

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ДАГЕСТАНСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК №
Регистрационный №
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Врио председателя ДНЦ РАН

_____ Муртазаев А.К.
«__» _____ 2019 г.

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И СОЗДАНИЕ НАУКОЕМКОГО
ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ
СИСТЕМ. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ
И ИЗОБРАЖЕНИЙ. ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ И ТЕОРИИ
ОПТИМИЗАЦИИ РАСПИСАНИЙ, КОМПЬЮТЕРНОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ
ВУЗОВСКОГО УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

(итоговый отчет за 2018 г.)

Руководитель НИР,
Врио зав. Отделом математики и информатики ДНЦ РАН, канд. физ.-мат. наук _____ Шарапудинов Т.И.

г. Махачкала, 2019

Список исполнителей

Научный руководитель,

в.н.с. Отдела математики и ин- _____

форматики ДНЦ РАН, д.ф.-м.н.,

Магомедов А.М.

с.н.с. ОМИ, к.ф.-м.н,

Магомед-Касумов М.Г., _____

с.н.с. ОМИ, к.ф.-м.н,

Шарапудинов Т.И., _____

н.с. ОМИ,

Султанахмедов М.С., _____

н.с. ОМИ,

Шах-Эмиров Т.Н., _____

м.н.с. ОМИ,

Акниев Г.Г., _____

м.н.с. ОМИ,

Магомедов С.Р. _____

Нормоконтролер, н.с. ОМИ,

Султанахмедов М.С. _____

Реферат

Отчет содержит X с., X источников, X таблицы.

Ключевые слова: ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ; ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ; ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА; УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ ЯКОБИ; ПРЕДЕЛЬНЫЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ; ДИСКРЕТНЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ; ФУНКЦИЯ ЛЕБЕГА; НЕРАВНОМЕРНЫЕ СЕТКИ; СРЕДНИЕ ВАЛЛЕ ПУССЕНА; ТЕОРИЯ РАСПИСАНИЙ; ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ; ГИПОТЕЗА ГРЮНБАУМА; ПАКЕТЫ ПРОГРАММ.

Настоящий отчёт содержит итоги работы за 2018 год Отдела математики и информатики ДНЦ РАН по теме «Разработка алгоритмов и создание наукоемкого программного обеспечения для моделирования сложных систем. Некоторые вопросы цифровой обработки сигналов и изображений. Исследования по теории графов и теории оптимизации расписаний, компьютерное сопровождение вузовского учебного процесса» из Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы.

Основные результаты, полученные в отчетном году по данной теме касаются разработки алгоритмов и программных пакетов для использования в решении важных прикладных задач, таких как обработка и сжатие временных рядов и изображений, численно-аналитическое решение систем линейных и нелинейных дифференциальных и разностных уравнений, интервальная реберная раскрашиваемость двудольных графов и оптимизация расписаний для мультипроцессорных систем, программное обеспечение для компьютерного сопровождения процесса распределения учебной нагрузки.

В частности, разработаны алгоритмы и компьютерные программы для обработки временных рядов и изображений методом перекрывающихся преобразований, основанных на повторных средних типа Валле Пуссена для тригонометрических сумм Фурье, для численно-аналитического решения систем линейных и нелинейных дифференциальных и разностных уравнений спектральными методами, основанными на использовании систем функций, ортогональных по Соболеву и порожденных такими классическими системами как система Хаара, система полиномов Чебышева первого рода и система косинусов.

=====

В исследовании проблемы существования двудольных графов заданного порядка, не допускающих интервальной реберной раскраски, востребован алгоритм перечисления графов по принципу «один представитель из каждого класса изоморфных графов». Ввиду алгоритмических трудностей задачи это условие обычно заменяется более слабым условием: «малое число представителей из каждого класса изоморфных графов». В 2018 г. найдены некоторые способы усиления фильтрации изоморфных графов.

Все известные формулы для перечисления разбиений прямоугольника используют действия с плавающей запятой. С помощью авторского программного обеспечения для ряда слу-

чаев уточнены точные значения для количества разбиений с применением ранее полученных автором формул, использующих лишь операции над целыми числами.

