Řešení rekurentních problémů

Jitka Kreslíková, Aleš Smrčka

2021

Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

IZP – Základy programování

Řešení rekurentních problémů

- Posloupnosti
- Řady

Rekurentní vztah

$Y_{i+1} = F(Y_{i-k} \ldots, Y_{i-2}, Y_{i-1}, Y_i)$, kde:

$Y_{i-k}, Y_{i-k+1}, \ldots, Y_i, Y_{i+1}$ – zevšeobecněné proměnné,

F – funkce na základě které získáme z hodnot

$Y_{i-k} \ldots, Y_{i-2}, Y_{i-1}, Y_i$ hodnotu Y_{i+1}

$i,k \geq 0$ – počet předchozích kroků řešení

Vlastnosti:

- pro výpočet další hodnoty potřebujeme pouze k+1 posledních hodnot.
- musí existovat takové n, že Y_n je požadovanou hodnotou, po jejímž získání iterační výpočet končí.
- musíme umět rozpoznat požadovanou hodnotu.

Posloupnosti

- Uvažujme rekurentní vztah:

$$Y_{i+1} = F(Y_i)$$

- pro výpočet Y_{i+1} je potřeba zjistit hodnotu Y_i.
- na začátku musí být dané Y_0, ze kterého celý výpočet začíná.
- postupně dostáváme hodnoty $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, pro které platí:
  1. $Y_{i+1} = F(Y_i)$ pro $i \geq 0$
  2. $Y_i \neq Y_j$ pro $i \neq j$
  3. Y_i pro $i < n$ – nesplňuje podmínky požadované hodnoty.
  4. Y_n – splňuje podmínky požadované hodnoty.

Algoritmické schéma pro posloupnosti

- Algoritmus realizující vztah $Y_{i+1}=F(Y_i)$:
  1. $Y=y_0$;
  2. while $(\neg B(Y))$ $Y=F(Y)$;
- Všeobecné symboly:
  - Proměnná Y
  - Predikátový symbol B
  - Funkční symbol F
- Predikát B(Y) – podmínka požadované hodnoty závislá na hodnotě Y
- Nejde o řešení konkrétního rekurentního vztahu

Algoritmické schéma

- Algoritmická konstrukce, ve které symboly proměnných, funkcí a predikátů nejsou interpretovány.
- Pro konkrétní rekurentní vztah uvedeného charakteru stačí interpretace příslušných symbolů.
- Rekurentní vztahy → iterační výpočty → algoritmické schéma lze použít pro řešení celé řady problémů.

Výpočet druhé odmocniny

Příklad:Výpočet druhé odmocniny reálného čísla $A \geq 0$ lze popsat rekurentním vztahem:

$$y_{i+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{y_i} + y_i\right)$$

- y_0 – pro jednoduchost lze volit 1.
- Způsob ukončení algoritmu:
  - Obvykle se výpočet opakuje, dokud $|y_i - y_{i+1}|$ není menší než nějaká zadaná hodnota.
  - Této hodnotě se říká přesnost výpočtu – značíme ji **eps**.
- Pro výpočet nové hodnoty y potřebujeme jednu předcházející hodnotu – použijeme dvě proměnné: stareY, noveY.

Výpočet druhé odmocniny

Algoritmus:

1. zadej A, eps
2. inicializuj stareY (1)
3. vypočítej noveY (podle vzorce)
4. opakuj pokud abs(noveY – stareY)≥eps
   {
      ulož noveY do stareY
      vypočítej noveY
   }
5. zobraz výsledek

Řady

- Uvažujme řadu vytvořenou z členů:

  $$t_0, t_1, t_2, \ldots$$

- Pro členy řady lze napsat rekurentní vztah:

  $$t_i = f(t_{i-1}), \text{ pro } i > 0$$

- Nechť částečné součty jsou:

  $$s_0, s_1, s_2, \ldots$$

  $$s_i = t_0 + t_1 + \ldots + t_i$$

- Pro částečné součty platí rekurentní vztah:

  $$s_0 = t_0$$

  $$s_i = s_{i-1} + t_i$$

Řady

- Při konstrukci algoritmu nutno zohlednit
  - rekurentní vztah pro částečné součty
  - rekurentní vztah pro členy řady, jejich vzájemný vztah
  - způsob ukončení
- Použití řad pro aproximaci funkcí
  - Počet členů řad není dopředu znám
  - Konec algoritmu ⇔ přesnost aproximace
  - Přesnost dána buď dosaženou hodnotou částečné sumy nebo posledním sčítancem

