Návrh číslicových systémů (INC)

Jiří Matoušek, Otto Fučík

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta informačních technologií
Božetěchova 2, 612 66 Brno

Použitá literatura

N. Frištacký, M. Kolesár, J. Kolenička a J. Hlavatý: „Logické systémy“, SNTL Praha, 1986
M. Eysselt: „Logické systémy“, SNTL Praha, skriptum VUT v Brně, 1985
J. F. Wakerly: „Digital Design. Principles and Practices“, Prentice Hall, ISBN 0-13-769191-2, 2000
V. P. Nelson, H.T.Nagle, B.D.Carroll, J.D.Irwin: „Digital Logic Circuit Analysis & Design“, ISBN 0-13-463894-8, 1995
T.L.Floyd: „Digital Fundamentals“, Prentice Hall, ISBN 0-13-080850-4, 2000

Booleova algebra, minimalizace

Obsah

- Booleova algebra
  - axiomy
  - teorémy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
  - Karnaughova mapa
  - metoda Quine-McCluskey

Booleova algebra [G. Boole, 1854]

1. Distributivní komplementární svaz
   - Obsahuje alespoň dva prvky
2. Šestice (B, +, ·, ′, 0, 1)
   - B neprázdná množina s alespoň dvěma různými prvky
   - \+ logický součet (binární operace)
   - · logický součin (binární operace)
   - ′ komplement (unární operace)
   - 0 nejmenší (nulový) prvek (infimum)
   - 1 největší (jedničkový) prvek (supremum)
   - Definuje množinu prvků, množinu operátorů, axiomy (postuláty) a teorémy (věty)

- Dvouhodnotová Booleova algebra
  - Axiomy a teorémy Booleovy algebry (1854) jsou definovány obecně
  - My se omezíme na algebru, ve které logické proměnné a výsledky logických funkcí mohou nabývat pouze hodnot 0 a 1 ($0 \neq 1$)

Princip duality

- Pokud platí nějaké tvrzení, tak platí i duální tvrzení, které vznikne vzájemnou záměnou operací „+” a „·” a prvků 0 a 1

$$0 \to 1 \quad 1 \to 0 \quad "+" \to "\cdot" \quad "\cdot" \to "+"$$

- Příklad:

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \to a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Poznámka
  - Pokud platí jisté tvrzení, není třeba dokazovat tvrzení duálního tvrzení

Obsah

- Booleova algebra
  - axiomy
  - teorémy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
  - Karnaughova mapa
  - metoda Quine-McCluskey

Přehled axiomů [E. V. Huntington, 1904] $a, b, c \in B$

- Uzavřenost (výsledky log. operací patří do množiny B)

  $(a + b) \in B$ (I a) $(a \cdot b) \in B$ (I b)

- Neutralita prvků 0 a 1 (identita)

  $a + 0 = a$ (II a) $a \cdot 1 = a$ (II b)

- Zákony komutativní (komutativita)

  $a + b = b + a$ (III a) $a \cdot b = b \cdot a$ (III b)

- Zákony distributivní (distributivita)

  $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$ (IV a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (IV b)

- Existence komplementu (komplementárnost)

  $a \cdot a' = 0$ (V a) $a + a' = 1$ (V b)

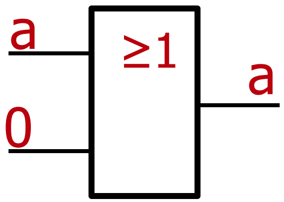
- V množině B existují alespoň dva různé prvky (VI)

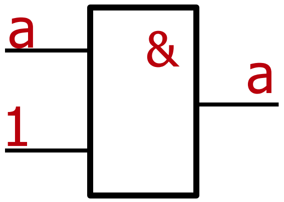
Využití axiomů při návrhu log. obvodů

- Neutralita prvků 0 a 1

$$a+0=a \quad \text{(II a)} \qquad\qquad a\cdot 1=a \quad \text{(II b)}$$

- Z hlediska případné realizace logických obvodů z log. členů tento axiom říká, že přičtení log. nuly, resp. vynásobení log. jedničkou, nezmění hodnotu proměnné
- Uvedenou operaci tedy není třeba realizovat, a můžeme tak ušetřit příslušné log. členy

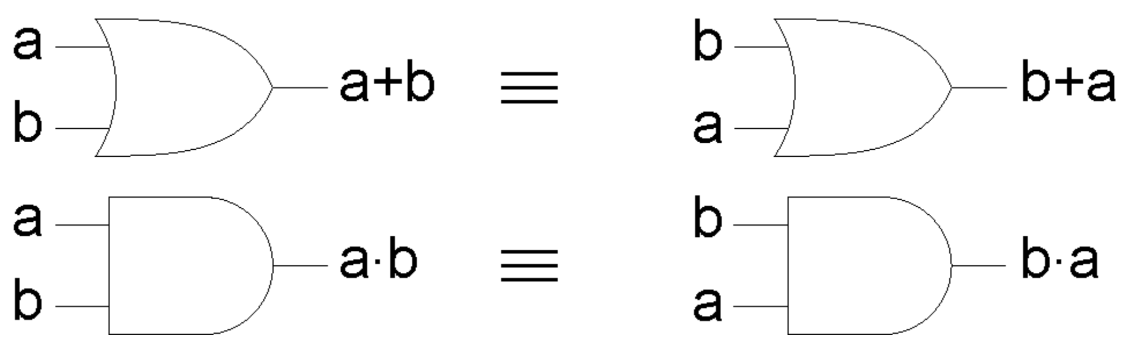




- Zákony komutativní

$$a+b=b+a \quad \text{(III a)} \qquad a\cdot b=b\cdot a \quad \text{(III b)}$$

- V případě realizace log. obvodů z log. členů AND a OR je jedno, na který ze vstupů přivedeme příslušnou log. proměnnou – jsou symetrické
- Máme tedy volnost při volbě vstupů příslušných log. členů, čehož se s výhodou využívá při implementaci log. obvodů, např. v integrovaných obvodech, na deskách s plošnými spoji apod.

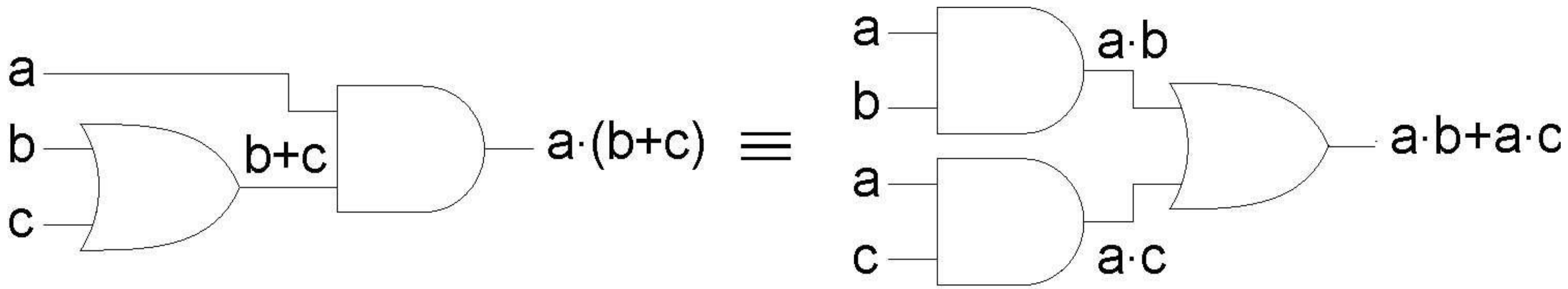


- Zákony distributivní

$$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c) \qquad \text{(IV a)}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{(IV b)}$$

- Výrazy lze zjednodušovat eliminací společné proměnné
- Vidíme, že aplikací distributivního zákona můžeme ušetřit jeden log. člen AND se dvěma vstupy (1/3 log. členů) a dva vodiče (2/7 všech vodičů)



Obsah

- Booleova algebra
  - axiomy
  - teorémy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
  - Karnaughova mapa
  - metoda Quine-McCluskey