Начатый ранее процесс создания программного обеспечения по компьютерному сопровождению деятельности вузовской кафедры продолжен в направлении построения сводных таблиц учебных нагрузок вузовской кафедры и автоматической генерации тестовых заданий по структурированным данным языков программирования.

Продолжена работа по созданию методической и алгоритмической базы проведения межрегиональных олимпиад по программированию среди вузов. На ее основе проведена дистанционная межрегиональная олимпиада по программированию среди вузов СКФО.

=====

Получены все возможные магнитные структуры основного состояния в зависимости от соотношений обменных взаимодействий r для антиферромагнитной модели Изинга на объемно-центрированной кубической решетке с учетом взаимодействий первых и вторых ближайших соседей. Показано, что в зависимости от величины r в системе возможно 6 различных упорядочений в основном состоянии. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия следующих ближайших соседей. Впервые на диаграмме обнаружена узкая область ($2/3 < r \leq 3/4$), где переход из антиферромагнитной фазы в парамагнитную является переходом первого рода. Обнаружено, что при значении $r = 2/3$ конкуренция обменных взаимодействий не приводит к возникновению фрустрации и вырождению основного состояния. Показано, что в исследуемой модели при $r = 2/3$ наблюдается фазовый переход второго рода.

=====

Содержание

Введение	7
1 Вычислительные аспекты проблемы перечисления разбиений	10
1.1 Построение системы в.р.ф.	10
1.2 Примеры вычислений	14
2 Автоматизация создания тестовых единиц	15
2.1 Структура программного кода формирования тестовой единицы	15
3 Задачи и тесты для дистанционной олимпиады по программированию среди вузов СКФО	18
3.1 Формулировки олимпиадных заданий	18
3.2 Пример решения	19
3.3 Быстрый алгоритм приближенного нахождения решения задачи Коши для ОДУ	20
3.4 Быстрое вычисление линейных комбинаций соболевских функций, порожденных функциями Хаара	25
3.5 Спектральный метод решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений посредством ортогональной в смысле Соболева системы функций, порожденной системой Хаара	29
3.6 Алгоритм быстрого дискретного преобразования для сумм Фурье по ортогональным по Соболеву полиномам, порожденным полиномами Чебышева первого рода	35
3.7 Быстрый алгоритм решения задачи Коши для ОДУ с помощью ортогональных по Соболеву полиномов, порожденных полиномами Чебышева первого рода	41
4 Математическое моделирование сложных физических систем	46
4.1 Рамазанов М.К.	46
4.2 Бабаев	48
4.3 Магомедов М.А.	51
4.4 Аннотация	51
4.5 Введение	52
4.6 Заключение	56
Заключение	57
Список использованных источников	59

Обозначения и сокращения

ДНЦ — Дагестанский научный центр

ОМИ — Отдел математики и информатики

РАН — Российская академия наук

Введение

Согласно плану научно-исследовательской работы за 2018 год исследования, проводимые в Отделе математики и информатики Дагестанского научного центра РАН, включают в себя работы по теме «Разработка алгоритмов и создание наукоемкого программного обеспечения для моделирования сложных систем. Некоторые вопросы цифровой обработки сигналов и изображений. Исследования по теории графов и теории оптимизации расписаний, компьютерное сопровождение вузовского учебного процесса».

В связи с некоторыми прикладными задачами, такими как вопросы термодинамики потоков жидкости и проблемой перечисления совершенных паросочетаний плоского графа за полиномиальное время, рядом авторов рассматривалась ранее задача перечисления разбиений прямоугольника заданных целочисленных размеров $h \times w$ на прямоугольники 1×2 .

За исключением случая $w = 3$, для которого получена система из двух взаимно-рекуррентных формул (Д. Кнут и др.), все известные формулы решения этой задачи используют действия с плавающей запятой. Это сопряжено с проблемами округления.

В отчетном году в ОМИ разработан алгоритм, компьютерное воплощение которого способно для искомого перечисления разбиений прямоугольника сгенерировать систему взаимно-рекуррентных формул, использующих лишь операции сложения целых чисел, т.е. свободных от проблем округления вещественных чисел.