Algoritmické schéma pro řady

- Na základě uvedené analýzy lze sestavit modifikované algoritmické schéma pro řady:

1. $T = t_0$;
2. $S = T$;
3. while $(\neg B(S, T))$
   {
   $T = f(T)$;
   $S = S + T$;
   }
4. zobraz výsledek

Algoritmické schéma pro řady

- Analogicky jako pro posloupnosti tak i pro řady musí platit tvrzení:

1. $t_i = f(t_{i-1})$ pro $i > 0$
2. $t_i \neq t_j$ pro $i \neq j$
3. $s_i = s_{i-1} + t_i$ pro $i > 0$
4. $\neg B(s_i, t_i)$ pro $i < n$
5. $B(s_n, t_n)$ změní se hodnota predikátu B

Algoritmické schéma pro řady

- Při použití algoritmického schématu pro řady je třeba si uvědomit, že
  - musí existovat **n**, pro které se změní hodnota predikátu $\mathbf{B(s_i, t_i)}$.
  - při aproximaci funkce je třeba podmínku volit uváženě s ohledem na **funkci**, **argument** a **řadu** → konvergence řady může být velmi pomalá.
  - požadované přesnosti aproximace nemusí být vždy dosažitelné, anebo její cena může být velmi velká.

Aproximace e^x

Příklad: Aproximace $y = e^x$

Exponenciální funkci e^x lze aproximovat řadou:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Pro částečný součet s_i lze napsat:

$$s_i = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^i}{i!}$$

Aproximace e^x

- Závislost sousedních členů řady lze vyjádřit rekurentním vztahem:

$$t_j = t_{j-1}\frac{x}{j} \qquad \text{pro } j > 0$$

- Řada konverguje pro $\mathcal{R}$ ➔ přírůstek jednotlivých členů řady do celkové sumy bude od určitého **i** klesat ➔ lze využít pro tvorbu koncové podmínky
- Cyklus se bude opakovat, dokud hodnota přírůstku, tedy hodnota členu řady, neklesne pod danou hranici, kterou označíme **eps**.

