигналов $\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2$

Сверхпроводник = индуктивность при $T << T_c$

Как перейти от удельных величин к конкретным?

Как учесть форму сверхпроводника?

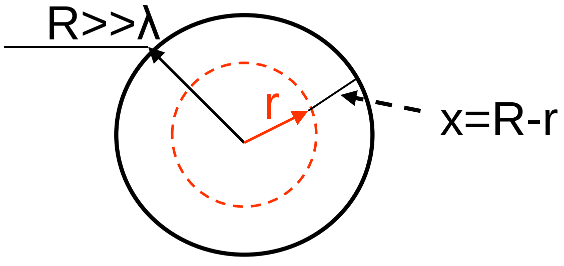
Считаем кинетическую энергию, считаем полный ток и делим друг на друга.

Учитываем 2 уравнение Лондонов.

Кинетическая индуктивность сверхпроводящих структур (на единицу длины).

Сверхпроводящий провод с радиусом R>>λ.

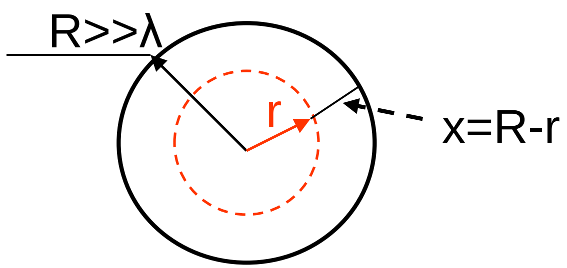
*(и длиной **l**)*



Кинетическая индуктивность сверхпроводящих структур (на единицу длины).

Сверхпроводящий провод с радиусом R>>λ.

*(и длиной **l**)*



$$L_k = \Lambda(\int j_s^2 dV)/I^2 \qquad L_k = \mu\lambda^2(\int j_s^2 dV)/I^2$$

$$j^s = j^s_0 \exp(-x/\lambda)$$

$$\int j_s^2 dV \approx \int j_{s0}^2\, e^{-2x/\lambda}\, 2\pi R\, l\, dx = \lambda\, j_{s0}^2 l \pi R \qquad (2.18)$$

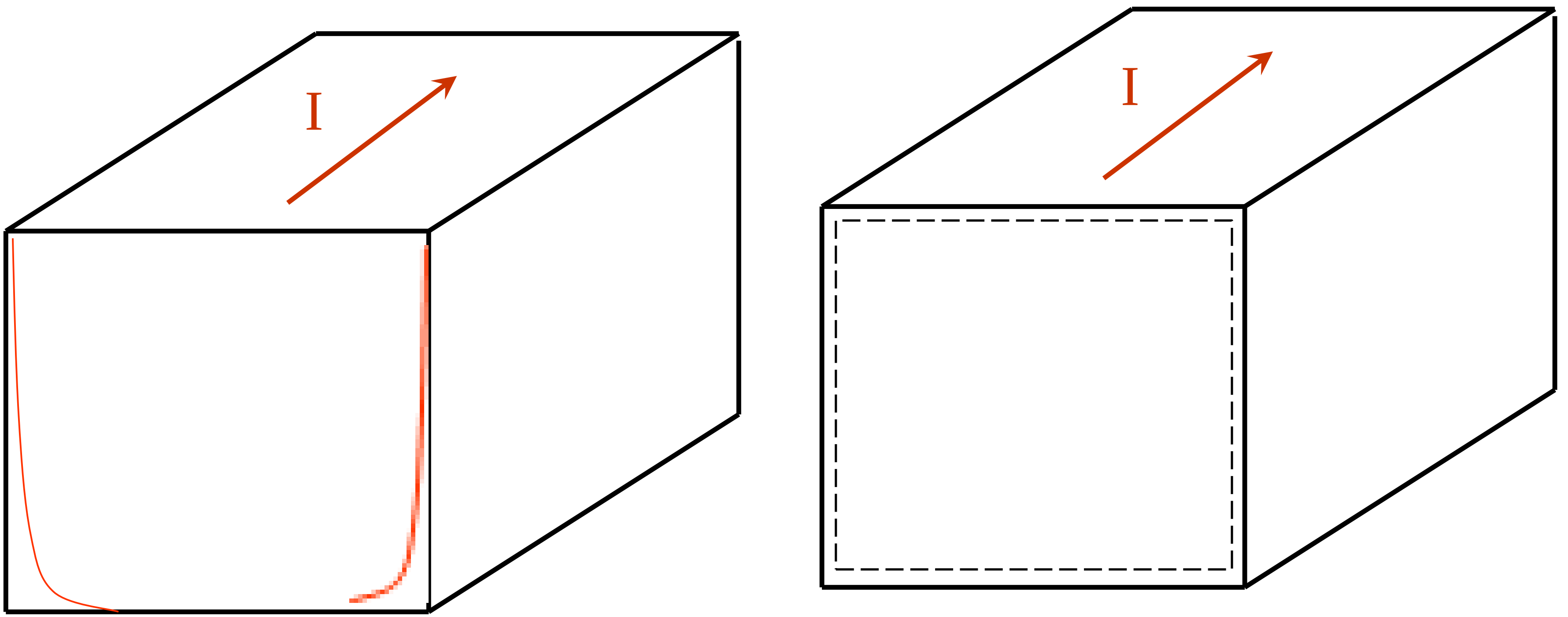
Полный ток: $\mathbf{I} = \int j_s dS \approx 2\pi R \int j_s\, dx = 2\pi R\, j_{s0}\, \lambda$

