

Введение в физику сверхпро ВОДИМОСТИ

Больгинов Виталий Валериевич

Понедельник, аудитория 420 ГЛК

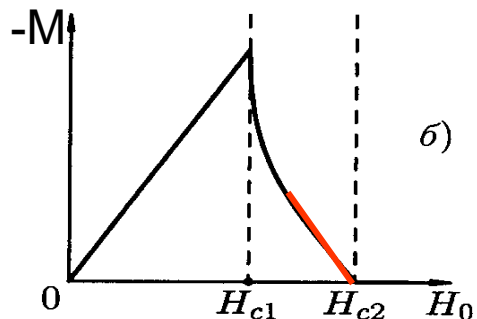
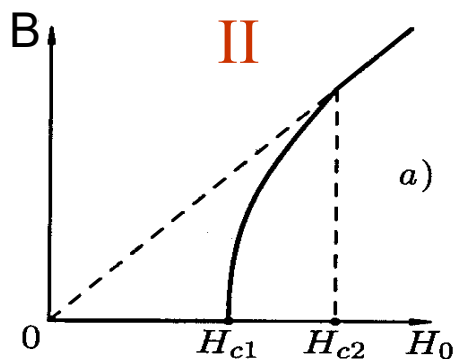
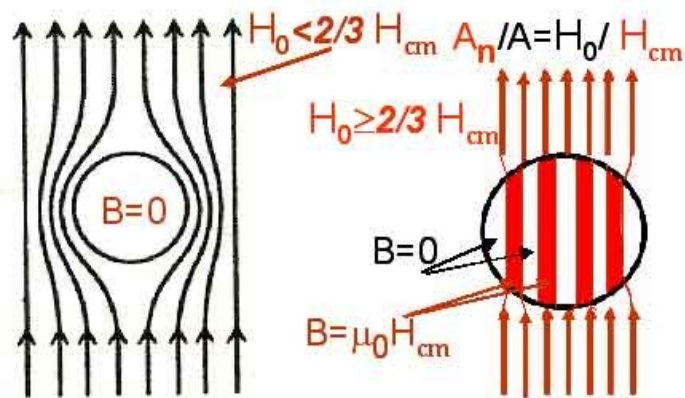
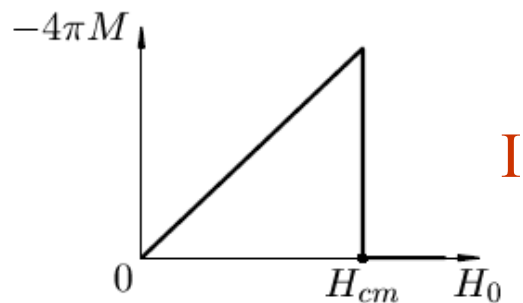
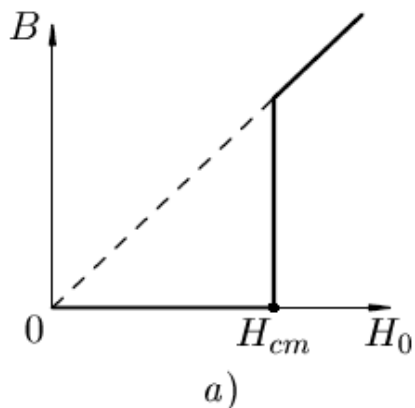
Лекция 8

Энергия N-S границы. Сверхпроводники 1 и 2 рода. Вихри Абрикосова.

Сверхпроводники I и II рода

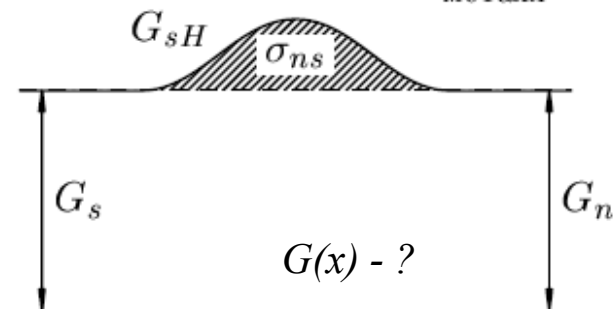
Смешанное состояние.

Вопросы о природе смешанного состояния и причинах разделения сверхпроводников на первый/второй род стимулировали рассмотрение задачи об *энергии границы раздела* нормальный металл/сверхпроводник.



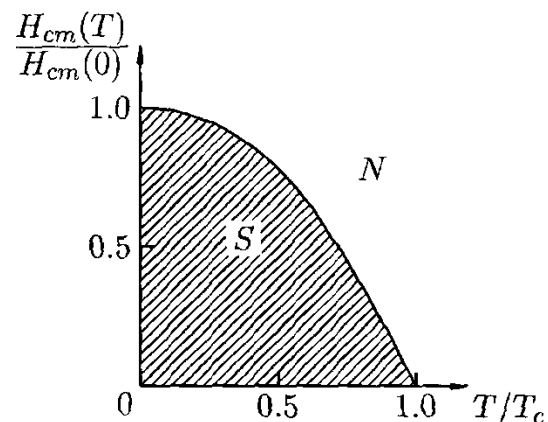
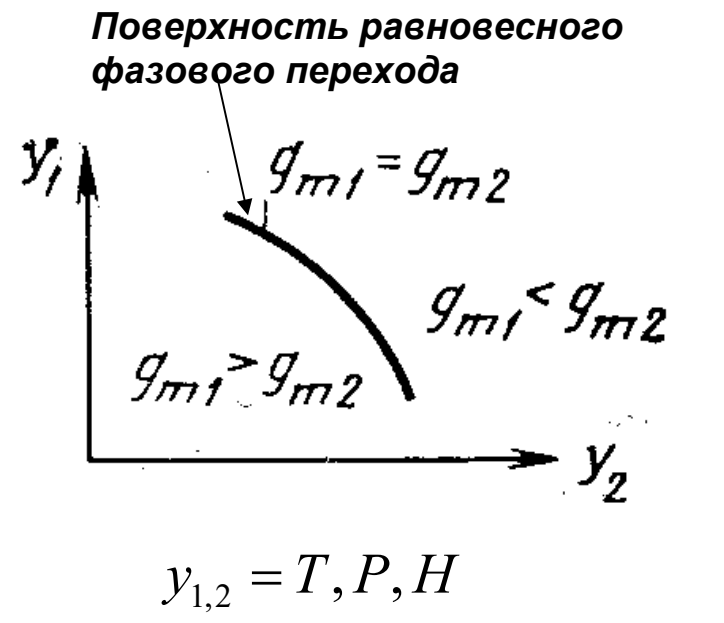
Надо построить
функционал
для энергии
NS-границы

Сверхпроводник Граница Нормальный металл



$$G(x) = \delta(x)?$$

Аналогия с фазовым переходом



или с хим.
реакцией

$$H_c(T) = H_c^{(0)} \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

В процессах, где минимума достигает свободная энергия Гиббса:

$$dG = 0 \text{ в равновесии.}$$

Образец содержит $\nu_{1,2}$ молей вещества в состоянии 1 или 2 с молярной энергией Гиббса $g_{m1,2}$: $G = \nu_1 g_{m1} + \nu_2 g_{m2}$

Сохранение количества вещества:

$$d\nu_1 = -d\nu_2$$

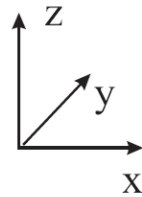
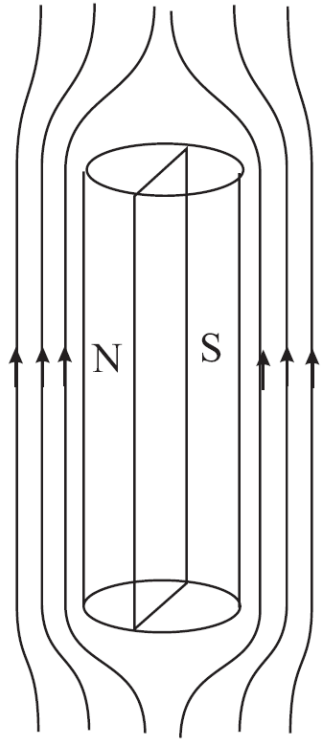
$$dG = g_{m1} d\nu_1 + g_{m2} d\nu_2 = (g_{m1} - g_{m2}) d\nu_1 = 0$$

Равновесие фаз при $g_{m1} = g_{m2}$.

Энергии Гиббса двух фаз в точке фазового перехода равны!

(В противном случае вещество будет находиться в состоянии с наименьшей энергией Гиббса.)

Термодинамика. Равновесие фаз.



Предположения.

- Мы рассматриваем участок сверхпроводника в *промежуточном состоянии*.
- Размер нормальной области *подбирается* автоматически так, чтобы поле в ней равнялось $\mu_0 H_{cm}$.
- Сверхпроводник находится во внешнем поле H_{cm} .

Далеко слева (N)

$$G = F - BH, B_n = \mu_0 H_{cm}$$

$$F_H = F_n + \mu_0 H_{cm}^2 / 2$$



$$G_n = F_n - \mu_0 H_{cm}^2 / 2$$

Действительно,
вдали от границы

$$G_n = G_s$$

Величины G отличаются только в области границы. Значит суммарная разность определяет энергию границы.

Далеко справа (S)

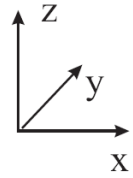
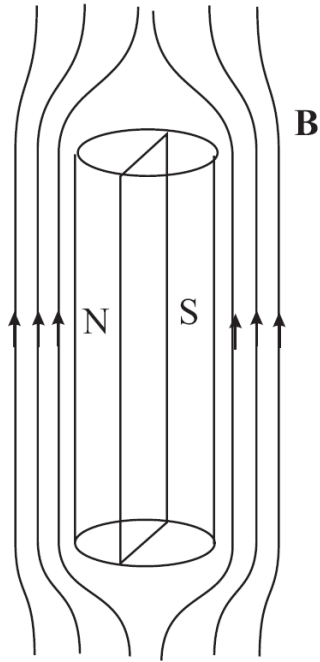
$$G_s = F_s - B_s H, B_s = 0$$

$$G_s = F_s$$

$$F_{sH} = F_n - \mu_0 H_{cm}^2 / 2$$

$$G_s = F_n - \mu_0 H_{cm}^2 / 2$$

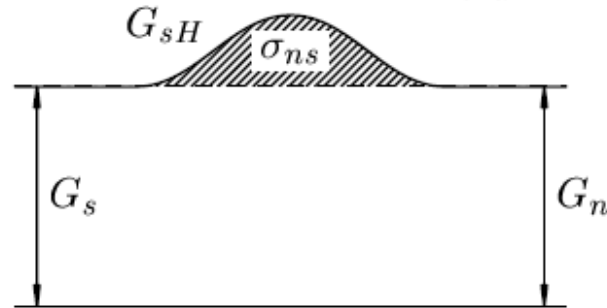
Энергия N-S границы. Теория Лондонов.



$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_{sH} - G_n) dx,$$

$$g_n = f_n - \mu_0 H_{cm}^2 / 2$$

Сверхпроводник Граница Нормальный металл



$$g_{sH} = f_{sH} - BH,$$

$$B(x) = \mu_0 H(x) \neq 0$$

$$f_{sH} = f_{s0} + (\mu_0/2) [H^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2]$$

$$f_{s0} = f_n - \mu_0 H_{cm}^2 / 2$$

$$\begin{aligned} g_{sH} &= f_n - \mu_0 H_{cm}^2 / 2 + (\mu_0/2) (H^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2) - \mu_0 H H_{cm} = \\ &= g_n + (\mu_0/2) (H^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2) - \mu_0 H H_{cm} \end{aligned}$$

$$\sigma_{ns} = \int (g_{sH} - g_n) dx = (\mu_0/2) \int (H^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2 - 2HH_{cm}) dx$$

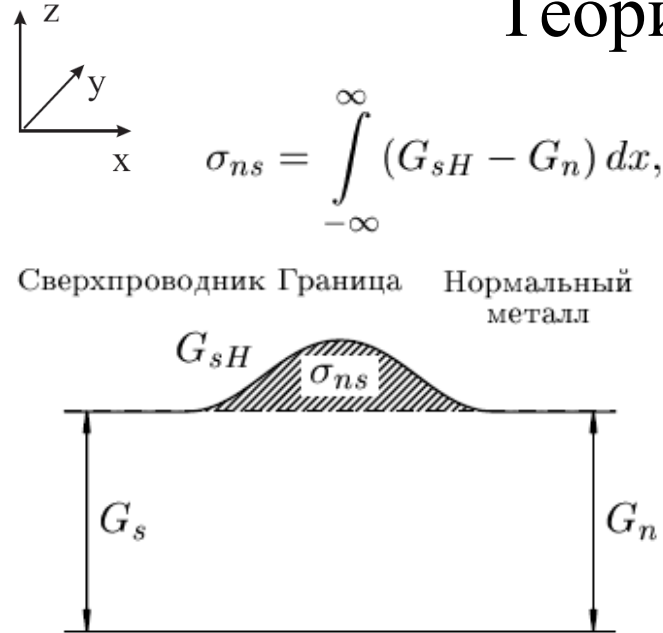
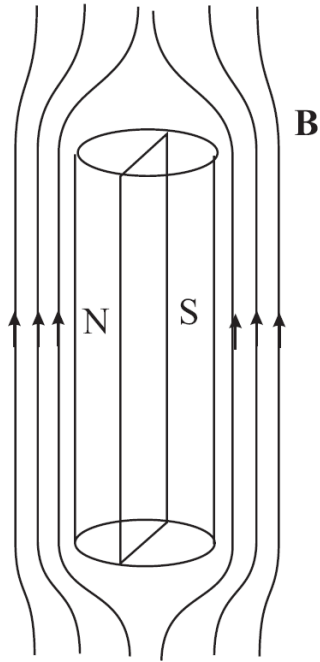
$$|\text{rot } \mathbf{H}| = \partial H_z / \partial x = -H_z(x) / \lambda$$

$$\sigma_{ns} = (\mu_0/2) \int (H^2 + \lambda^2 (H/\lambda)^2 - 2HH_{cm}) dx = (\mu_0/2) \int (2H^2 - 2HH_{cm}) dx$$

$$H = H_0 \exp(-x/\lambda)$$

$$\sigma_{ns} = \mu_0 \int (H(x) - H_{cm}) H(x) dx$$

Энергия N-S границы. Теория Лондонов.



$$H = H_0 \exp(-x/\lambda)$$

$$0 < H(x) < H_0$$

$$\sigma_{ns} = \mu_0 \int (H(x) - H_{cm}) H(x) dx \leq 0$$

???

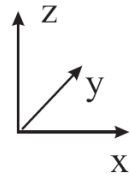
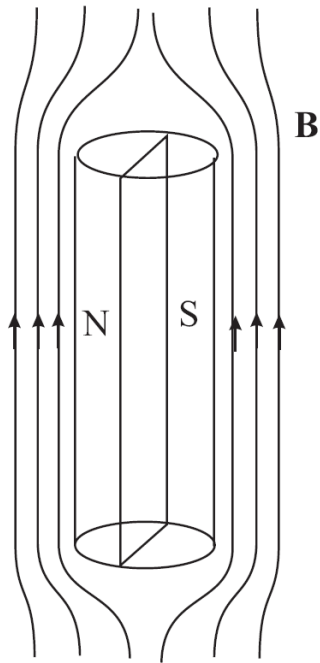
В теории Лондонов энергия границы раздела получается отрицательной всегда.

Выгоден переход в смешанное состояние в сколь угодно малых полях.

Противоречит эксперименту.

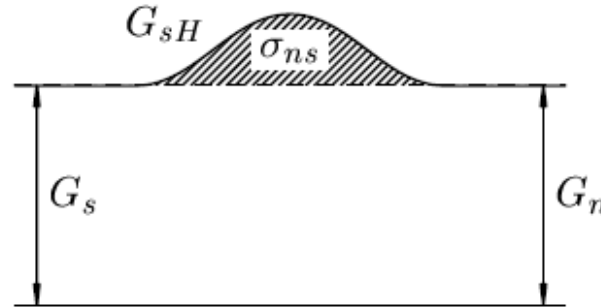
Что даст теория Г-Л?