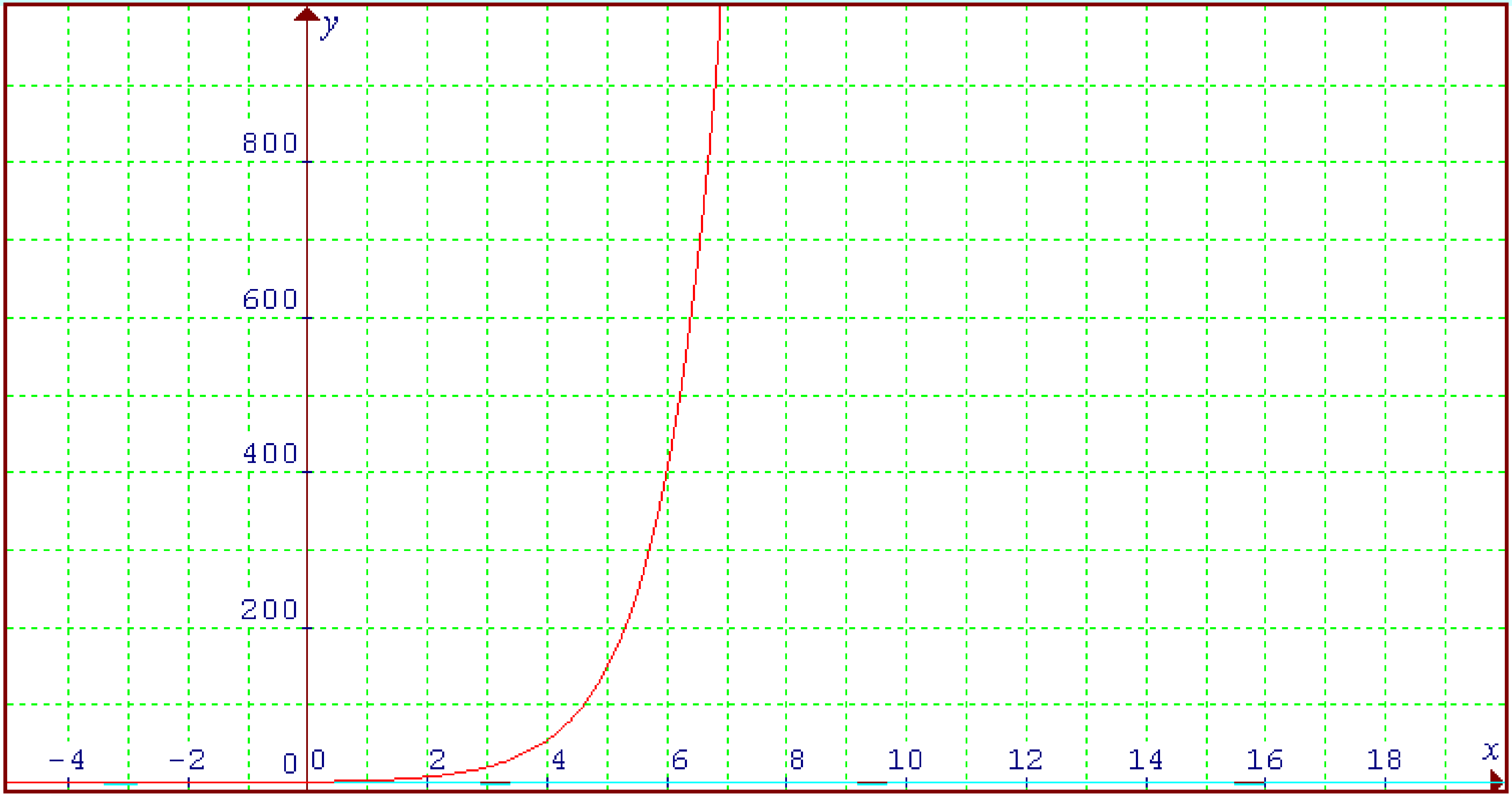
Aproximace e^x

Algoritmus:

1. zadání x, eps
2. inicializace: t=1, soucetRady=t, i=0
3. opakuj pokud abs(t)≥eps
   {
     inkrementace i
     výpočet dalšího členu t
     soucetRady = soucetRady + t
   }
4. zobrazení výsledku