$$L_k = \mu_0\, \lambda^2 * \lambda\, j_{s0}^2 l \pi R / (2\pi R\, j_{s0}\, \lambda)^2$$

$$L_k = [1\ \text{м}] * \mu_0\, \lambda / (4\pi R) \qquad (2.20)$$

Кинетическая индуктивность толстого сверхпроводящего бруска квадратного сечения w x w длиной *l*.

$L_k = \Lambda\int(j_s^2/I^2)dV$



Кинетическая индуктивность толстого сверхпроводящего бруска квадратного сечения w x w длиной *l*.

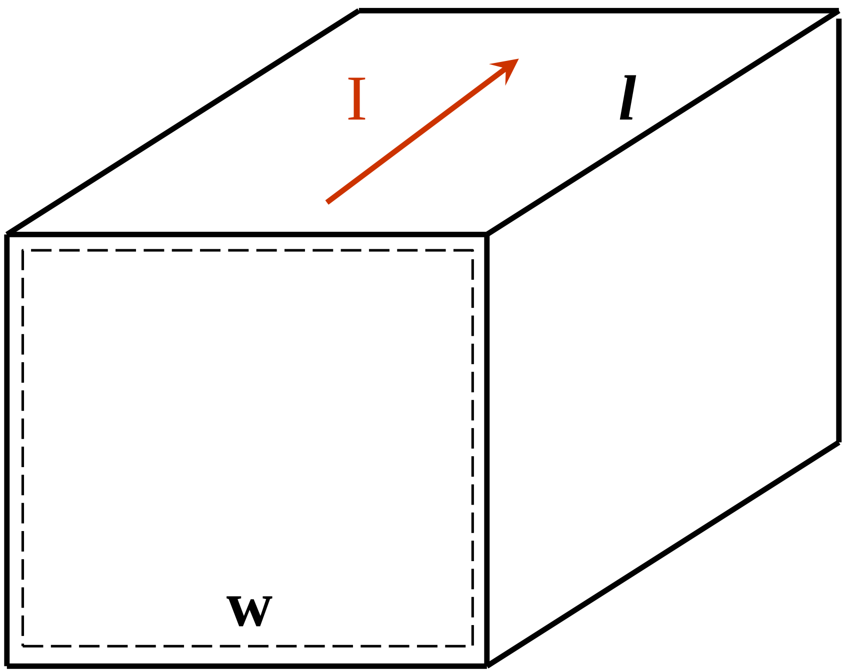
$$\boxed{L_k = \Lambda\int(j_s^2/I^2)}$$

Каждую сторону рассматриваем как сверхпроводящее полупространство.

$j = j_0 \exp(-x/\lambda)$

Для одной грани:

$$\int(j_s^2)dV = j_{s0}^2 \int_0^\infty \exp(-2x/\lambda)\, w\boldsymbol{l}\, dx = j_{s0}^2 [\lambda/2]*w*\boldsymbol{l}$$



Для всех граней:

$$\int(j_s^2)dV = 4* \boldsymbol{j_0}^2 [\lambda/2]*w*\boldsymbol{l}$$

Полный ток:

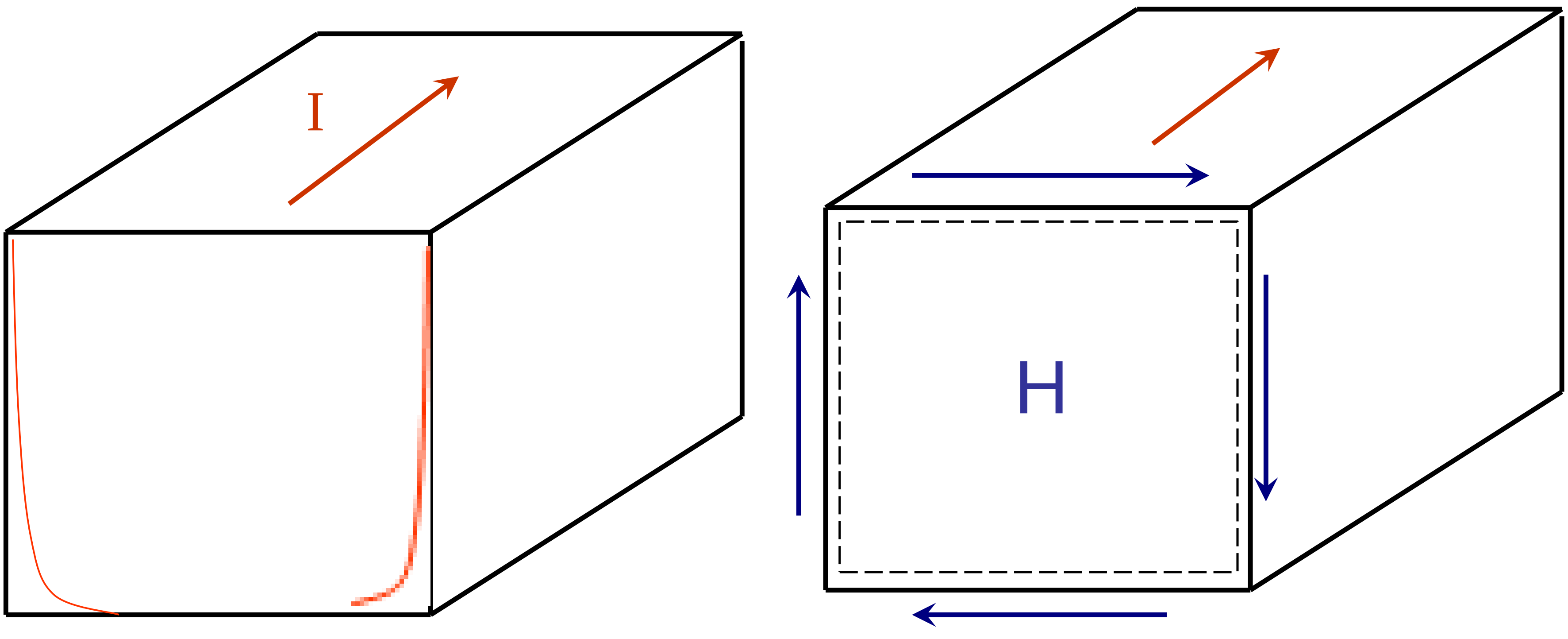
$$I = 4 \int \boldsymbol{j_0}\, e^{-x/\lambda}\, \mathbf{w}\, dx = 4\, \boldsymbol{j_0} \boldsymbol{\lambda}\, w$$

Кинетическая индуктивность:

$$L_k = [\mu_0\lambda^2] * 4* \boldsymbol{j_0}^2 [\lambda/2] *w*\boldsymbol{l} / [4\, \boldsymbol{j_0} \boldsymbol{\lambda}\, w]^2 = [\mu_0\lambda/2]*[\boldsymbol{l} / w]$$

Геометрическая индуктивность толстого сверхпроводящего бруска квадратного сечения w x w длиной *l*.

$$L_{\mathbf{M}} = \mu_0 \int (H^{\mathbf{2}}/I^{\mathbf{2}})dV$$



Кинетическая индуктивность толстого сверхпроводящего бруска квадратного сечения w x w длиной *l*.

$$L_k = [\mu_0\lambda/2]*[\boldsymbol{l} / w]$$

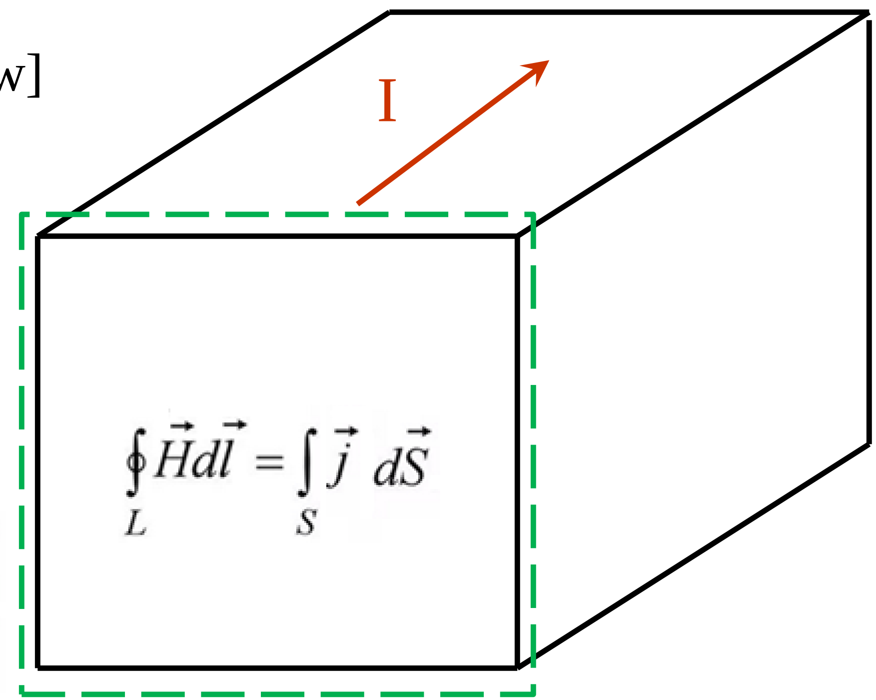
Геометрическая индуктивность пластины (ее часть, связанная с энергией поля внутри сверхпроводника):