В разделе 2 предложен алгоритм компьютерного формирования тестовых заданий по основам программирования. По каждой теме учебной дисциплины рассмотрены пять формализованных структур тестовых заданий. Подробно изложен способ воплощения формализованных структур тестовых заданий в программное обеспечение. Результаты статьи находят применение для автоматической генерации практически неограниченного количества тестовых пунктов для компьютерного тестирования по основам языков программирования.

Кроме того, в отчетном году сотрудники ОМИ ДНЦ РАН и кафедры Дискретной математики ДГУ провели 01.11.2018 г. межрегиональную дистанционную олимпиаду по программированию среди вузов СКФО. Выполнена трудоемкая работа по разработке заданий, тестов и программного обеспечения для олимпиады, результаты которой частично освещены в разделе 3.

Первый результат по данной теме касается разработки алгоритмов и программных пакетов для обработки и сжатия временных рядов и изображений, которые могут быть использованы в решении важных прикладных задач. На основе тригонометрических сумм Фурье $S_n(f, x)$ и классических средних Валле Пуссена ${}_1V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{l=m}^{m+n-1} S_l(f, x)$ учеными ОМИ были введены в рассмотрение повторные средние Валле Пуссена следующим образом ${}_2V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_1V_{n,k}(f, x)$, ${}_{l+1}V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_lV_{n,k}(f, x)$ ($l \geq 1$). Сконструированы

операторы, которые осуществляют на основе средних ${}_2V_{n,m}(f,x)$ так называемые перекрывающиеся преобразования (lapped transform), хорошо зарекомендовавшие себя на практике для обыкновенных сумм Фурье. Были исследованы аппроксимативные свойства этого нового вида преобразований в случае, когда исходный сигнал представляет собой непрерывную (вообще говоря, непериодическую) функцию. Эти операторы легли в основу разработанного алгоритма для приближения сигналов и временных рядов. Алгоритм был реализован в виде пакета прикладных программ, и с его помощью проведен ряд численных экспериментов.

Еще одно прикладное направление исследований, проводимых в ОМИ в 2017 году, связано с численно-аналитическим решением систем линейных и нелинейных дифференциальных и разностных уравнений спектральными методами, основанными на использовании систем функций, ортогональных по Соболеву и порожденных такими классическими системами как система Хаара, система полиномов Чебышева первого рода и система косинусов. Указанные методы легли в основу разработанных алгоритмов и пакетов реализующих их компьютерных программ.

Исследования в области теории расписаний приводят к появлению новых методов и даже целых направлений в теории графов. Например, знаменитая проблема четырех красок возникла в связи с задачами теории расписаний и разбиений [?, с. 101]. В свою очередь, с проблемой четырех красок связана задача о правильной вершинной раскраске графа в три цвета, т.е. задача о существовании такого отображения множества вершин графа в множество цветов $\{1, 2, 3\}$, что концевым вершинам каждого ребра сопоставляются разные цвета. Задача раскраски графа в три цвета NP -полна [?, с. 101], следовательно, не может быть разрешима за полиномиальное время, если верна знаменитая гипотеза « $NP \neq P$ » (отметим недавнее сообщение Норберта Блюма о доказательстве данной гипотезы [?] и работу [?]).

В 2017 году для проверки существования интервальной реберной раскраски связного двудольного графа, а также ее построения в случае существования в ОМИ был сконструирован жадный алгоритм, осуществляющий перебор с возвратами последовательных ребер кусочно-непрерывного пути. Кусочно-непрерывным путем мы называем такой упорядоченный набор всех ребер графа, что подграф, порожденный любым подмножеством его ребер с номерами $1, 2, \dots$, является связным. Построен алгоритм, позволяющий для множества S всех двудольных графов заданного порядка H сгенерировать множество S_0 двудольных графов существенно меньшей мощности, содержащее для каждого графа $G \in S$ граф, изоморфный G . Применением жадного алгоритма к каждому графу из S_0 с привлечением компьютерных ресурсов показано, что при малых значениях H все графы из S_0 интервально раскрашиваемы.