Энергия N-S границы (Г-Л)



$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_{sH} - G_n) dx,$$

Сверхпроводник Граница Нормальный металл



$$g_{nH} = f_n - \mu_0 H_{cm}^2 / 2$$

$$g_{sH} = f_{sH} - BH,$$

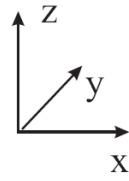
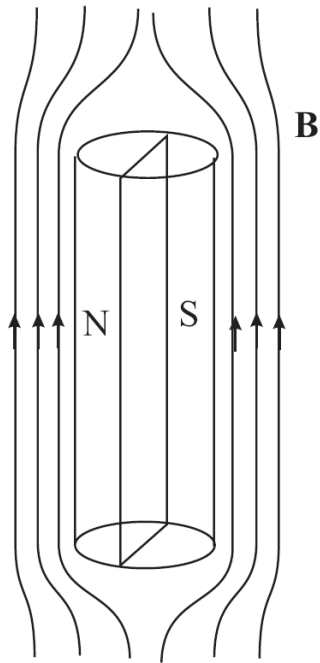
$$B(x) = \mu_0 H(x) \neq 0$$

$$f_{s0} = f_n - \mu_0 H_{cm}^2 / 2$$

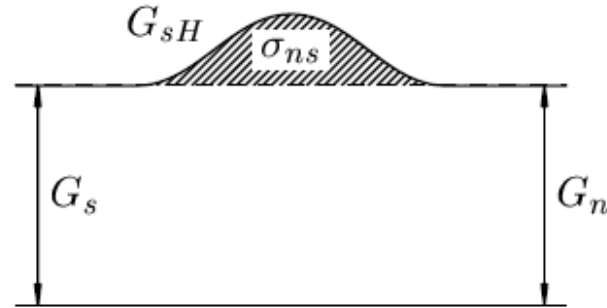
$$g_{sH}(x) = f_n + \alpha |\Psi|^2 + (\beta/2) |\Psi|^4 + (1/4m) |-i\hbar \nabla \Psi - 2eA\Psi|^2 + B_s^2 / (2\mu_0) - B_s H$$

1. Начало отсчета энергии сверхпроводника.
2. Потенциальная энергия сверхпроводящего упорядочения.
3. Кинетическая энергия сверхпроводящих токов.
4. Плотность энергии магнитного поля.
5. Плотность работы источника.

Энергия N-S границы (Г-Л)



Сверхпроводник Граница Нормальный металл



$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} (g_s - g_n) dx$$

$$g_{sH}(x) = f_n + \alpha |\Psi|^2 + (\beta/2) |\Psi|^4 + (1/4m) |-i\hbar \nabla \Psi - 2eA\Psi|^2 + B_s^2/(2\mu_0) - B_s H$$

$$g_{nH} = f_n - \mu_0 H_{cm}^2/2$$

$$f_n = g_{nH} + \mu_0 H_{cm}^2/2$$

$$\sigma = \int [\alpha |\Psi|^2 + (\beta/2) |\Psi|^4 + (1/4m) |-i\hbar \nabla \Psi - 2eA\Psi|^2 + B_s^2/(2\mu_0) - B_s H + \mu_0 H_{cm}^2/2] dx$$

Приведенный функционал Г-Л

$$\Delta f = \alpha |\Psi|^2 + (\beta/2) |\Psi|^4 + (1/4m) |-i\hbar \nabla \Psi - 2eA\Psi|^2$$

Приведенный параметр порядка: $|\psi|^2 = |\Psi(r)|^2 / |\Psi_0|^2$; $\psi = \Psi(r) / \Psi_0$, $\Psi(r) = \psi \Psi_0 = \psi (\alpha/\beta)^{1/2}$

$$\text{где } |\Psi_0|^2 = n_{s0}/2 = -(\alpha/\beta)$$

$$|\Psi(r)|^2 = (-\alpha/\beta) |\psi|^2 = (n_{s0}/2) |\psi|^2$$

$$f_{sH}(x) = f_n + (-\alpha^2/\beta) |\psi|^2 + (\alpha^2/2\beta) |\psi|^4 + (1/4m\alpha) \alpha (-\alpha/\beta) |-i\hbar \nabla \psi - 2eA\psi|^2$$

$$H_{cm}^2 = \beta n_{s0}^2 / \mu_0 = \alpha^2 / (\mu_0 \beta); \quad \alpha^2 / \beta = \mu_0 H_{cm}^2$$

$$f_{sH}(x) = f_n + (-\mu_0 H_{cm}^2) |\psi|^2 + (\mu_0 H_{cm}^2) |\psi|^4 + (-\hbar^2/4m\alpha) (\mu_0 H_{cm}^2) |-i\nabla \psi - (2e/\hbar) A\psi|^2$$

$$\text{Длина когерентности ГЛ: } \xi^2 = \hbar^2 / (4m|\alpha|) = -\hbar^2 / (4m\alpha); \quad \xi(T) = \xi_0 (1 - T/T_c)^{-1/2}$$

$$\Phi_0 = h/2e = 2\pi\hbar/2e, \quad \hbar/2e = \Phi_0/2\pi$$

$$\sqrt{2} H_{cm} = \Phi_0 / (2\pi\mu_0 \lambda \xi)$$

$$\Delta f = \mu_0 H_{cm}^2 (-|\psi|^2 + |\psi|^4 + \xi^2 |-i\hbar \nabla \psi - 2\pi/\Phi_0 A\psi|^2)$$

Расчет энергии SN-границы

$$\sigma = \int \mu_0 H_{cm}^2 \left(-|\psi|^2 + (1/2)|\psi|^4 + \xi^2 | -i\nabla\psi - 2\pi/\Phi_0 A\psi |^2 + \right. \\ \left. + (1/2)B_s^2/(\mu_0 H_{cm})^2 - B_s H / \mu_0 H_{cm}^2 + 1/2 \right) dx$$

Вспоминаем

Эффект близости на NS-границе. Сверхпроводник. Точное решение.

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0;$$

Первый интеграл:

$$-\xi^2 (d\psi/dx)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = C,$$

$$\sigma = \int \mu_0 H_{cm}^2 \left(\xi^2 | -i\nabla^2\psi - 2\pi/\Phi_0 A\psi |^2 - |\psi|^2 + (1/2)|\psi|^4 + \right. \\ \left. + (1/2)(\text{rot } A)^2/(\mu_0 H_{cm})^2 - (\text{rot } A)H / \mu_0 H_{cm}^2 + 1/2 \right) dx$$

Можно ли свести часть членов суммы к константе, выделив первый интеграл уравнения Г-Л?

Ищем первый интеграл уравнений Г-Л в магнитном поле.

Первый интеграл уравнений Г-Л в магнитном поле

$$-\xi^2 \nabla^2 \psi + \left[\frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A} \right]^2 \psi - \psi + \psi^3 = 0 \quad \times \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad + \quad \times \left[\frac{2\pi}{\Phi_0} \right]^2 \lambda^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \psi^2 A / \lambda^2 \quad \times \frac{\partial A}{\partial x}$$

Первый интеграл ГЛ I:

$$[1 - (2\pi\xi A / \Phi_0)^2] \psi^2 - (1/2)\psi^4 + \xi^2 (d\psi/dx)^2 + (2\pi\lambda\xi / \Phi_0)^2 (dA/dx)^2 = C;$$

(Проверить, продифференцировав по x и подставив: $d^2 A / dx^2 = \psi^2 A / \lambda^2$)

Определим C из гран. условий: $x \rightarrow \infty$: $\psi \rightarrow 1$, $d\psi / dx \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$. $C = 1/2$

Преобразуем в равенство:

$$[1 - (2\pi\xi A / \Phi_0)^2] \psi^2 - (1/2)\psi^4 + 1/2 = \xi^2 (d\psi/dx)^2 + (2\pi\lambda\xi / \Phi_0)^2 (dA/dx)^2$$

Заметим $2(\mu_0 H_{cm})^2 = (\Phi_0 / 2\pi\lambda\xi)^2$ и $B = dA/dx$

$$[(2\pi\xi A / \Phi_0)^2 - 1] \psi^2 - (1/2)\psi^4 + 1/2 = \xi^2 (d\psi/dx)^2 + (1/2) B^2 / (\mu_0 H_{cm})^2;$$

Энергия SN-границы

$$\sigma = \int \mu_0 H_{cm}^2 \left(\xi^2 (\partial \psi / \partial x)^2 + (2\pi / \Phi_0)^2 A^2 \psi^2 - |\psi|^2 + (1/2) |\psi|^4 + \right. \\ \left. + B^2 / (2\mu_0 H_{cm})^2 - B^* H / (\mu_0 H_{cm})^2 + 1/2 \right) dx$$

$$[(2\pi \xi A / \Phi_0)^2 - 1] \psi^2 + (1/2) \psi^4 + 1/2 = \xi^2 (d\psi/dx)^2 + (1/2) B^2 / (\mu_0 H_{cm})^2;$$

$$\sigma = \int \mu_0 H_{cm}^2 \left(2\xi^2 (\partial \psi / \partial x)^2 + (1/2) B^2 / (\mu_0 H_{cm})^2 + \right. \\ \left. + B^2 / (2\mu_0 H_{cm})^2 - BH / (\mu_0 H_{cm})^2 \right) dx$$

↓

$$\sigma = \int \mu_0 H_{cm}^2 \left(2\xi^2 (\partial \psi / \partial x)^2 + B^2 / (\mu_0 H_{cm})^2 - BH / (\mu_0 H_{cm})^2 \right) dx$$

$$\sigma_{ns} = 2\mu_0 H_{cm}^2 \int dx \left[\xi^2 (d\psi/dx)^2 + B(B - \mu_0 H) / 2(\mu_0 H_{cm})^2 \right]$$

Два вклада в энергию NS-границы

$$\sigma_{ns} = 2\mu_0 H_{cm}^2 \int dx [\underbrace{\xi^2 (d\psi/dx)^2}_{\text{всегда } > 0} + \underbrace{B(B - \mu_0 H_{cm})/2\mu_0 H_{cm}^2}_{\text{всегда } < 0, \text{ т.к. } B < \mu_0 H_{cm}}]$$

$\partial\psi / \partial x \sim 1/\xi$ - изменение ψ порядка 1 происходит на длине ξ

$$\xi^2 (\partial\psi/\partial x)^2 \sim 1 \rightarrow \int \xi^2 (\partial\psi/\partial x)^2 dx \sim \int dx \sim \xi \text{ (ширина NS-границы)}$$

$|B(B - \mu_0 H)| \rightarrow 0$ в S-области ($B = 0$) и N-области

$$-B^2 + B\mu_0 H \leq \mu_0 H^2/2 \leq \mu_0 H_{cm}^2/2 \quad 0 < B < H$$

$$|B(B - \mu_0 H)/2\mu_0 H_{cm}^2| \leq 1/4$$

(расхождение с учебником: $|B(B - \mu_0 H) / 2\mu_0 H_{cm}^2| \leq 1$, непринципально)

$$\int dx [B(\mu_0 H - B) / 2\mu_0 H_{cm}^2] \geq - (1/4) \int dx \geq - (1/4)\lambda \sim -\lambda$$

Энергия SN-границы для СП I и СП II

$$\sigma_{ns} = 2\mu_0 H_{cm}^2 [\xi - \{\lambda / 4\}]$$

$$\xi \gg \lambda \quad \sigma_{ns} \sim \mu_0 H_{cm}^2 \xi > 0$$

Образование N-S границы невыгодно. Разрушение сверхпроводимости в полях порядка H_{cm} (или переход в смешанное состояние).

Сверхпроводники 1 рода.

$$\xi \ll \lambda \quad \sigma_{ns} \sim -\mu_0 H_{cm}^2 \lambda < 0$$

Образование N-S границы выгодно. Проникновение магнитного потока (т.е. переход в смешанное состояние) в полях меньше H_{cm} . Сверхпроводники 2 рода.

Ситуация теории Лондонов: $n_s \approx \text{const.}$

$$\xi \leq \lambda / 4$$

масштаб изменения $n_s \ll$ лондоновской длины.

?

$$\xi \geq \lambda / 4$$

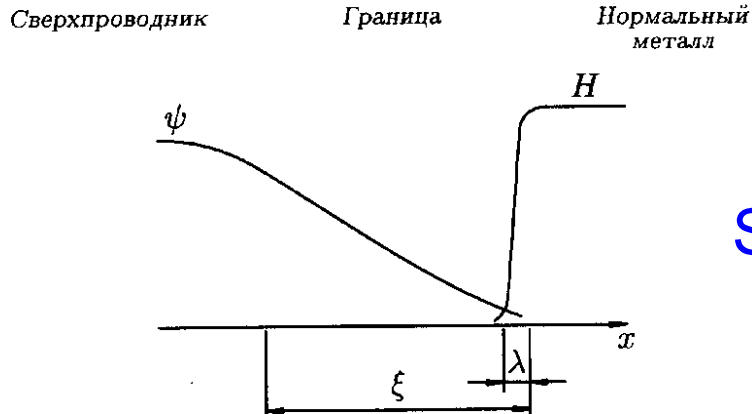
Граница: параметр Гинзбурга-Ландау

$$\kappa = \lambda / \xi, \quad \kappa_{\text{крит}} = 1/\sqrt{2} \text{ (точный расчет)}$$

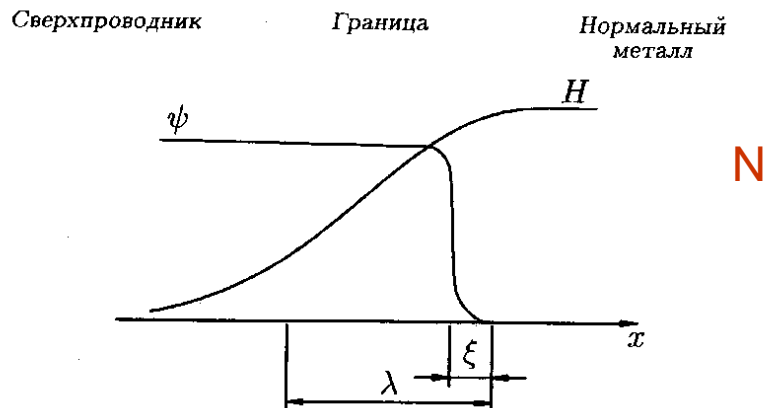
не зависит от температуры (свойство материала)

Как понять знак?

СП I $\lambda < \xi$



СП II $\lambda > \xi$



Гиббсовские энергии
N- и S-областей одинаковы.

Чем является NS-граница?

По эффекту Мейснера: $B_s = 0$

Размер: $\max(\xi, \lambda)$

Сверхпроводимость дает понижение
внутренней энергии металла на
величину $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

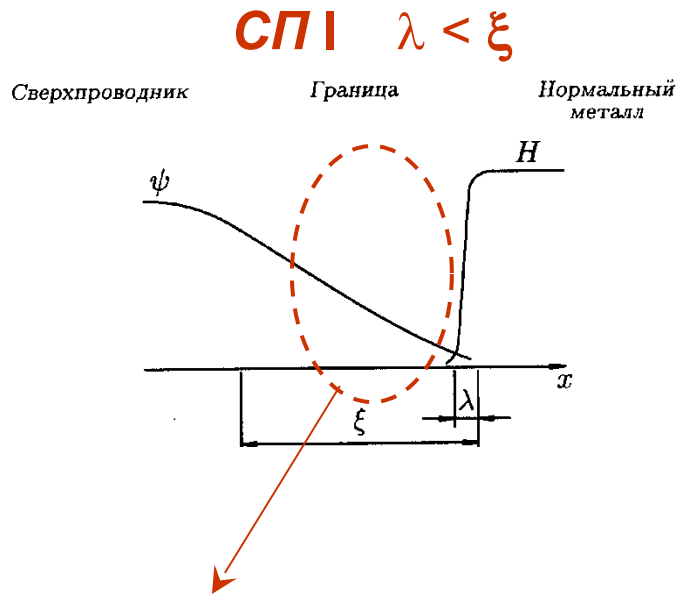
Магнитное поле увеличивает
внутреннюю энергию на
 $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

Сверхпроводники 1 рода

Гиббсовские энергии N- и S-областей одинаковы.

