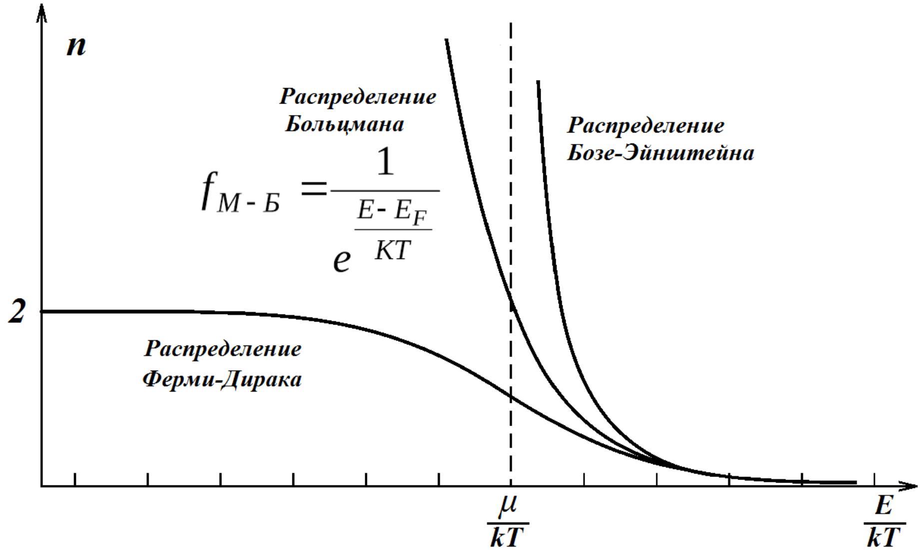
Введение в физику сверхпроводимости

Виталий Валериевич Больгинов

Лекция 12

Теория БКШ, куперовские пары, энергетическая щель, критическая температура, спектр квазичастичных возбуждений, туннельные эффекты в сверхпроводниках.

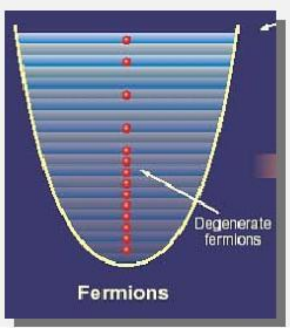
Статистика.



Статистика Ферми-Дирака

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}}+1}$$

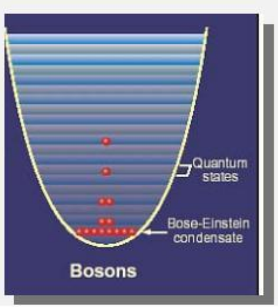
Спин - полуцелый



Статистика Бозе-Эйнштейна

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}}-1}$$

Спин - целый



Любой металлический образец содержит огромное количество электронов.

Механическое рассмотрение такого ансабля невозможно (даже без учета квантово-механических свойств).

Статистическое рассмотрение:
газ свободных электронов.

Распределение Максвела-Больцмана:

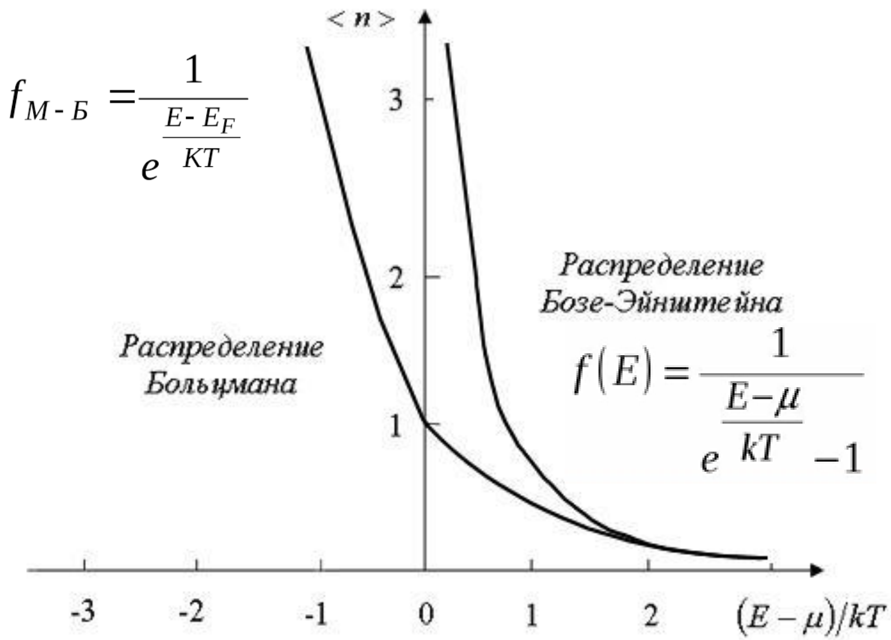
$$f_{М-Б} = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{KT}}}$$

Квантовая механика:
тождественность частиц, учет спина

Целый спин (бозоны):
статистика Бозе-Эйнштейна, бозе конденсация.

Полуцелый спин:
статистика Ферми-Дирака, принцип запрета,
Фермиевская ступень.

Статистика Бозе-Эйнштейна. Бозоны.



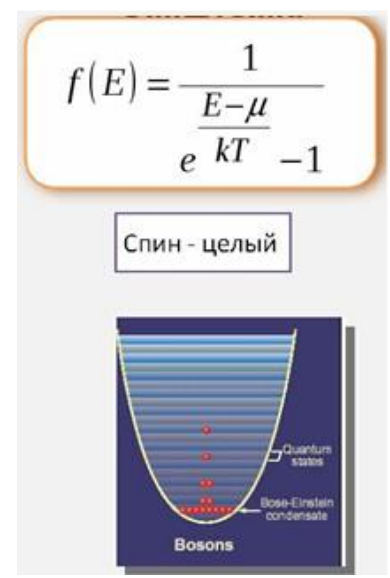
Распределение Максвела-Больцмана:

Экспоненциальный рост числа частиц с энергией меньше μ.

Распределение Бозе-Эйнштейна:

Отличается знаменателем.
Не может быть состояний с энергией меньше μ.
Числа заполнения расходятся при E → μ.
Существует явление Бозе-конденсации и *критическая температура*.

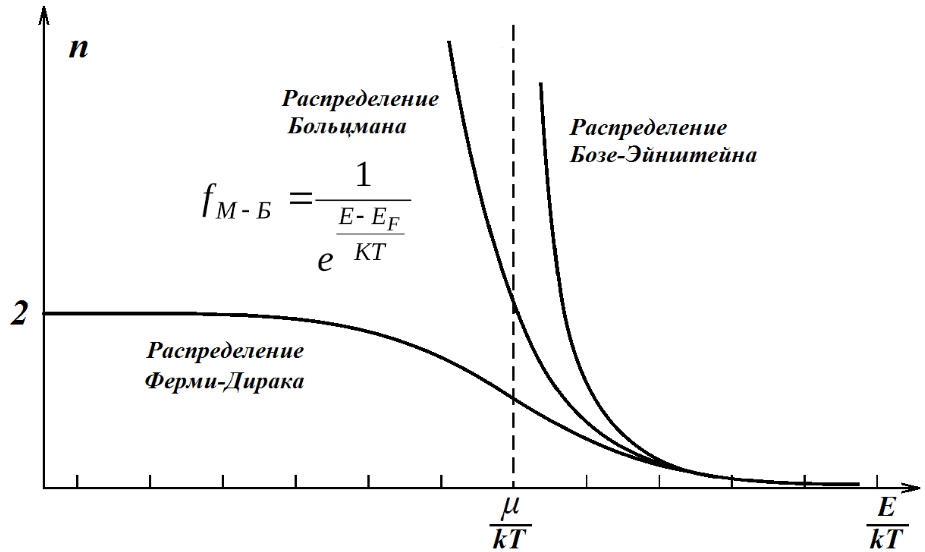
$$T_c = \left(\frac{n}{\zeta(3/2)}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m k_B},$$



- Бозе-конденсация является фазовым переходом 2 рода (происходит скачок теплоемкости).
- Наличие критической температуры и энегетическая выгодность делает сверхпроводящий переход ***похожим*** на бозе-конденсацию. (Лондон, 1938)

Можно ли рассматривать сверхпроводимость как Бозе конденсацию электронного газа?

Статистика.



Электроны имеют полуцелый спин ½, поэтому подчиняются статистике Ферми-Дирака.

Распределение Ферми-Дирака:

Отличается знаменателем.

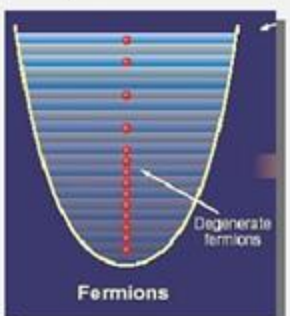
Числа заполнения не могут быть больше 1 (или 2): *принцип запрета*.

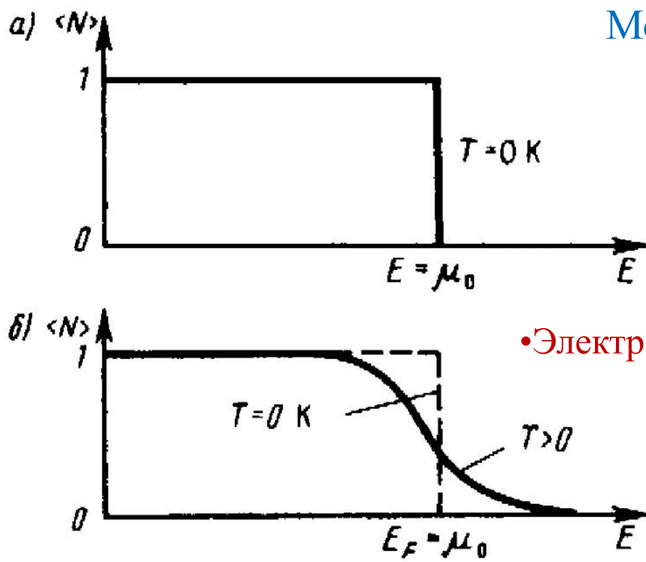
Экспоненциально мало состояний с большой энергией: вырожденный Ферми-газ при T = 0, фермиевская ступень.

Явление Бозе-конденсации отсутствует.

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}$$

Спин - полуцелый





Можно ли построить из электронов бозон?

•Комплекс из 2 электронов является бозоном.

•Электроны отталкиваются посредством кулоновского взаимодействия.

Как быть?

Квантование потока в теории Г-Л

Получили для разности плотностей энергии Гиббса:

$$g_s(\mathbf{r}) - g_n = \alpha|\Psi|^2(\mathrm{r}) + (\beta/2)|\Psi|^4(\mathrm{r}) - BH + B^2/(2\mu_0) + [1/(2m^*)]\left|-i\hbar\nabla\Psi - q\mathbf{A}\Psi\right|^2 \quad (3.40)$$

Уравнения Г-Л

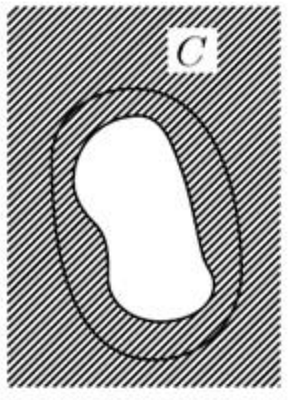
$$\alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + (1/2m^*)(i\hbar\nabla + qA)^2\Psi = 0;$$

$$(1/\mu_0)\ \mathrm{rot\ rot}\ A = -(i\hbar e/m^*)(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - (q^2/2m)|\Psi|^2 A$$

Обобщенное уравнение Лондонов

$$\hbar\nabla\theta = m^*\mathrm{v}_s + q\mathbf{A}$$

$$\hbar\nabla\theta = 2m\mathbf{v}_s + \frac{2e}{c}\mathbf{A}$$



Квантование потока

$$\Phi_0 = h/q\ (= h/e)$$

$$\Phi_0 = h/2e$$

Теория Г-Л предсказывает в 2 раза меньшее значение кванта потока (1961).

Куперовские пары

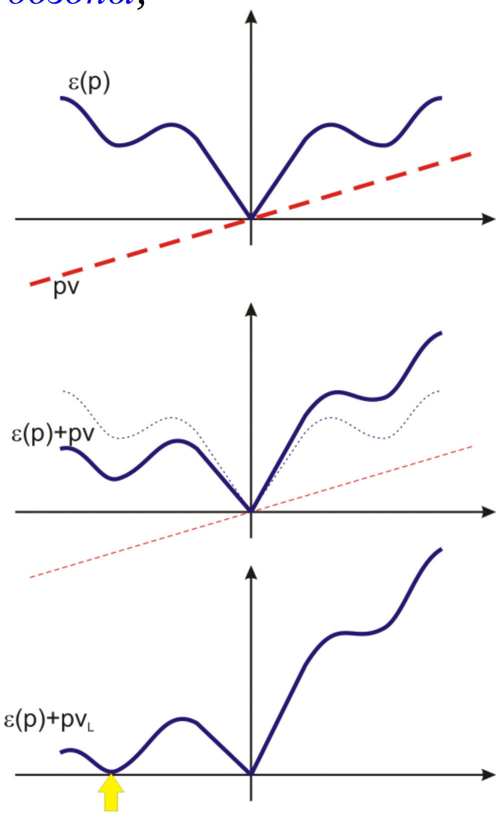
Сверхтекучесть электронной жидкости

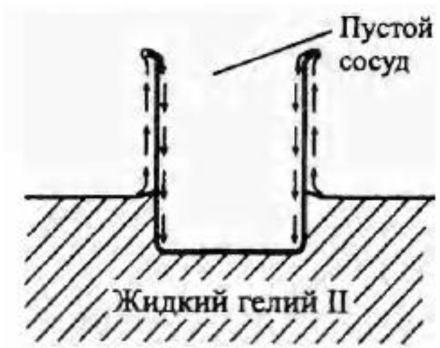
Построение теории сверхпроводимости не требует рассмотрения Бозе-конденсации куперовских пар: *аналогия со сверхтекучестью гелия.*

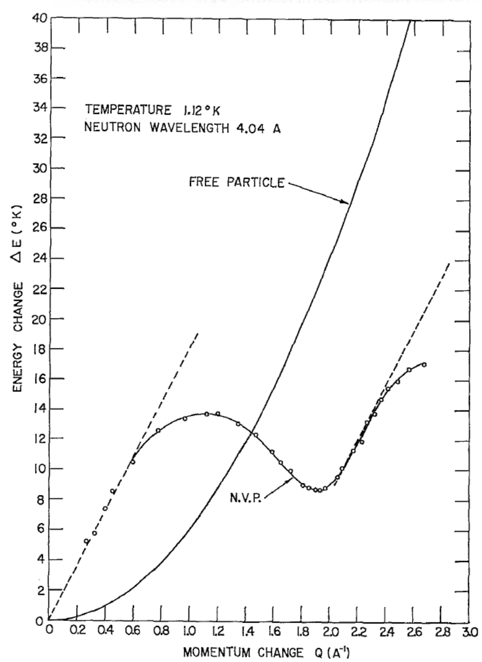
Сверхтекучесть гелия: отсутствие диссипации энергии, критическая температура,

фазовый переход 2 рода.

бозоны,







Что такое возбуждения в жидком гелии?

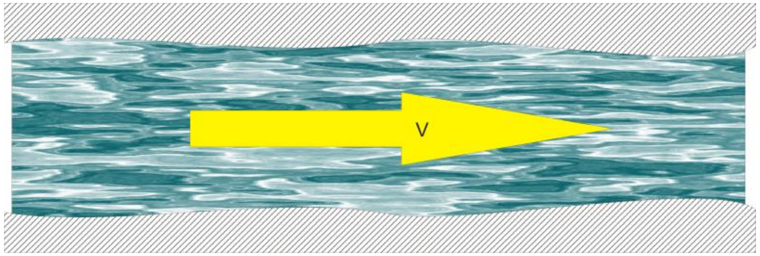
Что такое вязкость в жидком гелии?