Teorémy (věty) Booleovy algebry

- Teorémy
  - Jsou odvozeny na základě axiomů Booleovy algebry a definují další užitečné vlastnosti
- Důkazy lze provést
  - Systematickou aplikací axiomů a již dříve dokázaných teorémů
  - Pomocí Vennových diagramů, atd.
- Příklad
  - Důkazu distributivního zákona pomocí úplné indukce

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Použitím úplné indukce
  - Postupně vyčíslujeme hodnoty výrazů pro všechny možné kombinace hodnot vstupních proměnných; pokud se vždy dosáhne správného výsledku, je dokázáno, že daný výraz platí

a	b	c	(b+c)	a·b	a·c	a·(b+c)	a·b+a·c
0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
0	0	1	1	0	0	**0**	**0**
0	1	0	1	0	0	**0**	**0**
0	1	1	1	0	0	**0**	**0**
1	0	0	0	0	0	**0**	**0**
1	0	1	1	0	1	**1**	**1**
1	1	0	1	1	0	**1**	**1**
1	1	1	1	1	1	**1**	**1**

Přehled teorémů [E. V. Huntington, 1904]

- Jedinečnost 0 a 1
  - Prvek 0 je v axiomu $a+0=a$ (II a) jedinečný (VII a)
  - Prvek 1 je v axiomu $a \cdot 1 = a$ (II b) jedinečný (VII b)
- Idempotence

  $a + a = a$ (VIII a) $a \cdot a = a$ (VIII b)
- Agresivita 1 a 0

  $a+1=1$ (IX a) $a \cdot 0 = 0$ (IX b)
- Absorpce

  $a + a \cdot b = a$ (X a) $a \cdot (a+b) = a$ (X b)
- Existence jediného komplementu: a′ je plně určen a (XI)
- De Morganovy zákony

  $(a+b)' = a' \cdot b'$ (XII a) $(a \cdot b)' = a' + b'$ (XII b)
- Zákony asociativní (asociativita)

  $(a+b)+c = a+(b+c)$ (XIII a) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (XIII b)

- Idempotence

$$a + a = a \quad \text{(VIII a)}$$

$$a \cdot a = a \quad \text{(VIII b)}$$

- Důkaz
  - Postupnou aplikací dříve uvedených zákonů

$$a + a = (a + a) \cdot 1$$
$$= (a + a) \cdot (a + \overline{a})$$
$$= a + a \cdot \overline{a}$$
$$= a + 0$$
$$= a$$

- Význam
  - Zjednodušením výrazu lze ušetřit příslušný logický člen

- Agresivita 0 a 1

$$a + 1 = 1 \quad \text{(IX a)}$$

$$a \cdot 0 = 0 \quad \text{(IX b)}$$

- Důkaz

$$a + 1 = (a + 1) \cdot 1$$
$$= (a + 1) \cdot (a + \overline{a})$$
$$= a + 1 \cdot \overline{a}$$
$$= a + \overline{a}$$
$$= 1$$

- Význam
  - Eliminace zbytečných členů

- Absorpce

$$a + a \cdot b = a \quad \text{(X a)}$$

$$a \cdot (a + b) = a \quad \text{(X b)}$$

- Důkaz

$$a + a \cdot b = a \cdot 1 + a \cdot b$$
$$= a \cdot (1 + b)$$
$$= a \cdot 1$$
$$= a$$

- Význam
  - Eliminace přebytečné proměnné ve výrazu

- Existence jediného komplementu (XI)

- Důkaz
  - Předpokládejme, že dva prvky $x, y \in B$ mají vlastnost komplementu prvku *a*, tedy:
  - Platí (existence komplementu):

$$a \cdot x = 0 \quad a + x = 1$$

$$a \cdot y = 0 \quad a + y = 1$$

  - Platí (idempotence):

$$a \cdot a = a$$

$$a \cdot a = a$$

$$x = 1 \cdot x$$

$$x = (a + y) \cdot x$$

$$x = (a \cdot x) + (y \cdot x)$$

$$x = 0 + (y \cdot x)$$

$$x = y \cdot x$$

  - Platí tedy, že *x* = *y*, což je v rozporu s předpokladem

- De Morganovy zákony

$$a + b = (a' \cdot b')' \quad \text{(XII a)} \qquad a \cdot b = (a' + b')' \quad \text{(XII b)}$$

$$(a + b)' = a' \cdot b' \qquad (a \cdot b)' = a' + b'$$

- Zobecnění pro více proměnných

$$(a + b + c + \ldots)' = a' \cdot b' \cdot c' \ldots \qquad (a \cdot b \cdot c \ldots)' = a' + b' + c' + \ldots$$

- Důkaz (úplnou indukcí)

a	b	a+b	not(a+b)	not(a)	not(b)	not(a).not(b)
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

- Využití
  - Negace součtu lze nahradit součinem negací, resp. negace součinu součtem negací

- Zákony asociativní

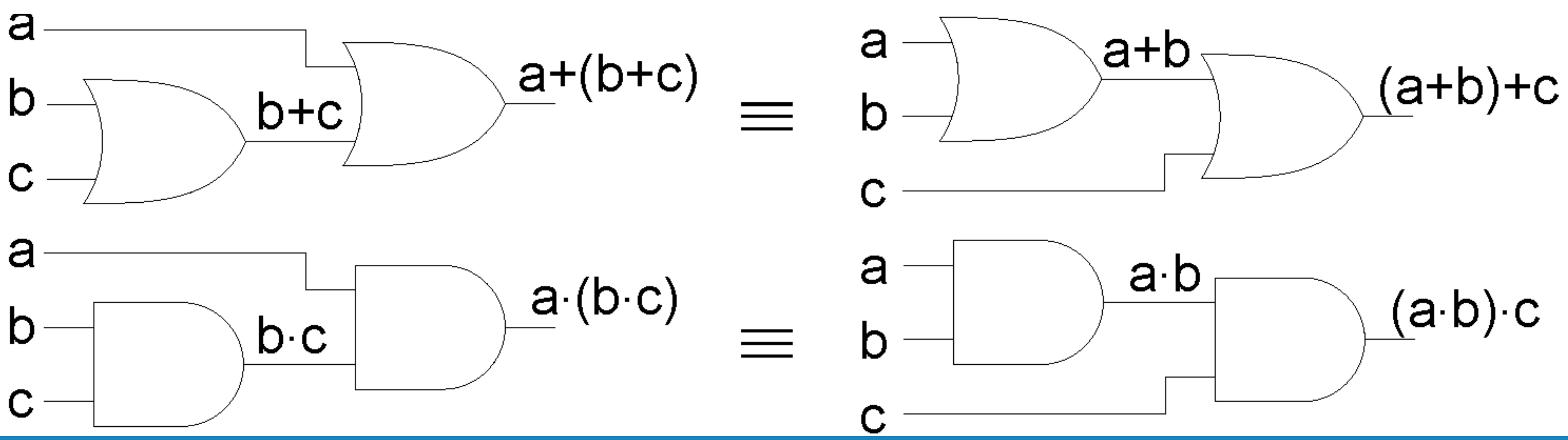
(XIII a)

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

(XIII b)

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

- Využití
  - Nezáleží na pořadí vyčíslování operací log. součtu a součinu
  - Realizace log. operací i více proměnných než dvou může být provedena pouze s log. členy se dvěma vstupy



- Involuce (dvojitá negace)

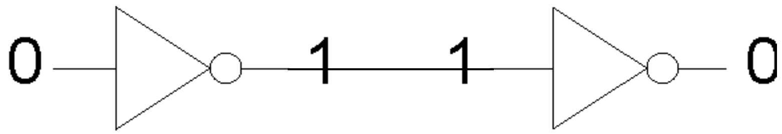
$$\overline{\overline{a}} = a$$

- Důkaz
  - Pomocí úplné indukce

$$\overline{\overline{1}} = \overline{0} = 1 \qquad \overline{\overline{0}} = \overline{1} = 0$$

$$a = 1 \qquad a = 0$$

- Využití
  - Není třeba dávat dva invertory za sebe



Důkazy a využití teorémů

- Absorpce negace

$$a + a' \cdot b = a + b \qquad\qquad a \cdot (a' + b) = a \cdot b$$

- Důkaz

$$a + a' \cdot b = (a + a') \cdot (a + b)$$
$$= 1 \cdot (a + b)$$
$$= a + b$$

- Využití
  - Možnost eliminace přebytečného komplementu proměnné ve výrazu

- Sousednost (spojování, adjecency)

$$a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a \qquad (a+b)\cdot(a+\overline{b}) = a$$

