4. Übung Programmierung

Dominic Deckert

2. Mai 2017

Previously on ...

- higher order Funktionen
- selbstdefinierte Datentypen (Bäume)

Unifikation

Rangalphabete: Symbole mit definierter "Stelligkeit"
Terme über Rangalphabet: n-stelliges Symbol hat immer n "Eingabeterme"
Ziel: Finde Belegung der Variablen, die 2 Terme angleicht $\rightarrow$ Unifikator
allgemeinster Unifikator: kann nicht mit "kleinerem" Unifikator ausgedrückt werden

Algorithmus

Eingabe: $\{\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\}$ für Terme t_1, t_2
Ausgabe: kleinster Unifikator
Terme unifizierbar, falls Algorithmus endet und jede Variable max. Teil eines Termpaares ist, und anderer Teil des Paars die Variable nicht enthält

Algorithmus

Umformungsregeln:

- Dekomposition: Wähle Termpaar, das außen denselben Konstruktor hat, und zerlege in einzelne Termpaare
- Elimination: Entferne $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$
- Vertauschung: Vertausche Elemente eines Termpaares
- Substitution: Ersetze Variable durch entsprechenden Teil des Termpaares, falls die Variable darin nicht vorkommt (*occur check*)

Aufgabe 1

siehe Tafel

Aufgabe 2

$$\left\{\begin{pmatrix}\sigma(\sigma(x_1,\alpha),\sigma(\gamma(x_3),x_3))\\ \sigma(\sigma(\gamma(x_2),\alpha),\sigma(x_2,x_3))\end{pmatrix}\right\}$$

$$(Dek.)\left\{\begin{pmatrix}\sigma(x_1,\alpha)\\ \sigma(\gamma(x_2),\alpha)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma(\gamma(x_3),x_3)\\ \sigma(x_2,x_3)\end{pmatrix}\right\}$$

$$(Dek.)\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \gamma(x_2)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma(x_3)\\ x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_3\\ x_3\end{pmatrix}\right\}$$

$$(Vert.)\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \gamma(x_2)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\ \gamma(x_3)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_3\\ x_3\end{pmatrix}\right\}$$

Aufgabe 2

$$(Sub.)\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$(Dek.), (Elim.)\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix}\right\}$$

Aufgabe 2

allg. Unifikator: $x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)), x_2 \mapsto \gamma(x_3)$

Alternative Unifikatoren: $x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)), x_2 \mapsto \gamma(\alpha), x_3 \mapsto \alpha$
$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\sigma(\alpha, \alpha)), x_2 \mapsto \gamma(\sigma(\alpha, \alpha)), x_3 \mapsto \sigma(\alpha, \alpha)$

Problem: $t_1 = x_1, t_2 = \gamma(x_1)$

Strukturelle Induktion

Induktionsbeweis über Struktur mit: Basisfällen (Blatt, [], etc.) und zusammengesetzter Struktur (innerer Knoten, nichtleere Liste, etc.)
Teile:

- Induktionsanfang: Zeige für alle Basisfälle die Aussage
- Induktionsvoraussetzung: Nimm für neu eingeführte Objekte die Aussage an
- Induktionsschritt:
    - Induktionsbehauptung: Aussage gilt auch bei Zusammensetzung der Objekte gilt
    - Beweis: Beweise die Induktionsbehauptung

Aufgabe 3

Behauptung: sum (foo xs) = 2 sum xs - length xs
siehe Tafel

Aufgabe 4

Behauptung: sum (add t a) = sum (rev t) + a
IAnf: Seien a, b :: Float und t = Leaf b. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
sum(add\ t\ a) &= sum(add(Leaf\ b)a) \\
&\overset{Z4}{=} sum(Leaf(b+a)) \\
&\overset{Z12}{=} b+a \\
&\overset{Z8}{=} sum(rev(Leaf\ b)) + a \\
&= sum(rev\ t) + a
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Induktionsvoraussetzung:

Seien t1, t2 :: Tree beliebig aber fest so, dass für beliebige a:: Float gilt:
(IV1) sum (add t1 a) = sum (rev t1) + a
(IV2) sum (add t2 a) = sum (rev t2) + a

Aufgabe 4

Induktionsschritt:

Dann gilt für beliebige b:: Float:
sum (add (Branch b t1 t2) a) = sum (rev (Branch b t1 t2)) + a

$$
\begin{aligned}
sum(add(Branch\, b\, t1\, t2)a) &\overset{Z5}{=} sum(Branch(b + a/3)(add\ t1\ a/3)(add\ t2\ a/3)) \\
&\overset{Z13}{=} b + a/3 + sum(add\ t1\ a/3) + sum(add\ t2\ a/3) \\
&\overset{IV1,IV2}{=} b + a/3 + sum(rev\ t1) + a/3 + sum(rev\ t2) + a/3 \\
&= b + sum(rev\ t2) + sum(rev\ t1) + 3 \cdot a/3 \\
&\overset{Z13}{=} sum(Branch\, b(rev\ t2)(rev\ t1)) + a \\
&\overset{Z9}{=} sum(rev(Branch\, b\, t1\, t2)) + a
\end{aligned}
$$