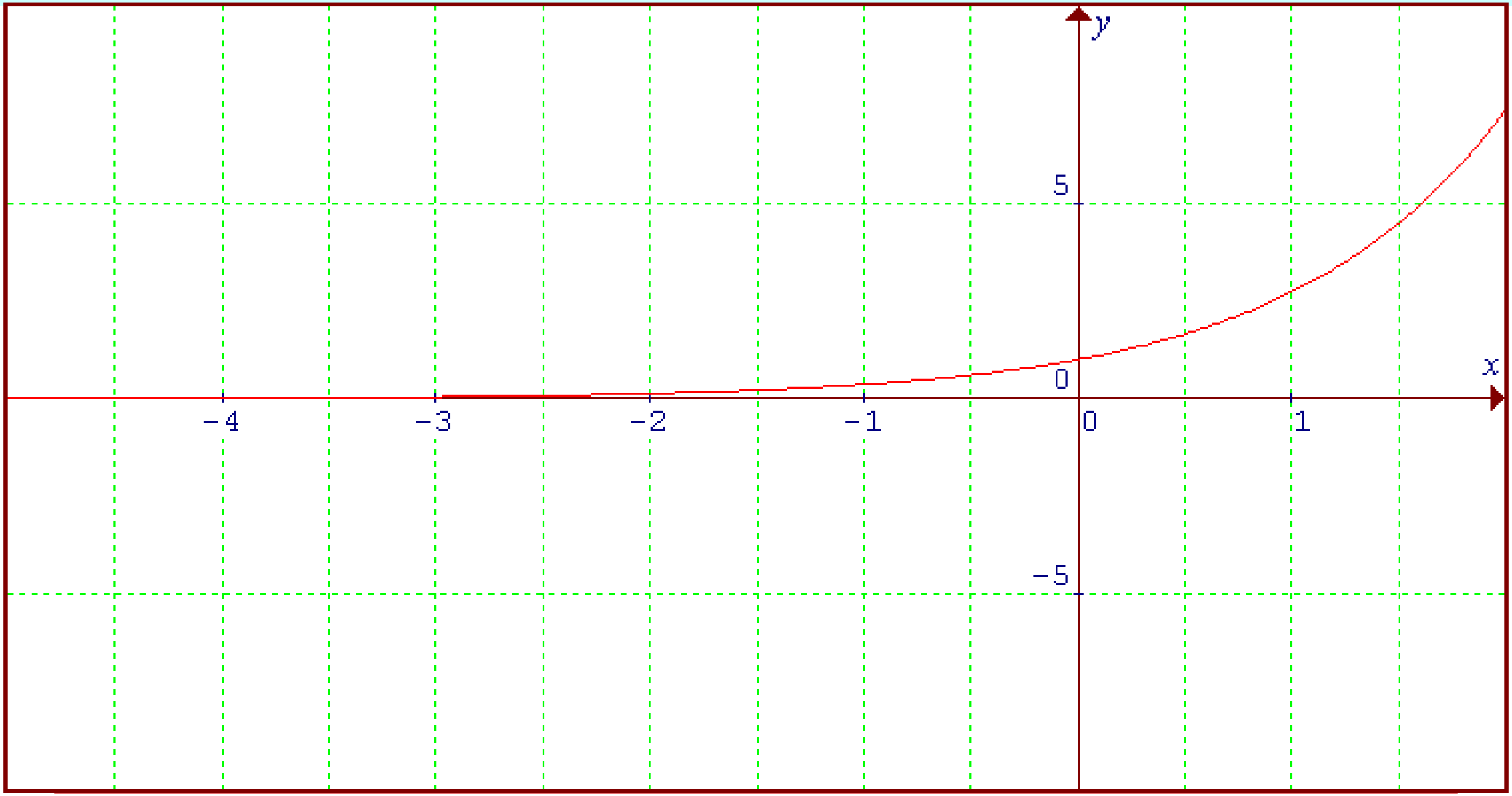
Aproximace e^x

Příklad: $y = e^x$, $(-\infty < x < \infty)$



Aproximace e^x

Příklad: $y = e^x$, $(-\infty < x < \infty)$



Aproximace e^x

- Rychlost konvergence
  - není stejná pro všechna reálná čísla.
  - je velká pro malé hodnoty argumentu x (okolo nuly).
- Pro velké hodnoty x se doporučuje rozdělit argument **x** na celou část **c** a desetinnou část **d** a použít vztah:

$$e^{c+d} = e^c \cdot e^d$$

Hodnota e^c se vypočítá opakovaným násobením e.

Aproximace sin(x)

Příklad: Aproximace y = sin(x)

Pro částečný součet s_i lze napsat:

$$s_i = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Členy řady:

$$t_j = -t_{j-1} \frac{x^2}{k_j(k_j - 1)}, \quad \text{pro } j > 0$$

$k_j = k_{j-1} + 2$

počáteční hodnoty: $t_0 = x$, $k_0 = 1$

pro $x \in \langle 0; \Pi/4 \rangle$ - konverguje nejrychleji (ověřte)

Aproximace sin(x)