- Důkaz

$$a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a \cdot (b + \overline{b})$$

$$= a \cdot 1$$

$$= a$$

- Význam
  - Lze eliminovat přebytečné proměnné vyskytující se jak v přímé, tak komplementární formě ve výrazu
  - Uplatňuje se v řadě tzv. minimalizačních technik (např. Karnaughova mapa, metoda Quine-McCluskey atd.) vypracovaných pro systematické zjednodušování logických výrazů

Obsah

- Booleova algebra
  - axiomy
  - teorémy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
  - Karnaughova mapa
  - metoda Quine-McCluskey

Normální formy – ÚNDF (SOP)

- Úplná normální disjunktní forma (ÚNDF)
  - Suma součinů
    (anglicky Sum Of Products – SOP)
  - Sepisujeme kombinace vstupních proměnných, ve kterých fce nabývá hodnoty log. 1
    (proměnné zapisujeme přímo)
  - Termům říkáme implikanty (mintermy)
- Částečně minimalizovaná ÚNDF
  - Zkrácená normální disjunktní forma (ZNDF)
- Minimální možné řešení
  - Minimální normální disjunktní forma (MNDF)

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Term = uspořádaná skupina proměnných a operátorů

$$F(x,y,z) = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot y\cdot\overline{z} + x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + x\cdot y\cdot\overline{z}$$

$$= \overline{x}\cdot\overline{z} + x\cdot\overline{z}$$

$$= \overline{z}$$

- Úplná normální konjunktní forma (ÚNKF)
  - Součin sum
    (anglicky Product Of Sums – POS)
  - Sepisujeme kombinace vstupních proměnných, ve kterých fce nabývá hodnoty log. 0
    (proměnné zapisujeme komplementárně)
  - Termům zde říkáme implicenty (maxtermy)
- Částečně minimalizovaná
  - Zkrácená normální konjunktní forma (ZNKF)
- Minimální řešení
  - Minimální normální konjunktní forma (MNKF)

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$$
\begin{aligned}
&F(x,y,z)\\
&=(x+y+\overline{z})\cdot(x+\overline{y}+\overline{z})\cdot(\overline{x}+y+\overline{z})\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})\\
&=(x+\overline{z})\cdot(\overline{x}+\overline{z})\\
&=\overline{z}
\end{aligned}
$$

Zkrácený způsob zápisu normálních forem

- Nezkrácená ÚNDF

$$F(x,y,z)=\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot y\cdot\overline{z}+x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+x\cdot y\cdot\overline{z}$$

- Varianty zkráceného zápisu ÚNDF

$$F(x,y,z)=\vee(0,2,4,6)=1(0,2,4,6)=\Sigma m(0,2,4,6)$$

  - V závorce jsou uvedeny stavové indexy, pro které nabývá funkce hodnoty log. 1
  - Před závorkou máme označení disjunktní formy pomocí operátoru log. součtu či sumy implikantů (m jako minterm)

- Nezkrácená ÚNKF

$$F(x,y,z)=(x+y+\overline{z})\cdot(x+\overline{y}+\overline{z})\cdot(\overline{x}+y+\overline{z})\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$$

- Varianty zkráceného zápisu ÚNKF

$$F(x,y,z)=\wedge(1,3,5,7)=\&(1,3,5,7)=\Pi M(1,3,5,7)$$

  - V závorce jsou uvedeny stavové indexy, pro které nabývá funkce hodnoty log. 0
  - Před závorkou máme označení konjunktní formy pomocí operátoru log. součinu či součinu implicentů (M jako Maxterm).

- Pokud log. funkce nabývá pro nějakou kombinaci vstupních proměnných neurčené hodnoty X, pak ji můžeme interpretovat jako hodnotu log. 1 či log. 0
  - Toho lze z výhodou využít při minimalizaci funkce
- Příklad možného zkrácení ÚNDF zápisu neúplně definované funkce

$$F(w,x,y,z) = \vee(2,3,4,6,8,9,13) + x(7,12)$$
$$= 1(2,3,4,6,8,9,13) + x(7,12)$$
$$= \Sigma m((2,3,4,6,8,9,13) + x(7,12))$$

s	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	x
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Obsah

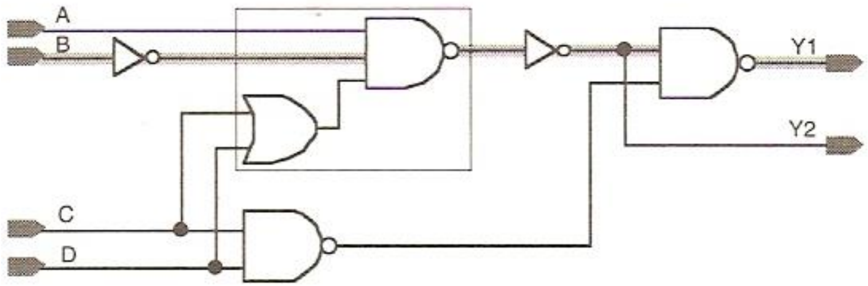
- Booleova algebra
  - axiomy
  - teorémy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
  - Karnaughova mapa
  - metoda Quine-McCluskey

Optimalizace logických obvodů: Kritéria

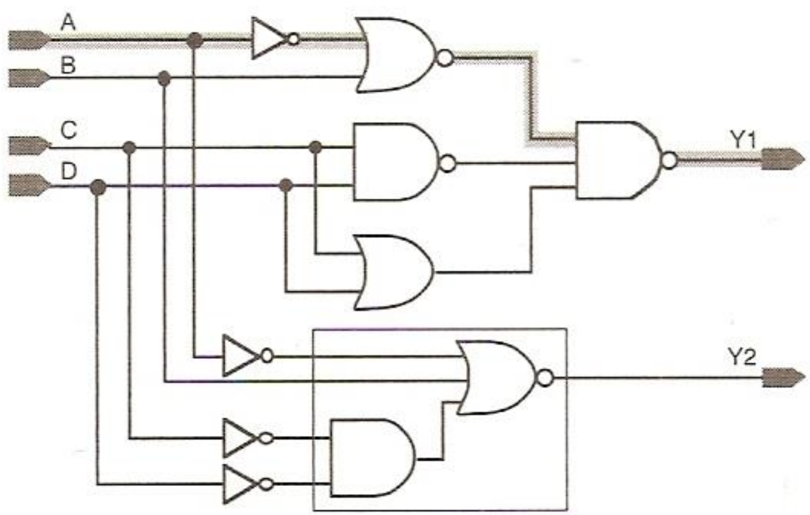
- Plocha (area)
  - Část čipu, kterou obvod zabírá
  - Je ovlivněna řadou parametrů - počet log. členů (viz minimalizace), rozměry log. členů (technologie výroby, logický zisk), spoje
- Časování (timing)
  - Doba, za kterou se po změně vstupních proměnných ustálí výstupní proměnné obvodu
  - Je ovlivněno řadou parametrů - délka logické větve, logický zisk a zátěž log. členů, parazitní kapacity, délka spojů atd.
- Příkon (power)
  - Příkon obvodu ovlivňuje počet log. členů, pracovní frekvence, velikost napájecího napětí, parazitní kapacity, výrobní proces atd.
- Testovatelnost (test, scan)
  - Logické obvody je třeba navrhovat tak, aby bylo možno otestovat jejich správnou činnost

A	B	C	D	Y1	Y2
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0

- Minimální plocha
  - Počet log. členů: 6
  - Plocha: 12 (skutečné rozměry na čipu)
  - Zpoždění: 4 t_d



- Minimální zpoždění
  - Počet log. členů: 10
  - Plocha: 28 (skutečné rozměry na čipu)
  - Zpoždění: 3 t_d



- V rámci této předášky se budeme zabývat především minimalizací počtu logických členů potřebných pro realizaci dané funkce
- Minimalizační metody
  - Algebraické
    - Postupnou aplikací axiomů a teorémů Booleovy algebry
  - Grafické
    - Jednotková krychle
    - Vennův diagram
    - Mapy (Svobodova, Karnaughova)
  - Algoritmické
    - Quine-McCluskey
    - Espresso atd.