Каков спектр возбуждения в потоке гелия?

$$E=\sum_i \frac{p_i^2}{2m}=\sum_i \frac{(\vec{p}_{io}+m\vec{v})^2}{2m}=\sum_i \frac{p_{i0}^2}{2m}+\vec{v}\cdot\sum_i \vec{p}_{i0}+\sum_i \frac{mv^2}{2}=$$

$$\mathrm{O} \rightarrow \mathrm{O'} \rightarrow \mathrm{O}$$

$$=\varepsilon+\vec{p}\cdot\vec{v}+E_0+\frac{Mv^2}{2}$$



Критерий Ландау: $v>\frac{\varepsilon(p)}{p}$

Наличие щели: $E=\Delta+\hbar^2\frac{(k-k_0)^2}{2m}$

Квадратичный спектр: $v_{крит}=0$

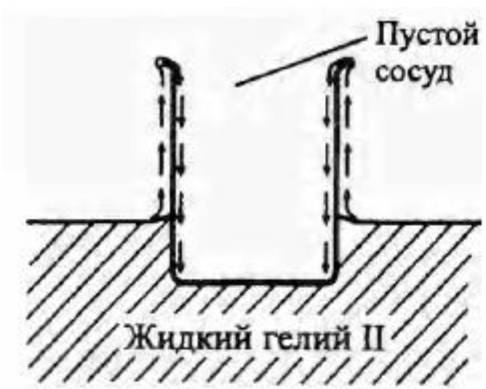
Сверхтекучесть электронной жидкости

Построение теории сверхпроводимости не требует рассмотрения Бозе-конденсации куперовских пар: *аналогия со сверхтекучестью гелия.*

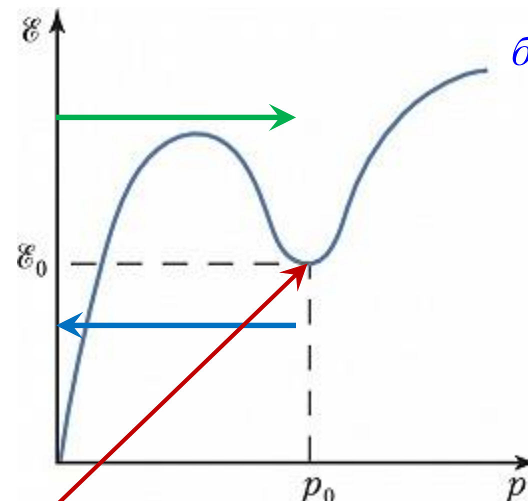
Сверхтекучесть гелия: отсутствие диссипации энергии, критическая температура,

фазовый переход 2 рода.

Критерий сверхтекучести: O → O’ → O



бозоны,



$\varepsilon\,(p\text{-}m\mathbf{V}) < 0 \longrightarrow \varepsilon\,(p) - \mathbf{pV} < 0$

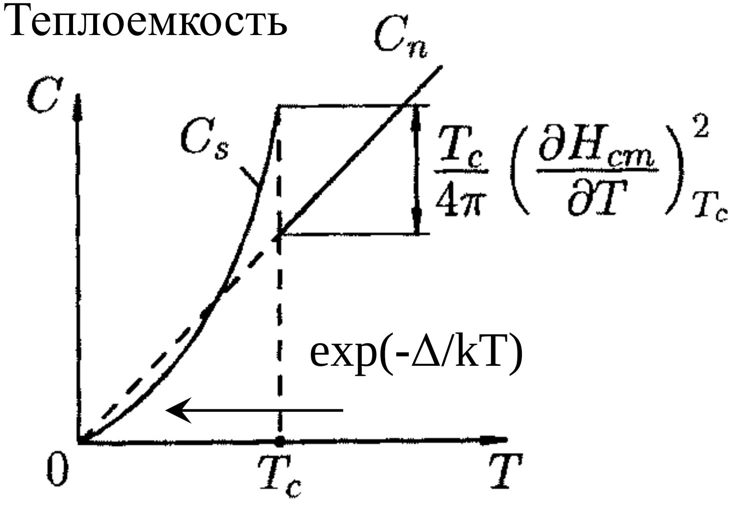
V > min (ε/*p*) ? 0

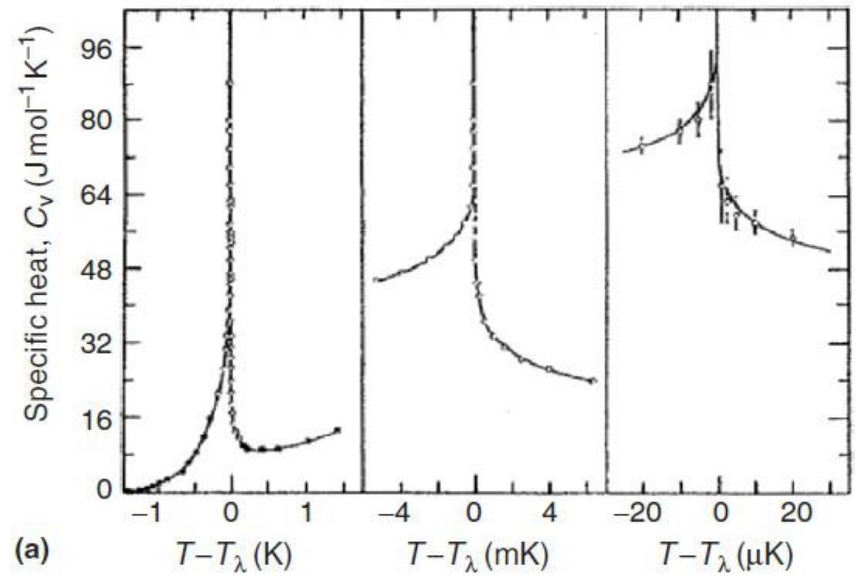
Сверхпроводящий конденсат
Поиск механизмов электрон-электронного притяжения.

Есть щель – есть сверх-проводимость. Наличие щели?

Энергетическая щель

Теплоемкость





СВЧ

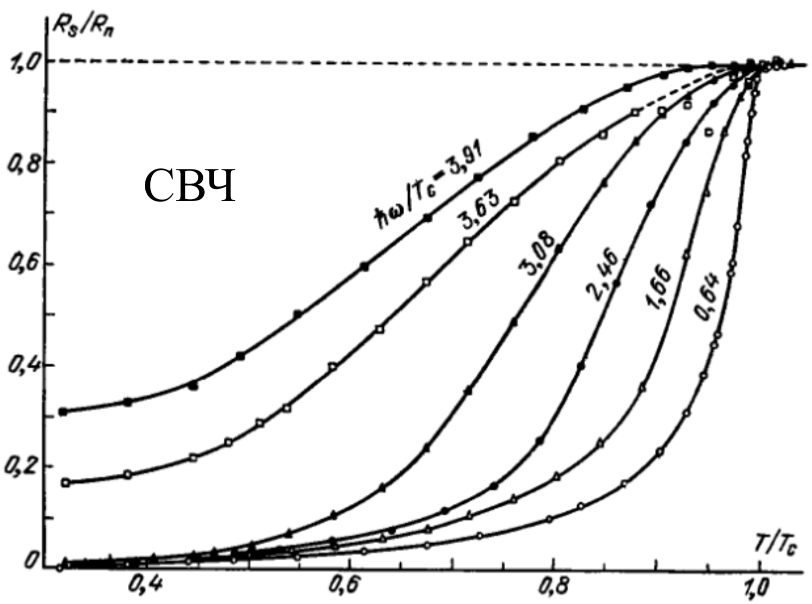


Рис. 19.4

Почему возникает энергетическая щель?

Сверхпроводящий конденсат

Как может происходить электрон-электронное притяжение?

Притяжение через ионную среду

Электроны – заряженные частицы, которые отталкиваются по закону Кулона.

Для образования комплексов требуется «притягивающее» взаимодействие.

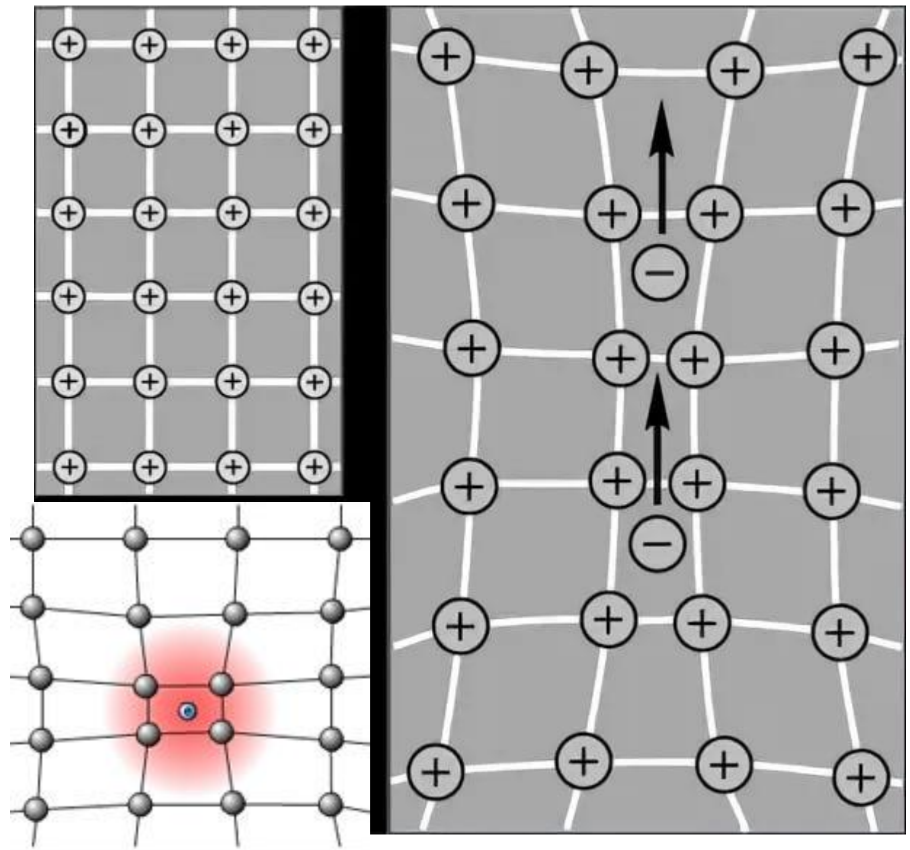
В основе механизма образования “куперовских пар”, лежит притяжение электронов, посредством электрон-фононного взаимодействия.

$m_p = 1840\ m_e$
M_{Hg} ~200 а.е.м.~ 400 000 m_e

???

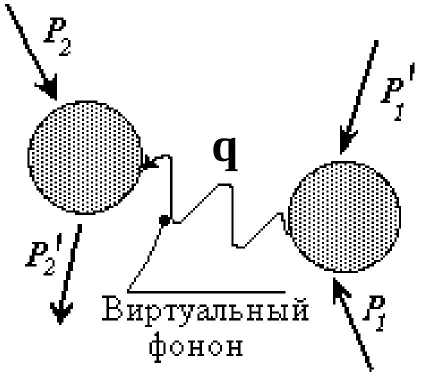
Модель ионного «желе»:

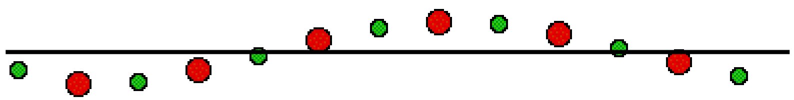
$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q},\ \omega)} = \frac{q^2}{k_s^2 + q^2}\left(1 + \frac{\omega_{\mathbf{q}}^2}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2}\right)$$



Возможно понятнее рассуждать «от фононов».

Фонон.

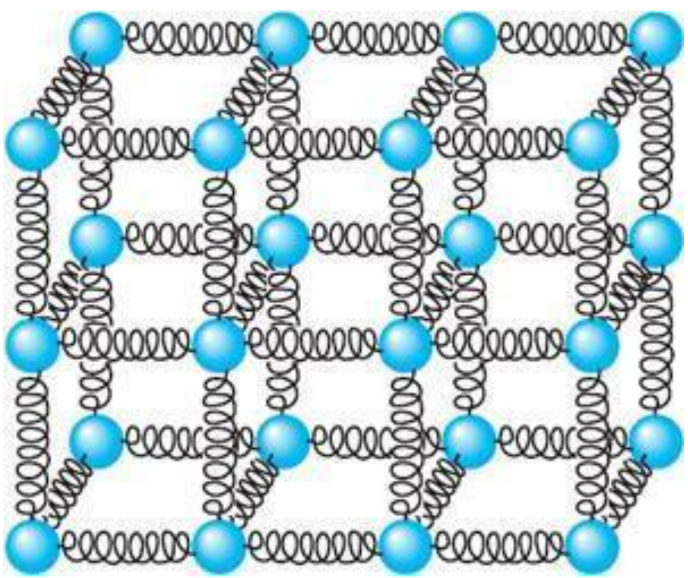




В основе механизма образования “куперовских пар”, лежит притяжение электронов, посредством обмена виртуальными фононами.

Фонон – квант волн упругих колебаний атомов кристаллической ячейки.

Предельная частота колебаний
$\hbar\omega_D = k\Theta_D \sim 10\text{-}100\ T_c$



Фонон – делокализованная волна.
$\exp\,(i\mathbf{qr} + i\omega t)$

Частота колебаний
$\omega = (k\ /\ M)^{1/2}$

$\omega{*}M^{1/2} = k = const$

Электрон-фононное взаимодействие
Изотопический эффект в сверхпроводниках

В основе механизма образования “куперовских пар”, лежит притяжение электронов, посредством электрон-фононного взаимодействия.

Участие фононов в сверхпроводимости доказывает ***изотопический эффект*** (E.Maxwell; C.A.Reynolds; 1950 г.): температура сверхпроводящего перехода $\mathbf{T_c}$ зависит от массы **m** атомов сверхпроводящего металла. В экспериментах использовались разные изотопы олова и ртути и была обнаружена зависимость:

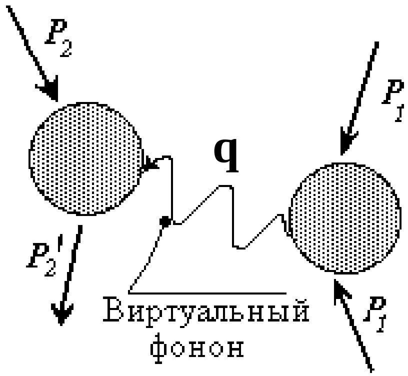
$$T_c \sim m^{-1/2}.$$

Ртуть: M = 199.5 → 203.4 а.е.м., T_c = 4,185 → 4,14 К
Изменение массы атомов приводит к изменениям характерной частоты колебаний кристалической решетки ω_D (дебаевской частоты)

$$\omega_D \sim m^{-1/2}$$

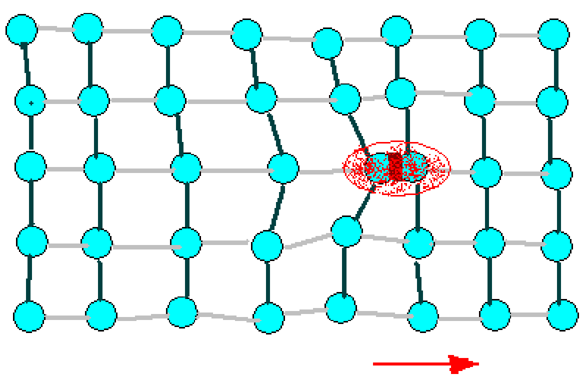
(частота осциллятора с упругой константой k есть $(k/m)^{1/2}$).
Таким образом $\mathbf{T_c}$ тем больше, чем больше частота фононов, т.е. дело во взаимодействии электронов проводимости и фононов, которое может приводить к притяжению между электронами.