Как следствие установлено, что все двудольные графы $G = (X, Y, E)$ порядка 16 при $|X| < 7$ обладают интервальной раскраской. Это, в свою очередь, означает, что достаточно проверить интервальную раскрашиваемость двудольных графов порядка 16 при $|X| = 7$ и $X = 8$. Разработанное на основе упомянутых алгоритмов программное обеспечение обладает также рядом дополнительных свойств, способствующих удобному графическому отображению интервальной раскраски.

В направлении сопровождения вузовского учебного процесса был рассмотрен вопрос автоматической генерации тестовых заданий по учебным дисциплинам. Описан алгоритм компьютерного формирования тестовых заданий по основам программирования на языке Delphi 7.0, алгоритм воплощен в компьютерную программу. По каждой теме учебной дисциплины рассмотрены пять формализованных структур тестовых заданий и одна «нестандартная» форма, предусматривающая творческий анализ той или иной нестандартной ситуации.

В этом же направлении была поставлена задача о создании алгоритмического и программного обеспечения для компьютерного сопровождения процесса распределения учебной нагрузки вузовской кафедры. Распределение учебной нагрузки практически никогда не начинается «с чистого листа». В качестве исходного, «чернового» выступает распределение, унаследованное от предыдущего учебного года. С другой стороны, «черновое» распределение никогда не может быть принято за «беловик» без дополнительной работы над ошибками (изменяется количество студентов в учебных группах, ежегодно изменяется состав актуальных учебных дисциплин категории «по выбору», в рамках оптимизации учебных нагрузок в связи с финансовыми проблемами вуза могут быть скорректированы объемы учебных часов). Таким образом, автоматизация (хотя бы частичная) в подготовке итогового распределения учебных часов является актуальной и востребованной задачей.

При разработке тем, связанных с компьютерным сопровождением вузовского учебного процесса, естественным является сочетание научно-исследовательской деятельности с учебно-методической работой (в частности, издание учебных пособий с решениями нестандартных задач) и работой по подготовке студентов к конкурсам и олимпиадам по программированию. Нами был издан набор нестандартных упражнений по 3ds Max с решениями в виде учебного пособия. В направлении 3ds Max команда студентов из учебной группы ФМиКН ДГУ приняла участие во Всероссийском конкурсе, получены два диплома 1 степени – в личном и командном первенстве. Издано учебно-методическое пособие по итогам студенческой олимпиады вузов СКФО по программированию, а также издан (в электронном виде) цикл лекций по программированию.

Предложен компактный формат исходных данных для построения графа. Предлагаемый способ воспроизведения и интерактивного редактирования ориентированных и неориентированных графов способствует достижению хорошего полиграфического качества рисунков графов, сопровождающих статьи и учебные пособия по теории графов. Этот метод включает визуальное изменение координат вершин на рисунке графа с применением стека изменений практически неограниченной глубины, масштабирование всего рисунка и отдельных его элементов (размеров изображения вершин, толщины линий и стрелок с сохранением координат вершин), ведение протокола изменений в rtf-формате. Результаты находят применение в создании полиграфических документов с рисунками графов.

1 Вычислительные аспекты проблемы перечисления разбиений

Через $M(h \times w)$ будем обозначать прямоугольник M размеров w и h , а количество его разбиений на 1×2 -прямоугольники (плитки) — через $f(h, w)$. Задача перечисления разбиений заданного прямоугольника на плитки впервые рассмотрена в работах [1, 2] в связи с вопросами термодинамики потоков жидкости. Отметим также, что различным аспектам этой задачи посвящена и значительная часть главы 7 книг [3] и [4], где, в частности, рассмотрена задача построения взаимно-рекуррентных формул (в.р.ф.) для $f(h, w)$ при $w = 2$ и $w = 3$. Полученную в этих работах формулу приведем в обозначениях данной статьи:

$$f(h, w) = 2^{\frac{wh}{2}} \prod_{j=1}^w \prod_{k=1}^h \left(\cos^2 \frac{\pi j}{w+1} + \cos^2 \frac{\pi k}{h+1} \right)^{1/4}. \quad (1.1)$$