Сверхпроводимость дает понижение внутренней энергии металла на величину $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

Магнитное поле увеличивает внутреннюю энергию на $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

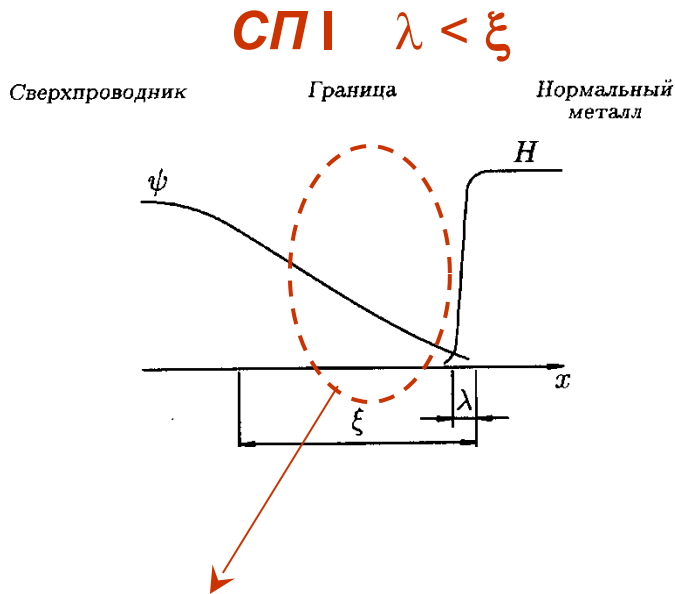


Сверхпроводники 1 рода

Гиббсовские энергии N- и S-областей одинаковы.

Сверхпроводимость дает понижение внутренней энергии металла на величину $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

Магнитное поле увеличивает внутреннюю энергию на $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.



Граница - *сверхпроводящая* область (без магнитного поля) длиной ξ , из которой *вытолкнуты* сверхпроводящие электроны.

$$B_s = 0$$

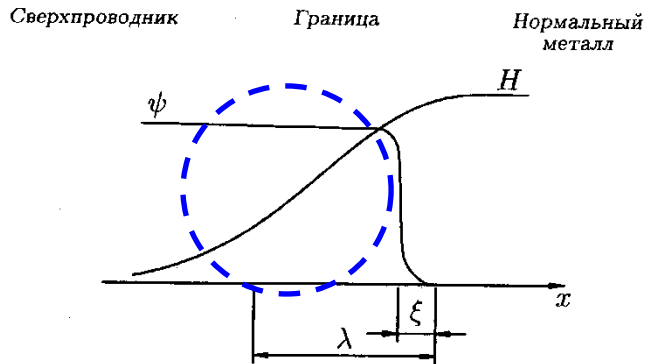


Увеличение энергии на $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2 \xi$ на единицу площади поперечного сечения.

Образование NS-границы невыгодно.

Сверхпроводники 2 рода

СП II $\lambda > \xi$



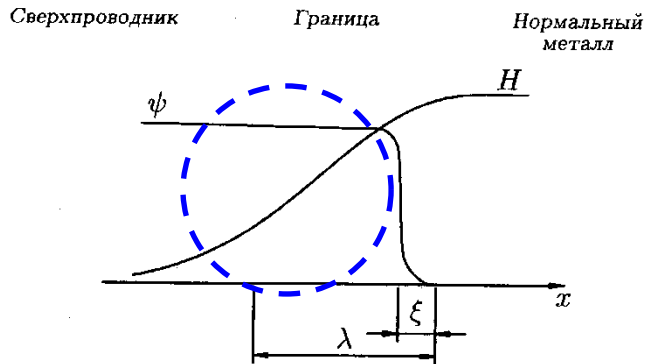
Гиббсовские энергии N- и S-областей одинаковы.

Сверхпроводимость дает понижение внутренней энергии металла на величину $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

Магнитное поле увеличивает внутреннюю энергию на $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

Сверхпроводники 2 рода

СП II $\lambda > \xi$



Гиббсовские энергии N- и S-областей одинаковы.

Сверхпроводимость дает понижение внутренней энергии металла на величину $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

Магнитное поле увеличивает внутреннюю энергию на $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2$ на единицу объема.

Граница - нормальная область (присутствует магнитное поле) длиной λ , в которой *есть* сверхпроводящие электроны.



Уменьшение энергии на $\frac{1}{2} \mu_0 H_{cm}^2 \lambda$ на единицу площади поперечного сечения.

Образование NS-границы выгодно.

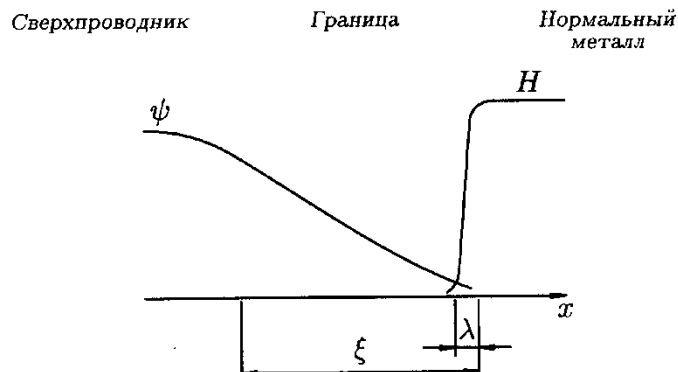
Сверхпроводники 1 и 2 рода

Граница: параметр Гинзбурга-Ландау

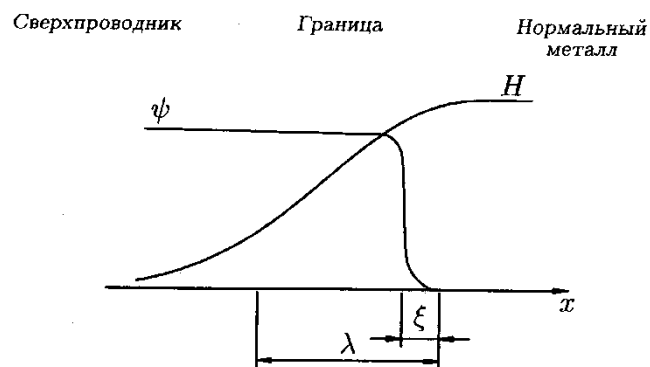
$$\kappa = \lambda/\xi, \kappa_{\text{крит}} = 1/\sqrt{2} \text{ (точный расчет)}$$

не зависит от температуры

СП I $\lambda < \xi$



СП II $\lambda > \xi$

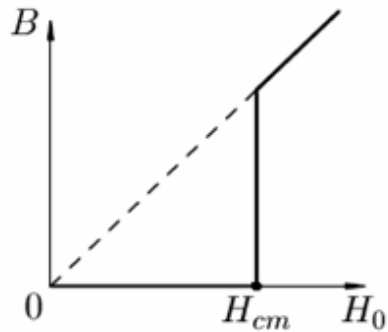


Каноническая интерпертация:

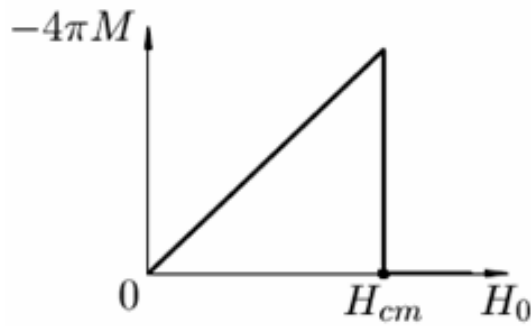
Шмидт гл. 3 стр. 85-87

Вихри Абрикосова

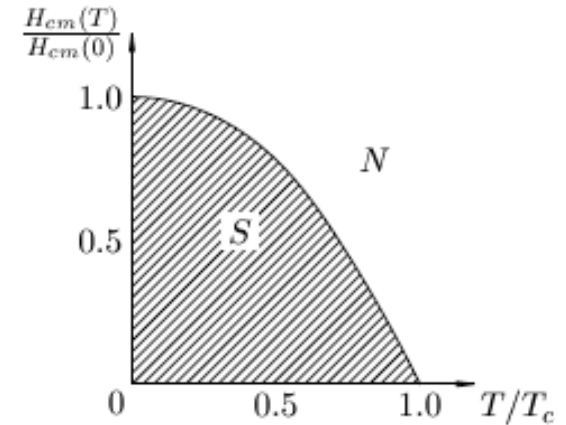
Фазовая диаграмма I и II рода



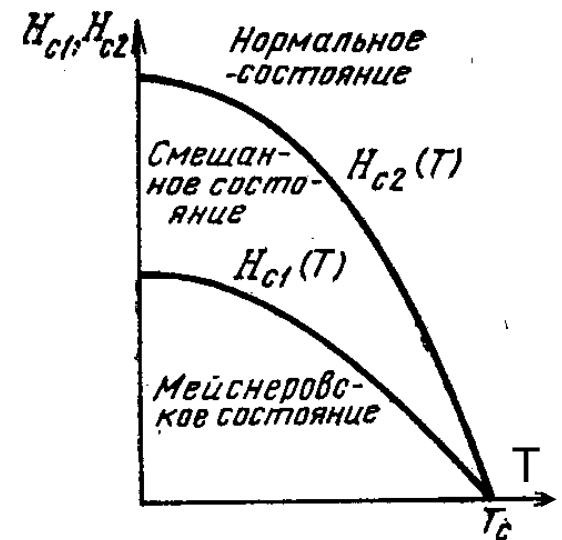
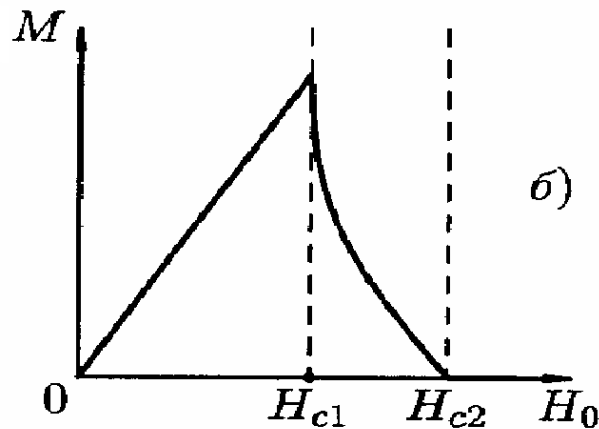
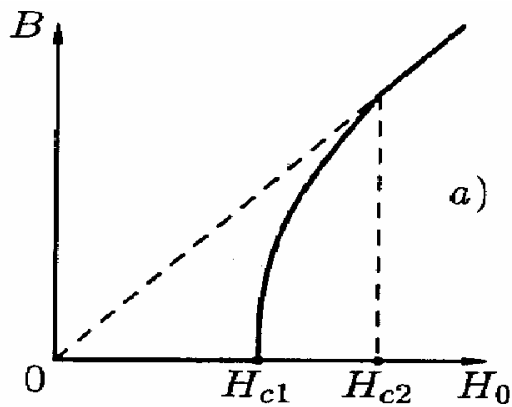
$$\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}$$



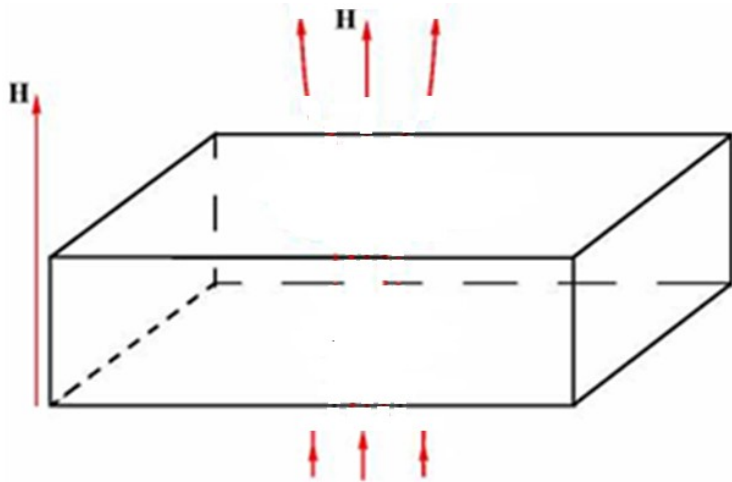
$$\mu_0 \mathbf{j}_s = \text{rot } \mathbf{M}$$



$$H_{cm}(T) = H_{cm}(0) [1 - (T/T_c)^2]$$



Как устроено смешанное состояние СП-2?



Задача Абрикосова

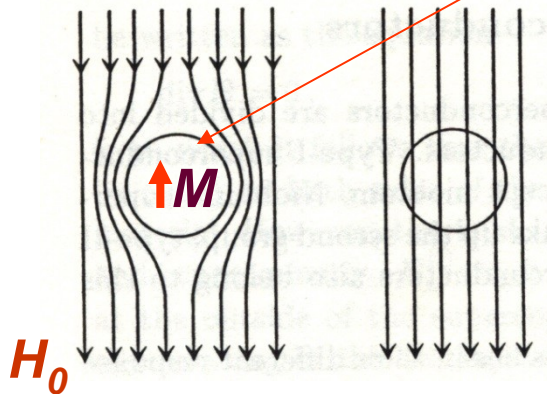
Как нормальное магнитное поле проникает в сверхпроводник?

???

Случай
идеального
проводника

*ЭДС самоиндукции “разгоняет”
незатухающие токи*

$$\varepsilon = d\Phi/dt = \mu_0 S dH_0/dt$$



Поле
включено
при $T < T_c$

Поле включено при
 $T > T_c$ и затем
температура
опущена ниже T_c

Магнитное поле
выталкивается ниже T_c
при любом порядке
изменения поля и
температуры

1. Магнитные силовые линии
всегда касательны к
поверхности сверхпроводника.

Магнитные силовые линии всегда
непрерывны и замкнуты.

Нормальная компонента магнитной
индукции непрерывна.

Внутри сверхпроводника $\mathbf{B} = 0$,
значит $\mathbf{B}_n = 0$.

Значит магнитные линии
параллельны поверхности.

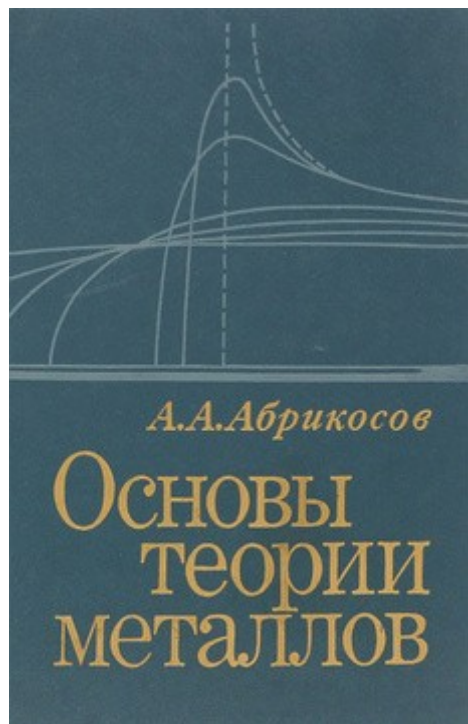
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МИКРОСТРУКТУР

Курин Владислав Викторович

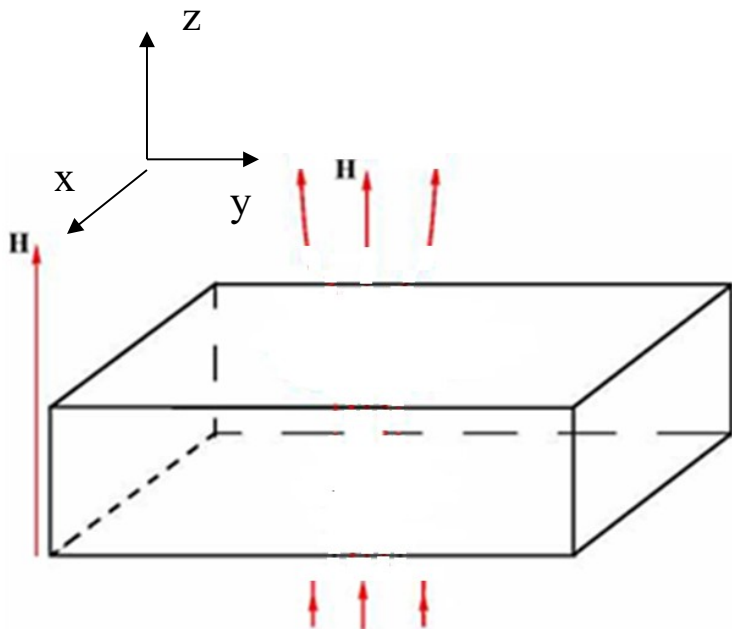
Физика сверхпроводников. Вводный курс.