Парное взаимодействие через виртуальный фонон.



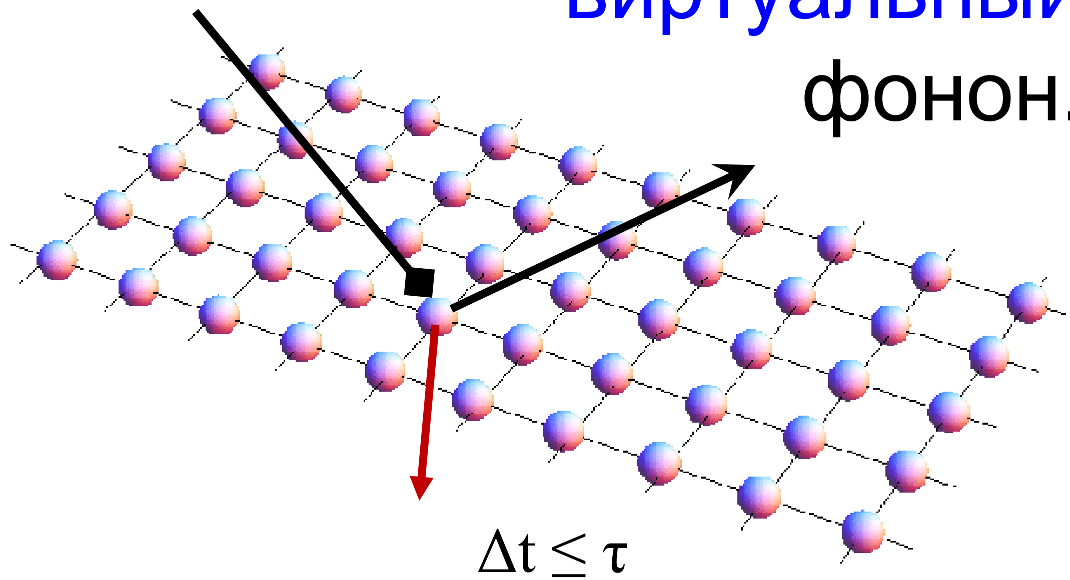
Фонон – делокализованная волна.

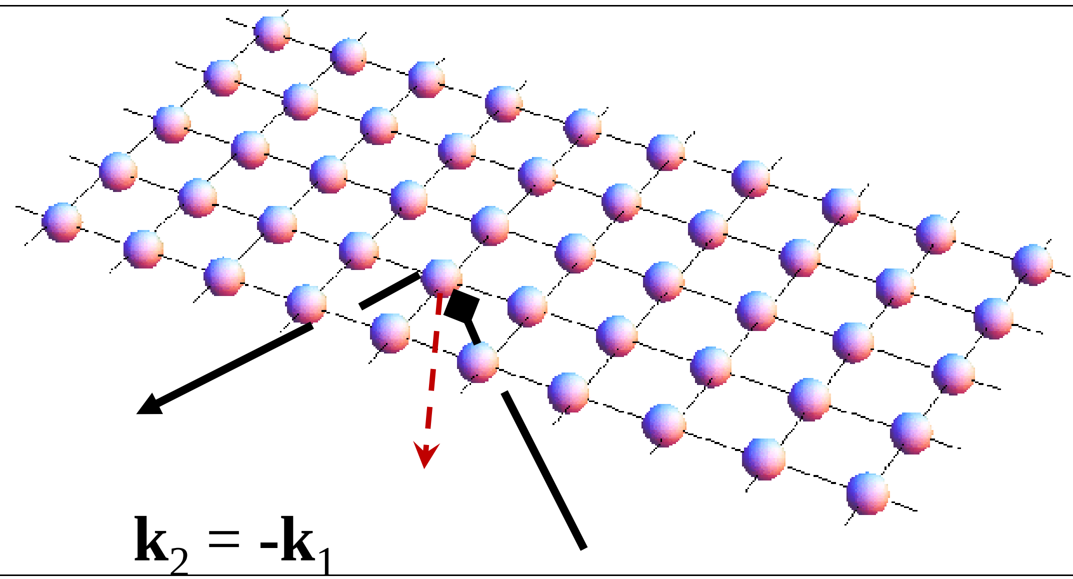
Виртуальный фонон – локализованная волна. (?)



Преобразование кинетической энергии в потенциальную:

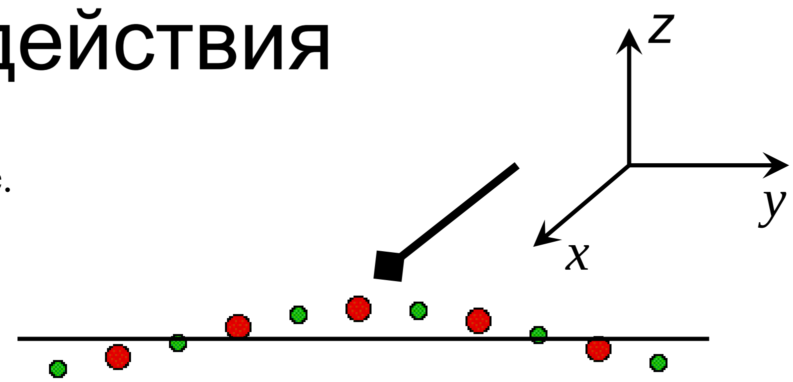
$\tau \sim 1/4\omega_D$





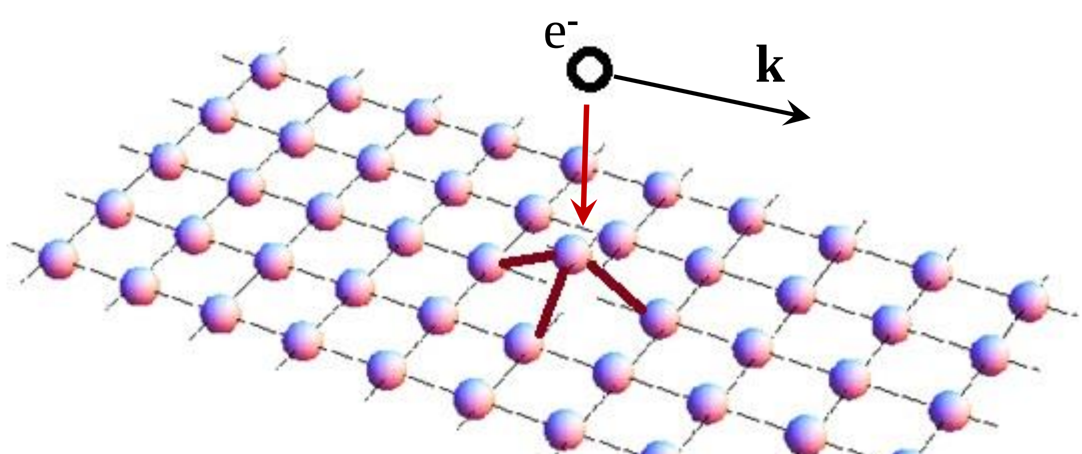
Возможные виды взаимодействия

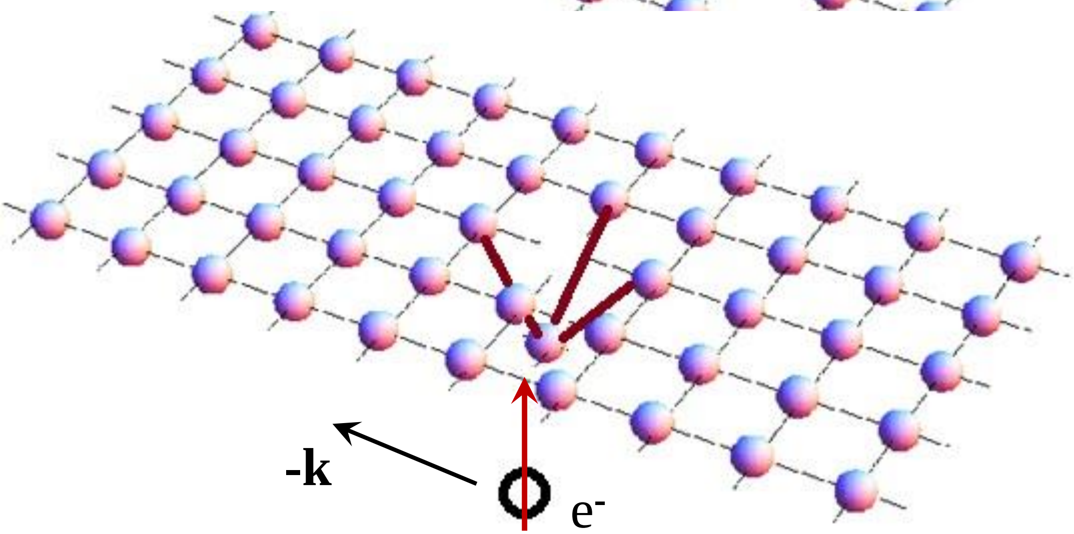
Электроны – квазичастицы в периодическом потенциале.



1. Сбой фазы в процессе упругих или *нулевых* колебаний.

2. Возбуждение поперечной моды.





$\Delta t \geq \tau \sim 1/\omega_D$

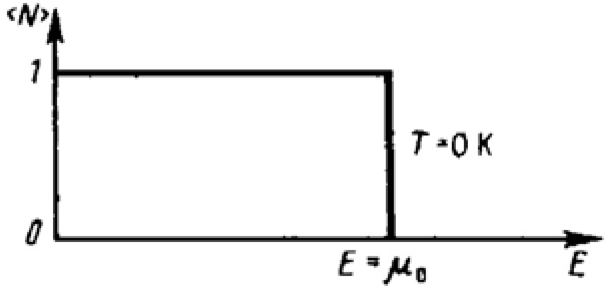
Притяжение:

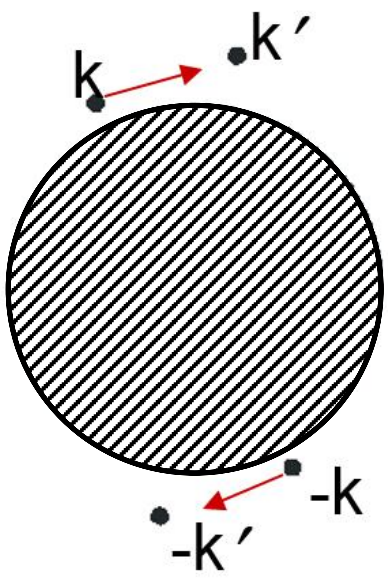
1.Локальное нарушение электро-нейтральности.

2.Эффективное притяжение при усреднении по времени.

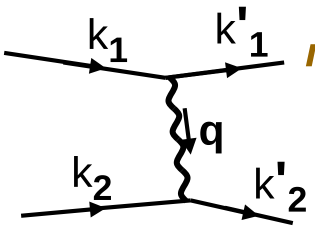
3.Слабое взаимодействие.

Тема 2
«Единичная куперовская пара при нулевой температуре»





Модельная задача: Притяжение посредством виртуальных фононов



первый электрон

фонон

второй электрон

$\boxed{\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}}$

Закон сохранения импульса:

$k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2;$

$k_1 = k'_1 + q; \quad k_2 = k'_2 - q;$

$\boxed{E_k = E_k(\mathbf{k})}$

T=0 - *реальных фононов нет; испускание и поглощение фононов происходит без сохранения энергии на очень коротких временах* $\Delta t < \hbar/(\Delta E)$, *где* Δt- *время жизни виртуального фонона, а* ΔE – *неопределенность в разнице энергий электронов* $E_\kappa - E_{k'}$

Рассмотрим рассеяние электрона $\psi \sim \exp\,(i\mathbf{kr} + i\{E/\hbar\}t)$ *на упругой кристаллической решетке с собственной частотой* ω_D. *Колебания электронной плотности, связанные с переходами* k → k ' и $E_\kappa - E_{k'}$, *характеризуются частотой* $\hbar\omega = (E_\kappa - E_{k'})$;
с этой же частотой "вынуждающей силы" можно задавать колебания между двумя участками электронов через упругую среду. Уравнение такого процесса:

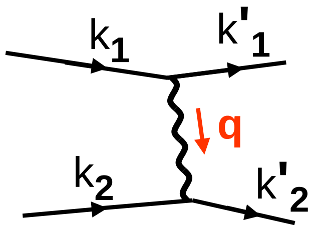
$$x'' + \omega_D^2 x = (f/m)\exp(i\omega t) \quad \Rightarrow x = x_0 \exp(i\omega t) \Rightarrow x_0 = \frac{f/m}{\omega_D^2 - \omega^2}$$

, т.е. колебания между двумя участками электронов синфазны (притяжение) при $\omega = (E_\kappa - E_{k'})/\hbar < \omega_D$

Импульс куперовской пары.

Ищем поправку к энергии системы, возникающую при учете парных процессов рассеяния.

$\mathbf{k_1 - k'_1 = q; \quad k_2 - k'_2 = -q;}$ $\boxed{\mathbf{k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2 = K}}$



Какие состояния могут использоваться для перерассеяния с использованием виртуальных фононов?

Закон сохранения энергии

$(E_k - E_{k'}) < \hbar\,\omega_D$

$\Delta E = (\hbar^2/2m)\,(k_1^2 - k'^2_1)$

$k_1^2 - k'^2_1 = (k_1 + k'_1)(k_1 - k'_1)$

$k_1 \approx k'_1 \approx k_F$

$\Delta E \approx (\hbar^2 k_F/m)\Delta k \quad | * k_F / k_F$

$T = 0$

$\hbar^2 k_F^2/2m = \varepsilon_F$

$k\Theta = \hbar\omega_D$

$\Delta E \approx 2\,\varepsilon_F\,(\Delta k/k_F) \le \hbar\omega_D$

$kT_F = \varepsilon_F$

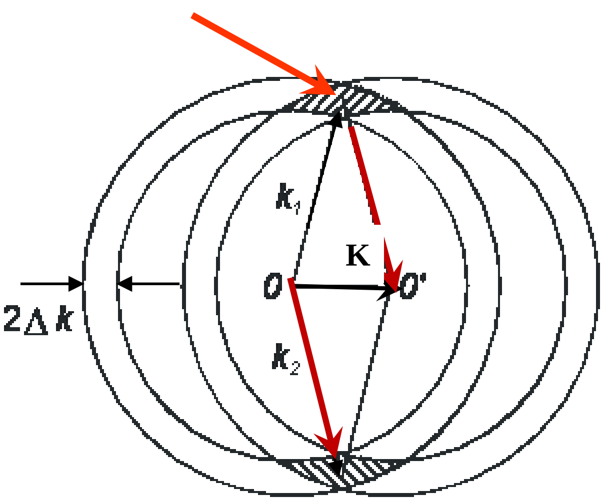
$\Delta k / k_F \sim \hbar\omega_D / \varepsilon_F$

$\hbar\omega_D/\varepsilon_F = \Theta/T_F$

$\Theta/T_F \sim 10^{-3}\text{-}10^{-2}$

Области перерассеяния

Кольцо Купера



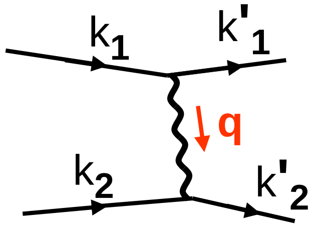
$\mathbf{-k_1 - k_2 = -K}$

$\mathbf{K = 0; \quad k_1 = -k_2; \quad k'_1 = -k'_2}$

Допустимые состояния лежат в кольце шириной Δk.