С вычислительной точки зрения формула (1.1) обладает тем недостатком, что действия с плавающей запятой неизбежно сопряжены с приближенным характером вычислений. Например, вычисления, выполненные по формуле (1.1) программой C# с применением двойной точности, приводят к неверным значениям: $f(68, 2) = 117669030460993$, $f(16, 8) = 540061286536919$, $f(15, 5) = 3$ и $f(11, 9) = 3812$, тогда как истинные значения равны: $f(68, 2) = 117669030460994$, $f(16, 8) = 540061286536921$, $f(15, 5) = 0$ и $f(11, 9) = 0$ соответственно. Таким образом, формула (1.1) малоприспособна для точного решения перечислительной задачи при значительных размерах прямоугольника. Цель данного раздела заключается в построении системы в.р.ф., использующих лишь операции сложения целых чисел, более точно, в формулировке алгоритма компьютерной генерации таких формул.

1.1 Построение системы в.р.ф.

Из двух параметров w и h примем w за основной; тогда при каждом фиксированном w искомые рекуррентные формулы будут зависеть лишь от h . Следующие утверждения очевидны: а) $f(h, w) = 0$, если и только если произведение $w \cdot h$ нечетно, б) $f(h, 1) = 1$ при четном h . При небольших значениях w вывод формул для $f(h, w)$ вручную, без привлечения компьютера, не представляет трудности. Легко видеть, например, что при $w = 2$ значения $f(h, w)$ задаются числами Фибоначчи:

$$f(1, 2) = 1, f(2, 2) = 2; f(h, 2) = f(h-1, 2) + f(h-2, 2) \text{ при } h > 2.$$

Однако вывод в.р.ф. вручную представляется малореальным уже при значениях w , близких к 10, и вовсе невыполнимым при больших w ; достаточно сказать, что при $w = 13$ количество $Q(w)$ формул в системе в.р.ф., сгенерированных авторским программным обеспечением, оказалось равно 3050.

Если положить начальной клеткой «горизонтальной» плитки ее левую клетку, а начальной клеткой «вертикальной» плитки — верхнюю клетку плитки, то упорядочение клеток

исходного прямоугольника «по строкам»:

$$M_{11}, \dots, M_{1w}, \dots, M_{h1}, \dots, M_{hw} \quad (1.2)$$

естественным образом задает упорядочение плиток в каждом полном разбиении (т.е. в таком разбиении на плитки, когда каждая клетка прямоугольника принадлежит в точности одной плитке, и наоборот — обе клетки каждой плитки принадлежат прямоугольнику). Для этого достаточно из двух плиток считать предшествующей ту плитку, чья начальная клетка располагается раньше в упорядочении «по строкам»; для соответствующего упорядочения плиток в полном разбиении также будем применять термин «по строкам».

Понятие частичного разбиения (ч.р.) прямоугольника определяется рекурсивно. Пустое покрытие (когда не уложена ни одна плитка) будем считать частичным разбиением и обозначать μ_{11} ; ячейку M_{ij} будем называть клеткой ветвления ч.р., если выполнены следующие два условия: 1) M_{ij} является первой клеткой прямоугольника в последовательности (1.2), не покрытой плитками; 2) клетки M_{ij} , $M_{i,j+1}$ и $M_{i+1,j}$ существуют (т.е. принадлежат прямоугольнику) и не покрыты плитками;

если μ_{ij} — ч.р. с клеткой ветвления M_{ij} , то наименьшее разбиение, содержащее μ_{ij} и одну из двух пар клеток — $(M_{ij}, M_{i+1,j})$ либо $(M_{ij}, M_{i,j+1})$ — считается частичным разбиением — потомком ч.р. μ_{ij} , если обладает клеткой ветвления или же равно полному разбиению. По отношению к клетке прямоугольника, частично или полностью разбитого на плитки, удобно использовать термины «закрашена»/«не закрашена» в зависимости от того, покрыта или непокрыта она некоторой плиткой.

Для ч.р. удобно называть занятую плитками часть прямоугольника закрашенной фигурой, а оставшуюся часть — не закрашенной или светлой фигурой. Поскольку в перечислении разбиений без ограничения общности можно применять способ укладки плиток «по строкам», в любом ч.р. закрашенной фигурой будет верхняя, а светлой — нижняя фигура. В этих терминах, первая незакрашенная клетка ч.р. называется клеткой ветвления, если ее правая и нижняя соседние клетки не закрашены.