- Příklad
  - Funkce F(x,y,z) je definována pravdivostní tabulkou

s	x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

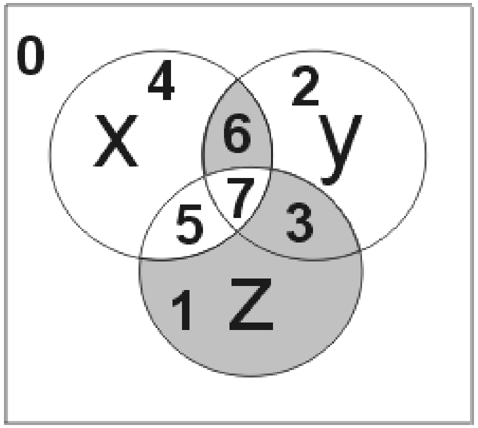
- Minimalizace funkce algebraicky

$$F(x,y,z)=\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z+\overline{x}\cdot y\cdot z+x\cdot y\cdot\overline{z}$$

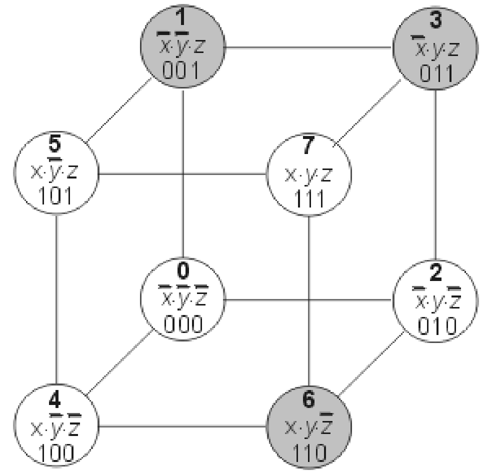
$$=\overline{x}\cdot z\cdot(y+\overline{y})+x\cdot y\cdot\overline{z}$$

$$=\overline{x}\cdot z+x\cdot y\cdot\overline{z}$$

- Vennův diagram



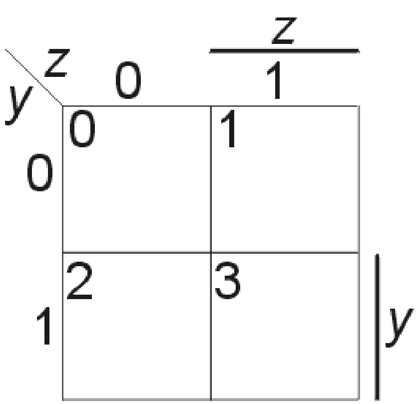
- Jednotková krychle

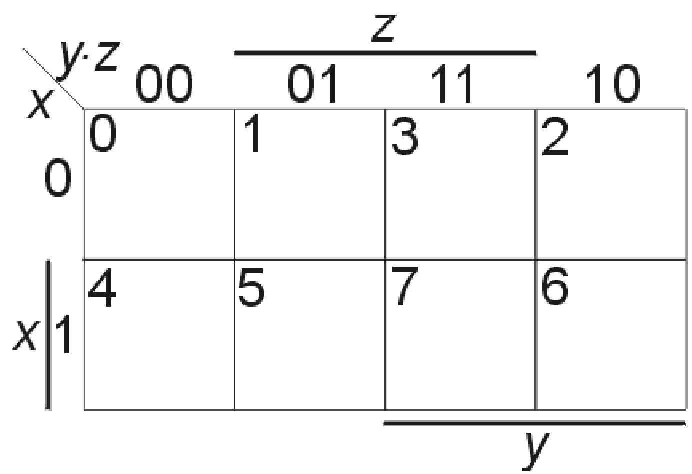


- Zvýrazněny jsou stavy, ve kterých jsou pravdivostní hodnoty funkce F(x,y,z) rovny log. 1 (tedy stavy 1, 3 a 6)
- Stavy 1-3 se liší v jedné proměnné
  - Lze tedy eliminovat proměnnou, jejíž váha je rovna rozdílu hodnot příslušných stavů
  - 3 – 1 = 2, což odpovídá váze proměnné, kterou můžeme eliminovat (proměnná y)

Logická mapa

- Reprezentace log. funkce maticově
- Marquandova (Svobodova) mapa
  - Při otočení přiřazení proměnných o 180° kolem středu mapy získáme přiřazení inverzní
- Karnaughova mapa
  - Sousedním políčkům jsou přiřazeny sousedné kombinace vstupních stavů (liší se v jedné proměnné)
- Pozn.: mapy mohou být různě pootočeny
- Příklady



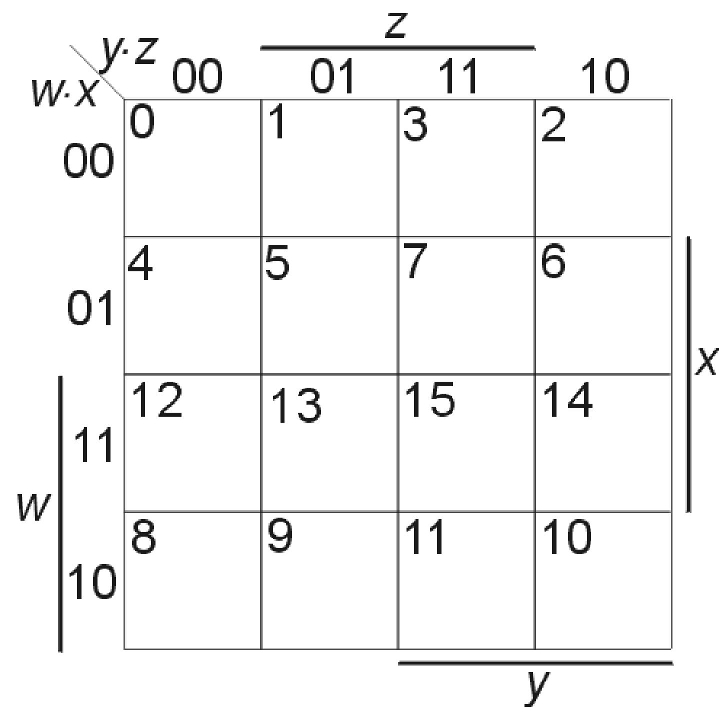


- Booleova algebra
  - axiomy
  - teorémy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
  - Karnaughova mapa
  - metoda Quine-McCluskey

Karnaughovy mapy

- Platí
  - V buňkách pod pruhem má daná proměnná hodnotu log. 1
  - V buňkách mimo pruh má daná proměnná hodnotu log. 0
  - Existuje řada možných nákresů K mapy (umístění proměnných…)
  - Buňky si též můžeme označit binárním kódem odpovídajícím jednotlivým kombinacím vstupních proměnných
  - Důležité je dodržet pravidlo, že se sousední buňky liší v jedné proměnné

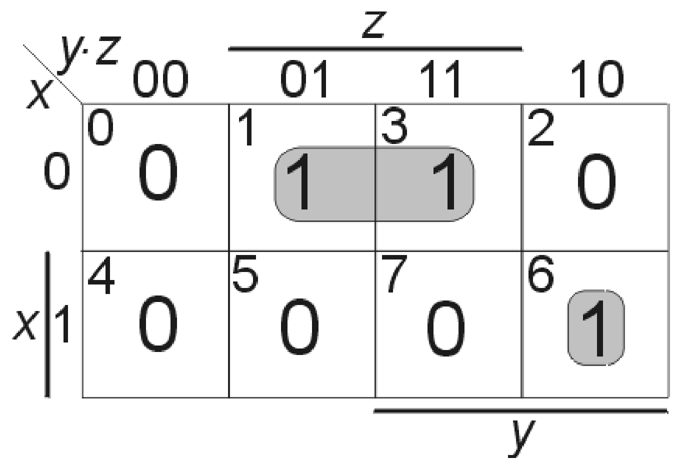
- Příklad
  - Mapa pro 4 proměnné



Příklad minimalizace

- Funkce F(x,y,z)