Учебное пособие для студентов 4,5 курсов Радиофизического факультета (РФ
и Высшей школы общей и прикладной физики (ВШОПФ)
ННГУ им. Лобачевского

Новгород, 2004 г.



Задача Абрикосова



1. Сверхпроводник 2 рода в нормальном магнитном поле.

$$\xi \ll \lambda$$

2. Поле близко к критическому: $H \approx H_{c2}$

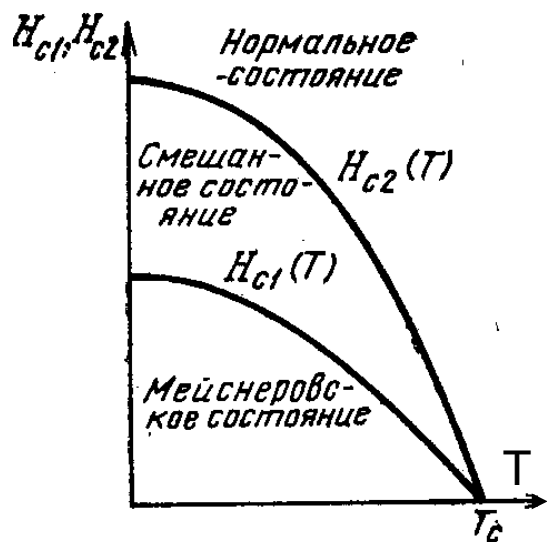
$$\alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 + (1/4m) (-i\hbar \nabla - 2e\mathbf{A})^2 \Psi = 0$$

$$(1/\mu_0) \text{rot rot } \mathbf{A} = -(i\hbar e/2m)(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - (2e^2/m) |\Psi|^2 \mathbf{A}$$

$$-\xi^2 \nabla^2 \psi + \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right)^2 \vec{A}^2 \psi - \psi = 0$$

$$\mathbf{A} = y H_z \mathbf{x}$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = 0$$



3D-квантовый осциллятор

$$\left[\kappa^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\kappa^{-1} k_y - Bx)^2 - \kappa^{-2} k_z^2 + 1 \right] \psi = 0$$

Квантовый осциллятор

$$\kappa^{-2} d^2 \Psi / dx^2 + \Psi (1 - A^2) = 0, \\ d^2 A / dx^2 = 0.$$

$$-d^2 \Psi / dx^2 + \kappa^2 H_0^2 x^2 \Psi = \kappa^2 \Psi.$$

$$-(\hbar^2/2m) d^2 \Psi / dx^2 + (k/2) x^2 \Psi = \epsilon \Psi$$

Одномерный квантовый осциллятор

Локализованное решение:

$$\psi_n = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

$$\xi \ll \lambda$$

$$\epsilon = \hbar \omega (n + 1/2), \quad \omega = (k/m)^{1/2}$$

Из аналогии: $E = \frac{\kappa}{2H}$

$$H_0 = \kappa / (2n + 1).$$

$$\kappa = \lambda / \xi$$

Нас интересует наибольшее поле, при котором возможно решение $\Psi \neq 0$. Оно соответствует $n=0$ и равно

$$H_{c2} = \kappa, \quad (18.13)$$

или, в обычных единицах,

$$H_{c2} = \kappa \sqrt{2} H_{cm}. \quad (18.14)$$

Эта величина согласуется с качественной оценкой (18.2), (18.3).

Отметим, что для $\kappa > 1/\sqrt{2}$ поле $H_{c2} > H_{cm}$.

СП-2

Общее решение уравнения Г-Л

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \psi_{k_y=nk}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\kappa x - \kappa^{-1}nk)^2 + inky \right\} \quad \psi_n = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

$$H \approx H_{c2}$$

или в размерных переменных

$$H_{c2} = 1B \cdot \kappa = \frac{\Phi_0}{2\pi \xi^2}.$$

Этому значению магнитного поля соответствует множество собственных функций,

$$\psi_{k_y}(x, y) = e^{-\xi^2/2 + ik_y y} = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\kappa x - \kappa^{-1}k_y)^2 + ik_y y \right\}, \quad (168)$$

не зависящих от z и различающихся значением k_y . Обратим внимание, что найденное значение $H_{c2} = \kappa$ превышает термодинамическое критическое поле $H_c = 1/\sqrt{2}$ как раз при $\kappa > 1/\sqrt{2}$, что совпадает с определением сверхпроводников второго рода, данного в предыдущем разделе. Можно сказать, что сверхпроводник второго рода, это такой сверхпроводник, у которого $H_{c2} > H_c$.

8.2 Смешанное состояние вблизи H_{c2} . Задача Абрикосова.

Построим теперь решение нелинейных уравнений при магнитных полях близких к H_{c2} , или, более точно, при $\kappa - H \ll \kappa$. Эта задача была решена А. Абрикосовым в 1953 году и опубликована в 1957.

При поле в точности равному критическому $H = \kappa$ уравнениям Гинзбурга-Ландау удовлетворяет любая линейная комбинация решений 168 с различными k_y . Сделаем предположение, что решение может быть представлено в виде суммы решений 168 по дискретному $k_{y,n} = nk$ и тем самым имеет вид

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \psi_{k_y=nk}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\kappa x - \kappa^{-1}nk)^2 + inky \right\}, \quad (169)$$

здесь k - некоторый параметр, определяющий масштаб решения, C_n - некоторые коэффициенты, которые пока будем считать произвольными. Магнитное поле и векторный потенциал при $H = \kappa$ определяются выражениями 159. Если внешнее магнитное поле будет немного ниже H_{c2} к магнитному полю и параметру порядка появятся малые поправки, которые будем искать методом последовательных приближений.

$$B_z = B = H + \delta B \quad (170)$$

$$A_x = \delta A_x \quad (171)$$

$$A_y = Hx + \delta A_y \quad (172)$$

$$\psi = \Psi + \delta \psi \quad (173)$$

Начнем с уравнения для векторного потенциала

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B} = -\frac{i}{2\kappa} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - |\psi|^2 \mathbf{A}, \quad (174)$$

которое запишем в проекциях,

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{i}{2\kappa} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}) + |\psi|^2 A_x, \quad (175)$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{i}{2\kappa} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y}) + |\psi|^2 A_y, \quad (176)$$

Удерживая в правой части члены нулевого порядка малости для поправок к векторному потенциалу получаем

$$\frac{\partial \delta B}{\partial y} = \frac{i}{2\kappa} (\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}), \quad (177)$$

$$-\frac{\partial \delta B}{\partial x} = \frac{i}{2\kappa} (\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial y}) + |\Psi|^2 Hx. \quad (178)$$

подставляя явный вид Ψ из 169 получаем, что

$$\frac{\partial \delta B}{\partial y} = \frac{i}{2\kappa} \sum_{m,n} C_n C_m^* k(m-n) \exp[ik(n-m) - \frac{1}{2}(\kappa x - kn\kappa^{-1})^2 - \frac{1}{2}(\kappa x - km\kappa^{-1})^2] \quad n = 0$$

$$-\frac{\partial \delta B}{\partial x} = \frac{1}{2\kappa} \sum_{m,n} C_n C_m^* [k(m+n) + 2\kappa^2 x] \exp[ik(n-m) - \frac{1}{2}(\kappa x - kn\kappa^{-1})^2 - \frac{1}{2}(\kappa x - km\kappa^{-1})^2].$$

откуда следует явное выражение для магнитного поля

$$B = H - \frac{|\Psi|^2}{2\kappa} = \kappa + (H - \kappa) - \frac{|\Psi|^2}{2\kappa}. \quad (179)$$

В последнем выражении последние два члена представляют собой малую поправку, пропорциональную отклонению поля от H_{c2} . Поскольку

$$B = B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

то выбирая калибровку $A_x = 0$ для $A = A_y$ из 179 получим

$$A = Hx - \int \frac{|\Psi|^2}{2\kappa} dx. \quad (180)$$

Перейдем теперь к изучению уравнения для параметра порядка. Будем искать решение уравнения в виде суммы невозмущенного решения и поправки

$$\psi = \Psi + \sum_n e^{ikny} \psi_n^{(1)} = \sum_n e^{ikny} (\psi_n(x) + \psi_n^{(1)}(x)), \quad \text{где } \psi_n = \exp[-\frac{1}{2}(\kappa x - \kappa^{-1}nk)^2] \quad (181)$$

и подставим это выражение в уравнение для параметра порядка 155

$$(kn\kappa^{-1} - \kappa x)^2 \psi_n^{(1)} - \kappa^{-2} \frac{\partial^2 \psi_n^{(1)}}{\partial x^2} - \psi_n^{(1)} = 2x(\kappa - H)(\kappa x - \kappa^{-1}nk) C_n \psi_n + \sum_{m,p} C_p C_m^* C_{n-p+m} \quad (182)$$

$$\left\{ [x - \kappa^{-2}k(n - \frac{p-m}{2})] \times \psi_{n-p+m}(x) \int^x \psi_p(x') \psi_m(x') dx' - \psi_{n-p+m}(x) \psi_p(x) \psi_m(x) \right\} \quad (183)$$

Для разрешимости этой неоднородной системы уравнений, по теореме Фредгольма необходимо, чтобы правая часть была ортогональна решению однородной задачи. Нетрудно видеть, что решение однородной задачи есть ψ_n . Домножая правую часть на ψ_n и интегрируя по x получим

$$2^{-1/2} [(2\kappa^2)^{-1} - 1] \sum_{p,m} C_p C_m^* C_{n-p+m} \exp \left\{ -\frac{k^2}{2\kappa^2} [(p-n)^2 + (p-m)^2] \right\} + C_n (\kappa - H) / \kappa = 0 \quad (184)$$

Умножим это уравнение на C_n^* и просуммируем по n . Ответ представляется в виде

$$\frac{\kappa - H}{\kappa} |\Psi|^2 + [(2\kappa^2)^{-1} - 1] |\Psi|^4 = 0 \quad (185)$$

где крышкой над буквой обозначено усреднение по пространству. Вычислим среднее поле \overline{B}

$$\overline{B} = H - \frac{|\Psi|^2}{2\kappa} = H - \frac{1}{2\kappa^2} \frac{|\Psi|^2}{|\Psi|^4} \frac{|\Psi|^4}{|\Psi|^2} = H - \frac{1}{\beta_A} \frac{\kappa - H}{2\kappa^2 - 1} \quad (186)$$

здесь мы ввели параметр Абрикосова

$$\beta_A = \frac{|\Psi|^4}{|\Psi|^2},$$

полезный тем, что как следует из определения 169 для Ψ , это есть величина, не зависящая от H и уравнение 186 явно определяет зависимость $B(H)$ и тем самым амплитуду параметра порядка в окрестности верхнего критического поля. Конечно, величина β_A должна быть известна. Точно также через величину β_A можно выразить и свободную энергию 104 (на единицу длины)

$$F = \int B^2 - \frac{|\psi|^4}{2} dx dy = \overline{B}^2 - \frac{(\kappa - \overline{B})}{1 + \beta_A(2\kappa^2 - 1)}, \quad (187)$$

которая является термодинамическим потенциалом относительно \overline{B} . Из этого выражения следует, что минимум свободной энергии достигается при минимальном β_A . Условие минимальности позволяет в принципе найти коэффициенты C_n и постоянную k . Этот вопрос не простой, но к настоящему времени выясненный. Я только приведу результаты и расскажу как они были получены.

В своей статье А. Абрикосов написал, что нет никаких оснований считать коэффициенты C_n разными и поэтому положил их все равными $C_n = 1$, так что распределение параметра порядка оказалось следующим

$$\Psi^\square = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\kappa x - \kappa^{-1}nk)^2 + ink y \right\} \quad \beta_A = \frac{|\Psi|^4}{|\Psi|^2},$$

Вычисляя β_A

$$\beta_{A\Delta} = \frac{k}{\kappa\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-k^2 n^2 / 2\kappa^2) \right]^2$$

он нашел что минимальное значение β_A достигается при $k = \sqrt{2\pi}\kappa$ и равно $\beta_A^\square = 1.18$ Функция 188 выражается через Тета функцию Якоби θ_3 , определяемую как

$$\theta_3(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x n^2 + 2\pi n y). \quad (189)$$

Сама функция 188 записывается как

$$\Psi^\square = \exp(-\kappa^2 x^2 / 2) \theta_3[1, (2\pi)^{1/2} i \kappa(x + iy)] \quad (190)$$

Модуль этой функции обладает симметрией квадратной решетки. В точках

$$x = \frac{\sqrt{2\pi}}{\kappa} \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad y = \frac{\sqrt{2\pi}}{\kappa} \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

функция ψ обращается в ноль по линейному закону, как

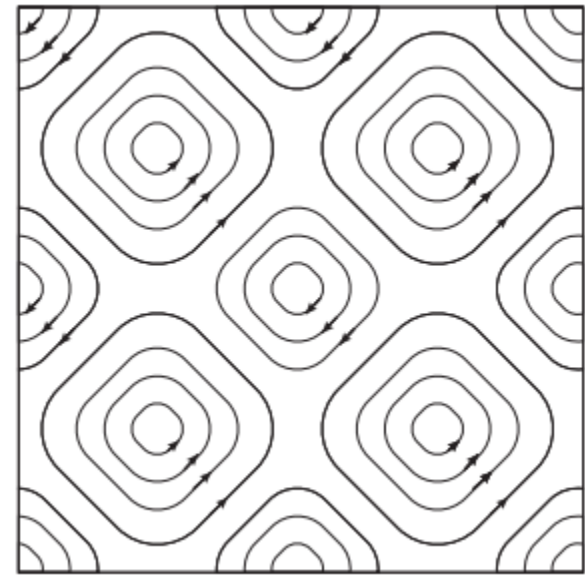
$$\Psi \sim x + iy = z.$$

Из уравнений 177 следует, что магнитное поле B_z в двумерной задаче является функцией тока

$$\mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{z}_0 B = -[\mathbf{z}_0 \times \nabla B],$$

а поскольку в силу 179 магнитное поле линейно связано с $|\Psi|^2$ то линии уровня параметра порядка (и магнитного поля) одновременно и являются линиями тока. Отсюда следует, что ток циркулирует вокруг нулей параметра порядка, образуя квадратную решетку вихрей. Эти вихри в настоящее время называются вихрями Абрикосова. Квадратная вихревая решетка показана на Рис.33 Однако детальный анализ, выполненный позже, показал, что предположение Абрикосова о равенстве коэффициентов C_n было ошибочным, и квадратная вихревая решетка не доставляет абсолютного минимума свободной энергии 187 и функционалу Абрикосова β_A . А минимально возможное значение параметра Абрикосова есть

$$\beta_A^\Delta = 1.16$$



Модуль параметра порядка обладает симметрией *квадратной* решетки.

Линии параметра порядка являются линиями тока.