Узкий допустимый диапазон энергий

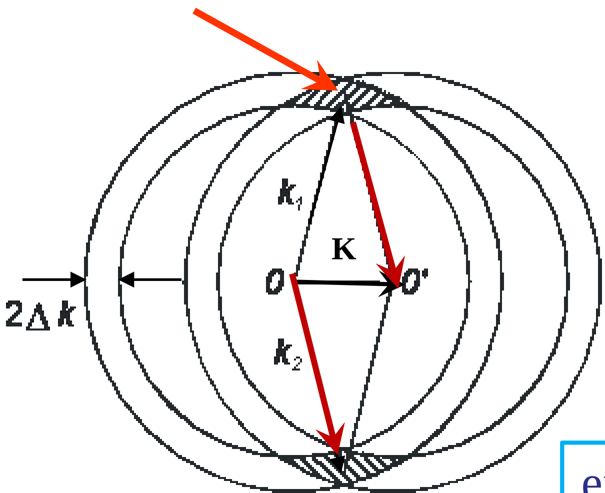
Спин куперовской пары.



Волновая функция куперовской пары: $\Psi_{\alpha,\beta} = \psi_{\alpha,\beta}(r_{\alpha,\beta})\chi_{\alpha,\beta}$

$\Psi_1 = \psi_1(r_1)\alpha$ $\qquad$ $\Psi_2 = \psi_2(r_2)\beta$

Области перерассеяния



Симметрийные соображения (перестановка):

$$\Psi_{\alpha\beta} = -\Psi_{\beta\alpha}$$

$$\boxed{s_1 = -s_2}$$

$$\Psi = \sum \Psi_{\alpha,\beta}(r_{\alpha,\beta})\Psi_{\beta,\alpha}(r_{\beta,\alpha})$$

$$\cos(\mathbf{k}\{\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2\})$$

$$\sim \exp(-i\mathbf{kr})$$

...влению волновыми векторами. Это позволяет рассмотреть ...тальную волновую функцию типа

$\boxed{\exp(\pm i\mathbf{k}\{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\})}$ $\qquad \psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2).$

С учетом антисимметрии полной волновой функции по отношению к перестановке этих двух электронов выражение для ψ_0 преобразуется или в сумму членов $\cos\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, умноженных на антисимметричные синглетные спиновые функции $(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)$, или в сумму членов $\sin\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, умноженных на одну из симметричных триплетных спиновых функций $(\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2)$. В этих вы-

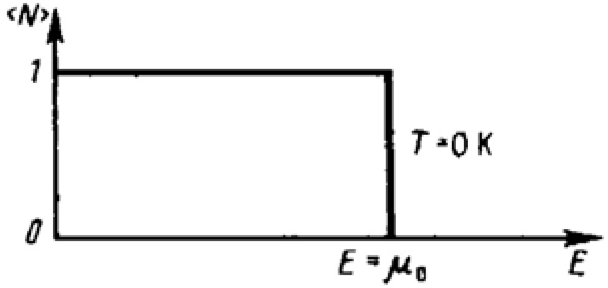
$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{K} = 0; \\ &\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2; \\ &\mathbf{k}'_1 = -\mathbf{k}'_2 \end{aligned}}$$

$$\exp(-i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)^*\exp(-i\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2) = \exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - i\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)$$

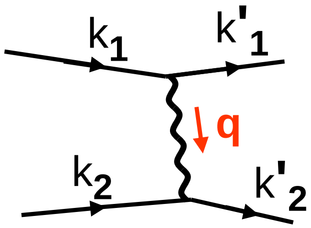
$$\exp(\pm i\mathbf{k}\{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\}) = \cos(\mathbf{k}\{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\}) \pm i\sin(\mathbf{k}\{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\})$$

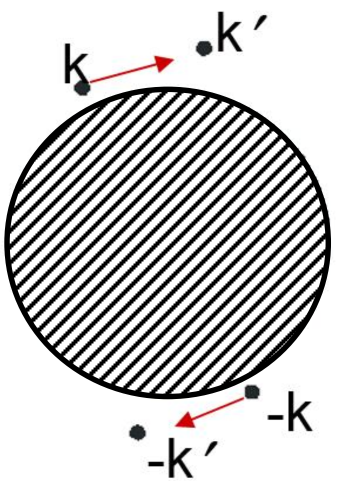
Тинкхам М. «Введение в сверхпроводимость»

Задача Купера (T=0)



$$\boxed{K = k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2 = 0}$$





$k_{1,2} \geq k_F$

Невозмущенное уравнение Шредингера (гамильтониан):

$$\hat{H}_{kin}\Psi_k = 2\varepsilon_\kappa \Psi_k; \quad \varepsilon_k = \left| \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^{\;2}}{2m} \right| \approx \frac{\hbar^2 k_F}{m} |k - k_F|$$

$\Psi_k = \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})]$ **?** $\qquad (1/\Omega) \int_\Omega \Psi_k \Psi_{k'} \, d\Omega = \delta_{kk'}$

Включаем слабое электрон-фононное взаимодействие.

$$\boxed{\hat{H} = \hat{H}_{kin} + \hat{V}} \longrightarrow \Psi = \Sigma\, a_k \Psi_k \quad : \quad a_k^{\;2} \neq 0 \text{ в области } \Delta k$$

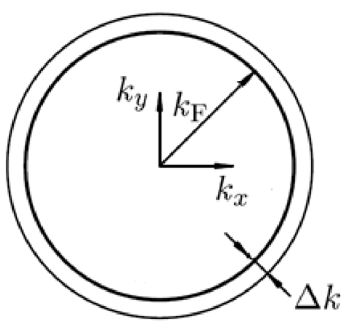
$a_k^{\;2}$ - *вероятность найти пару в состоянии* **k**

$$\boxed{\Delta k \sim k_F\, (\hbar\omega_D/\varepsilon_F)}$$

$$(\hat{H}_0 + \hat{V}(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}))\Psi = E\Psi \quad \rightarrow \quad \hat{V}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})\Psi = E\Psi - \hat{H}_0\Psi$$

$$\hat{V}(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2})\, \Sigma a_{\boldsymbol{k}} \Psi_k = E\, \Sigma a_{\boldsymbol{k}} \Psi_k - \hat{H}_0 \Sigma a_{\boldsymbol{k}} \Psi_k$$

$$(1/\Omega)\int d(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2})\, \Psi_{k'}^{\;*} \longrightarrow \Sigma\, a_{\boldsymbol{k}}\, \hat{V}(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2})\Psi_k = E\, \Sigma a_{\boldsymbol{k}} \Psi_k - \Sigma\, a_{\boldsymbol{k}}\, 2\varepsilon_\kappa\, \Psi_k$$



$V_{\kappa k'} = (1/\Omega)\int \Psi^*_{k'}\, \hat{V}(r_1 - r_2)\, \Psi_k\, d(r_1 - r_2)$

амплитуда вероятности перехода k→k‘

$$\boxed{\Sigma\, a_{\boldsymbol{k}} V_{\kappa k'} = (E - 2\varepsilon_{\kappa'})\, a_{\boldsymbol{k'}}}$$

Процедура самосогласования

$(E - 2\varepsilon_{k'})\, a_{k'} = \Sigma\, a_k V_{k'k}$

$(E - 2\varepsilon_k)\, a_k = V\, \Sigma\, a_{k'}$

Изотропное приближение:
$V_{kk'} = -V$ в области Δk;
иначе $V_{kk'} = 0$

$a_k = -V \Sigma\, a_{k'} / (E - 2\varepsilon_k)$

$V_{kk'} = (1/\Omega)\int \Psi^*_k\, \hat{V}(r_1 - r_2)\, \Psi_{k'}\, d(r_1 - r_2)$

амплитуда вероятности перехода k→k'

$V \Sigma\, a_{k'} = V \Sigma\, a_{k'} \rightarrow V \Sigma\, a_{k'} = V \Sigma\, a_k$

$V \Sigma\, a_{k'} = V \Sigma\, [- \Sigma\, V a_{k'} / (E - 2\varepsilon_k)]$

k и k' пробегают одни и те же значения!

$$\cancel{V}\sum_{k'} a_{k'} = -V^2 \sum_k \sum_{k'} \frac{a_{k'}}{E - 2\varepsilon_k};$$

Меняем порядок суммирования!

Перегруппировка!

$$\sum_{k'} a_{k'} = -V \sum_{k'} a_{k'} \left(\sum_k \frac{1}{E - 2\varepsilon_k} \right)$$

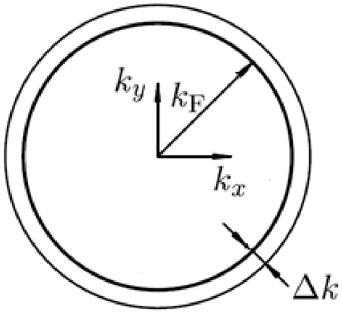
$$\sum_{k'} a_{k'} \left(1 + \sum_k \frac{V}{E - 2\varepsilon_k} \right) = 0:$$

k изменяется дискретно, но с малым шагом. →

→ можно перейти к интегрированию

$\varepsilon_k = \varepsilon_k(|\mathbf{k}|)$ → суммируем по энергиям.

$\varepsilon_k \approx \varepsilon_F$, число состояний в диапазоне $d\varepsilon$ постоянно: $N(0)d\varepsilon$.



Известны пределы интегрирования

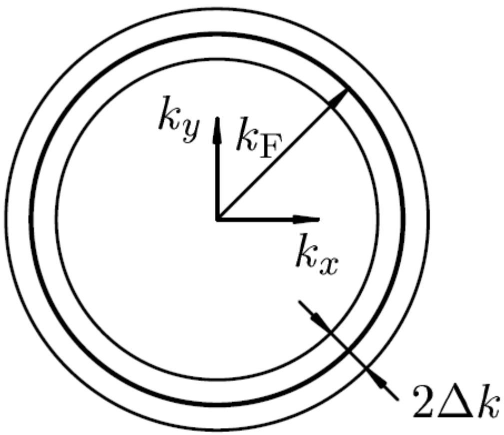
$\Delta k / k_F \sim \hbar\omega_D / \varepsilon_F << 1$

$$\sum_k \frac{1}{E - 2\varepsilon_k} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{N(0)}{E - 2\varepsilon}\, d\varepsilon\,;$$

Плотность электронных состояний.

Посчитаем количество электронных состояний в интервале энергий $d\varepsilon$ при $\varepsilon \approx \varepsilon_F$.

$(2\pi)^3$ – фазовый объем на одно электронное состояние в k-простанстве.



Импульс Ферми:

$2*(4/3)\pi k_F^3/(2\pi)^3 = n \quad \rightarrow \quad k_F = \{3\pi^2 n\}^{1/3}$

Каково число состояний в интервале dk? $2*4\pi k^2 dk/(2\pi)^3$

Какой интервал импульса dk соответствует приращению

$$\boxed{\varepsilon = \hbar k^2/2m \quad \rightarrow \quad k = \sqrt{\hbar\varepsilon/2m}}$$

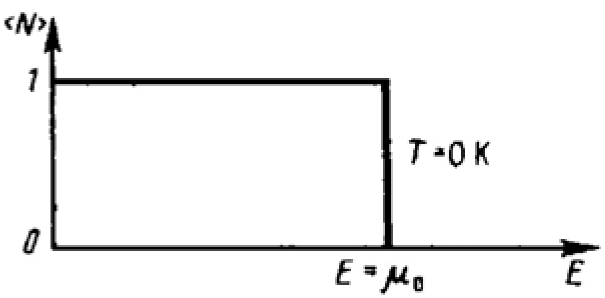
энергии $d\varepsilon$?

$$\boxed{dk \propto \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}};\ k^2 \propto \varepsilon;\ k^2 dk \propto \sqrt{\varepsilon}}$$

Интегрирование идет состояниям в бесконечно тонких сферах с одинаковым |**k**|

Каково число состояний в интервале $d\varepsilon$, соответствующем интервалу dk?

$$N(\varepsilon)d\varepsilon = (\hbar/2m)^{3/2}\pi^2\sqrt{\varepsilon}\ d\varepsilon$$



$$\boxed{N(0) \propto \sqrt{\varepsilon_F} \approx const(k)}$$

Энергия куперовского связанного состояния

$$\sum_{k'} a_{k'}\left(1+\sum_k \frac{V}{E-2\varepsilon_k}\right)=0 \longrightarrow \quad 1+\sum_k \frac{V}{E-2\varepsilon_k}=0:$$

$$\boxed{\sum_k \frac{1}{E-2\varepsilon_k}=\int_0^{\hbar\omega_D}\frac{N(0)d\varepsilon}{E-2\varepsilon}}$$

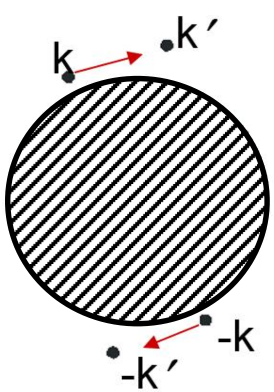
$$\int_0^{\hbar\omega_D}\frac{1}{E-2\varepsilon}d\varepsilon = -\frac{1}{2}\ln(E-2\varepsilon)\Big|_0^{\hbar\omega_D} = -\frac{1}{2}\ln(1-2\hbar\omega_D/E) = -1/N(0)V$$

$$\exp\{+2/[N(0)V]\} = 1 - 2\hbar\omega_D/E$$

$$E=-\frac{2\hbar\omega_D}{1+\exp\left(+2/N(0)V\right)}$$

Энергия куперовского связанного состояния **N(0)V<<1** (приближение слабой связи!)

$$\boxed{E \approx -2\hbar\omega_D\exp\left(-\frac{2}{N(0)V}\right)}$$



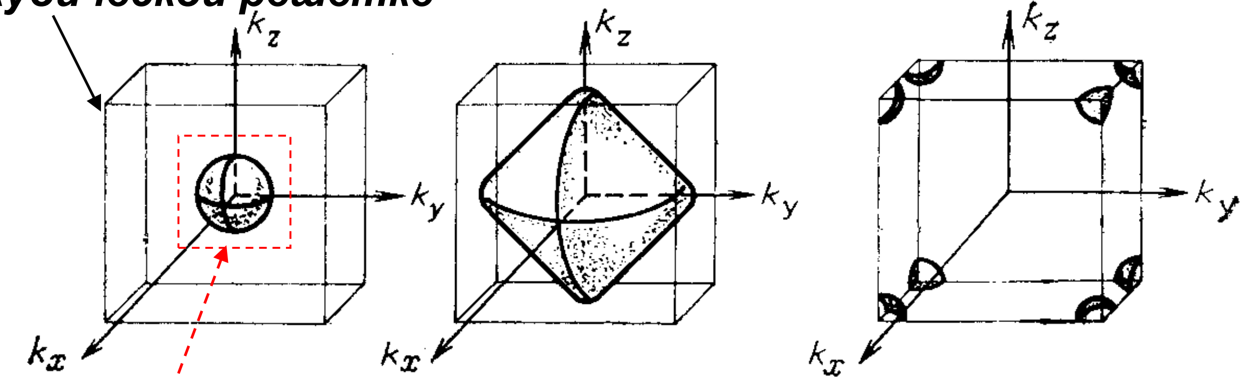
Выигрыш в энергии растет при увеличении $\boldsymbol{\omega_D}$, N(0) и V (приближение сильной связи!)

Суммарная энергия двух возбуждений (связанного состояния) отрицательна при любом сколь угодно малом притяжении !