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0



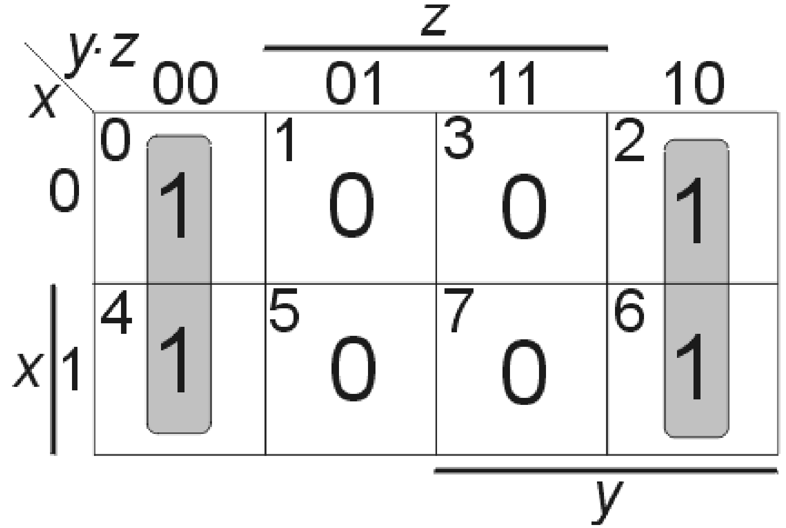
$$F(x,y,z)=\overline{x}\cdot z+x\cdot y\cdot\overline{z}$$

- Postup minimalizace
  - Hledáme sousední buňky, ve kterých nabývá funkce hodnotu log. 1
  - Sdružením těchto buněk eliminujeme proměnnou, jejíž hodnota se v těchto buňkách mění – *y*
    - Dvojice 1-3 leží pod pruhem proměnné *z* a mimo pruh *x* (= komplement *x*) – kombinace odpovídající stavovému indexu 6 zůstává nezměněna

Příklad minimalizace více proměnných – 1/3

- Sdružíme-li buňky 0-4 a 2-6
  - Eliminujeme proměnnou *x*

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

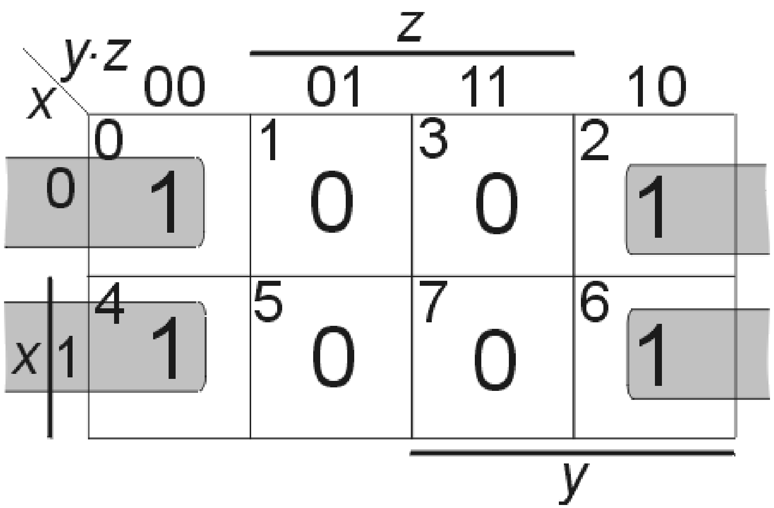


$$F(x,y,z)=\overline{y}\cdot\overline{z}+y\cdot\overline{z}$$

Příklad minimalizace více proměnných – 2/3

- Sdružíme-li buňky 0-2 a 4-6
  - Eliminujeme proměnnou *y*

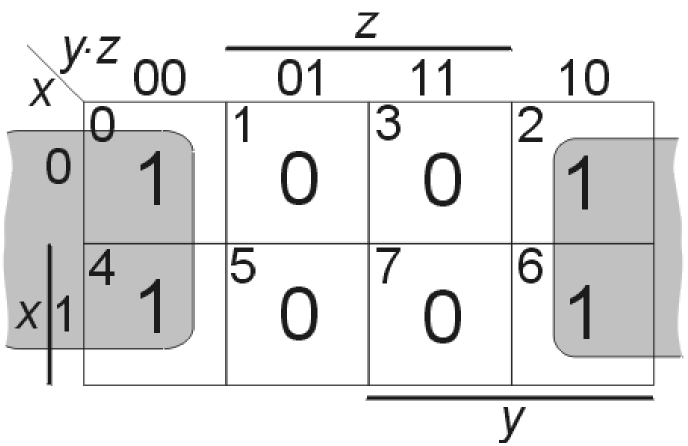
s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0



$$F(x,y,z)=\overline{x}\cdot\overline{z}+x\cdot\overline{z}$$

- Sdružíme-li buňky 0-2-4-6
  - Eliminujeme proměnné *x* a *y*

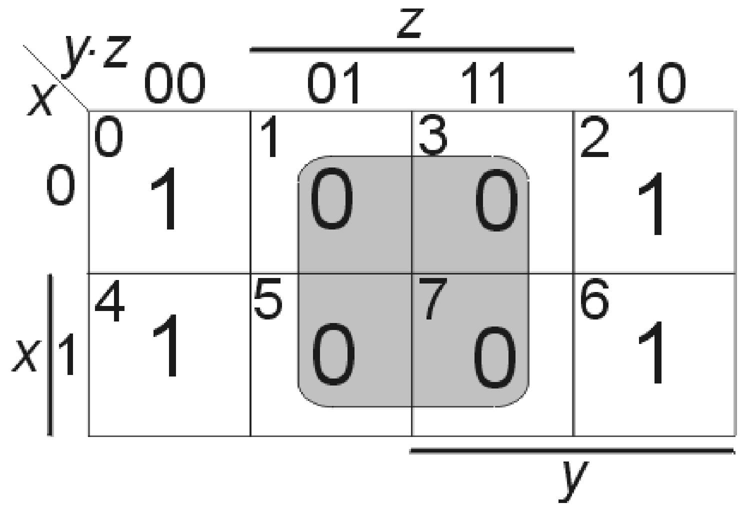
s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0



$$F(x,y,z) = \overline{z}$$

- Karnaughova mapa
  - Tvoří se obdobně jako v případě disjunktní formy s tím rozdílem, že se v mapě se sdružují log. 0 a ne log. 1
  - Proměnné se negují a výsledek se zapisuje v konjunktní formě