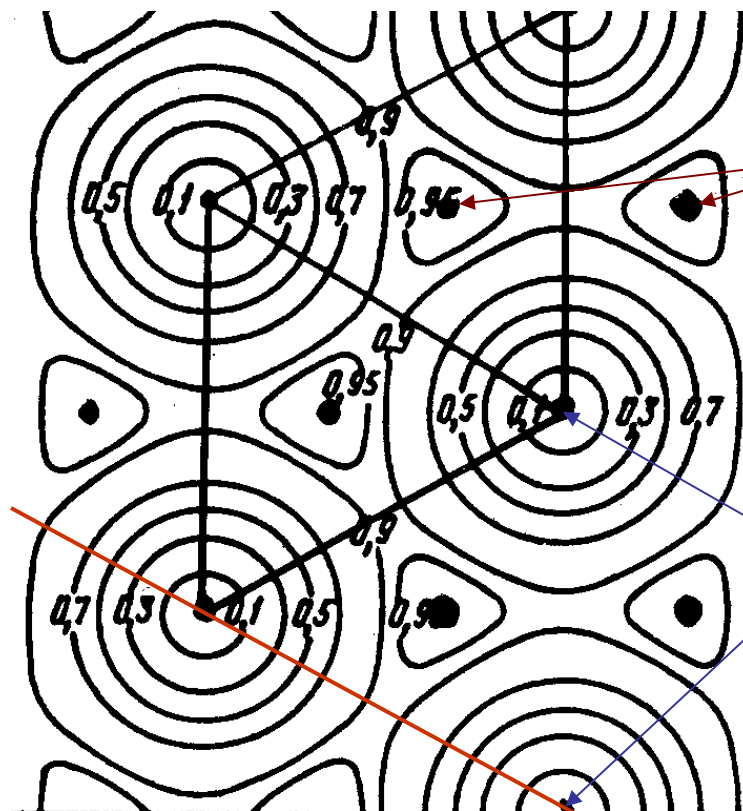
Ток циркулирует вокруг нулей параметра порядка.
Вихри Абрикосова!

Одинаковые коэффициенты C_n не доставляют *минимума свободной энергии*.

$$C_n = \exp \left[\frac{i\pi n(n-1)}{2} \right]$$

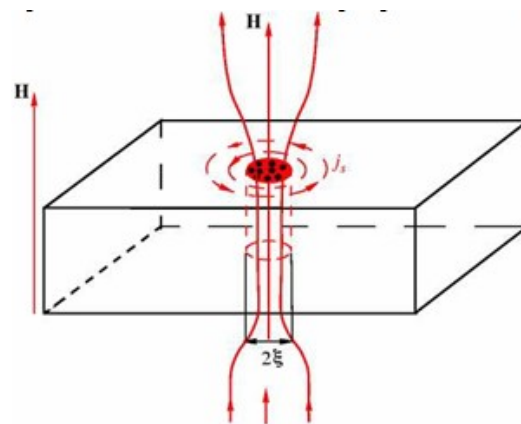
Решетка – *треугольная*!

Цепочка вихрей Абрикосова

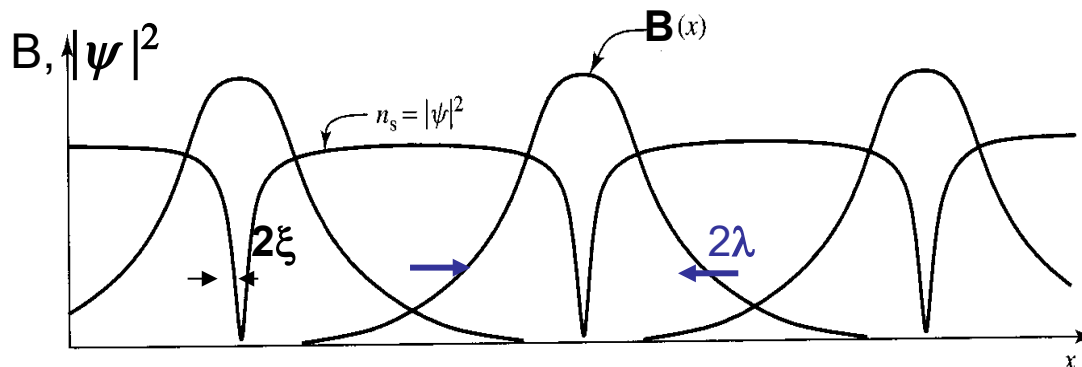
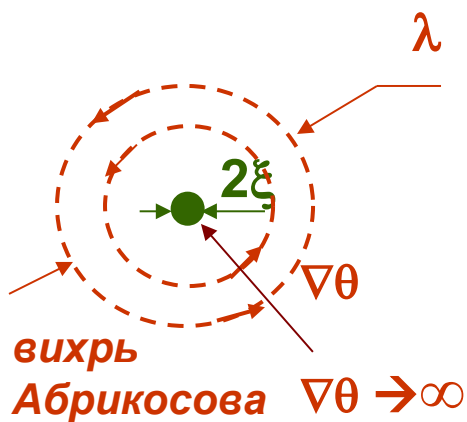


$$|\psi| \approx 1$$

$$|\psi| \approx 0$$



$$\xi \ll \lambda$$



Перерыв

Магнитное поле абрикосовского вихря

Изучим распределение поля в “уединенном” вихре для случая $\lambda \gg \xi$ ($\kappa = \lambda/\xi \gg 1$), т.е. всюду, где текут сверхпроводящие токи, создающие поле вихря

Преобразуем второе уравнение Г-Л:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = (|\psi|^2/\lambda^2) [(\Phi_0/2\pi) \nabla\theta - \mathbf{A}]$$

$\psi(r) = |\psi|(r) \exp(i\theta(r))$ – комплексная величина, поскольку абрикосовский вихрь – двусвязный объект

$|\psi| = 1$, кроме пренебрежимо малой области центра вихря модуль, где $|\psi| < 1$

$$\text{rot } \mathbf{B} = (1/\lambda^2) [(\Phi_0/2\pi) \nabla\theta - \mathbf{A}] \leftarrow \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

Взяв rot от обеих частей, имеем:

$$\lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} = (\Phi_0/2\pi) \text{rot } \nabla\theta$$

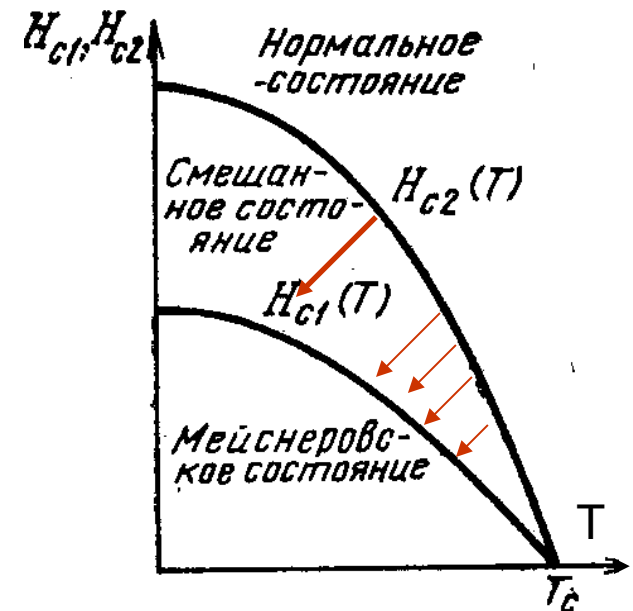
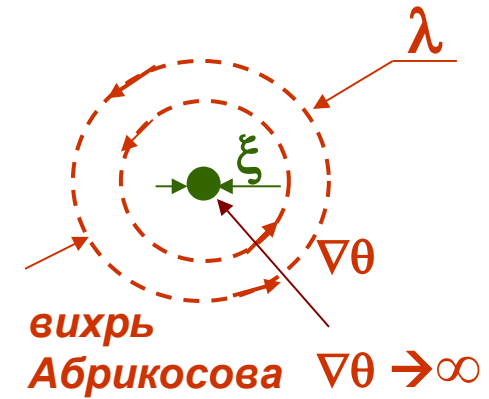
Всюду, кроме центра вихря $\text{rot } \nabla\theta = 0$

(работает ур. Лондонов).

Но центр вихря – особая точка, где $\nabla\theta \rightarrow \infty$

$\nabla\theta \sim 2\pi / 2\pi r = 1/r \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$ и $\text{rot } \nabla\theta \rightarrow \infty$

Это определение δ -функции, вопрос только в коэффициенте.

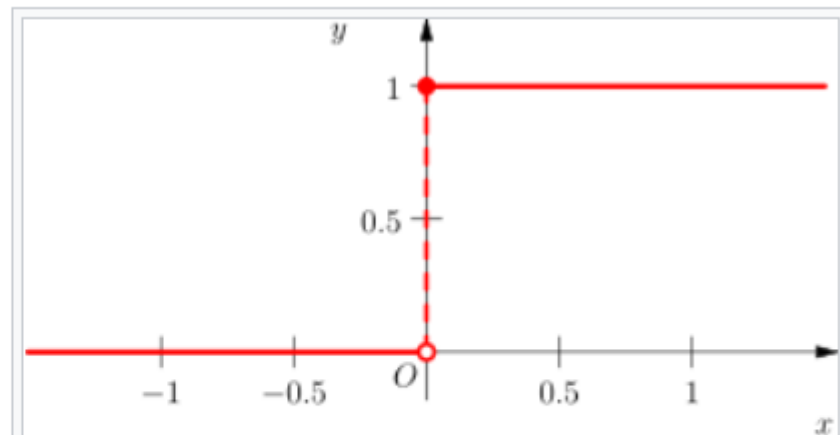


Функция Хевисайда
единичная ступенчатая
функция

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Функция Хевисайда является
первообразной функцией для
дельта-функции Дирака, $\theta' = \delta$,

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt.$$



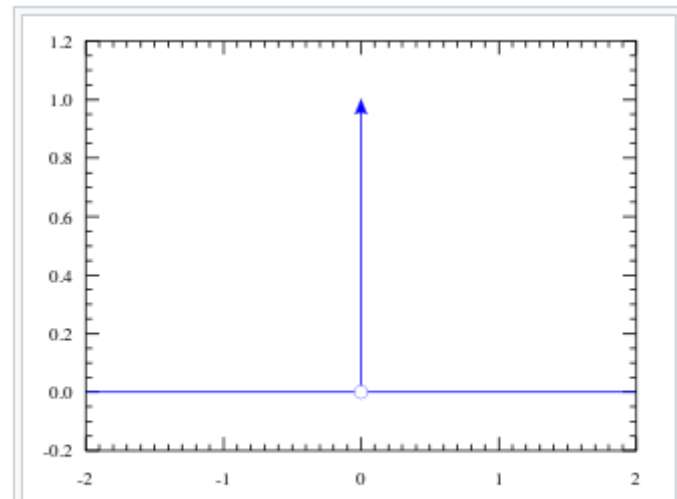
Единичная функция Хевисайда. При $x = 0$
доопределена значением 1.

Дельта-функция (функция Дирака)

- $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0; \end{cases}$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$



Схематический график одномерной дельта-
функции.

Поле вихря Абрикосова

$$\lambda^2 \text{rot rot } B + B = (\Phi_0 / 2\pi) \mathbf{e}_v \delta(r)$$

$$\lambda^2 \text{rot rot } B + B = (\Phi_0 / 2\pi) \text{rot } \nabla \theta$$

(Используем определение δ -функции: $\iint \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_v dS = 1$)

Перейдем к интегральной форме записи: вычислим интеграл по замкнутой поверхности в окрестности центра вихря:

$$\oiint \text{rot } \nabla \theta d\vec{S} = \oint \nabla \theta d\vec{l} = 2\pi n$$

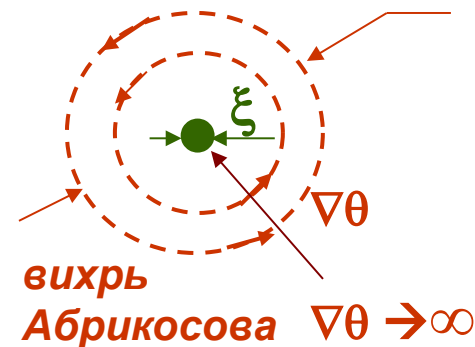
Тогда ур(5.1): $B + \lambda^2 \text{rot rot } B = \Phi_0 \delta(r) \mathbf{e}_v$, грани. условие: $B(\infty) = 0$. (5.2)

Решение:

$$B = [\Phi_0 / (2\pi\lambda^2)] K_0(r / \lambda)$$

$K_0(z)$ - функция Макдональда или функция Ханкеля от мнимого аргумента.

$$K_0(z) = \begin{cases} \ln(1/z) = \ln(\lambda/r) @ z \ll 1 \quad (r \ll \lambda); \\ 0 \end{cases}$$



$$\mathbf{e}_v \iint \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_v dS = \mathbf{e}_v$$

$$\mathbf{e}_v = 2\pi n$$

“Обрежем” на ξ ($r \geq \xi$):
 $\ln(\lambda/r) \leq \ln(\lambda/\xi) = \ln(\kappa)$

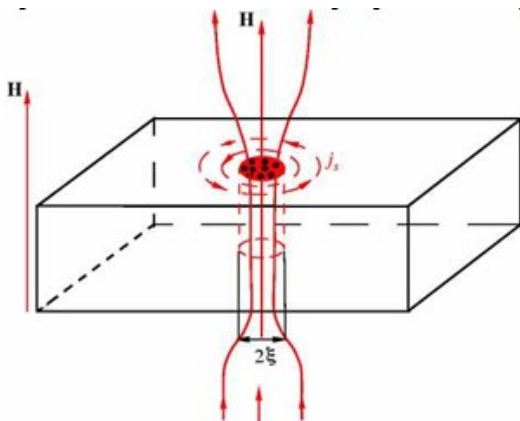
Параметр Гинзбурга

$$\kappa = \lambda / \xi$$

$$B(0) = [\Phi_0 / (2\pi\lambda^2)] \ln \kappa$$

$$B(0) = [\Phi_0 / (2\pi\lambda^2)] (\ln \kappa - 0.28)$$

Поток вихря Абрикосова



$$\lambda^2 \text{rot rot } \vec{B} + \vec{B} = (\Phi_0 / 2\pi) \vec{E} \delta(\vec{r}) = n \Phi_0 \delta(\vec{r}) / 1 \text{ м}^2$$

$$\vec{E} = 2\pi n$$

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = \Phi$$

$$n \Phi_0 \oint \delta(\vec{r}) = n \Phi_0$$

$$\oint \text{rot rot } \vec{B} d\vec{S} = \oint \text{rot } \vec{B} d\vec{l} = \oint j_s d\vec{l} = 0$$

$$\Phi = n \Phi_0$$

~~Градиентная
инвариантность:~~

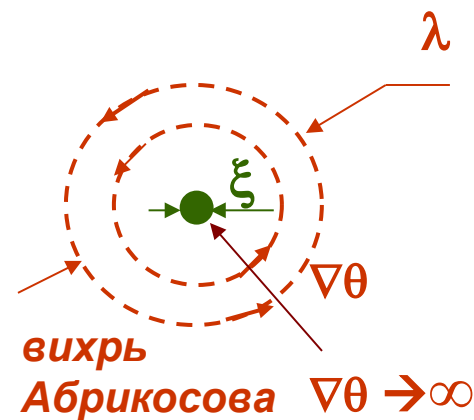
$$\theta \rightarrow \theta' + (2\pi/\Phi_0) \varphi$$

$$\vec{A} = \vec{A}' + \nabla \varphi,$$

$$\psi = \psi' \exp \left[i \frac{2\pi}{\Phi_0} \varphi(\vec{r}) \right].$$

$$\Phi(1) = \Phi_0$$

Сверхпроводник с вихрем –
неодносвязная среда.