Полный перебор разбиений прямоугольника $M(h \times w)$ будем рассматривать как процесс построения двоичного ориентированного дерева.

Метод северо-западной клетки

1. Соотнесем корневую вершину дерева пустому разбиению μ_{11} . Легко видеть, что клеткой ветвления корневой вершины является M_{11} .

2. Выполним последовательное рассмотрение и нумерацию листьев уровней $0, 1, \dots$: пока существует лист дерева, отличный от полного разбиения, для каждого такого листа — ч.р. v включим клетку ветвления в добавляемую в ч.р. плитку — горизонтальную или вертикальную — и продолжим отдельно каждое из двух полученных разбиений до получения потомка ч.р. v .

Конец алгоритма

Построенное методом северо-западной клетки двоичное дерево будем называть полным двоичным деревом. Рассматривая упорядоченность плиток полного разбиения «по строкам» в

качестве хронологической последовательности укладки плиток, получим следующее утверждение.

Набор листьев полного двоичного дерева задает набор всех полных разбиений.

Замечание 1.1. Удобно использовать одно и то же обозначение для ч.р. и соответствующей ему вершины полного двоичного дерева.

Каждому ч.р. v сопоставим дескриптор (v_1, \dots, v_w) , где

$$v_k = h - \max\{i : M_{ik} \in v; k = 1, \dots, w\}$$

и индекс $ind_v = \max\{v_1, \dots, v_w\}$. Вектор

$$\{v_k - \min\{v_1, \dots, v_w\}; 1 \leq k \leq w\}$$

будем называть нормализованным дескриптором v . Другими словами, дескриптор ч.р. — это вектор, элементы которого — суть высоты столбцов светлой фигуры ч.р., а индекс ч.р. — наибольшее значение этих высот.

Замечание 1.2. Если придерживаться способа уложения плиток «по строкам», то элементы нормализованного дескриптора любого ч.р. принадлежат множеству $\{0, 1, 2\}$.

Для ч.р. v обозначим через $\varphi(v)$ количество способов достройки v до полного разбиения. Если x и y являются непосредственными потомками вершины v , то

$$\varphi(v) = \varphi(x) + \varphi(y). \quad (1.3)$$

Очевидно, что $\varphi(v)$ определяется нормализованным дескриптором ч.р. v и ind_v . Рассмотрим двоичное поддерево, полученное в результате выполнения нескольких начальных шагов методом северо-западной клетки. Вершины с дескрипторами

$$(v_1, \dots, v_w), (v_w, \dots, v_1) \text{ и } (v_1 + C, \dots, v_w + C), \text{ где } C = \text{const},$$

будем называть эквивалентными.

Выполним разбиение множества всех вершин на классы эквивалентности: $F[0], F[1], \dots$

Количество различных способов достройки ч.р. v (вершины дерева), принадлежащей $F[i]$, до полного разбиения будем называть перечислением для вершины v и обозначать $F[i, ind_v]$.

Лист v , полученный на некотором шаге метода северо-западной клетки, будем называть терминальной вершиной, если в момент создания v уже существует эквивалентная ей вершина v' степени больше единицы; при этом вершину v' будем называть вторичной терминальной вершиной. Наблюдение «начало поддерева с корнем в вершине v будет в точности таким же, как и начало поддерева с корнем в вершине v' » служит основой для генерации взаимно-рекуррентных формул.

Условимся прервать метод северо-западной клетки, когда все листья построенной части дерева являются терминальными вершинами; построенное вплоть до прерывания дерево будем называть элиминированным двоичным деревом.

Для каждой вершины v i -го уровня двоичного дерева и $w \leq i$ найдется такой уровень j , что $i - w \leq j \leq i + w$ и j -й уровень содержит вершину, эквивалентную вершине v .

Пусть v является вторичной терминальной вершиной элиминированного двоичного дерева. Двоичное поддерево T_v с корнем в вершине v будем называть терминальным, если среди его вершин терминальными являются только корень и листья.

Перечисление для вторичной терминальной вершины v равно сумме перечислений для листьев терминального поддерева T_v .