Пространственно-неоднородное состояние

***Микроскопическая теория сверхпроводимости* Бардина-Купера-Шриффера (*теория БКШ*) создана для простейших *металлов со сферической поверхностью Ферми* (“сферический ферми газ”).**

зона Бриллюэна в кубической решетке



$$\boxed{V = \text{const}\,(\theta, \varphi)}$$

Сферическая поверхность (энергия) Ферми

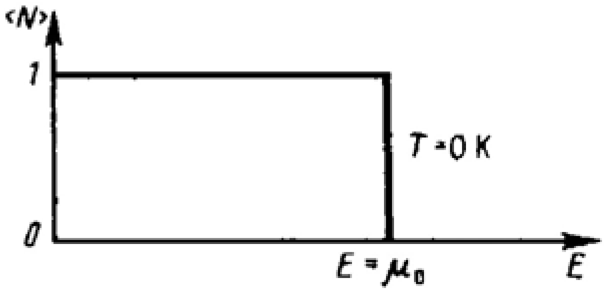
Теория БКШ описывает сверхпроводники - элементарные металлы (такие как Al, In, Sn) и не подходит для сверхпроводящих оксидов со сложной кристаллической симметрией (ВТСП). Последние имеют D-симметрию сверхпроводящей волновой функции, т.е. волновая функция имеет различную величину и знак для различных направлений в кристалле.

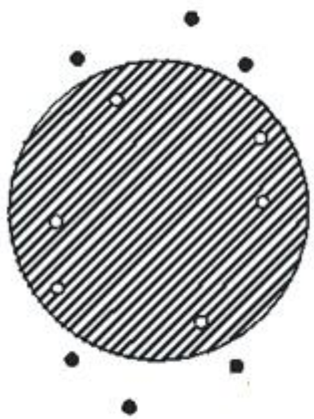
волновая функция в теории БКШ также обладает S-симметрией:

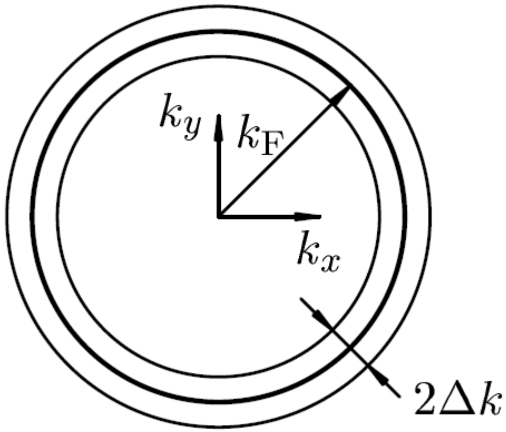
т.е. изотропна и не зависит от направления в k-пространстве

Перерыв?

Тема 3
«Энергия основного состояния сверхпроводника»



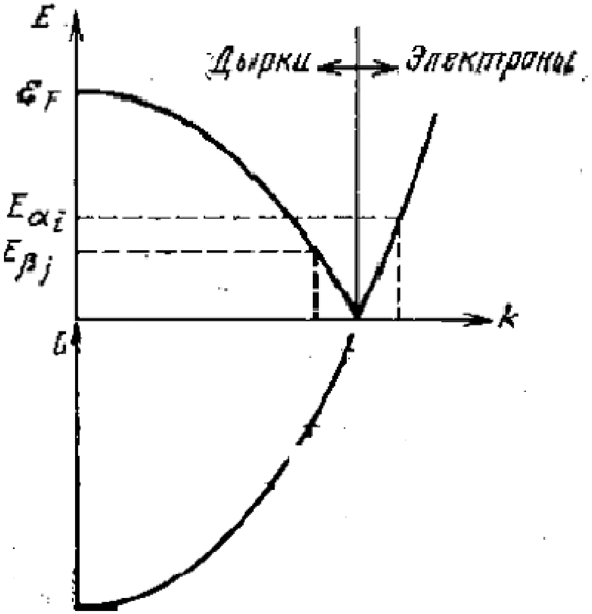


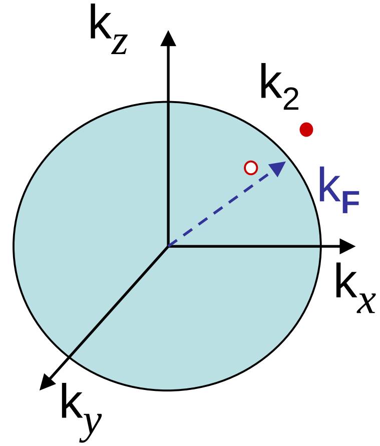


$$\boxed{\hat{H}\ \Psi = E\ \Psi}$$

?

Электроны в металле





Электроны проводимости являются возбуждениями вырожденного ферми-газа ($T \approx 0$).

Основное состояние – сфера ферми заполнена $K = 0$ ($T = 0$).

Перенесем электрон за границу сферы:

$$\Delta E_2 = \hbar^2 k_2^2/2m - \hbar^2 k_1^2/2m =$$

$$= \hbar^2/2m\{k_2^2 - k_F^2 + k_F^2 - k_1^2\} = E_e + E_h$$

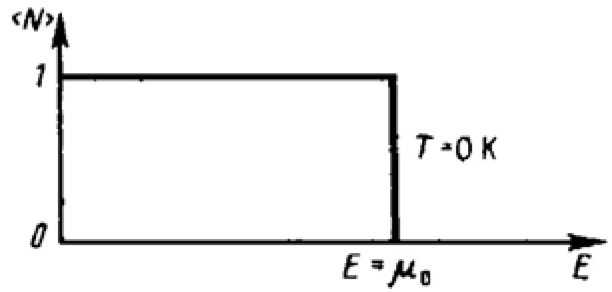
2 возбуждения.

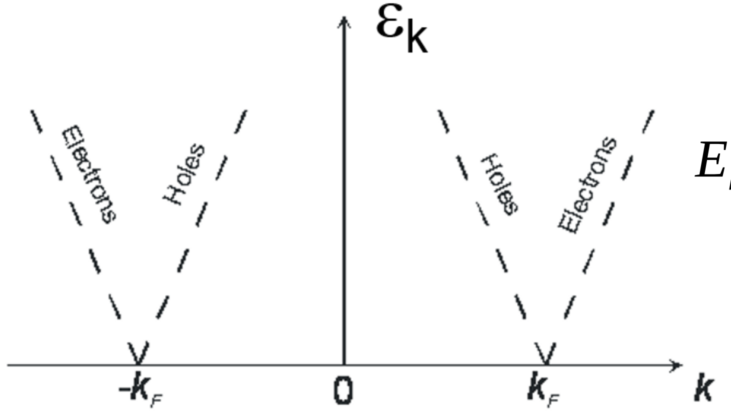
$$E_e = \hbar^2/2m\{k_2^2 - k_F^2\} \sim (k_2 + k_F)(k_2 - k_F) \approx 2k_F\Delta k$$

$$k_{1,2} \approx k_F$$

$$E_h = \hbar^2/2m\{k_F^2 - k_1^2\} \sim (k_1 + k_F)(k_F - k_1) \approx 2|\,k_F\Delta k\,|$$

$$\mathrm{E} = \sum_{k>k_F} f(\varepsilon,T)\varepsilon_k + \sum_{k<k_F} f(\varepsilon,T)|\varepsilon_k| \quad \boxed{=0}$$





Квантово-механическая аналогия

Рассмотрим частицу с гамильнонианом H в стационарном состоянии.

Исходное состояние: $H_0\hat{\Psi}_{1,2} = \varepsilon_{1,2}\Psi_{1,2}$ $\int \Psi_\alpha^* \Psi_\beta = \delta_{\alpha\beta}$

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$$

Введем малое возмущение $\hat{V}$: $\Psi = a_1\Psi_1 + a_2\Psi_{1,2}$

$$(\hat{H}_0+\hat{V})(a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2) = E\,(a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2)$$

$a_{1,2}$ – амплитуды состояний $|a_{1,2}|^2$ – вероятность реализации состояний

$\int dV(a_1^*\Psi_1^* + a_2^*\Psi_1^*)\,(\hat{H}_0 + \hat{V})\,(a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2) = \int dV(a_1^*\Psi_1^* + a_2^*\Psi_2^*)\,E\,(a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2) = E$:

$a_\alpha^*\Psi_\alpha^*\hat{H}_0 a_\beta\Psi_\beta = a_\alpha^* a_\beta\Psi_\alpha^*\varepsilon_\beta\Psi_\beta \rightarrow$ $\varepsilon_{\beta,\alpha} a_\alpha^* a_\beta \int\Psi_\alpha^*\Psi_\beta\, dV = \varepsilon_\gamma\,|a_\gamma|^2$

$a_\alpha^*\Psi_\alpha^*\hat{V} a_\beta\Psi_\beta \rightarrow$ $a_\alpha^* a_\beta V_{\alpha\beta} = a_\alpha^* a_\beta \int\Psi_\alpha^*\hat{V}\Psi_\beta\, dV$

$|a_\alpha|^2 V_{\alpha\alpha}$: $V_{\alpha\alpha}$ – поправка к энергии состояний 1,2 $|a_\alpha|^2$ –вероятность состояния

$a_1^* a_2 V_{12}$: $a_1^* a_2$ - вероятность перехода V_{12}, V_{21} – энергия связи

БКШ: $V_{12} = V_{21} = -V$, $V_{11} = V_{22} = 0$

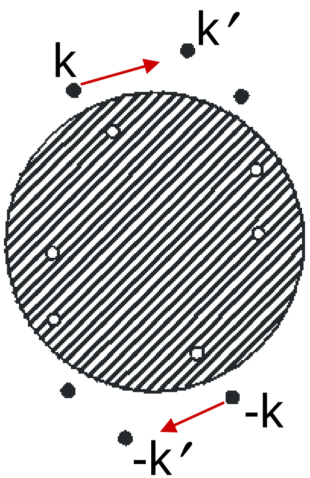
$$E = \varepsilon_1|a_1|^2 + \varepsilon_2|a_2|^2 - (a_1^* a_2 + a_2^* a_1)V$$

Энергия основного состояния сверхпроводника I

"BCS": Phys. Rev. **108**, 1175–1204 (1957)

T = 0

Пусть теперь множество динамических электронных пар используют одни и те же состояния (k,-k)!



$\mathbf{v_k}$ и $\mathbf{u_k}$ –комплексные "факторы когерентности":

$\mathbf{v_k^2}$ *– вероятность того, что парное состояние* **(k,- k)** *заполнено*

$\mathbf{u_k^2} = 1 - \mathbf{v_k^2}$ *-вероятность того, что состояние* **(k,- k)** *свободно*

Чтобы переход (k,-k)←→(k',-k') был возможен,

необходимо: (исходное состояние Ψ_k)

1) (k,-k) заняты, (k',-k') свободны → Вероятность $v_k^2 u_{k'}^2$, амплитуда $v_k u_{k'}$.

2) (k,-k) свободны, (k',-k') заняты → Вероятность $v_{k'}^2 u_k^2$, амплитуда $v_{k'} u_k$.

"Затрагиваются" 4 ячейки

$$E = \sum_{k>k_F} 2\varepsilon_k v_k^2 + \sum_{k<k_F} 2|\varepsilon_k| u_k^2 - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k$$

???

Энергия основного состояния сверхпроводника III

$$E = \sum_{k>k_F} 2\varepsilon_k v_k^2 + \sum_{k<k_F} 2|\varepsilon_k| u_k^2 - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k$$

$u_k^2 = 1 - v_k^2$

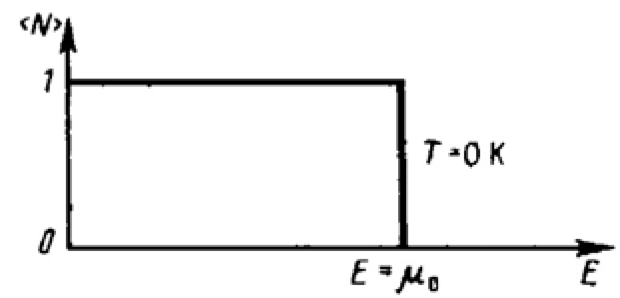
$$E_S = \sum_{k>k_F} 2\varepsilon_k v_k^2 + \sum_{k<k_F} 2|\varepsilon_k| \left(1 - v_k^2\right) - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k$$

$$E_S = \sum_{k>k_F} 2\varepsilon_k v_k^2 + \sum_{k<k_F} -2|\varepsilon_k| v_k^2 + \sum_{k<k_F} 2|\varepsilon_k| - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k$$

$$E_S = \sum_{-\hbar\omega_D}^{+\hbar\omega_D} 2\varepsilon_k v_k^2 - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k + E_N$$

$E_h = \hbar^2/2m\{k_F^2 - k_2^2\}$

$$\boxed{E_S - E_N = \sum_{k} 2\varepsilon_k v_k^2 - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k}$$



Энергия сверхпроводника и факторы когерентности

Кинетическая энергия сверхпроводника равна

$$E_S - E_N = \sum_{0}^{\infty} 2\varepsilon_k v_k^2 - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k \qquad \varepsilon_k = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}\right)$$

Ищем функцию v_k^2, дающую минимум внутр. энергии.

$$\boxed{u_k^2 = 1 - v_k^2}$$

Критерий равновесного состояния (**K** – одно из состояний):

$$\boxed{T = 0}$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial v_K^2} = 0;$$

$y = v_k^2 - v_k^4$

$\Delta_0 = V\,\Sigma' v_k u_k$

$$2\varepsilon_K - 2V\frac{\partial(v_K u_K)}{\partial v_K^2}\sum v_{k'} u_{k'} = 2\varepsilon_K - 2\frac{\partial[(v_K^2)^{1/2}(1-v_K^2)^{1/2}]}{\partial v_K^2} V \sum v_{k'} u_{k'} = 0$$

ячейка ***К*** дважды

$$\varepsilon_K - \frac{\partial[(v_K^2 - v_K^4)^{1/2}]}{\partial v_K^2}\Delta_0 = 0 \qquad \varepsilon_K = \frac{1-2v_K^2}{2(v_K^2 - v_K^4)^{1/2}}\Delta_0$$

Энергия сверхпроводника и факторы когерентности

$$\varepsilon_K = \frac{1-2v_K^2}{2(v_K^2 - v_K^4)^{1/2}}\Delta_0$$

возведем в квадрат

$$2\varepsilon_K\sqrt{v_K^4 - v_K^2} = \Delta_0(1-2v_K^2)$$

$$4\varepsilon_k^2(v_k^2 - v_k^4) = \Delta_0^2 - 4v_k^2\Delta_0^2 + 4v_k^4\Delta_0^2$$

Свернем

$$4\,\varepsilon_k^2\,(v_k^2 - v_k^4) = \Delta_0^2 - 4\Delta_0^2(v_k^2 - v_k^4)$$

$$4\,(\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2)\,(v_k^2 - v_k^4) = \Delta_0^2$$

$$v_K^4 - v_K^2 + \frac{\Delta_0^2}{4\left(\varepsilon_K^2 + \Delta_0^2\right)} = 0$$

$$E_k^2 = \varepsilon_k^2 + \Delta_0^2$$

$$v_K^4 - v_K^2 + \frac{\Delta_0^2}{4E_K^2} = 0$$

$$v_k^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4[\Delta_0^2/4E_k^2]}}{2}$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{E_k^2 - \Delta_0^2}}{E_k}\right)$$

$$E_k^2 - \Delta_0^2 = \varepsilon_k^2$$

$$\boxed{v_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_k}{E_k}\right)}$$