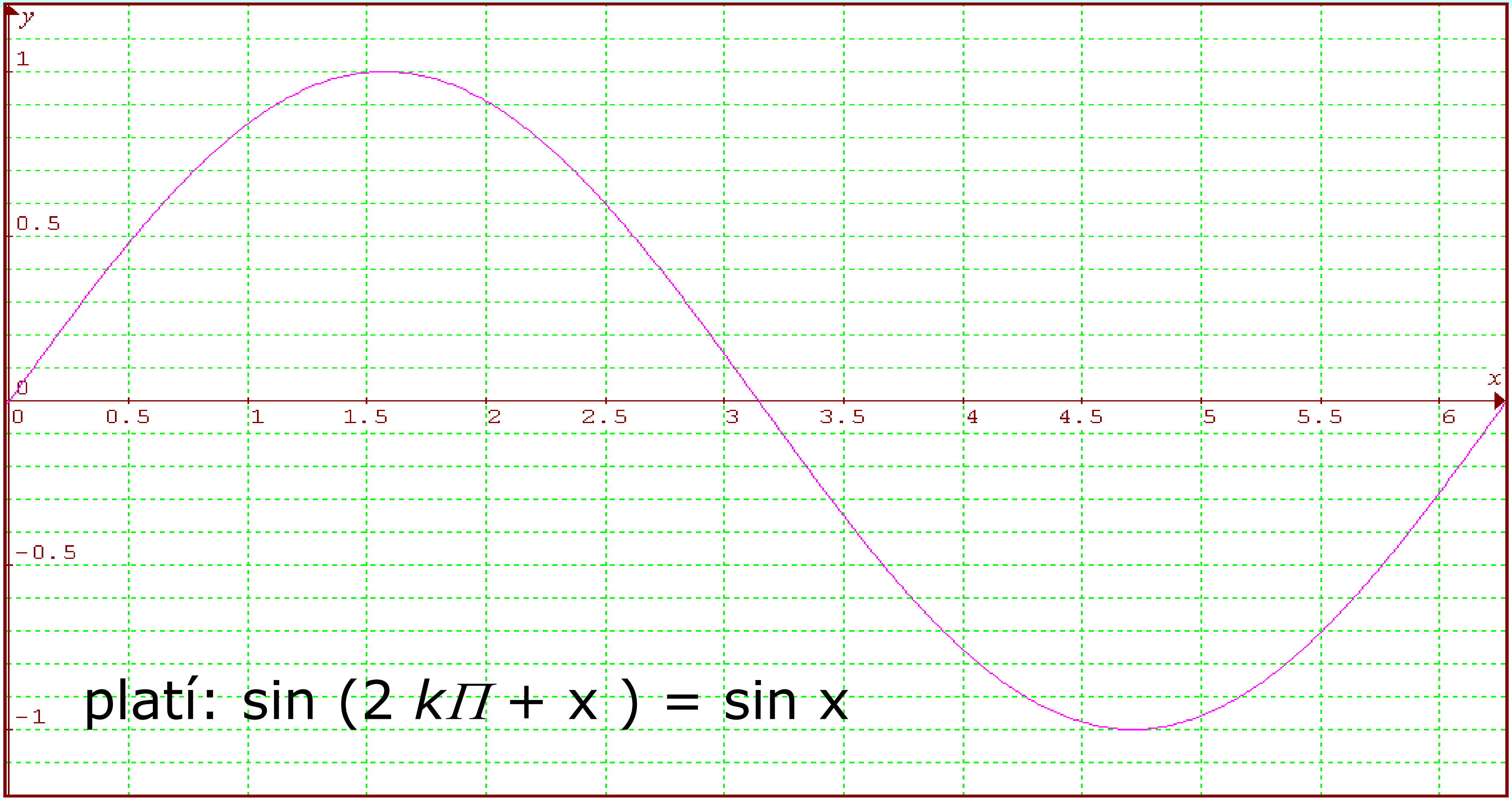
- **Podmínka ukončení** nespecifikuje absolutní hodnotu posledního členu, ale určuje relativně jeho velikost vzhledem k celkové sumě.

Algoritmus:

1. zadání x, eps
2. inicializace t=x, soucetRady=t, k=1
3. opakuj pokud abs(t) ≥ eps × abs(soucetRady)
   {
     k = k + 2
     výpočet dalšího členu t
     soucetRady = soucetRady + t
   }
4. zobrazení výsledku

Řešení rekurentních problémů

Příklad: y = sin x, (-∞ < x < ∞)



platí: sin (2 *kΠ* + x) = sin x

Heuristika

- Opatření:
  - k snížení náročnosti výpočtu
  - k zvýšení efektivity výpočtu
- Posun výpočtu do intervalu nejrychlejší konvergence
  - $e^{c+d}=e^{c}e^{d}$
  - využití periodicity u goniometrických funkcí
- Odstranění zbytečných výpočtů
  - Zejména z těla cyklu – odsunout mimo!

Řešení rekurentních problémů

Kontrolní otázky

1. Jak je definován rekurentní vztah?
2. Vysvětlete postup řešení problémů, které jsou definované rekurentním vztahem.
3. Jakým způsobem se řeší přesnost výpočtu u problémů zadaných rekurentním vztahem?

Úkoly k procvičení

1. Vytvořte program v jazyku C se standardními knihovnami, který pomocí iteračních výpočtů vypočítá funkce o neznámém počtu hodnot na standardním vstupu a vypíše výsledky na standardní výstup. Každá hodnota bude vypočtena zvlášť ve vlastní funkci. Algoritmy musí řešit heuristiku a práci s nekonečnými a nečíselnými hodnotami podobně jako to řeší knihovna <math.h>.