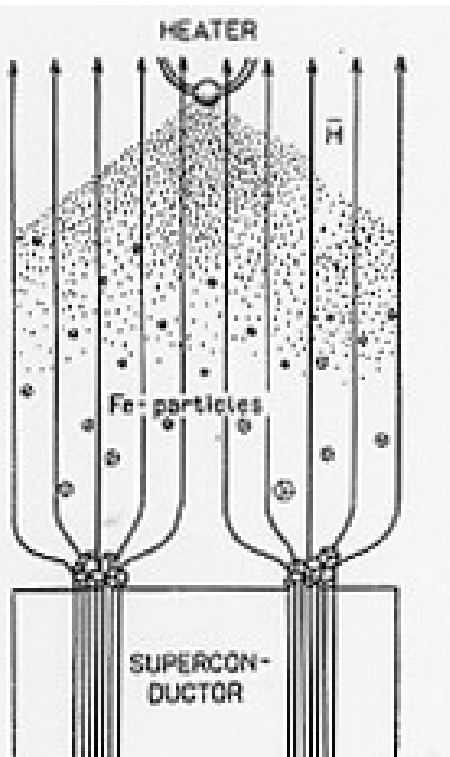
1. Вихрь – топологический дефект сверхпроводящей области.

2. Неодносвязный сверхпроводник: не можем считать $\nabla\theta = 0$.

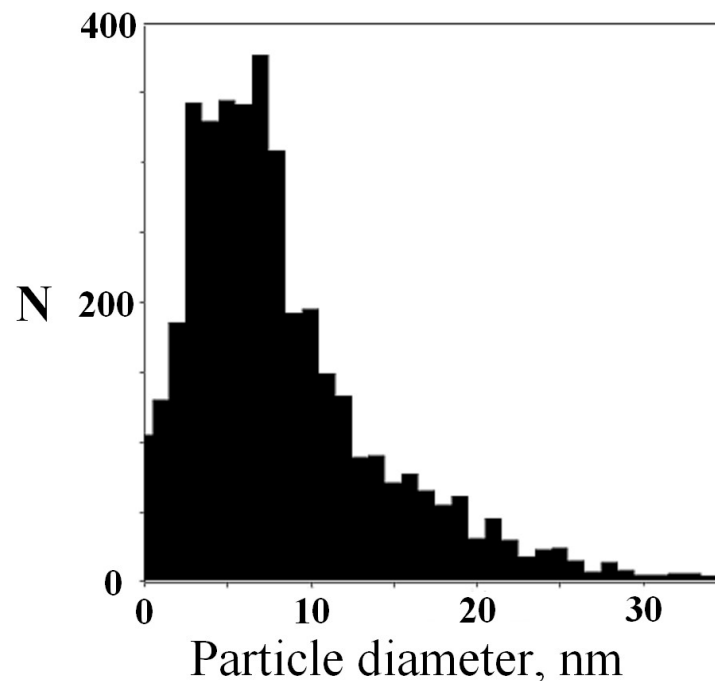
3. Неоднородное + неизотропное пространство.

Можно ли увидеть вихри?

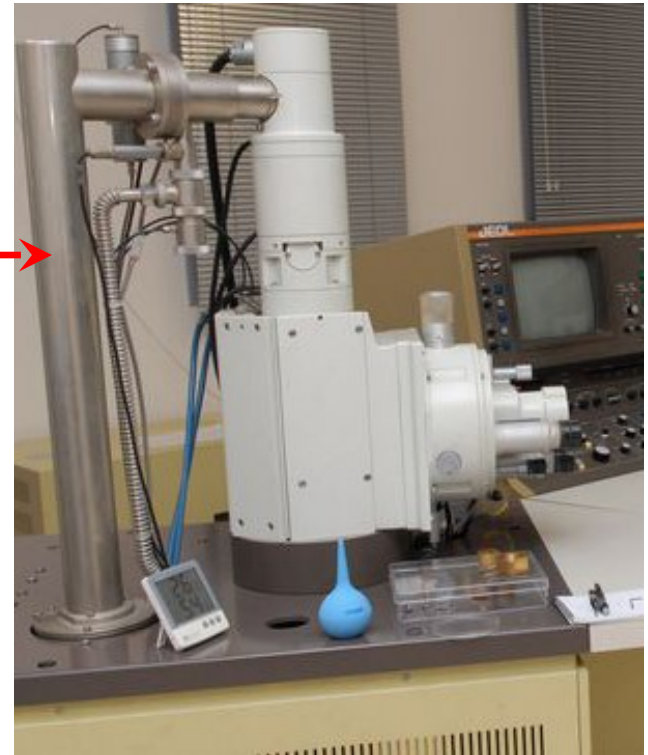
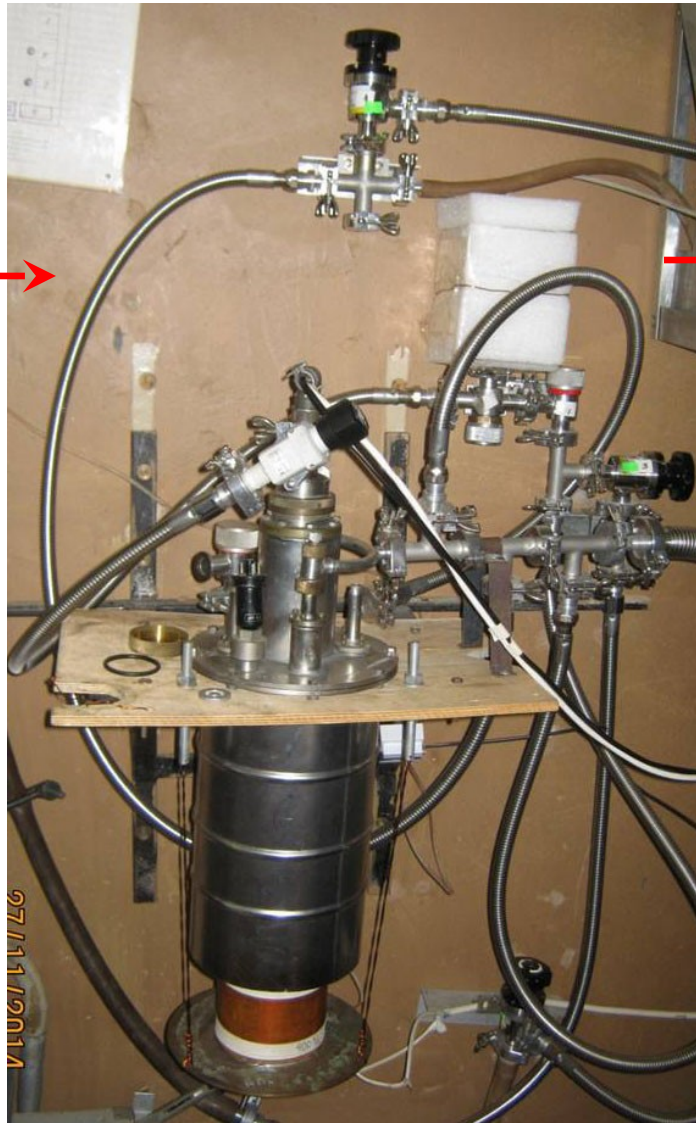
Взаимодействие магнитного момента частиц с **градиентом** внешнего поля приводит к тому, что они движутся в среднем по силовым линиям магнитного поля и в результате попадают на поверхность образца в основном **в местах проникновения поля** в образец. В дальнейшем частицы **удерживаются на поверхности** благодаря ван-дер-Ваальсовскому взаимодействию.



Распределение дисперсных частиц железа по размерам. Высокое разрешение метода (**< 100nm**) обеспечивается малым размером (**~10nm**) частиц магнитного порошка, приготавливаемого непосредственно в низкотемпературном эксперименте путем испарения железа, в **атмосфере буферного газа** (гелия) при низком давлении $\sim 10^{-2}$ Торр. Для избежания перегрева **используется экран**.



Применение метода декорирования в ИФТТ РАН (Лаборатория Сверхпроводимости, д.ф.м.н. проф. Винников Л.Я.)



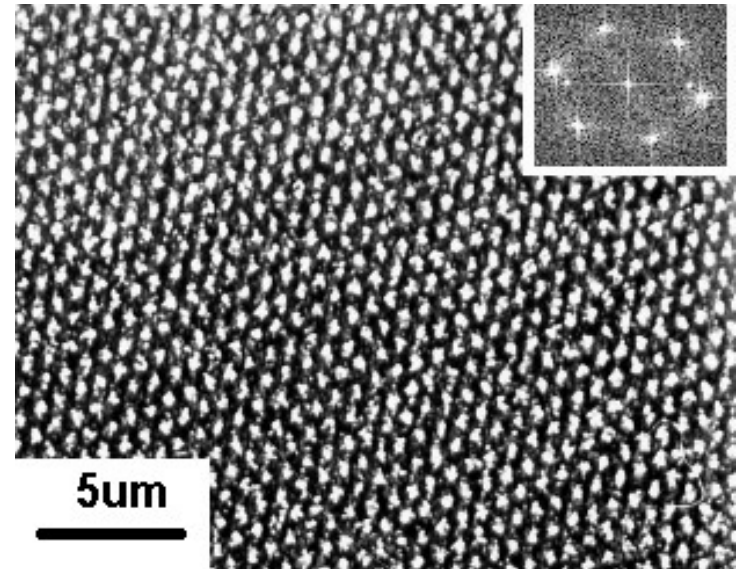
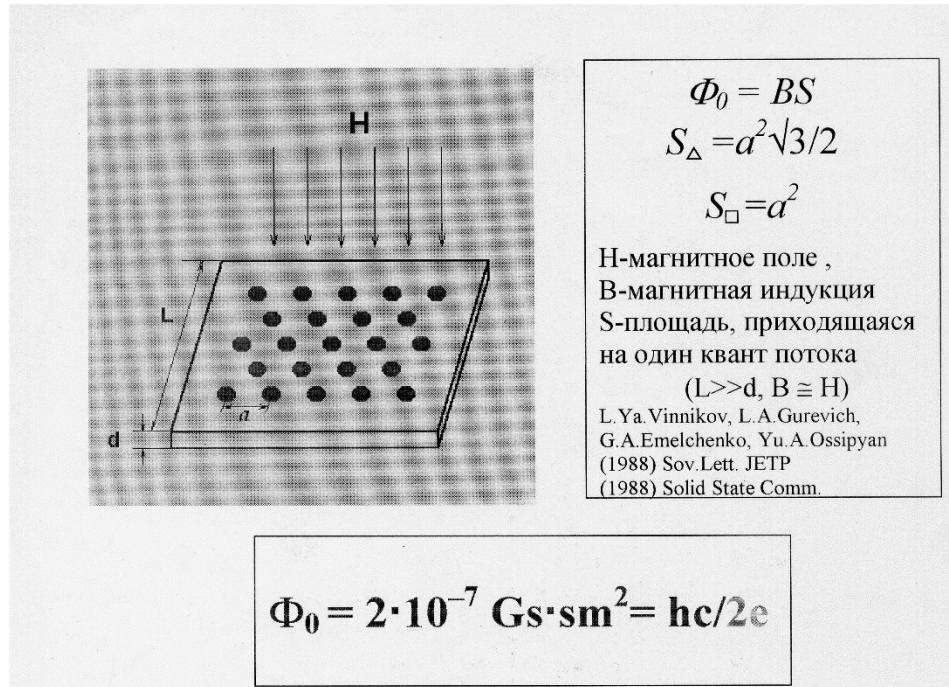
Лучшее
соотношение
вихрей/руб!!!

*В отличие от малоуглового
рассеяния нейтронов.*

Изучение сверхпроводников методом декорирования

Фурье образ

$$F(q_x, q_y) = \int f(\mathbf{r}) \exp(-\mathbf{q}\mathbf{r}), \mathbf{r} = (x, y), \mathbf{q} = (q_x, q_y)$$



- Измерение глубины проникновения магнитного поля.

- Исследование анизотропии.

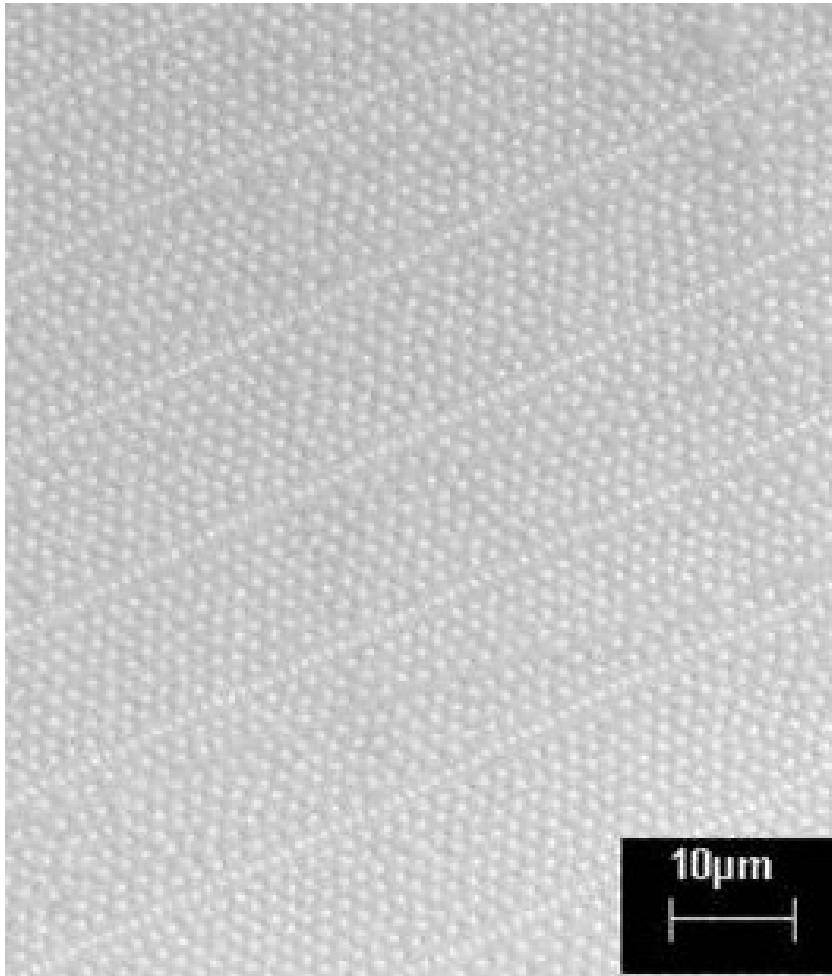
- Исследование тиннинга.

Л.Л.Я.Винников, Д.Э.Бойнагров, В.Н.Зверев,
И.С.Вещунов, J. Karpinski

Анизотропия вихревой структуры и
электросопротивления в базисной плоскости
монокристаллов $\text{YBa}_2\text{Cu}_4\text{O}_8$

ЖЭТФ, т.136, 331-3376 (2009)

Визуализация магнитного потока методом декорирования.



Вихревая решетка в BSCCO,
наклонное магнитное поле.



Вихревая решетка в BSCCO,
H=10 Э, **оптический микроскоп.**

Наблюдение вихревой решетки в органических и высокотемпературных сверхпроводниках.