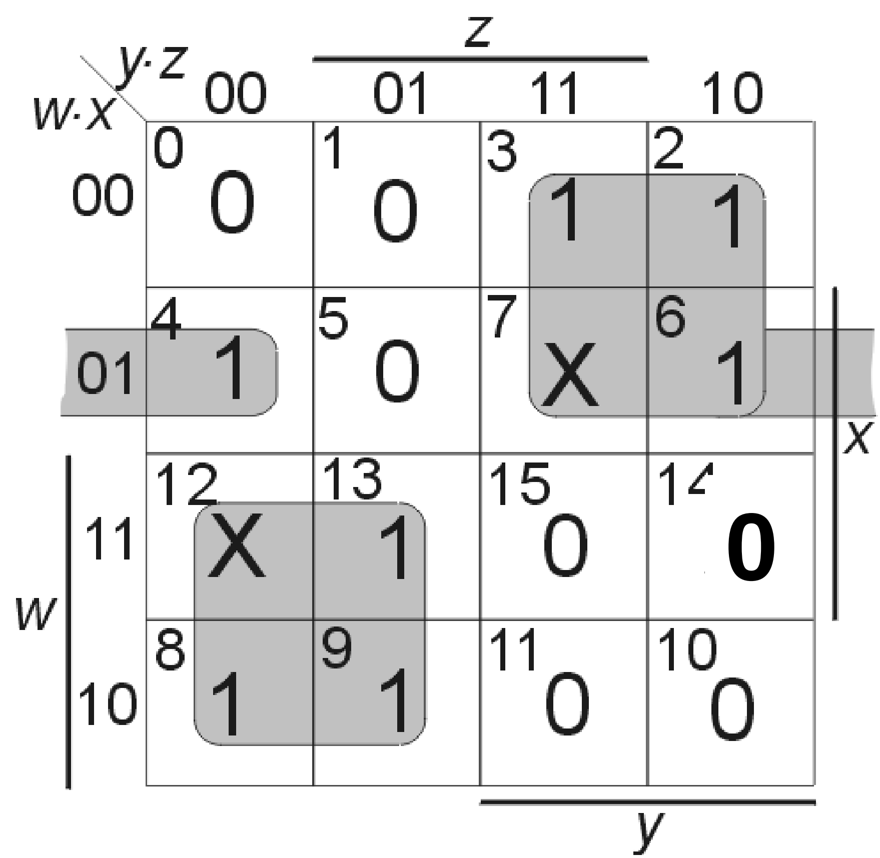
$$F(x,y,z) = \&(1,3,5,7)$$



  - Příklad
    - F(x,y,z) = not(z)

Neúplně definované funkce

- Karnaughova mapa

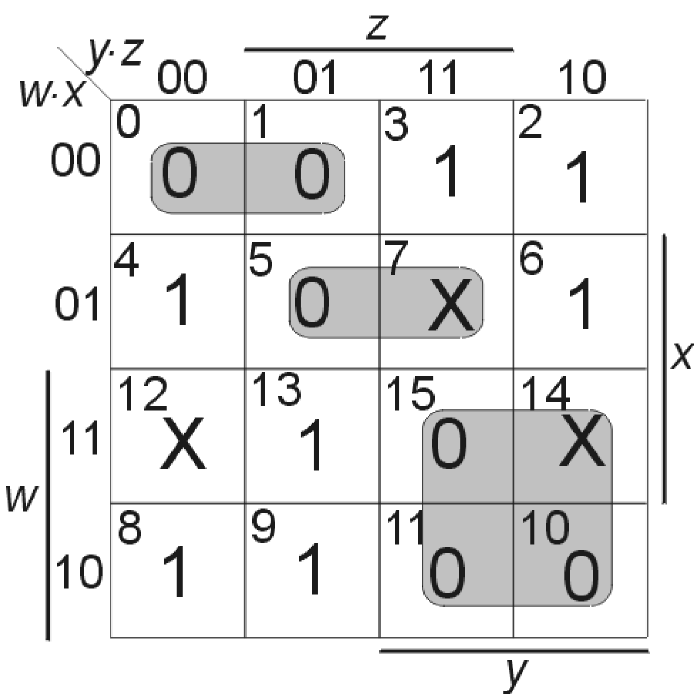


$$F(w,x,y,z) = \overline{w} \cdot y + w \cdot \overline{y} + \overline{w} \cdot x \cdot \overline{z}$$

s	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	x
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

- ÚNKF

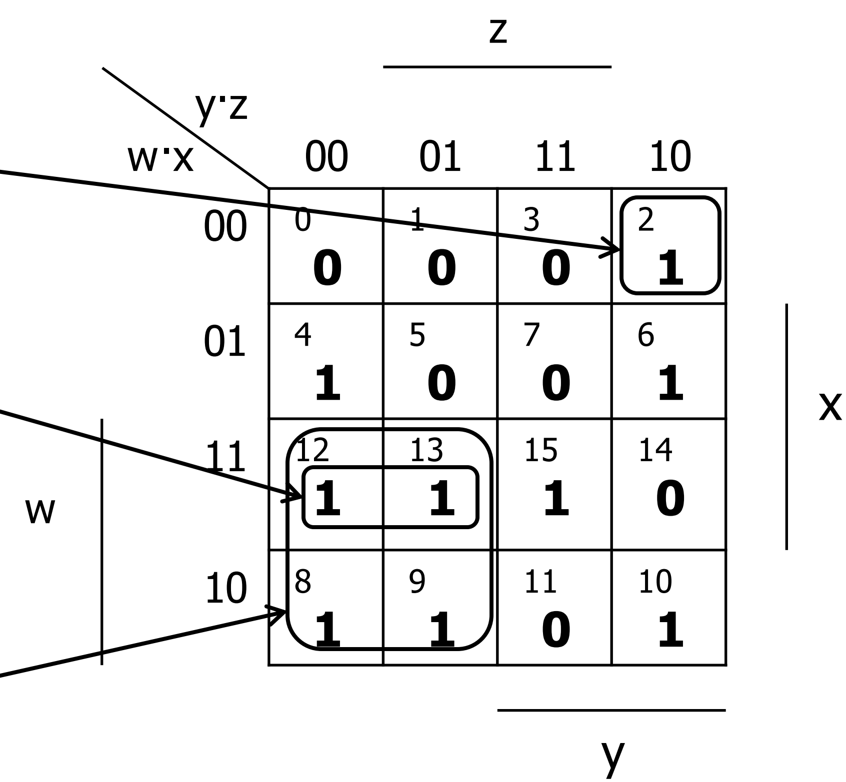
$$F(w,x,y,z) = \wedge(0,1,5,10,11,15) \cdot X(7,12,14)$$
$$= \&(0,1,5,10,11,15) \cdot X(7,12,14)$$
$$= \Pi M(0,1,5,10,11,15) \cdot X(7,12,14)$$



s	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	x
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	x
15	1	1	1	1	0

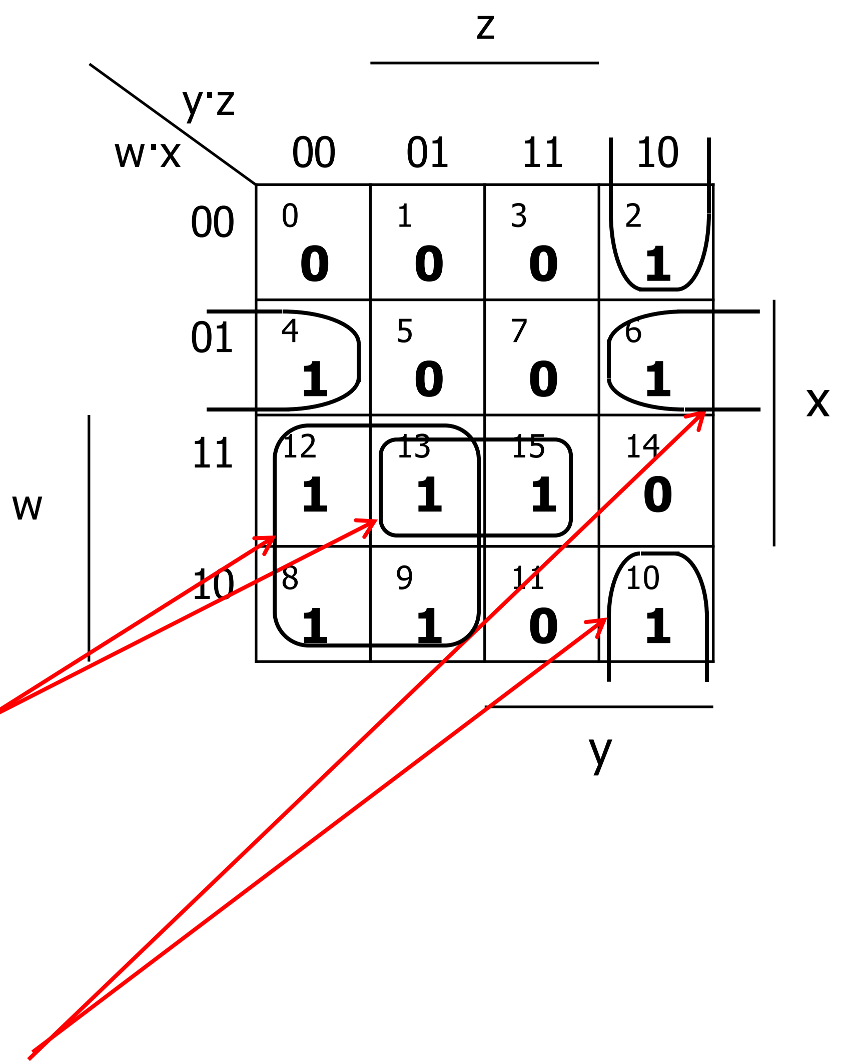
Terminologie

- Úplný implikant – term ÚNDF, který obsahuje všechny proměnné
- Pokrácený (částečně zkrácený) implikant, který má některé sousedné proměnné eliminované
- Zkrácený implikant – má všechny sousedné proměnné eliminované; po odstranění jakékoliv další proměnné přestává být implikantem; obvod sestavený ze zkrácených implikantů nemá hazardy