$$L_M I^2 = 4*\mu_0 \int_{-\infty}^{0} H(x)^2 dV = 4*\mu_0 [H_{\mathbf{I}}^2] \int e^{-2x/\lambda}\, \mathbf{w}\boldsymbol{l}\, dx = 4*[\mu_0\lambda/2]*H_{\mathbf{I}}*w*\boldsymbol{l};$$

использовано: $H = H_{\mathbf{I}}\, e^{-x/\lambda}$ *и* $H_I = I/4w$

$$\boldsymbol{L_M} = 4*[\mu_0\lambda/2]*[I/4w]^2*w*\boldsymbol{l} / I^2 = [\mu_0\lambda/2]*[\boldsymbol{l}/w]$$

$L_{\boldsymbol{полн}} = L_M + L_{\mathbf{k}} = \mu_0\, \lambda*[\boldsymbol{l}/w]$, $\boxed{L_{\square} = \mu_0\lambda}$

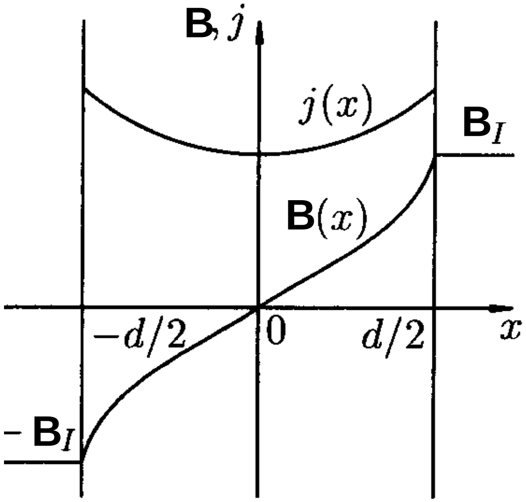


Для типичной $\lambda \cong 75$ нм

$L_{\square} \cong 0.1$ пГн.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

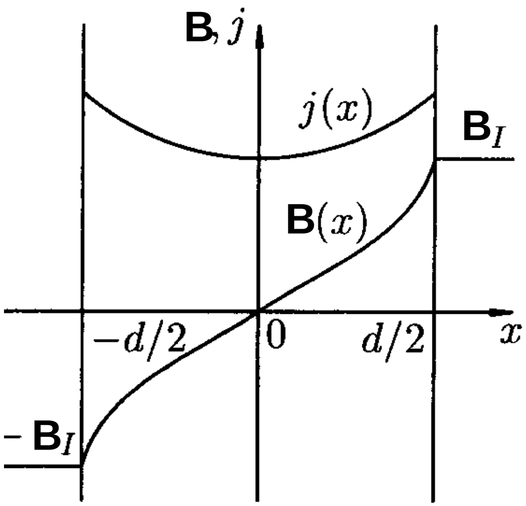
Кинетическая индуктивность тонких сверхпроводящих пленок



$$L_k = \Lambda\int (j_s^2/I^2)dV$$

Сверхпроводящая пленка с d<<λ:

Кинетическая индуктивность тонких сверхпроводящих пленок



$$\boxed{L_k = \Lambda\int(j_s^2/I^2)dV}$$

Сверхпроводящая пленка с d<<λ:

$I \approx const,$ $\quad j_s \approx I / wd \quad j_s / I \approx 1 / wd \quad$ ***на квадрат*** $l = w$

$$L^{\square}_k = \mu_0\lambda^2 \int (j_s^2/ I^2)\, wl\, dx = \mu_0\lambda^2 \int (1 / wd)^2\, wl\, dx = d*\mu_0 \lambda^2/ d^2 *[l / w]$$

$$L^{\square}_k = \mu_0 \lambda^2/ d = \mu_0 \lambda*(\lambda/d)$$

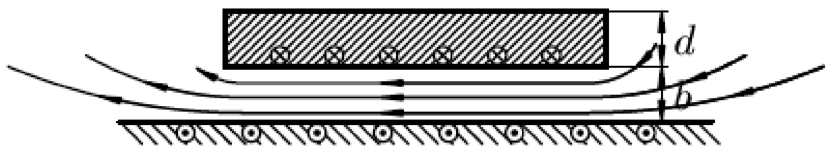
С уменьшением толщины кинетическая индуктивность повышается в λ/d раз из-за ослабления экранировки.