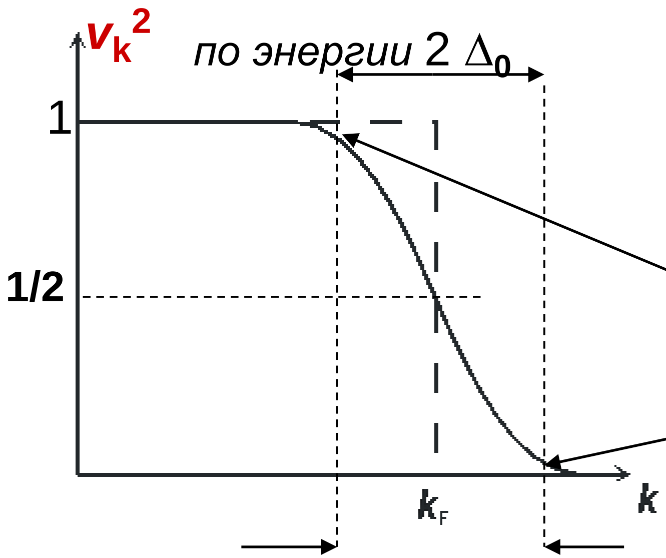
$$\boxed{v_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(\varepsilon_k/\Delta_0)}{\sqrt{(\varepsilon_k/\Delta_0)^2 + 1}}\right)}$$

Взят “-”, т.к. при $\varepsilon_к \rightarrow \infty$ энергия $E_к \rightarrow \varepsilon_к$,

а вероятность $v_k^2 \rightarrow 0$

Факторы когерентности

$$v_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right), \quad x = \varepsilon_k / \Delta \qquad \varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k^2 - k_F^2\right) \qquad u_k^2 = 1 - v_k^2$$



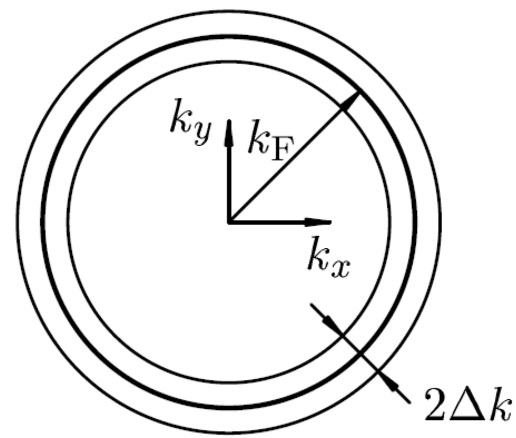
$\Delta k/k_F \sim 2\,\Delta_0/\varepsilon_F \leq 10^{-3}$

При $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k_F}$ $\;\varepsilon_\kappa = 0$ и $\boldsymbol{v_k^2} = \boldsymbol{u_k^2} = 1/2$

«хвосты» в интервале $\Delta k / k_F \sim \hbar\omega_D / \varepsilon_F$ (см. (9.2))

При $\boldsymbol{\varepsilon_\kappa} = \pm\,\Delta_0$

$\boldsymbol{v_k^2}$=(1/2)**(**1±1/√2**)**=(1/2)**(**1±**0.7)=** **0.85** **и** **0.15**



В динамическом спаривании, фактически, участвуют электроны в слое $2\Delta_0$ вблизи E_F

Доля с энергиями ~ $E_F \pm \hbar\omega_D$ (“хвосты”) - мала

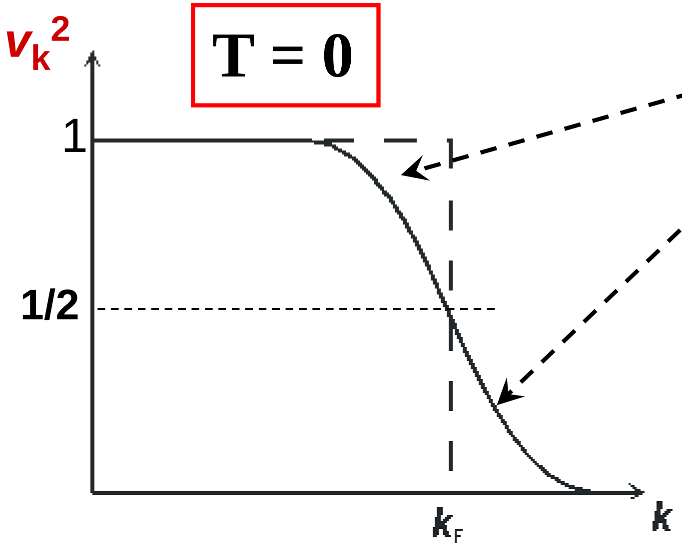
$$\varepsilon_k \approx \frac{\hbar^2 k_F}{m}\Delta k \qquad \boxed{\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}}$$

Факторы когерентности

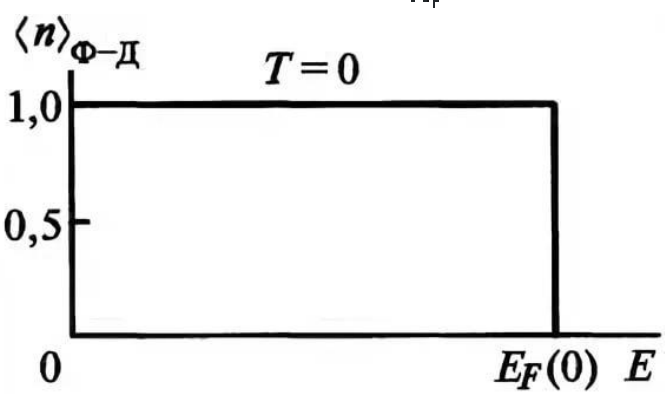
V_k^2 – *вероятность того, что парное состояние* **(k,- k)** *заполнено*

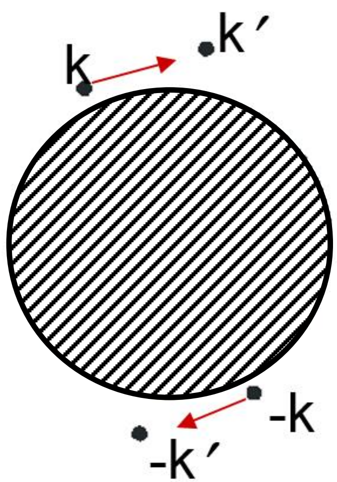
$$v_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right), \quad x = \varepsilon_k / \Delta$$

ячейки k-пространства, используемые для перерассеяния k → k '



Распределение Ферми «размывается» даже при T = 0. Природа идет на на повышение кинетической энергии, чтобы выиграть в потенциальной!!!





$$E = \sum_{k>k_F} 2\varepsilon_k v_k^2 + \sum_{k<k_F} 2|\varepsilon_k| u_k^2 - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k$$

Конец?

Тема 4
«Спектр одночастичных возбуждений»

Вычислим параметр Δ

$$\Delta_0 = V\,\Sigma' v_k u_k = V\,\Sigma'\left[(1/2)^2(1-\varepsilon_\kappa/E_\kappa)\,(1+\varepsilon_\kappa/E_\kappa)\right]^{1/2} =$$

$$= V\,\Sigma'\left[(1/2)^2(1-\varepsilon_\kappa^{2}/E_\kappa^{2})\right]^{1/2} =$$

$$= (V/2)\,\Sigma'\left[(E_\kappa^2-\varepsilon_\kappa^2)/E_\kappa^2\right]^{1/2} = (V\Delta_0/2)\,\Sigma'\left[1/(\varepsilon_\kappa^2+\Delta_0^2)^{1/2}\right]$$

$$v_k^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_k}{E_k}\right) \qquad u_k^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon_k}{E_k}\right) \qquad \boxed{E_k^2-\varepsilon_k^2=\Delta_0^2} \qquad \boxed{E_k^2=\varepsilon_k^2+\Delta_0^2}$$

$$\cancel{\Delta_0} = (V\cancel{\Delta_0}/2)\,\Sigma'\left[1/(\varepsilon_\kappa^2+\Delta_0^2)^{1/2}\right] \quad\rightarrow\quad 1 = (V/2)\,\Sigma'\left[1/(\varepsilon_\kappa^2+\Delta_0^2)^{1/2}\right]$$

$$\frac{V}{2}\sum_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D}\left(\varepsilon_k^2+\Delta_0^2\right)^{-1/2} = \frac{V}{2}\int_0^{\hbar\omega_D}\frac{2N(0)}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta_0^2}}\,d\varepsilon = N(0)V\int_0^{\hbar\omega_D}\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta_0^2}}$$

$dn=2N(0)d\varepsilon$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\Delta_0^2}} = arcsh(x/a) + \ln a$$

Вычислим параметр Δ

$$\mathrm{N(0)V} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta_0^2}} = \mathrm{N(0)V}\ \mathrm{arcsh}\left.\frac{\varepsilon}{\Delta_0}\right|_0^{\hbar\omega_D} = \mathrm{N(0)V}\ \mathrm{arcsh}\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0}$$

$\hbar\omega_D/\Delta_0 = sh[1/N(0)V]$; $sh\ x \to (1/2)\exp x$ при $x \to \infty$

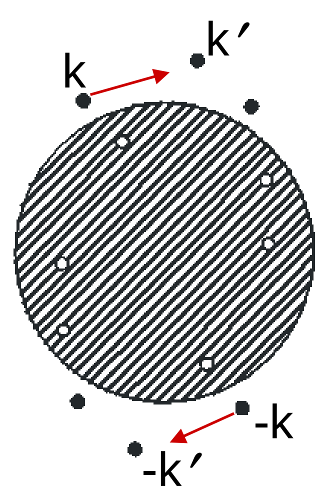
N(0)V<<1: $2\hbar\omega_D/\Delta_0 = \exp[1/(N(0)V)]$;

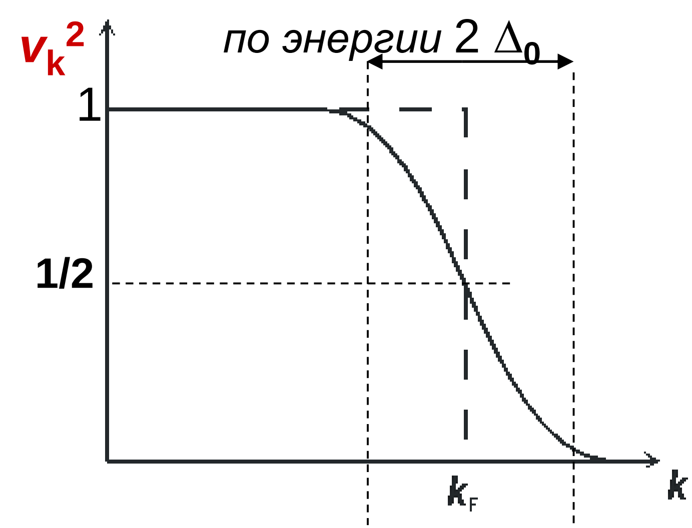
$$\boxed{\Delta_0 \approx 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{\mathrm{N(0)V}}\right)}$$

предел слабого взаимодействия

Ср. с энергией куперовского связанного состояния (9.3):

$$E = -2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{2}{\mathrm{N(0)V}}\right)$$





Энергия сверхпроводящего основного состояния

$$E = \sum_{k>k_F} 2\varepsilon_k v_k^2 + \sum_{k<k_F} 2|\varepsilon_k| u_k^2 - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k$$

$$E = \sum_{k>k_F} 2\varepsilon_k v_k^2 + \sum_{k<k_F} 2|\varepsilon_k| u_k^2 - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k$$

$E_S - E_N = \Sigma\, 2\varepsilon_\kappa \boldsymbol{v}_k^2 - V\Sigma' \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{v}_{k'} \boldsymbol{u}_{k'}$ (9.4a), см. (9.4)

k в Δk области

$\Sigma' \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{u}_k\, V\Sigma' \boldsymbol{v}_{k'} \boldsymbol{u}_{k'} = \Delta_0 \Sigma' \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{u}_k$

$\Sigma' \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{u}_k = \Delta_0 / V$

$E_S - E_N = \Sigma\, 2\varepsilon_\kappa(1-\varepsilon_\kappa/E_\kappa) - \Delta_0^2/V$

$$E_S - E_N = 2N(0)\int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \varepsilon\left[1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta_0^2}}\right] d\varepsilon - \frac{2\Delta_0^2}{V} = 2N(0)\left[\frac{(\hbar\omega_D)^2}{2} - \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta_0^2}} d\varepsilon\right] - \frac{2\Delta_0^2}{V}$$

$\int dx\, \boldsymbol{x}^2 / (\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{a}^2)^{1/2} = (\boldsymbol{x}/2)(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{a}^2)^{1/2} - (\boldsymbol{a}^2/2)\, arcsh(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}^2/2) \ln \boldsymbol{a}$

$\boxed{x=\varepsilon;\ a=\Delta_0}$

$E_S = N(0)\ \{(\hbar\omega_D)^2 - \hbar\omega_D\Delta_0[1+(\hbar\omega_D/\Delta_0)^2]^{1/2} + \Delta_0^2\, arcsh(\hbar\omega_D/\Delta_0)\} - \Delta_0^2/V =$

Энергия сверхпроводящего основного состояния

$$E=\sum_{k>k_F}2\varepsilon_k v_k^2+\sum_{k<k_F}2|\varepsilon_k|u_k^2-\sum_{k,k'}Vv_k u_{k'}v_{k'}u_k$$

$$\boxed{v_k^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_k}{E_k}\right)}\qquad \boxed{u_k^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon_k}{E_k}\right)}$$

$$\boxed{E_k^2=\varepsilon_k^2+\Delta_0^2}$$

$$E=\sum_{k>k_F}\varepsilon_k\left(1-\frac{\varepsilon_k}{E_k}\right)+\sum_{k<k_F}|\varepsilon_k|\left(1+\frac{\varepsilon_k}{E_k}\right)-\sum_k v_k u_k\sum_{k'}Vv_{k'}u_{k'}$$

$$E=\sum_0^{\hbar\omega_D}\varepsilon_k\left(1-\frac{\varepsilon_k}{E_k}\right)+\sum_{-\hbar\omega_D}^{0}|\varepsilon_k|\left(1-\frac{|\varepsilon_k|}{E_k}\right)-\Delta_0\sum_{k,k'}v_k u_k$$

$*1 = V/V$

$$\boxed{E_k^2-\varepsilon_k^2=\Delta_0^2}$$

$$E=2\sum_0^{\hbar\omega_D}\varepsilon_k\left(1-\frac{\varepsilon_k}{E_k}\right)+\sum_{-\hbar\omega_D}^{0}|\varepsilon_k|\left(1-\frac{|\varepsilon_k|}{E_k}\right)-\frac{\Delta_0^2}{V}$$

$$E=2\sum_0^{\hbar\omega_D}\varepsilon_k\left(1-\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k+\Delta_0^2}}\right)-\frac{\Delta_0^2}{V}=\boxed{2\int_0^{\hbar\omega_D}\left(\varepsilon_k-\frac{\varepsilon_k^2}{\sqrt{\varepsilon_k+\Delta_0^2}}\right)N(0)d\varepsilon_k-\frac{\Delta_0^2}{V}}$$

Энергия основного состояния

$$E = 2\int_0^{\hbar\omega_D}\left(\varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k^2}{\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta_0^2}}\right)N(0)d\varepsilon_k - \frac{\Delta_0^2}{V}$$

$$\int\{x^2/(x^2+a^2)^{1/2}\}dx = (x/2)(x^2+a^2)^{1/2} - (a^2/2)\,arcsh(x/a) - (a^2/2)\ln a$$

$$E_S = N(0)\{(\hbar\omega_D)^2 - \hbar\omega_D\Delta_0[1+(\hbar\omega_D/\Delta_0)^2]^{1/2} + \Delta_0^2\, arcsh(\hbar\omega_D/\Delta_0)\} - \Delta_0^2/V =$$

$$sh[1/(N(0)V)] = \hbar\omega_D/\Delta_0$$

$$= N(0)\Delta_0^2\{(\hbar\omega_D/\Delta_0)^2 - (\hbar\omega_D/\Delta_0)[1+(\hbar\omega_D/\Delta_0)^2]^{1/2}\} + N(0)\Delta_0^2/\cancel{N(0)}V - \Delta_0^2/V =$$