Алгоритм «Перечисление по терминальным поддеревам»

1) из каждого класса эквивалентности $F[i]$ выбрать по одной вторичной терминальной вершине v ; 2) построить терминальное поддерево T_v и представить перечисление $F[i, ind_v]$ в виде суммы перечислений для листьев терминального поддерева T_v .

Конец алгоритма

Алгоритм «Перечисление по терминальным поддеревам» формирует в.р.ф. для решения задачи перечисления разбиений $M(h \times w)$.

Пусть элиминированное двоичное дерево построено. Обозначим искомое множество в.р.ф. через R , а множество терминальных вершин, включающее точно одного (произвольно выбранного) представителя из каждого класса эквивалентности, — через N . Сначала каждой вершине из N присвоим метки вида:

$$F[\text{номер класса эквивалентности, индекс}]$$

, затем по алгоритму «Перечисление по терминальным поддеревам» сгенерируем искомое множество R .

Авторское программное сопровождение состоит из трех частей. В первой реализован алгоритм «Перечисление по терминальным поддеревам», а также сконструированы нормализованные дескрипторы вершин множества N для передачи второй части. Во второй части выполняется инициализация начальных значений в.р.ф. для каждого из нормализованных дескрипторов, вычисленных в первой части. Третья часть предназначена для выполнения расчетов в соответствии с в.р.ф., сгенерированными в первой части, и значениями их начальных элементов, вычисленных во второй части. Отметим, что расчеты выполняются с использованием многоразрядной целочисленной арифметики.

Из алгоритма «Перечисление по терминальным поддеревам» следует, что в формуле с левой частью $F[i, H]$ второй индекс каждого слагаемого в правой части $\leq H$.

Если в в.р.ф. R присутствует формула с левой частью $F[i, H]$, содержащая в правой части слагаемое $F[j, H]$ с тем же вторым индексом, то будем говорить, что формула j предшествует формуле i . Для организации вычислений по в.р.ф. R «сверху вниз» требуется упорядочить R таким образом, чтобы соблюдалось условие: если для пары формул i и j известно,

что j предшествует i , то в упорядочении R формула j встречается раньше, нежели формула i . Задачу такого упорядочения будем называть задачей согласования в.р.ф.

В в.р.ф. R отсутствуют циклические ссылки.

Напомним известное утверждение о топологической сортировке [6].

Вершины ациклического ориентированного графа G на n вершинах можно таким образом пометить числами из множества $\{0, 1, \dots, n-1\}$, что если в графе G имеется дуга (i, j) , то $i < j$.

Напомним суть алгоритма топологической сортировки [6]. Произвольно выбранная вершина с нулевой полустепенью исхода помечивается числом $n-1$ и удаляется из графа; в полученном графе произвольная вершина с нулевой полустепенью исхода помечивается числом $n-2$ и удаляется. Процедура повторяется, пока не пометим все вершины.

Согласование в.р.ф. R всегда выполнимо.

Замечание 1.3. Задача топологической сортировки текстуально близка к задаче поиска ориентированного гамильтонова пути в каждой компоненте ориентированного графа. В общем случае задача о гамильтоновом пути NP -полна [7], но для ациклических ориентированных графов задача об ориентированном гамильтоновом пути разрешима за полиномиальное время [8]. Заметим также, что ориентированный граф имеет цикл в том и только в том случае, когда алгоритм поиска в глубину [9] находит обратную дугу.

Об оценке вычислительной сложности процедуры согласования списка в.р.ф. см. [10].

1.2 Примеры вычислений

Компьютерные преобразования подтверждают следующую гипотезу (проверка выполнена для $w \leq 13$).

Гипотеза (о шаге в.р.ф.). Сгенерированные алгоритмом «Перечисление по терминальным поддеревьям» и согласованные алгоритмом топологической сортировки в.р.ф. являются 3-согласованными взаимно-рекуррентными формулами.

Из гипотезы следует, что для организации вычислений по сгенерированным согласованным в.р.ф. достаточно инициализировать по три начальных значения каждого из $F[i]$. Приведем примеры вычислений значений $f(h, w)$.

