Übung 12 AuD

Dominic Deckert

20. Januar 2017

Previously on ...

Floyd-Warshall-Algorithmus

- Idee
- Vorgehensweise

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

- **(4, 2, 5)**, (4, 5, 7), (4, 3, 8)
- **(1, 3, 4), (4, 3, 7), (4, 5, 6), (1, 3, 4), (1, 5, 3)**

c)

- **(1, 4, 7), (2, 4, 5)**
- **(3, 5, 9), (5, 1, 12), (5, 2, 14), (5, 3, 16), (3,1, 6), (3, 2, 8), (2, 1, 8)**

Algorithmisches Pfadproblem

Zusammenfassung mehrerer Graphenprobleme, die auf Pfaden basieren
Bsp:

- kürzeste Wege zwischen Knoten
- Kapazität einer Straße
- Störsicherheit einer Verbindung
- Zustandsübergänge eines Systems

Algorithmisches Pfadproblem

Beschreibung eines APP als: **Semiring**
$(M, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

- M: Grundmenge der Kantengewicht
- $\oplus$: Pfad-Vereinigungsoperation (neutrales Element: $\mathbf{0}$)
- $\odot$: Pfad-Verknüpfungsoperation (neutrales Element: $\mathbf{1}$)

Zusatz: Semiring $\rightarrow$ $\oplus$ kommutativ und assoziativ, $\odot$ assoziativ, Distributivgesetz gilt

a)

$(M, \oplus, \odot, \; \mathbf{0} \;, \; \mathbf{1} \;)$

Semiring: $(\mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}, \mathit{max}, \mathit{min}, 0, \infty)$

b)

$$\begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

Aho-Algorithmus

Erinnerung: Update-Formel des Floyd-Warshall-Algorithmus:

$D_G^{(k)}(u, v) =$

$D_G^{(k-1)}(u, v) \textbf{ max } (D_G^{(k-1)}(u, k-1) \mathbf{+} D_G^{(k-1)}(k-1, k-1)^* \mathbf{+} D_G^{(k-1)}(k-1, v))$

Semiring des Distanzproblem: $(\mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}, max, +, \infty, 0)$

Allgemeine Update-Formel:

$D_G^{(k)}(u, v) = D_G^{(k-1)}(u, v) \oplus (D_G^{(k-1)}(u, k-1) \odot D_G^{(k-1)}(k-1, k-1)^* \odot D_G^{(k-1)}(k-1, v))$

c)

- (1, 4, 3), (1, 3, 4), (3, 4, 3)
- (1, 5, 2), (2, 5, 2)
- (1, 5, 3), (2, 5, 3), (3, 5, 3)

d)

$c(4,5) = 1$
Wie ändert sich $D_G(1,5)$?
$D_G(1,5) = 2$

a)

Prozessproblem: mögliche Zustandsübergänge, die von einem Startzustand zu einem Endzustand führen
Menge aller möglichen Pfade als formale Sprache (Wort beschreibt jeweils einen Pfad)
Semiring: $(2^{\Sigma}, \cup, \circ, \emptyset, \{\varepsilon\})$

b)

$$\begin{pmatrix} \{d, \varepsilon\} & \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\} & \emptyset & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} \{d\}^* & \{d^n a\} & \emptyset \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{cd^n\} & \{cd^n a\} & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$$

d)

$$D_G^{(2)}(3,3) = \{\varepsilon, cd^n ab | n \in \mathbb{N}\}$$
$$D_G^{(3)}(3,3) = \{\varepsilon, cd^n ab | n \in \mathbb{N}\}^*$$

Nebenrechnung

Für alle APP: $a^0 = \mathbf{1}$

Semiring $S = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, max, min, 0, \infty)$
Für das Kapazitätsproblem gilt: $a \odot a = a = a \oplus a$, da $min(a, a) = a = max(a, a)$

$$\begin{aligned} a^* &= a^0 \oplus a^1 \oplus a^2 \oplus a^3 \ldots \\ &= \mathbf{1} \oplus a \oplus (a \odot a) \oplus (a \odot a \odot a) \ldots \\ &= \infty \ \mathbf{max}\ a \ \mathbf{max}\ (a) \ \mathbf{max}\ a \ldots \\ &= \infty \ \mathbf{max}\ a = \infty \end{aligned}$$

Hinweis: **max** ist dieselbe Funktion wie *max* (zur besseren Lesbarkeit aber in Infixnotation)

Rechnung

$$
\begin{aligned}
D_G^{(k)}(u,v) &= D_G^{(k-1)}(u,v) \oplus (D_G^{(k-1)}(u,k) \odot D_G^{(k-1)}(k,k)^* \odot D_G^{(k-1)}(k,u)) \\
&= D_G^{(k-1)}(u,v) \ \mathbf{max} \ (D_G^{(k-1)}(u,k) \ \mathbf{min} \ \infty \ \mathbf{min} \ D_G^{(k-1)}(k,u)) \\
&= D_G^{(k-1)}(u,v) \ \mathbf{max} \ (D_G^{(k-1)}(u,k) \ \mathbf{min} \ D_G^{(k-1)}(k,u))
\end{aligned}
$$