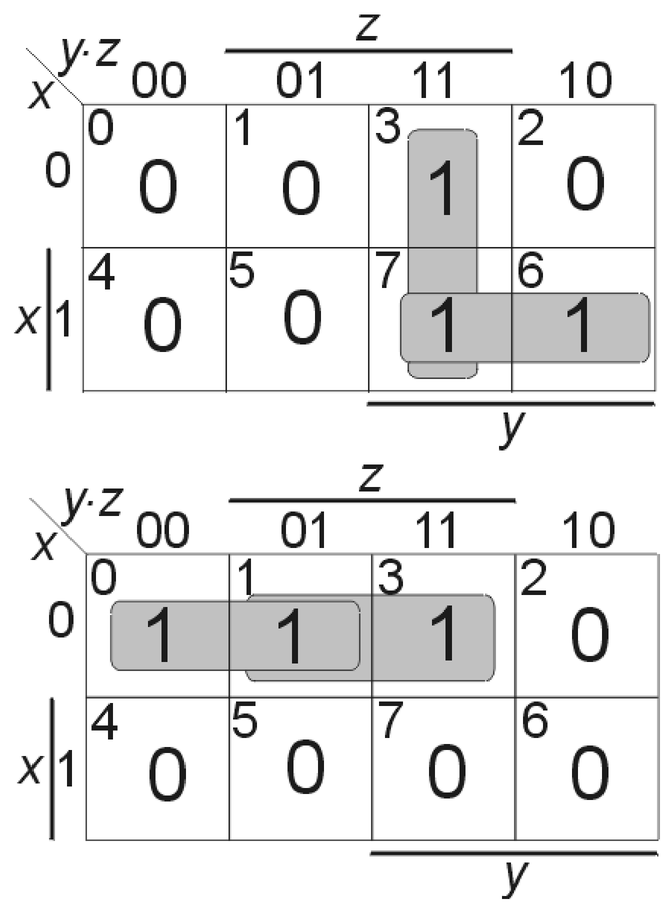


- Tvrzení platí duálně
  - Když zaměníme implikant pro ÚNDF za implicent pro ÚNKF

- Množina minimálních implikantů obsahuje zkrácené implikanty
- Minimální řešení funkce – jedna nebo více podmnožin množiny minimálních implikantů; může existovat více ekvivalentních řešení z nichž volíme dle dalších kritérií (viz např. obvody s více výstupy probírané dále)
- Nesporný implikant – implikant, který bude vždy součástí minimálního řešení
- Volitelný implikant – zkrácený implikant, který může, ale nemusí být součástí min. řešení, pokud lze použít jiný zkrácený implikant

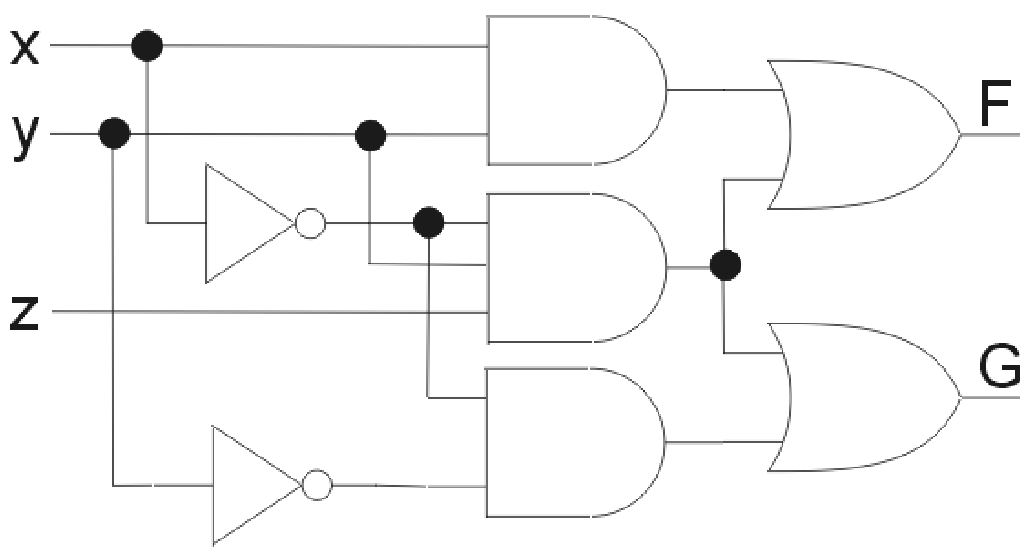


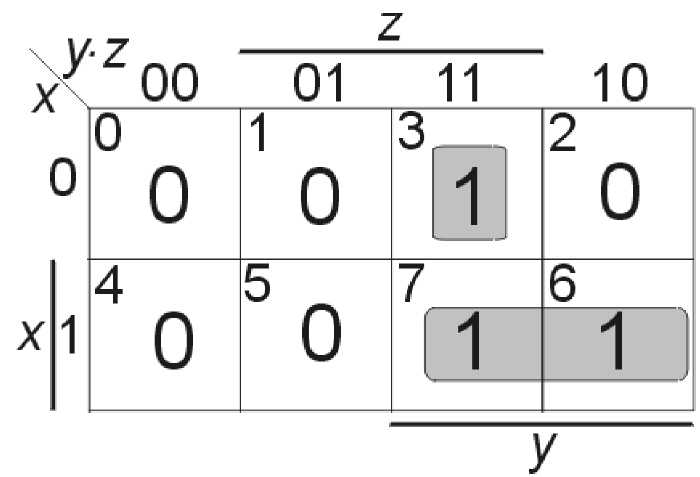
- Popis
  - Minimální pokrytí vrcholů více funkcí současně
  - Vede na log. členy sdílené více funkcemi
  - Sdílené log. členy nemusí představovat minimální možné řešení
  - V rozsáhlých obvodech může výrazně redukovat počet log. členů
  - Vzhledem k potenciálně značnému množství řešení (NP-úplný problém) je třeba často použít heuristických metod
- Příklad nalezení min. řešení nezávislých funkcí:
  - F(x,y,z)=Σm(3,6,7) a G(x,y,z)=Σm(0,1,3)
  - Celkem 8 log. členů

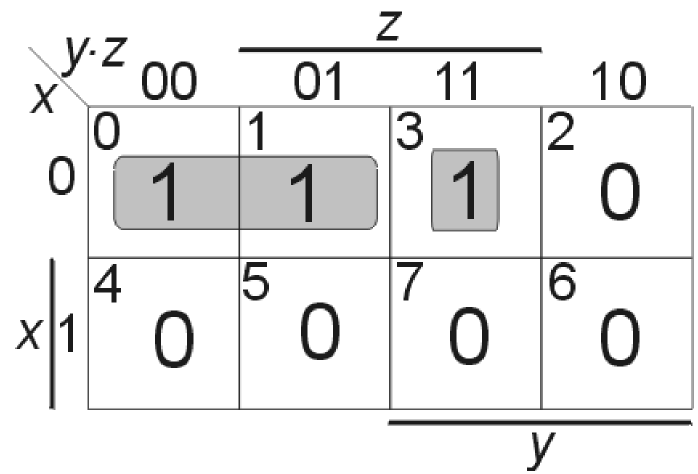


Minimalizace obvodů s více výstupy

- Příklad nalezení min. řešení dvou funkcí se sdílenými log. členy:
  - $F(x,y,z)=\Sigma m(3,6,7)$
  - $G(x,y,z)=\Sigma m(0,1,3)$
  - Ušetřili jsme jeden log. člen