Для типичной $\lambda \cong 75$ нм *и толщины* d=10 нм: $\quad L_k^{\square} \cong 7*10^{-13}$ Гн.

Кинетическая индуктивность сверхпроводящих пленок

Индуктивность толстой сверхпроводящей пленки над сверхпроводящим экраном.

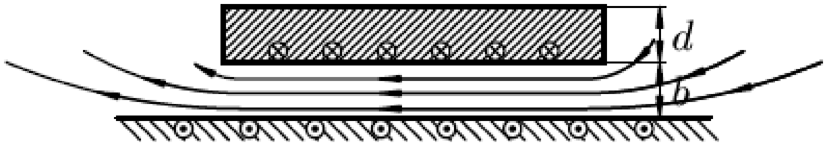
Сверхпроводящая пластина с током I *расположена на расстоянии b над полубесконечным сверхпроводящим экраном*



Кинетическая индуктивность сверхпроводящих пленок

Индуктивность толстой сверхпроводящей пленки над сверхпроводящим экраном.

Сверхпроводящая пластина из ниобия с током I *расположена на расстоянии b над полубесконечным сверхпроводящим экраном из свинца*



Индуктивность толстой сверхпроводящей пленки над сверхпроводящим экраном.

Сверхпроводящая пластина с током I *расположена на расстоянии b над полубесконечным сверхпроводящим экраном*

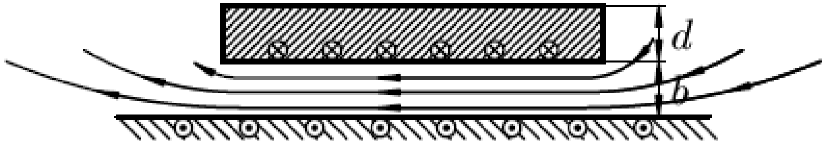
Поле $H_0 = 2H_I = I/w$ *"заперто" в "магнитном" зазоре* $t_м = \lambda_1 + b + \lambda_2$, *сверхток течет по внутренней поверхности пленки и экрана.*

Индуктивность пленки и экрана на квадрат = $\mu_0\lambda_1 + \mu_0\lambda_2$

Индуктивность, связанная с полем в помежутке b:

$L_\square = (\mu_0)\,[(2H_I)^2/I^2]\,w^2 b = \mu_0 b.$

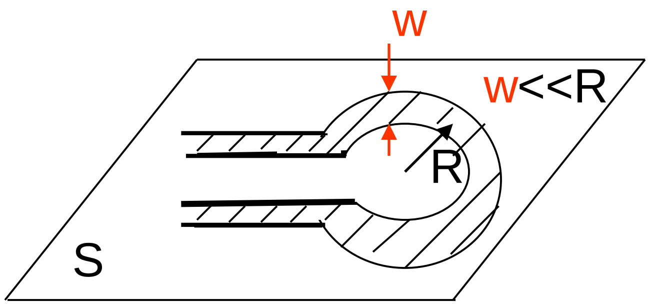
$H_I = I/2w, \; I = H_I * w$



Полная индуктивность на квадрат: $L_{\square total} = \mu_0(\lambda_1 + \lambda_2 + b)$ (2.22)

Уменьшаем b?

Индуктивность сверхпроводящей петли над сверхпроводящим экраном



уменьшение индуктивности, возникающее при размещении сверхпроводящего элемента (петли) над сверхпроводящей экранирующей плоскостью ("ground plane")

Индуктивность такой петли в норм состоянии (из справочника):

$$L_{\mathbf{n}}=R\mu_0\,[\,\ln(16\,R/w) - 2] \qquad (2.23)$$

R=100 мкм, w = 10 мкм дают $L_{\mathbf{n}} \cong 4{*}10^{\mathbf{-10}}$ Гн

Если сверхпроводящаяи петля расположена над сверхпроводящей экранирующей плоскостью, ее индуктивность равна:

$L_s = (2\pi R/w)\,\mu_0(\lambda_{\mathbf{1}} + \lambda_{\mathbf{2}} + b)$; (2πR/*w*- *число квадратов*) (2.24)