$\hbar\omega_D/\Delta_0 = sh(1/N(0)V) = sh(X);$ $\quad N(0)\Delta_0^2\{sh^2(X) - sh(X)\,\underbrace{[1+sh^2(X)]^{1/2}}_{=ch(X)}\}$

$$\{2\,sh^2(X) - 2\,sh(X)\,ch(X)]^{1/2}\}/2 = \{ch(2X) - 1 - sh(2X)\}$$

$$sh^2x = \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{4} = \frac{1}{2}\left[\frac{(e^{2x}+e^{-2x})}{2} - 1\right] = \frac{1}{2}\left[ch(2x) - 1\right]$$

Энергия сверхпроводящего основного состояния

$$E_s = \frac{N(0)\Delta_0^2}{2}\left[\cancel{ch\left(\frac{2}{N(0)V}\right)} - 1 - \cancel{sh\left(\frac{2}{N(0)V}\right)}\right] = -\frac{N(0)\Delta_0^2}{2} = -\frac{N(0)\Delta_0}{2}\Delta_0$$

т.к. $2X = 2/[N(0)V] >> 1$: $sh(2X) \approx ch(2X) \approx (1/2)exp(2X)$

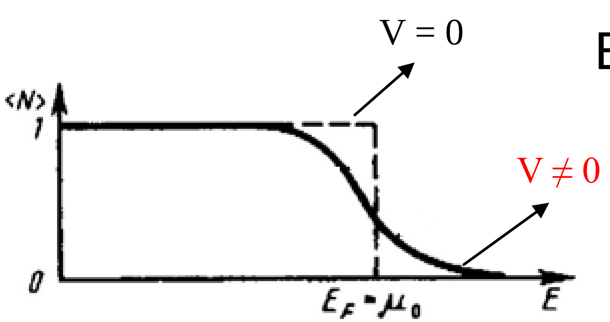
$N(0)V << 1$ – *предел слабого взаимодействия*

Простая интерпретация результата:

$n = N(0)\Delta_0/2$ – *число электронных пар, принимающих участие в $(k,-k) \leftarrow\rightarrow (k',-k')$ переходах*,

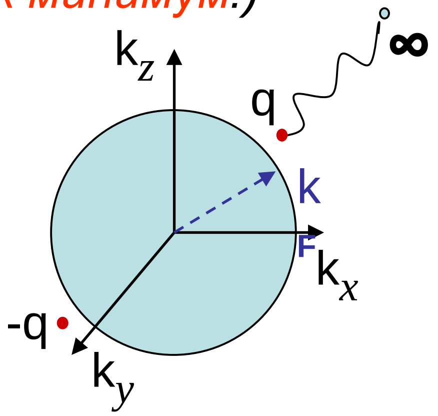
Δ_0 - *энергетический выигрыш от каждой пары (энергия связи).*

Чтобы разорвать пару и создать одночастичное возбуждение необходимо затратить “щелевую энергию” Δ_0 (как минимум!)



$$E_s - E_n = -\mu_0 H_{cm}^2/2 = -N(0)\Delta_0^2/2$$

$$\boxed{\mu_0 H_{cm} = (\mu_0 N(0))^{1/2}\Delta_0}$$



Энергия квазичастиц

$$\Delta_0 \approx 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{N(0)V}\right)$$ см. (9.9).

$$\boxed{v_k^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_k}{E_k}\right)}$$ $$\boxed{u_k^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon_k}{E_k}\right)}$$

<u>Определим энергию квазичастичного возбуждения</u>

$$\boxed{E_q = \sqrt{\varepsilon_q^2+\Delta_0^2}}$$

Чтобы создать квазичастицу в состоянии q (т.е. исключить q, -q состояния из (k,-k)←→(k',-k') перерассеяний) необходимо полностью заполнить одно из q или –q состояний и освободить второе. Вклад в энергию от квазичастицы - $+\varepsilon_q$.

Конечное состояние

Начальное состояние

Вклад в энергию E_S *отдельной пары с импульсами* **q,-q** *в основном состоянии (см. (9.4а)):*

$$w_q = 2\varepsilon_q v_q^2 - 2V v_q u_q \Sigma' v_k u_k = 2\varepsilon_q(1/2)(1-\varepsilon_q/E_q) - 2[(1/4)(1-\varepsilon_q^2/E_q^2)]^{1/2}\Delta_0 =$$

$$= \varepsilon_q - \varepsilon_q^2/E_q - \Delta_0^2/E_q = \varepsilon_q - \{\varepsilon_q^2+\Delta_0^2\}/E_q = \varepsilon_q - E_q$$

Δ_0 / E_q

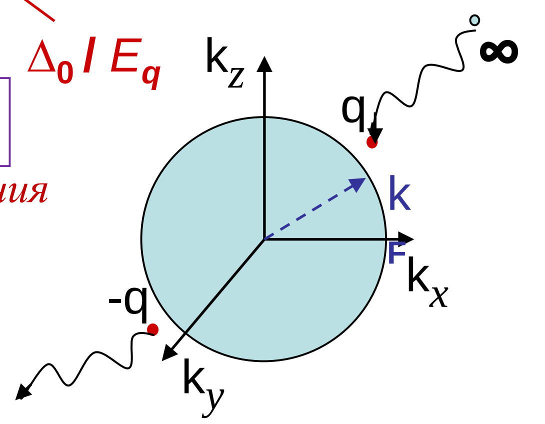
$$\boxed{E_q^2 = \varepsilon_q^2+\Delta_0^2}$$

Энергия квазичастицы:

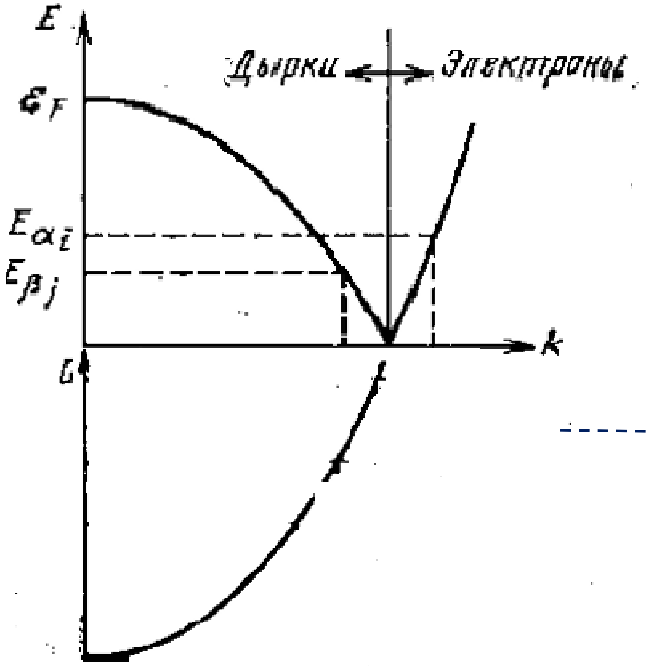
$$+\varepsilon_q - w_q = \varepsilon_q - \varepsilon_q + E_q = E_q$$ → *энергия квазичастичного состояния*

стало *было*

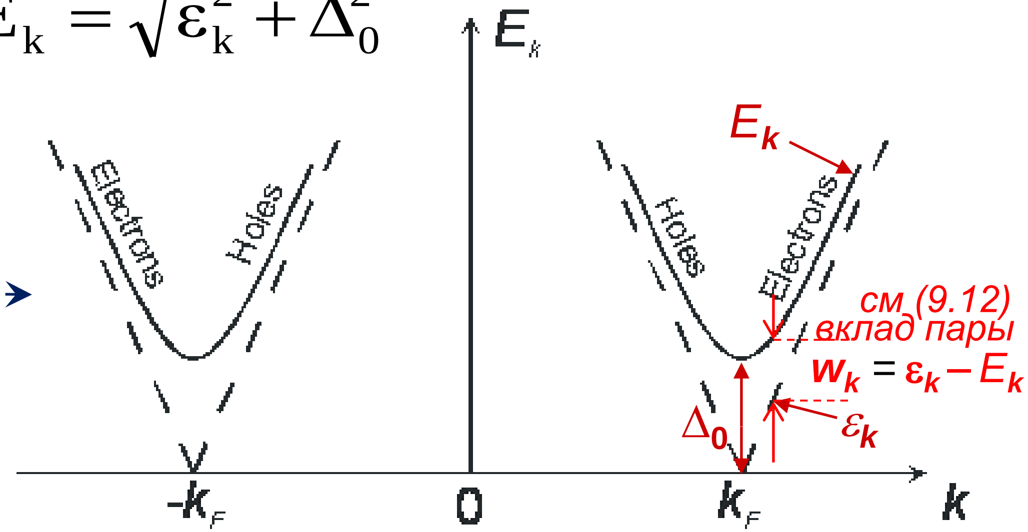
$$\boxed{1-\varepsilon_q^2/E_q^2 = \left(E_q^2-\varepsilon_q^2\right)/E_q^2 = \left(\varepsilon_q^2+\Delta_0^2-\varepsilon_q^2\right)/E_q^2 = \Delta_0^2/E_q^2}$$



Энергетическая щель



$$E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2}$$



$$\varepsilon_k = \left| \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F{}^2}{2m} \right| \approx \frac{\hbar^2 k_F}{m} |k - k_F|$$

$$\varepsilon_e = \hbar^2/2m\{k_2{}^2 - k_F{}^2\} \approx (\hbar^2/2m)\, k_F \Delta k$$

$$\varepsilon_h = \hbar^2/2m\{k_2{}^2 - k_F{}^2\} \approx (\hbar^2/2m)\, k_F \Delta k$$

$$\varepsilon \approx (\hbar^2/2m)\, k_F |\Delta k|$$

Наличие энергетической щели делает возможным сверхтекучесть электронной ферми-жидкости.

Поскольку при разрыве пары возникает два одночастичных возбуждения, наименьшая энергия распаривания равна $2\Delta_0$.

Плотность состояний квазичастиц N(E)

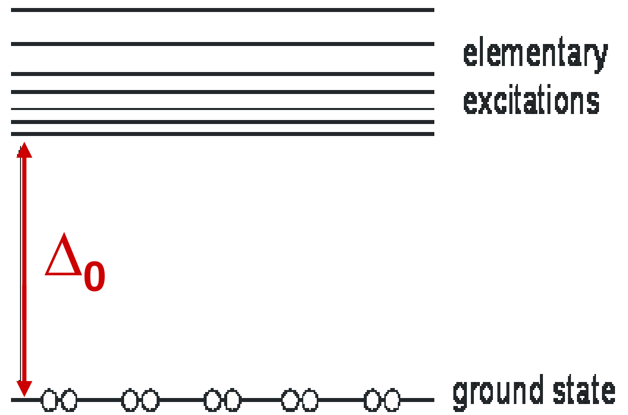
$$dn = N(E)dE \qquad E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2}$$

$$N(E) = \frac{\partial n}{\partial E} = \frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial E} = N(0)\frac{\partial}{\partial E}\sqrt{E^2 - \Delta_0^2}$$

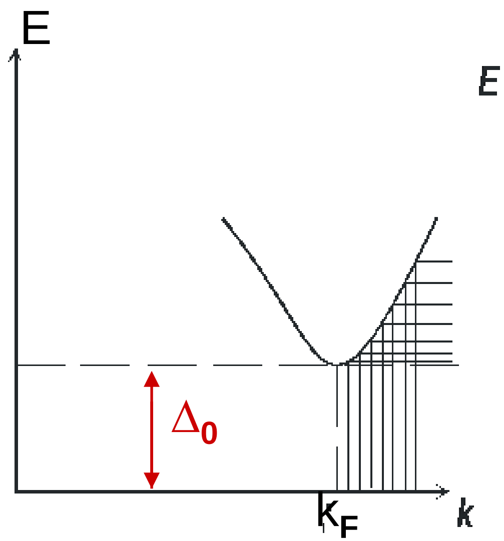
Расходимость при E = Δ !!!

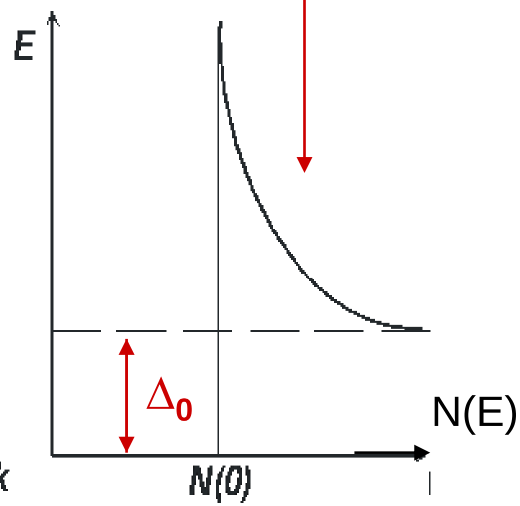
$$\boxed{N(E) = N(0)\frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta_0^2}}}$$

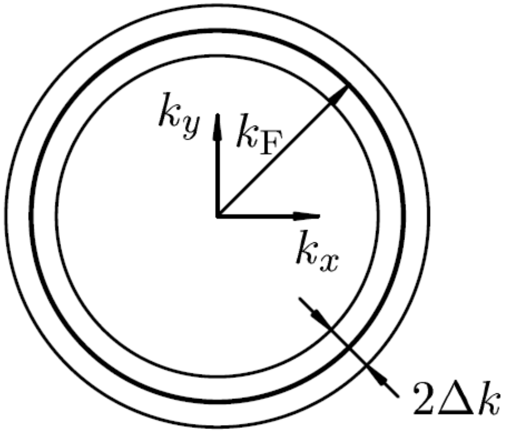
Одночастичные возбужденные состояния



основное (парное) состояние







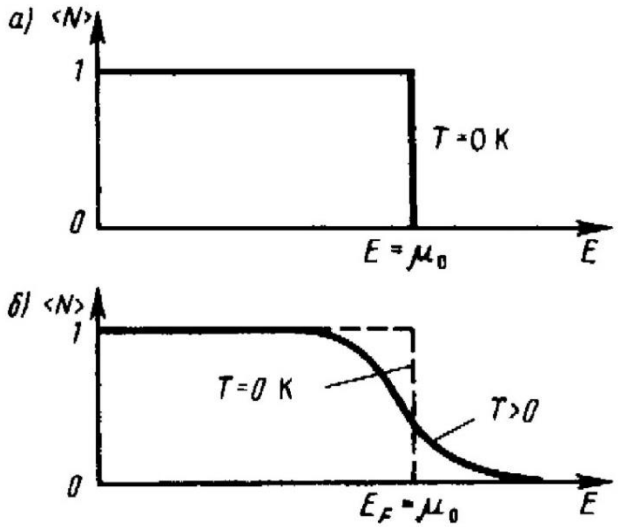
$$2 * 4\pi k^2 dk/(2\pi)^3$$

$$\cancel{\boxed{\varepsilon = \hbar k^2/2m \quad \rightarrow \quad k = \sqrt{\hbar\varepsilon/2m}}}$$

Тема 5
«Температурная зависимость энергетической щели»

Зависимость энергетической щели от T

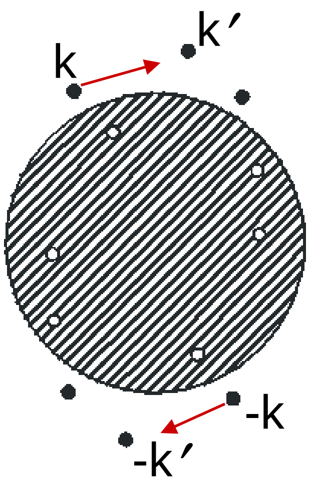
Температура T рождает одночастичные возбуждения за счет термоактивационных процессов.