Obsah

- Booleova algebra
  - axiomy
  - teorémy
- Normální formy logické funkce
- Optimalizace logických obvodů - minimalizace
  - Karnaughova mapa
  - metoda Quine-McCluskey

Quine – McCluskey

- Tabulární metoda
  - Vhodná i pro funkce více než 5-6 proměnných, kde Karnaughovy mapy selhávají, a pro minimalizace obvodů s více výstupy
- Postup pro ÚNDF (SOP)
- Krok 1
  - Seřaď do řádků tabulky jednotlivé implikanty v pořadí dle počtu jedniček jejich binárních vah - skupiny sousedných implikantů
- Krok 2
  - Sepiš do skupin všechny sousedné implikanty mezi jednotlivými skupinami v tabulce – eliminovanou proměnnou označ pomlčkou
  - Opakuj krok 2 pro skupiny vytvořené v kroku 2 tam, kde existuje další sousednost
  - Pokud některý implikant nemá další sousedné termy, říkáme mu zkrácený implikant
  - Hledej minimální řešení pokrytí dané funkce (např. pomocí mřížky implikantů)

- Příklad funkce F(w,x,y,z)=1(2,4,6,8,9,10,12,13,15)
  - Krok 1

Implikant	w.x.y.z	Skupina jedniček
2	0010	Skupina 1
4	0100	
8	1000	
6	0110	Skupina 2
9	1001	
10	1010	
12	1100	
13	1101	Skupina 3
15	1111	Skupina 4

- Krok 1

Zkrácené implikanty	w.x.y.z	Pokrytí
2	0010	✓
4	0100	✓
8	100	✓
6	0110	✓
9	1001	✓
10	1010	✓
12	1100	✓
13	1101	✓
15	1111	✓

- Do řádků tabulky zapisujme jednotlivé implikanty v pořadí dle jejich vah a počtu jedniček jejich binárních vah
- Tímto dostáváme skupiny sousedných implikantů
- Označujeme implikanty pokryté zkrácenými implikanty, viz krok 2

Quine – McCluskey

- Krok 2

Zkrácené implikanty	w.x.y.z	Pokrytí
2,6	0-10	PI2
2,10	-010	PI3
4,6	01-0	PI4
4,12	-100	PI5
8,9	100-	✓
8,10	10-0	PI6
8,12	1-00	✓
9,13	1-01	✓
12,13	110-	✓
13,15	11-1	PI7

- Hledáme a sepisujeme do skupin všechny sousedné implikanty
- V tabulce označíme eliminovanou proměnnou pomlčkou

- Krok 2 – druhá iterace

Zkrácené implikanty	w.x.y.z	Pokrytí
8,9,12,13	1-0-	PI1

  - Opakujeme krok 2 pro skupiny vytvořené v předchozí iteraci kroku 2 tam, kde existuje další sousednost
  - Pokud některý implikant nemá další sousedné termy, říkáme mu zkrácený implikant a označujeme ho PI
  - Implikanty, které jsou pokryty jinými, označujeme ✓
  - Končíme v okamžiku, kdy jsou všechny implikanty pokryty alespoň jednou
- Výsledek
  - Máme celkem 7 zkrácených implikantů PI1=(8,9,12,13), PI2=(2,6), PI3=(2,10), PI4=(4,6), PI5=(4,12), PI6=(8,10), a PI7=(13,15)
  - Číslem je označen vrchol funkce, který je daným zkráceným implikantem pokryt

- Grafické znázornění pokrytí vrcholů funkce
  - Zkrácené implikanty PI1=(8,9,12,13), PI2=(2,6), PI3=(2,10), PI4=(4,6), PI5=(4,12), PI6=(8,10), a PI7=(13,15)
  - Hledáme nejmenší počet zkrácených implikantů pokrývajících všechny vrcholy
  - Může existovat více řešení

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				x	x		x	x	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								x	x

Mřížka implikantů

- Nejprve musíme zahrnout nesporné implikanty
  - Vrchol 15 je pokryt pouze zkráceným implikantem PI7 (plný kroužek), podobně vrchol 9 je pokryt PI1
  - Zkráceným implikantem PI1 jsou též pokryty vrcholy 8, 12 a 13, zkráceným implikantem PI7 je též pokryt vrchol 13
  - Zbývají vrcholy 2,4,6 a 10, které lze pokrýt různým způsobem

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				X	X		X	X	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								X	X

Mřížka implikantů

- Dále hledáme nejmenší pokrytí zbývajících vrcholů 2, 4, 6, a 10
  - Zkrácený implikant PI5 nepředstavuje dobrou volbu, neboť mu zbývá pokrýt pouze vrchol 4
  - Podobně, zkrácenému implikantu PI6 zbývá pokrýt pouze vrchol 10

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				x	x		x	x	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								x	x

- Nejlepší řešení
  - Představují PI3 a PI4
  - Vyžaduje nejmenší počet implikantů
  - PI3 a PI4 pokrývají zbylé vrcholy úplně

$$F(w,x,y,z) = PI1 + PI3 + PI4 + PI7$$
$$= (1-0-) + (-010) + (01-0) + (11-1)$$
$$= w\cdot\overline{y} + \overline{x}\cdot y\cdot\overline{z} + \overline{w}\cdot x\cdot\overline{z} + w\cdot x\cdot z$$

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				x	x		x	x	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								x	x

Petrickova funkce: Nalezení minimálního pokrytí

- Vhodným postupem najdi všechny zkrácené implikanty – např. pomocí Karnaughovy mapy či Quine – McCluskey
- Např. pomocí mřížky implikantů nalezni všechny nesporné implikanty
- Pro zbývající zkrácené implikanty napiš normální konjunktní formou logický výraz, reprezentující všechna možná pokrytí následovně:
  - Pro každý nepokrytý vrchol zapiš výraz – sumu zkrácených implikantů, které jej pokrývají
  - Výsledné sumy zapiš jako součin – vznikne konjunktní forma
- Vzniklý zápis v konjunktní formě
  - Přepiš na disjunktní zápis prostým roznásobením
  - Zjednoduš pomocí teorémů Booleovy algebry
  - Každý vzniklý term představuje jedno možné pokrytí
- Nalezni pokrytí s nejnižší cenou
  - Cenou rozumíme počet zkrácených implikantů a počet proměnných v každém zkráceném implikantu

- Funkce umožňuje nalezení optimálního řešení, ale její složitost narůstá s počtem zkrácených implikantů
- Příklad
  - Zkrácené implikanty PI1=(8,9,12,13), PI2=(2,6), PI3=(2,10), PI4=(4,6), PI5=(4,12), PI6=(8,10), a PI7=(13,15)
  - Nalezneme nesporné implikanty – PI1=(8,9,12,13) a PI7=(13,15)

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				x	x		x	x	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								x	x

- Příklad
  - Mřížku přepíšeme bez nesporných implikantů
  - Pro každý nepokrytý implikant zapíšeme sumu zkrácených implikantů, které jej pokrývají a výsledné sumy zapíšeme jako součin – vznikne konjunktní forma

	2	4	6	10
PI2	x		x	
PI3	x			x
PI4		x	x	
PI5		x		
PI6				x

$$C = (PI2 + PI3) \cdot (PI4 + PI5) \cdot (PI2 + PI4) \cdot (PI3 + PI6)$$

  - Přepíšeme na disjunktní formu a zjednodušíme

$$C = PI2 \cdot PI3 \cdot PI5 + PI3 \cdot PI4 + PI2 \cdot PI4 \cdot PI6 + PI2 \cdot PI5 \cdot PI6$$

  - Vybereme pokrytí s nejnižší cenou (nejméně implikantů)

$$C_{\min} = PI3 \cdot PI4$$