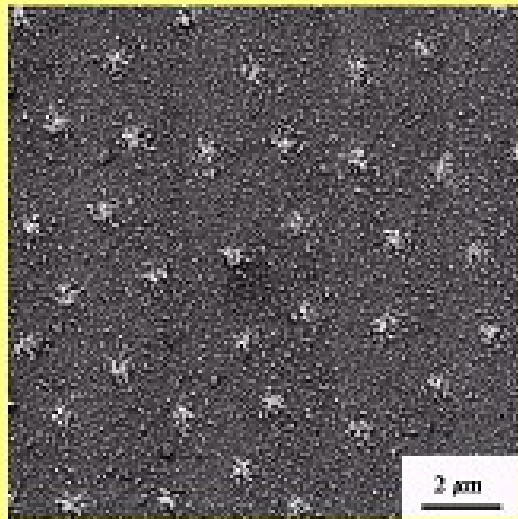


FIG. 1. SEM imaging of the vortices at small magnetic field in MgB_2 single crystal ($B=4.4$ G)

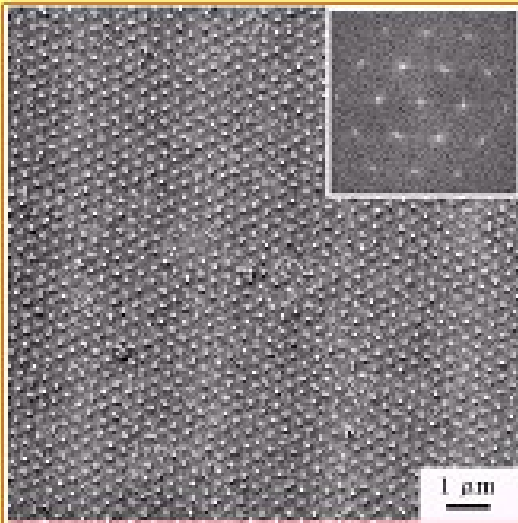
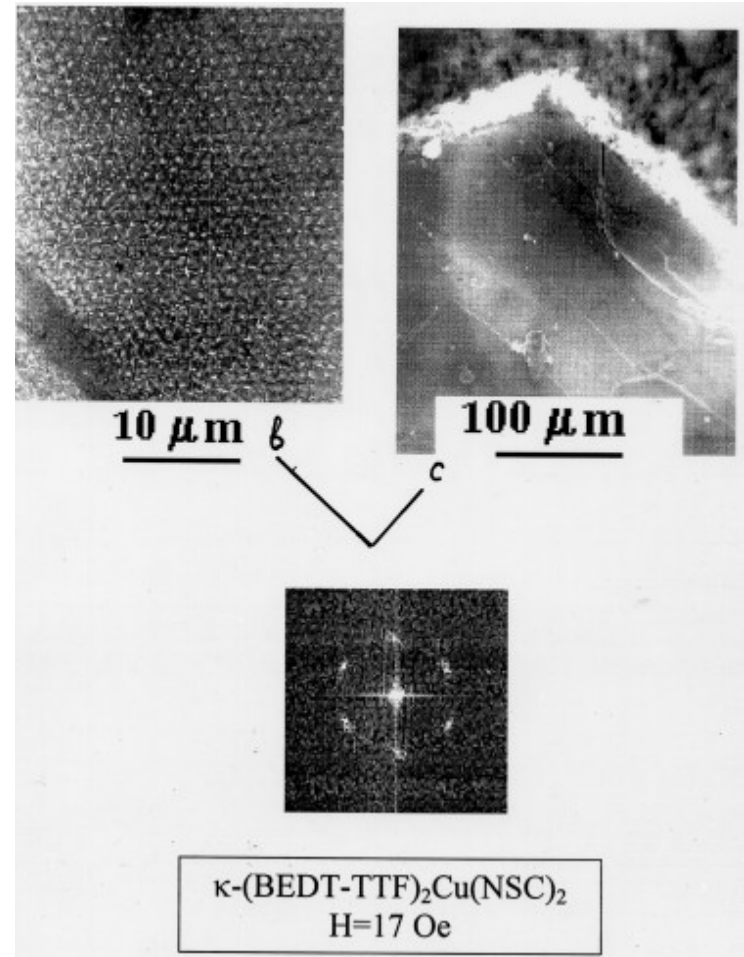


FIG. 2. Triangular vortex lattice at magnetic field 200 Oe in MgB_2 single crystal. Inset: FFT pattern in an arbitrary scale

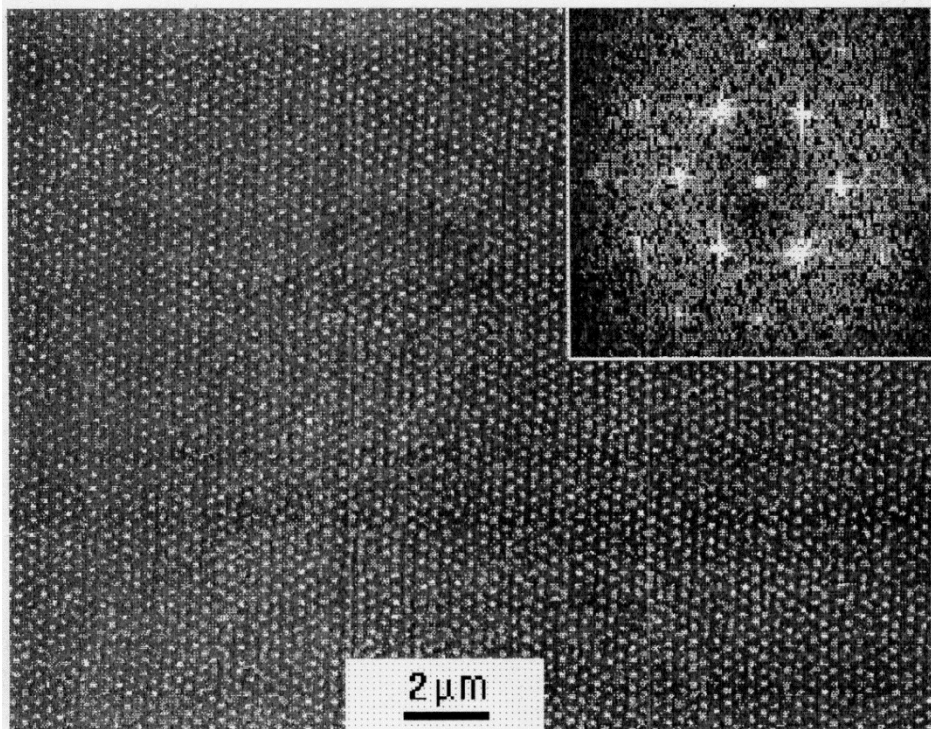
L.Ya.Vinnikov, J.Karpinski, S.M.Kazakov, J.Jun, J.Anderegg, S.L.Budc, P.C.Canfield,

Vortex structure in MgB_2 single crystals observed by the Bitter decoration technique,

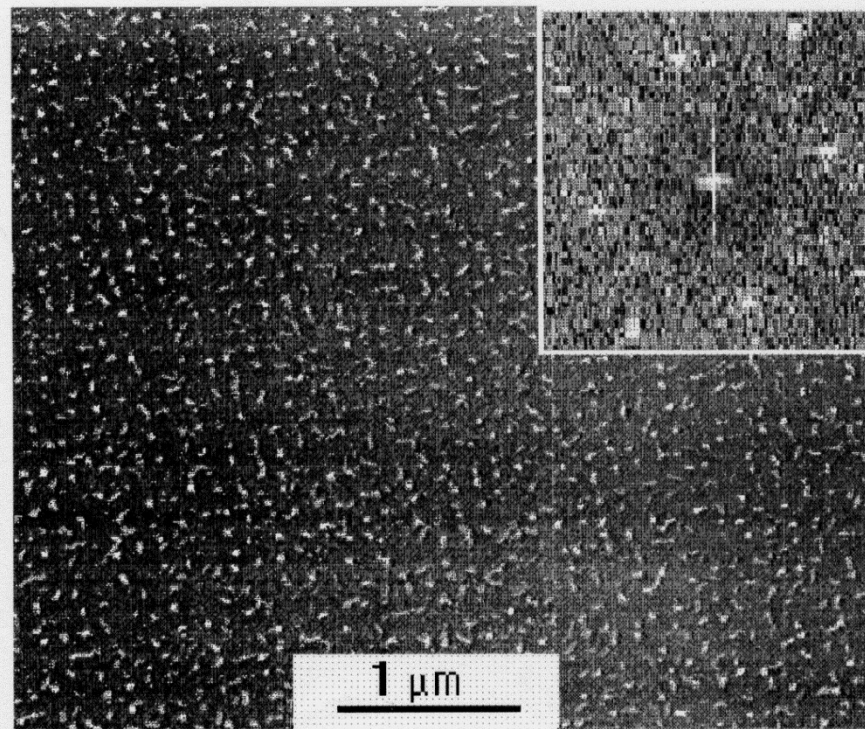
Phys. Rev. B 67, 092512 (2003)



L.Ya.Vinnikov, T.L.Barkov, M.V.Kartsovnik, N.D.Kushch, Direct observation of vortices in the organic superconductor $\kappa\text{-(BEDT-TTF)}_2\text{Cu(NCS)}_2$, Phys. Rev. B 61, 14358 (2000)

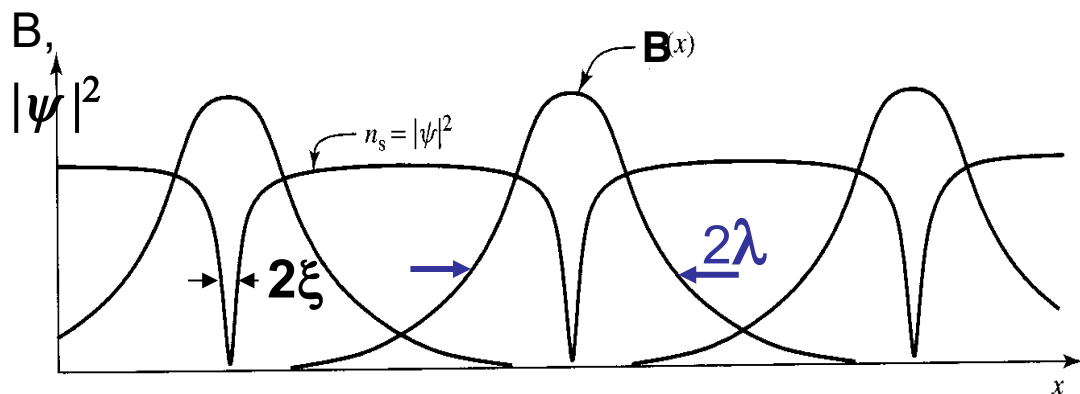


B=235 Gs



LuNi₂B₂C

B=1340 Gs

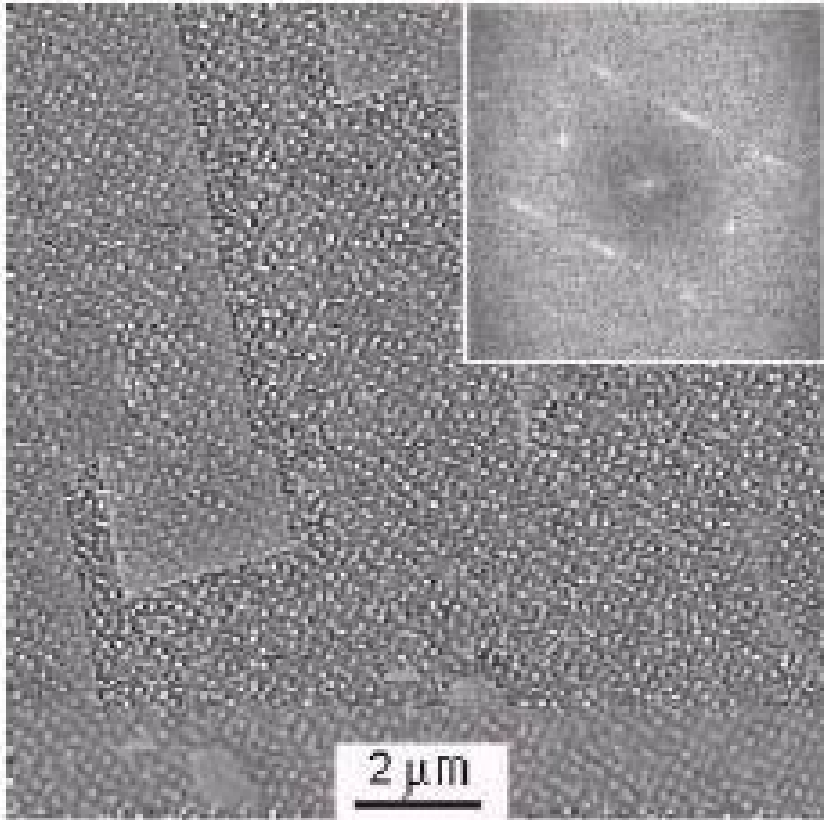
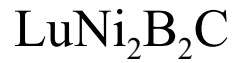


Фурье образ

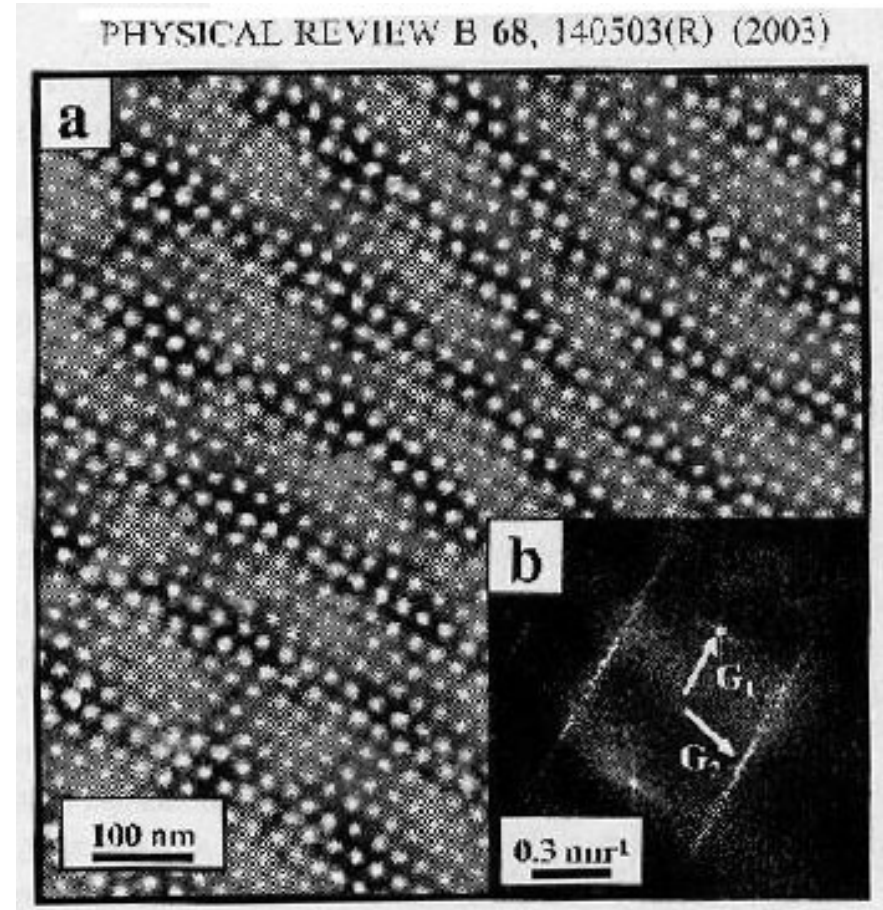
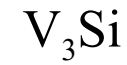
$$F(q_x, q_y) = \int f(\mathbf{r}) \exp(-\mathbf{q}\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{q} = (q_x, q_y)$$