Одночастичные возбуждения

подчиняются статистике Ферми:

$$f_k = \frac{1}{e^{\frac{E_k}{k_B T}} + 1}$$



Пара состояний k и –k выбывает из процессов перерассеяния при возникновении одночастичных возбуждений либо с импульсом k либо – k. Таким образом, вероятность того, что парное состояние k, – k участвует в образовании сверхпроводящего состояния при конечной температуре: $1 - 2f_k$.

$$E_S - E_N = \sum_0^{\infty} 2\varepsilon_k v_k^2 - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k$$

$$E_S - E_N = \sum_0^{\infty} 2\varepsilon_k v_k^2 (1 - 2f_k) - \sum_{k,k'} V v_k u_{k'} v_{k'} u_k (1 - 2f_k)\,(1 - 2f_{k'})$$

Факторы когерентности и щель при **T ≠ 0**

Минимизируем внутреннюю энергию сверхпроводника, чтобы найти оптимальное распределение v_k^2 ***при*** **T ≠ 0**: $\partial F/\partial v_k^2 = 0$.

Было:

$$E_S - E_N = \sum 2\varepsilon_k v_k^2 - V\sum_{k,k'} v_k u_{k'} v_{k'} u_k$$

$$2\varepsilon_K - 2V\frac{\partial[(v_K^2)^{1/2}(1-v_K^2)^{1/2}]}{\partial v_K^2}\sum v_{k'}u_{k'} = 0$$

Стало:

$$E_S(T) - E_N = \sum 2\varepsilon_\kappa v_\kappa^2(1-2f_\kappa) - V\sum' v_k u_{k'} v_{k'} u_k(1-2f_\kappa)(1-2f_{\kappa'})$$

$$2\varepsilon_K\cancel{(1-2f_K)} - 2V\frac{\partial[(v_K^2)^{1/2}(1-v_K^2)^{1/2}]}{\partial v_K^2}\cancel{(1-2f_K)}\sum v_{k'}u_{k'}(1-2f_{k'}) = 0$$

П***ри минимизации*** $E_S(T=0)$, ***получим выражение*** (см (9.5)):

(10.3), ***где теперь щель*** $\boxed{\Delta(T) = V\sum' v_k u_k(1-2f_\kappa)}$

$$2\varepsilon_K - 2\frac{\partial[(v_K^2)^{1/2}(1-v_K^2)^{1/2}]}{\partial v_K^2}\Delta(T) = 0$$

при T → 0 щель $\Delta \to \Delta_0$, т.к. $f_\kappa \to 0$

Дальше можно не решать

$\boxed{\Delta(T) = V\,\Sigma' v_k u_k (1 - 2f_\kappa)}$

Щель при $T \neq 0$

Решение ур. (10.3): $v_k^2 = (1/2)(1 - \varepsilon_\kappa/E_\kappa)$, ***где теперь*** $E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}$

см (9.7) $u_k^2 = (1/2)(1 + \varepsilon_\kappa/E_\kappa)$ ***определяется через*** $\Delta(T)$

$$\Delta_0 = V\,\Sigma' v_k u_k = V\,\Sigma'[(1/2)^2(1 - \varepsilon_\kappa/E_\kappa)(1 + \varepsilon_\kappa/E_\kappa)]^{1/2} =$$

$$= V\,\Sigma'[(1/2)^2(1 - \varepsilon_\kappa^2/E_\kappa^2)]^{1/2} = (V/2)\,\Sigma'[(E_\kappa^2 - \varepsilon_\kappa^2)/E_\kappa^2)]^{1/2} =$$

$$= (V/2)\,\Sigma'[\Delta_0^2/E_\kappa^2)]^{1/2} = (V\Delta_0/2)\,\Sigma'[1/E_\kappa]$$

Подставляя v_k *и* u_k*, получим (см. аналогично для T=0) уравнение на щель:*

$$\Delta\cancel{(T)} = \{V\Delta\cancel{(T)}/2\}\,\Sigma'\{1/E_\kappa\}\,(1 - 2/\{\exp(E_\kappa/k_B T)+1\})$$

$$1 - \frac{2}{e^x+1} = \frac{e^x+1-2}{e^x+1} = \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{e^{x/2}(e^{x/2}-e^{-x/2})}{e^{x/2}(e^{x/2}+e^{-x/2})} = th(x/2)$$

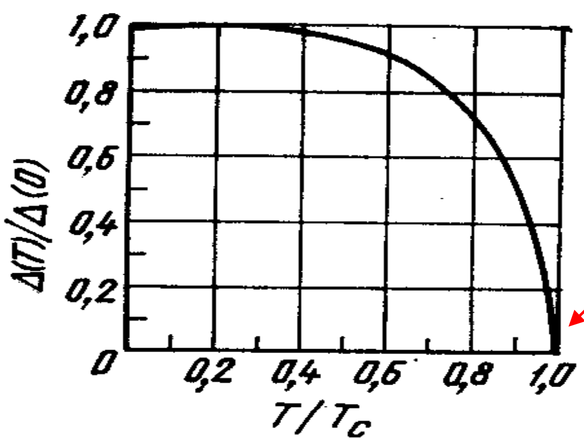
$$\boxed{1 = \sum \frac{V}{2\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2(T)}}\, th\frac{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2(T)}}{2k_B T}}$$

Щель при $\mathbf{T \neq 0}$

$$1 = \sum \frac{V}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}}\, th \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}}{2k_B T}$$

Переходя от суммирования к интегрированию, получим:

$$\boxed{\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}}\, th \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}}{2k_B T}}$$



Вблизи T_c:

$\Delta \sim (1-T/T_c)$

Это неявное выражение для температурной зависимости щели в теории БКШ.

В широкой области температур $\Delta(T)$ можно посчитать только численно (см. рис.).

$H_{cm} = (N(0)/\mu_0)^{1/2}\Delta_0$

$\Delta_0 = \{\mu_0/N(0)\}^{1/2} H_{cm}$

$H_{cm} \sim (1-T/T_C)$

Есть 2 выделенные температуры, в которых интеграл берется:

$T = 0$ $\quad$ $T = T_c$

Связь щели Δ_0 и T_c

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2(T)}}\, th\frac{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2(T)}}{2k_B T}$$

При T=T$_c$ щель Δ(T) обращается в ноль и (10.5) ***принимает вид***:

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\, th\frac{\varepsilon}{2k_B T_c} \Rightarrow \frac{1}{N(0)V} = \int_0^{x_0} \frac{dx}{x}\, th\ x,\quad x = \frac{\varepsilon}{2k_B T_c},\quad x_0 = \frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}$$

интеграл при $x_0 \gg 1$,

$$\int_0^{x_0} \frac{th\ x}{x}\, dx = \ln\{2Ax_0\}$$

$A = 2\exp(\gamma)/\pi \approx 1{,}14$, γ - *постоянная Эйлера*

$1/N(0)V = \ln\,[1.14\ \hbar\omega_D / k_B T_c]$ *при* $\hbar\omega_D \gg k_B T_c$

$k_B T_c = 1{,}14\ \hbar\omega_D\ exp\{-1/(N(0)V)\}$ $\rightarrow$ $k_B T_c / 1{,}14 = \Delta_0/2$

$\hbar\omega_D \exp\{-1/(N(0)V)\} = \Delta_0/2$

*4

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{N(0)V}\right)$$

$$\boxed{2\Delta_0 = 3{,}52\ k_B T_c}$$

$$\Delta_0 = 1{,}76\ k_B T_c$$

Экспериментальные следствия

$$k_B T_c = 1{,}14\,\hbar\omega_D\, exp\{-1/(N(0)V)\}$$

Изотопический эффект: $T_c \sim \omega_D \sim m^{-1/2}$, где m – масса изотопа

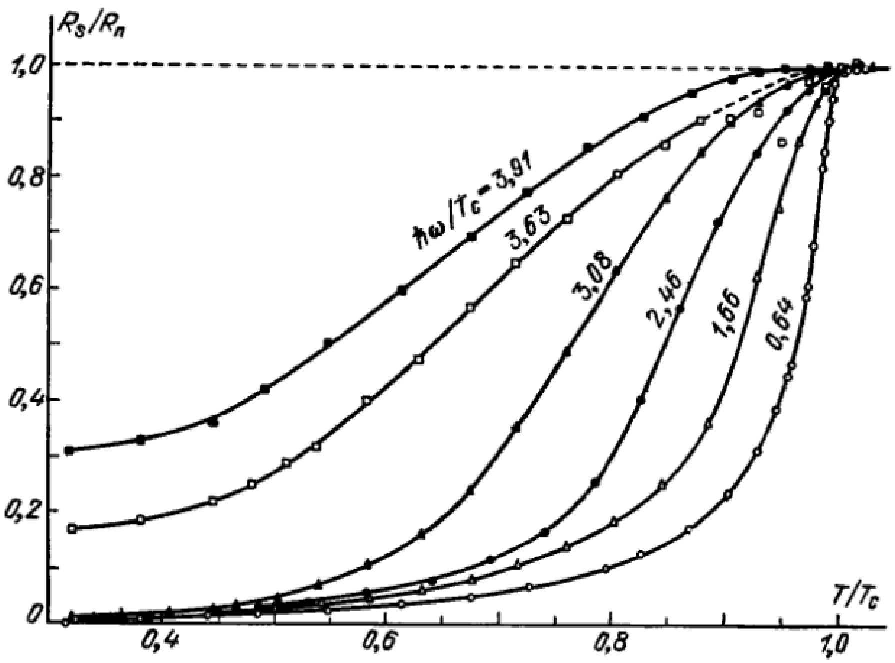
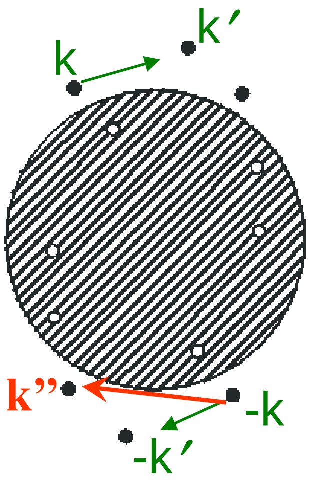
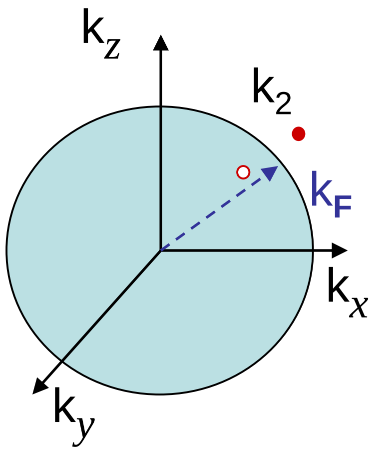


Рис. 19.4



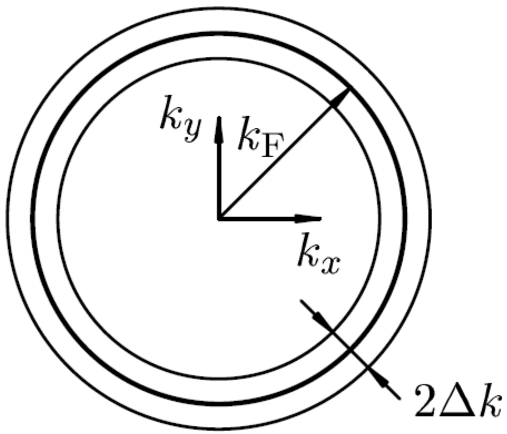


*4

$$2\Delta_0 = 3{,}52\, k_B T_c$$

Размер куперовской пары

Размер куперовской пары: $\Delta x^*\Delta p \sim \hbar \;\xrightarrow{\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}}\; \Delta x^*\hbar\Delta k \sim \hbar \;\rightarrow\; \Delta x^*\Delta k \sim 1$



$$\boxed{\Delta x = 1/\Delta k}$$

$$\varepsilon \propto k^2 \;\Rightarrow\; d\varepsilon \propto k\,dk$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \propto \frac{k\,dk}{k^2} = \frac{dk}{k}$$

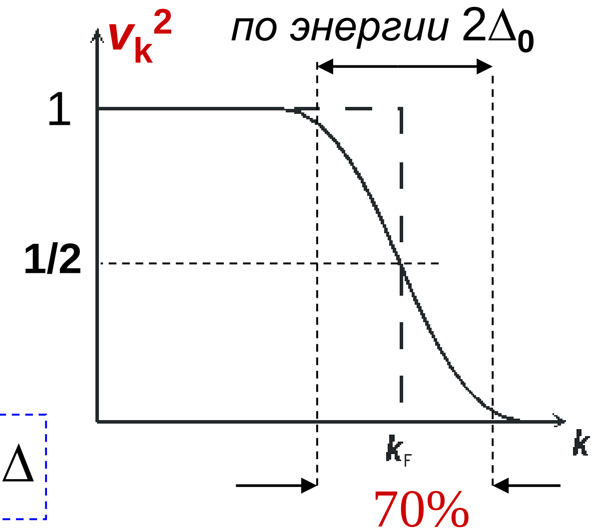
$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\Delta k = k_F \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_F}}$$

$$\boxed{\Delta\varepsilon = 2\hbar\omega_D \;?\; 2\Delta}$$

$\varepsilon \approx (\hbar^2/2m)\, k_F|\Delta k|$

по энергии $2\Delta_0$



$$\boxed{2\Delta_0 = 3{,}52\, k_B T_c}$$

$\Delta k/k_F \sim 2\Delta_0/\varepsilon_F \leq 10^{-3} \quad\rightarrow\quad \Delta k \sim k_F 2\Delta_0/\{\hbar^2 k_F^2/2m\} = 4\Delta_0/\{\hbar\hbar k_F/m\} = 4\Delta_0/\hbar v_F$

Неопределенность координаты (размер пары): $\xi_0 \sim 1/\Delta k \sim \hbar v_F/4\Delta_0 \sim \hbar v_F/(7k_B T_c)$

Точный ответ: $\boxed{\xi_0 = 0.18\,\hbar v_F / k_B T_c}$ ***$\sim 10^{-5}$-10^{-4} см;*** “объем пары”- 10^{-15} см^3

Время жизни когерентных состояний

$\Delta E\ \Delta t \sim \hbar$

Образование куперовских пар – динамический процесс. Время жизни: $\Delta t \sim \hbar / \Delta E$

$\Delta E \sim \Delta_0$

$\boxed{\Delta t \sim \hbar / \Delta}$

Размер куперовской пары: $\xi_0 \sim v_F \Delta t \sim \hbar v_F / \Delta$ совпадает! $\xi_0 >> l$

N-слой: $\Delta E \sim kT$ $\boxed{\Delta t \sim \hbar / 2\pi kT}$ $\xi_N \sim v_F \Delta t \sim \hbar v_F / 2\pi kT$

Влияние примесей: $\xi_d = \sqrt{D\Delta t} = \left(\frac{1}{3} l v_F \hbar / \Delta\right)^{1/2} \approx (l\xi_0)^{1/2}$ $\xi_N = (\hbar D_N / 2\pi kT)^{1/2}$

немагнитные

Объем пары: $\xi_0 = 0.18\, \hbar v_F / k_B T_c$ ***~ 10⁻⁵-10⁻⁴ см;*** "объем пары"- 10^{-15} см^3 10^8 ???

$$\frac{V}{N_S} = ?$$

$$n_e \cong 10^{23} cm^{-3}$$

$$N_S = \frac{3\Delta k}{k_F} N_e = \frac{3k\Theta_D}{\varepsilon_F} 10^{23} \cong 10^{21-22} \Rightarrow \frac{V}{N_S} = 10^{-21} \div 10^{-22} cm^{-3}$$

Много куперовских пар пересекаются (от сотен)