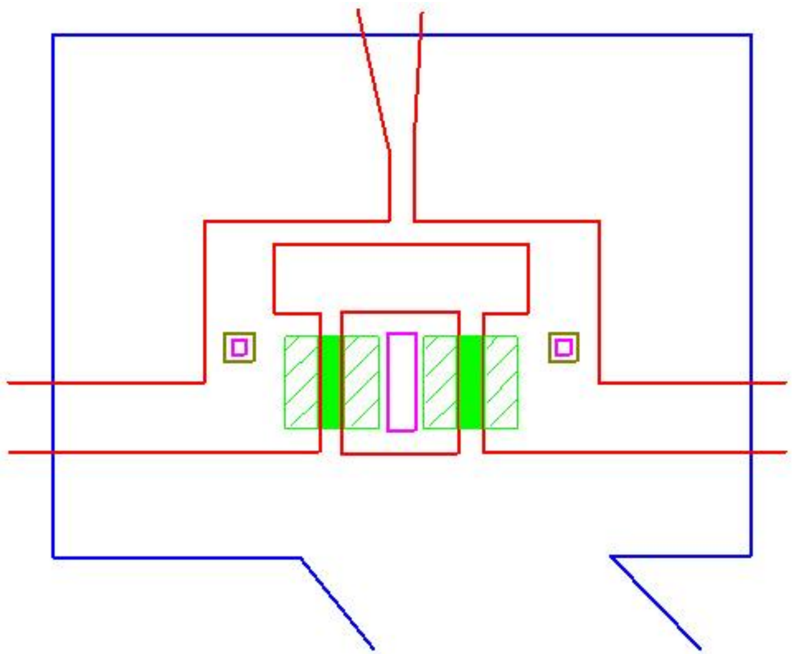
Оценки по формулам ур.(2.23 и 2.24) *дают для*

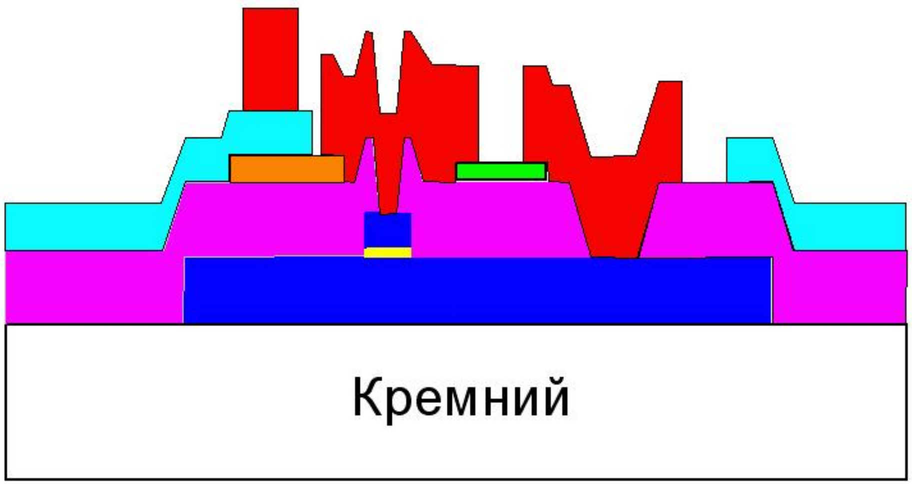
$\lambda \cong 40$ нм и b=200 нм :

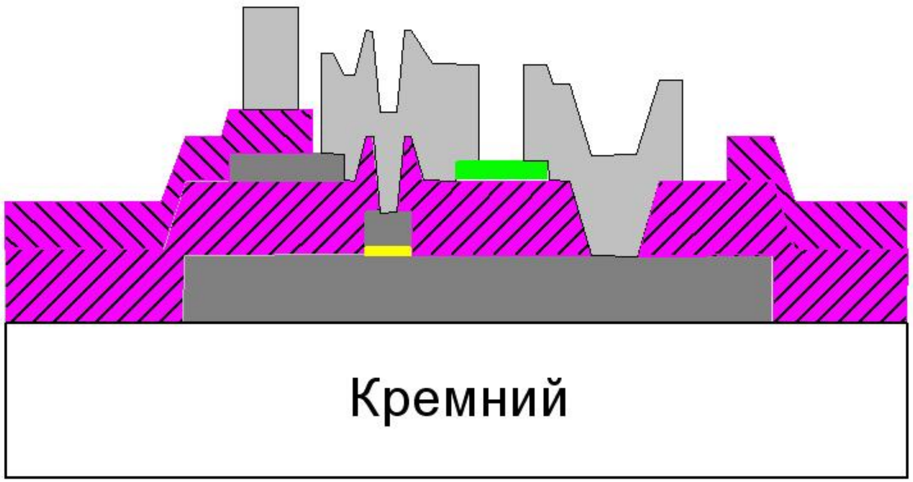
$L_{\mathbf{s}} \cong 2{*}10^{\mathbf{-11}}$ Гн,