Еще два примера



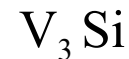
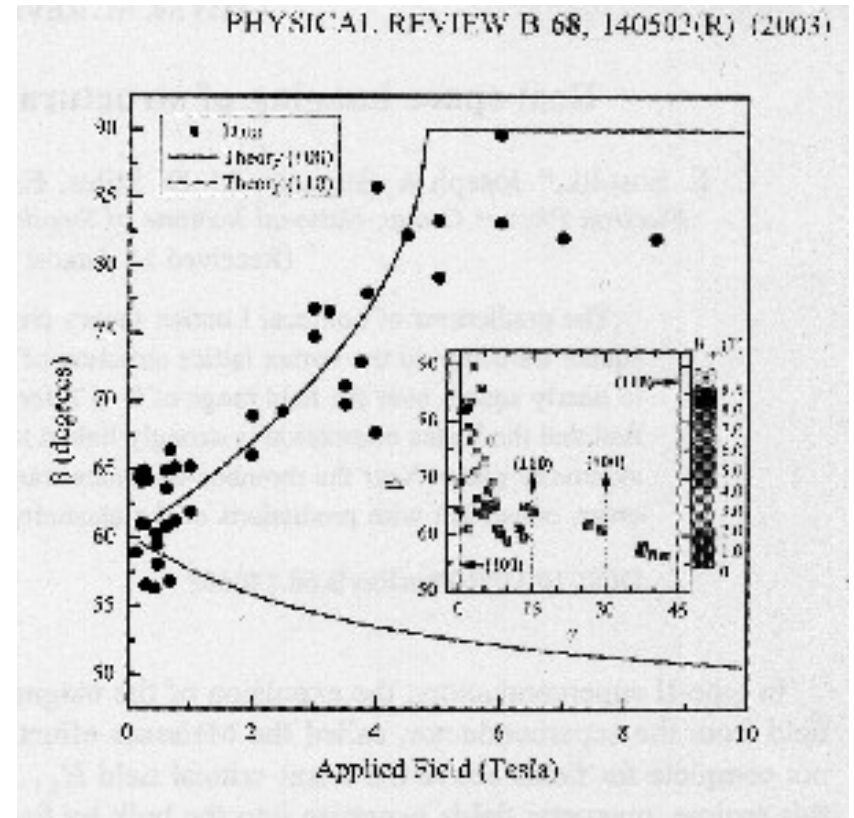
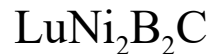
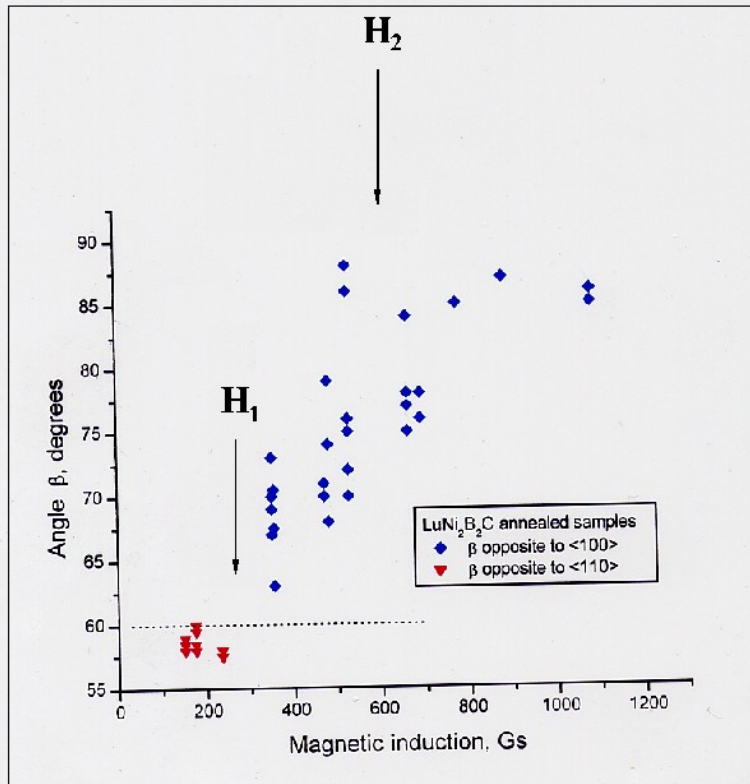
$B = 525\ \text{G}$



$B = 3.25\ \text{T}$

Rhombic to square transition

RHOMBIC -TO-SQUARE VORTEX LATTICE TRANSITION

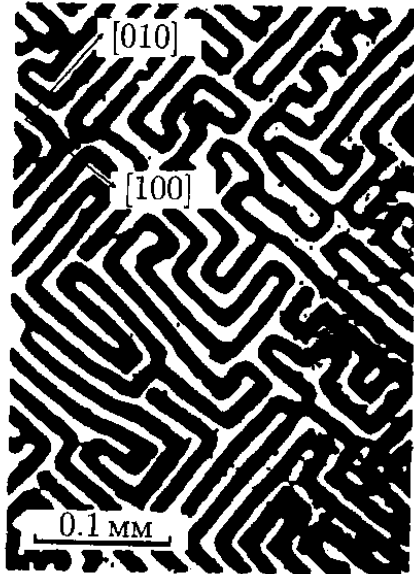


L.Ya.Vinnikov, T.L.Barkov, P.C.Canfield, S.L. Bud'ko, J.E.Ostenson, F.D.Laabs and V.G.Kogan

Low-field reorientation transition and anisotropic orientational order of vortex lattices in $\text{LuNiBC}(1221)$

Phys. Rev. B 64, Rapid Comm. 220508(R) , (2001)

Наблюдение промежуточного состояния в сверхпроводниках 1 рода

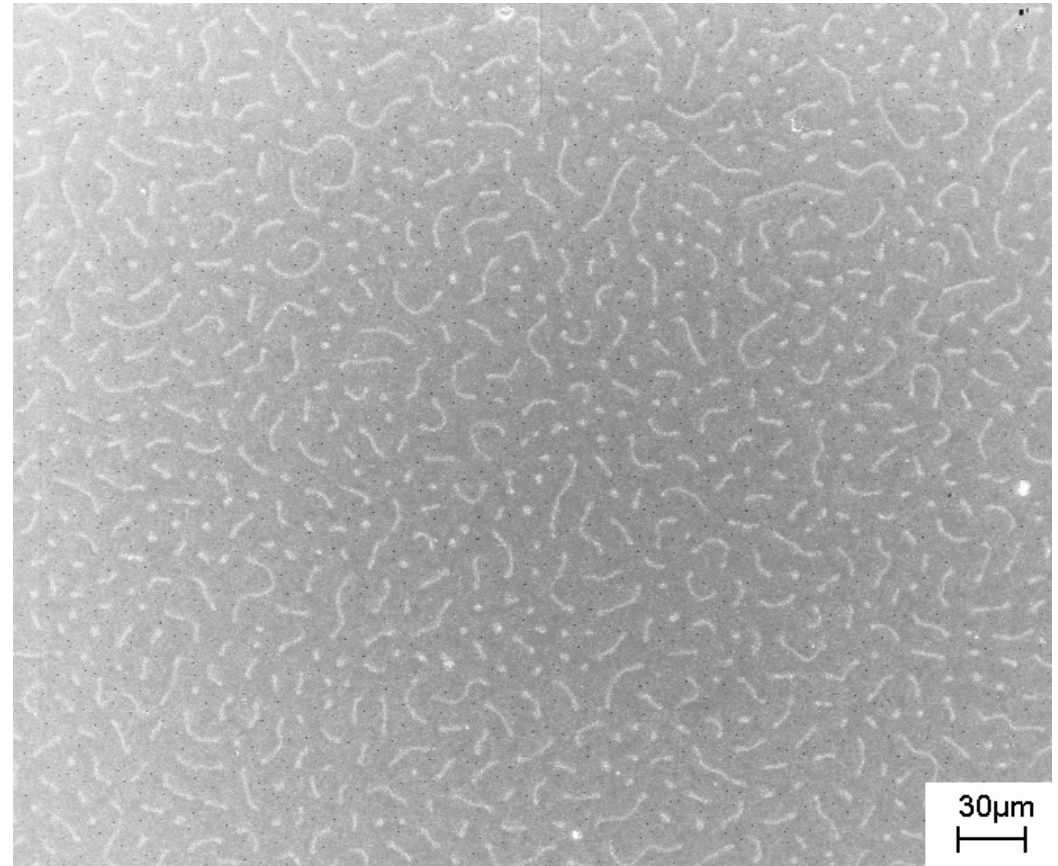


*Промежуточное состояние в тонком
монокристалле олова (Биттеровский метод)*

Bodmer, Essman, Traueble, 1972

$$\kappa = \lambda / \xi < 1, \quad \sigma_{ns} > 0$$

Нормальные домены
(белые области) в
плёнке индия с
 $T_c = 2.2\text{K}$ в магнитном
поле

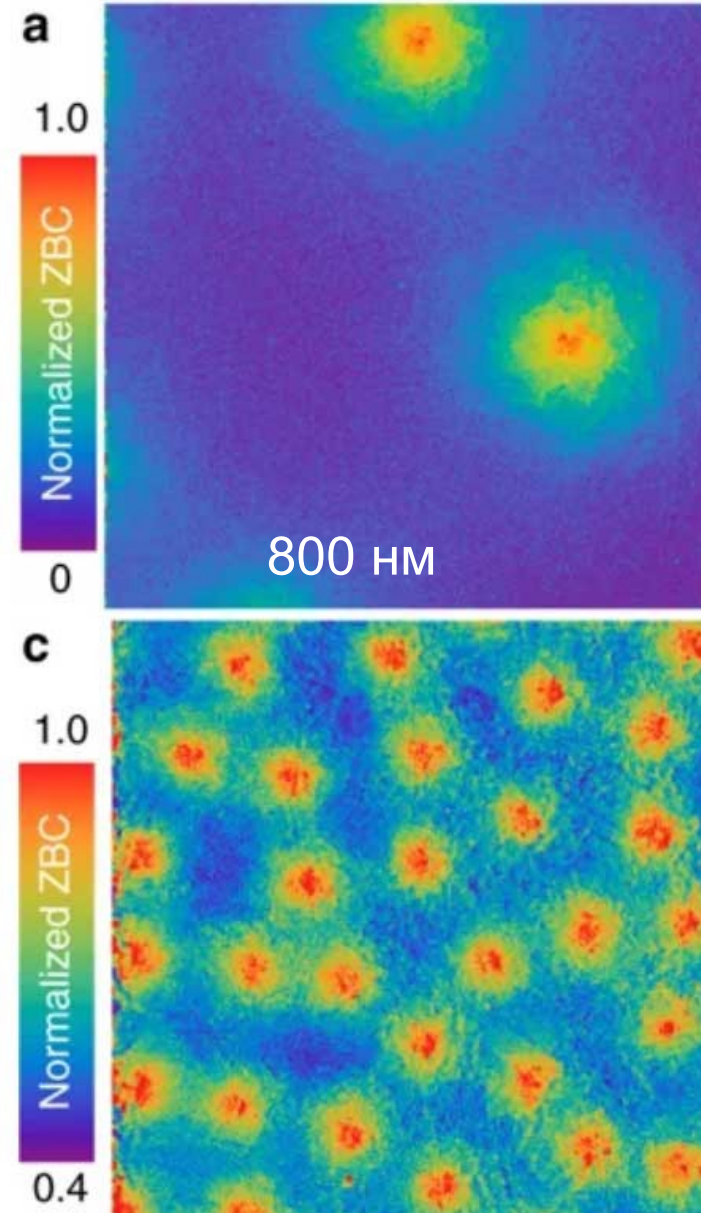
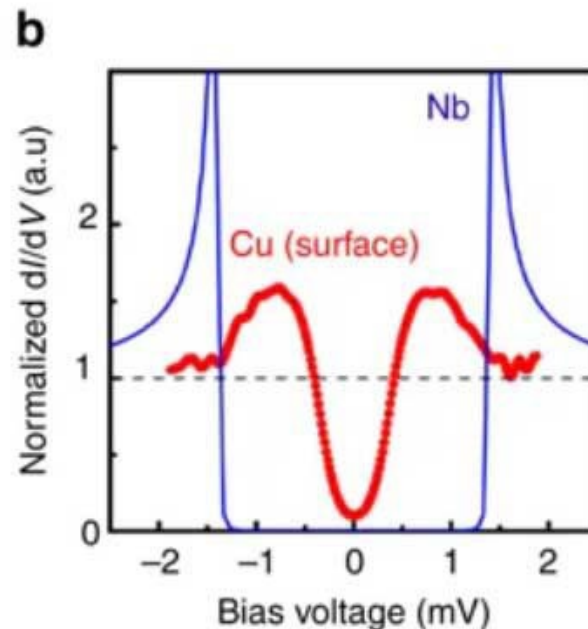
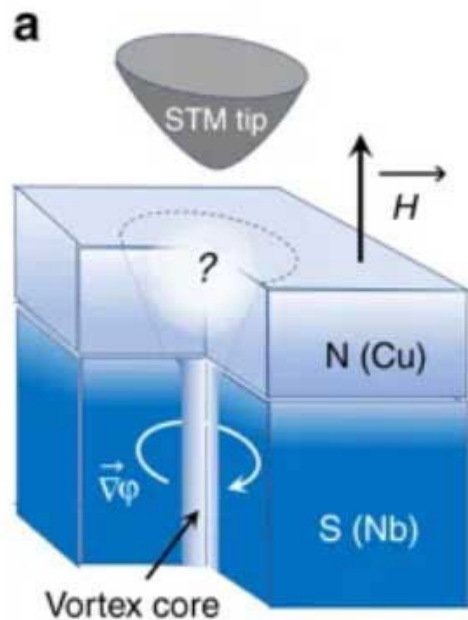


Визуализация вихрей Абрикосова с использованием СТМ

Vasily S. Stolyarov, Tristan Cren, Christophe Brun,
Igor A. Golovchanskiy, Olga V. Skryabina et. al.
“Expansion of a superconducting vortex core into a
diffusive metal”

Nature Communications volume 9, 2277 (2018)

Неразрушающий метод измерений.



Визуализация вихрей Абрикосова магнитооптическими методами

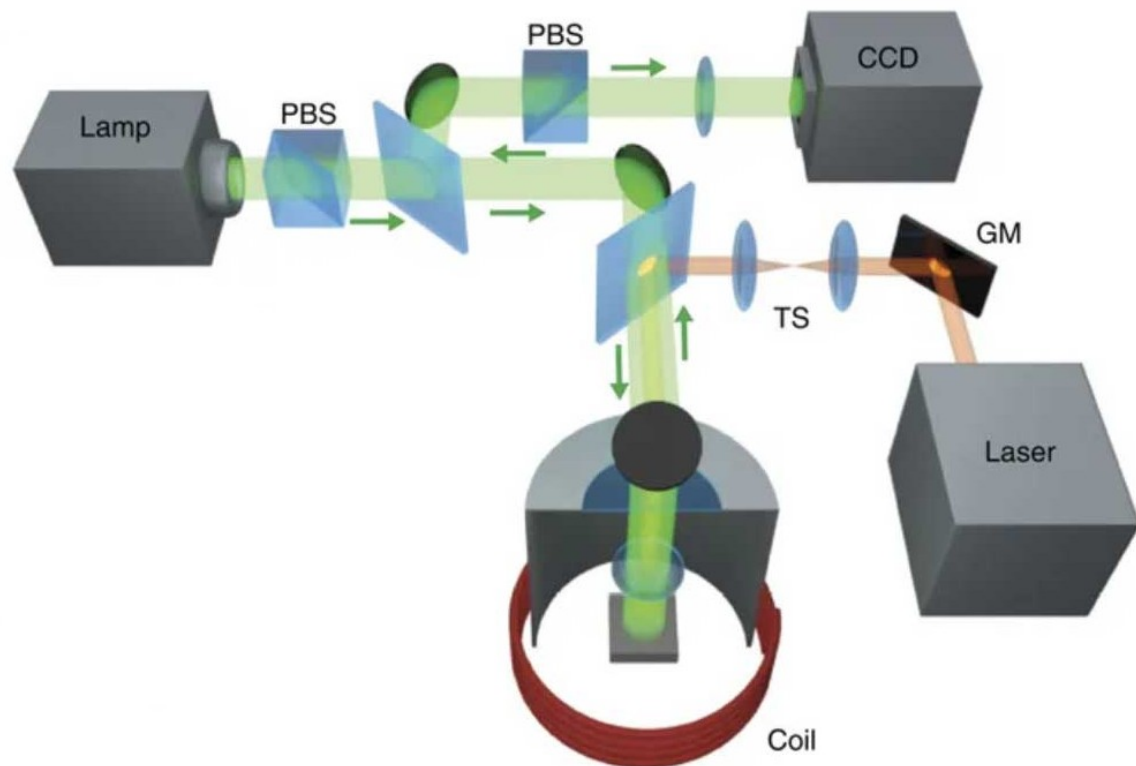
S. Veshchunov, W. Magrini, S. V. Mironov, A. G. Godin, J.-B. Trebbia, A. I. Buzdin,
n. Tamarat & B. Lounis

Figure 1: Single vortex manipulation with a focused laser beam.

Optical manipulation of
single flux quanta”
Nature Communications
Volume 7, 12801 (2016)

Магнитооптика:

- Изменение поляризации света под действием магнитного поля.
- Получение светового контраста при помощи поляризатора.



неразрушающий метод. Возможность проведения измерений в реальном времени.