т.е. ***индуктивность упала в 20 раз !***

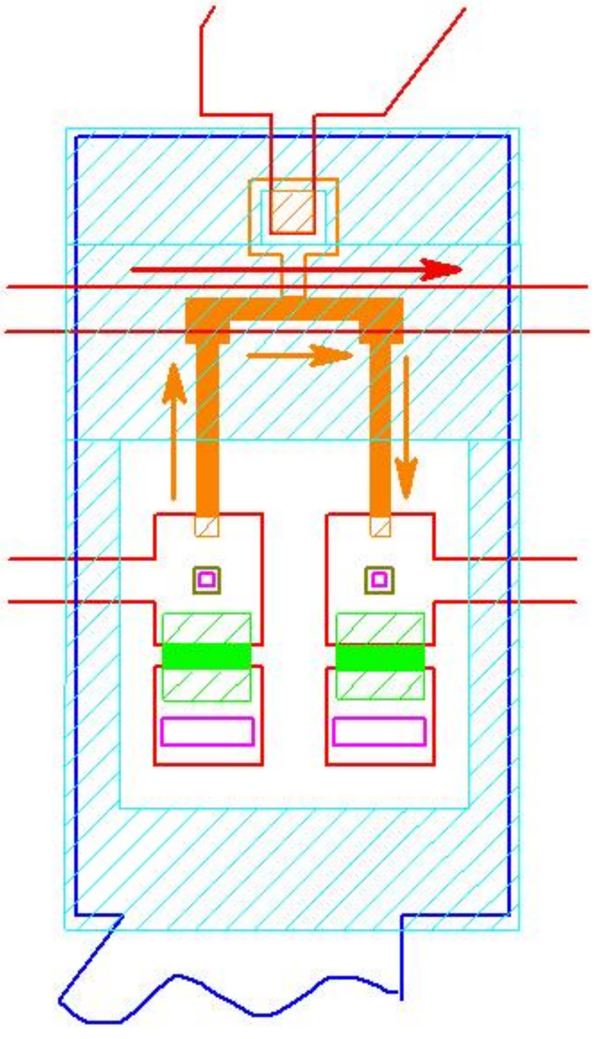
Размещение сверхпроводящего элемента (петли) над сверхпроводящей экранирующей плоскостью ("ground plane")

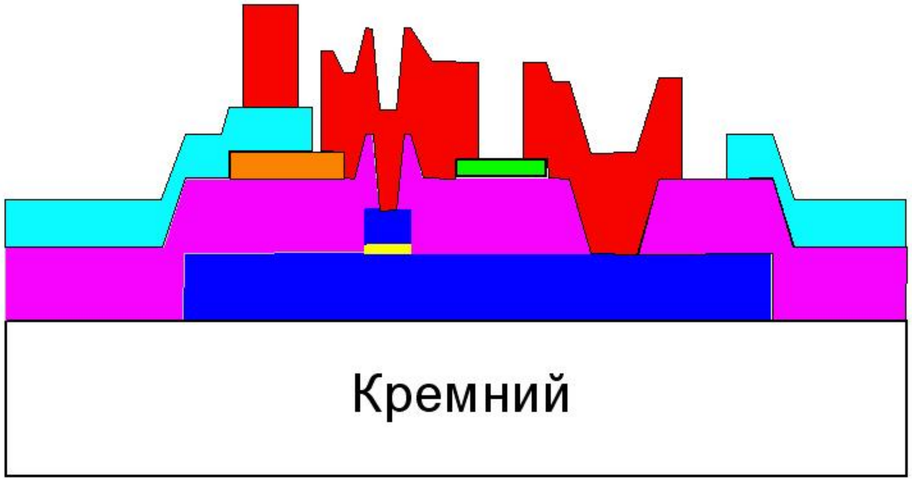


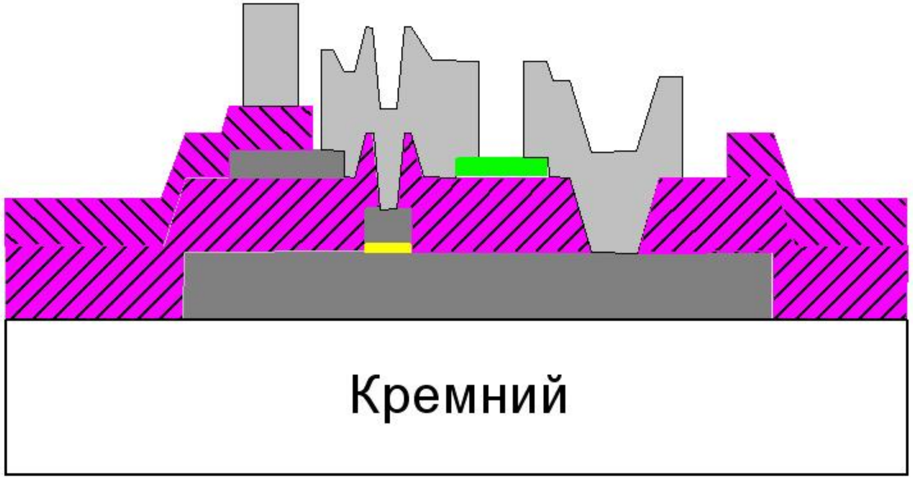




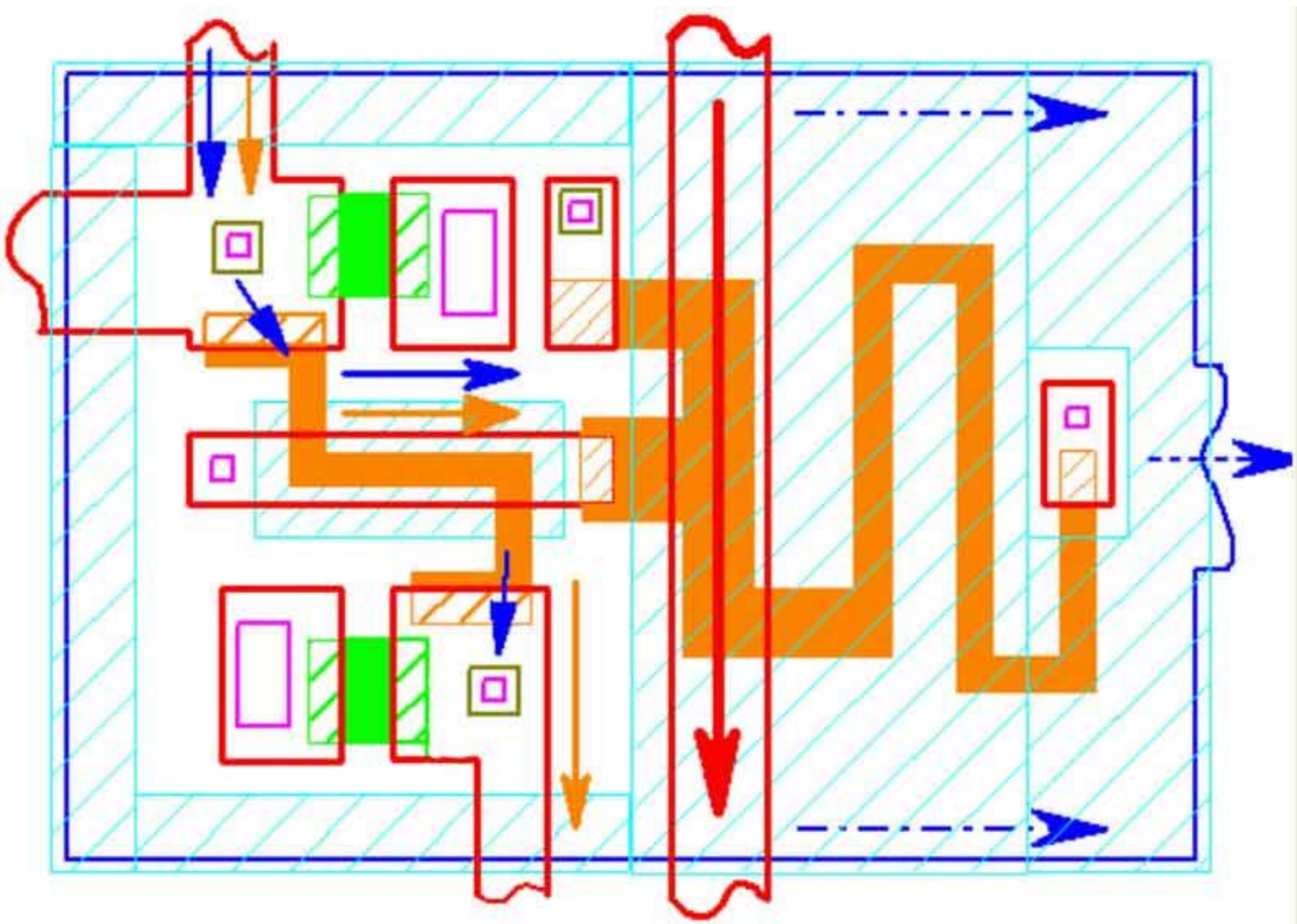
Размещение сверхпроводящего элемента (петли) над сверхпроводящей экранирующей плоскостью ("ground plane")







Размещение сверхпроводящего элемента (петли) над сверхпроводящей экранирующей плоскостью ("ground plane")



Ура!!!

Продолжим лекцию???