- 1) $f(3, 2) = 3$,
- 2) $f(2, 4) = 5$,
- 3) $f(20, 3) = 413403$,
- 4) $f(100, 5) = 4995246427425596587926101947511568142197556312989986399$,
- 5) $f(8, 6) = 167089$,
- 6) $f(30, 7) = 744382189686310539093281$.

2 Автоматизация создания тестовых единиц

Вопросы организации компьютерного тестирования рассмотрены в ряде работ, см., например, [11]. Раздел посвящен описанию алгоритма автоматизации создания тестовых единиц по языку программирования Delphi 7.0.

Сформулирован алгоритм построения тестовой единицы в одной из нескольких общепринятых форм и приведены основные фрагменты воплощения алгоритма средствами Delphi 7.0. Подчеркнем, что нам не удалось отыскать в журнальной (и иной) литературе работы, посвященные вопросам автоматизации создания тестовых единиц.

2.1 Структура программного кода формирования тестовой единицы

Количество тем по основам языка программирования сравнительно невелико (20-30), количество форм тестовых единиц обычно считается равным пяти. По каждой i -й теме формулируются тестовые единицы в каждой из j форм (« i,j -термы»), $j = 1 \dots 5$:

1) выбор одного ответа из нескольких предложенных, 2) выбор двух из нескольких предложенных, 3) упорядочение предложенных ответов по некоторому признаку, 4) установление соответствия между двумя множествами, 5) вычисление ответа.

В первой части программного кода для генерации i,j -терма объявляются и инициализируются основные объекты (главным образом — тех типов, которые изучаются в i -й теме), а также вспомогательные объекты, среди которых, в частности, могут присутствовать текстовые объекты, предназначенные для запоминания результатов (назовем их r -объектами). Инициализация производится в виде присвоения одиночных констант (например, 8, 'A', FALSE, []) или константных выражений (например, *not* 7, *trunc*(−6.5), 'A'+ 'B', *random*(2)).

Например, для рассматриваемого ниже случая генерации тестовых единиц по теме «Множества», форма 3 (в классификации авторской программы — 15,3-терм), объявления могут иметь вид:

```
var
  s: array[1..5] of set of syte;
  rz: array[1..5] of string;
  m: array [1..5] of byte;
  a, k: byte;
  OutString1, OutString2: string;
//две части формулировки тестовой единицы
```

Пример инициализации объектов:

```
for k:=1 to 5 do
begin
```

```

s[k]:=[];
m[k]:= 1+ random (5); //мощности множеств
while SetCount(s[k])< m[k] do
include (s[k],random (20));
//SetCount(q) - функция вычисления мощности множества q
end;
a:=2+random (5);

```

Затем над объектами выполняются действия, проверка понимания которых, — т.е. интерпретация действий и успешная бескомпьютерная имитация их выполнения, — и составляет цель опроса по данному i,j -терму. Результаты таких действий запоминаются в r -объектах в строковом формате.

Пример блока действий:

```

s[1]:=s[1]*s[5]; s[1]:=s[1]+s[2]; s[3]:=s[4]-s[1];
if a in s[5] then include (s[4],a) else exclude (s[4],a);
for k:=1 to 5 do rz[k]:=SetString(s[k]);

```

здесь **SetString(q)** — пользовательская функция для строкового представления множества q .

Во второй части программного кода i,j -терма формируются две текстовые величины: открытая часть **OutString1**, непосредственно предъявляемая учащемуся, и скрытая часть **OutString2**, предъявляемая учащемуся лишь после специального преобразования программным обеспечением, осуществляющим обработку созданных тестовых единиц и организующим интерфейс с учащимися.

Пример формирования **OutString1**:

```

OutString1:=
'Вопрос3'+#13#10+
'Пусть a='+intToStr(a)+ ' и над множествами ';
for k:=1 to 5 do OutString1:=OutString1+'s[k]='+rz[k]+' , ';
OutString1:=OutString1+ #13#10+
'выполнены следующие действия:'+#13#10+
's[1]:= s[1]*s[5]; s[1]:= s[1]+s[2]; s[3]:= s[4]-s[1];'+#13#10+
'if a in s[5] then include (s[4], a) else exclude (s[4], a).'+#13#10+
'Выписать количество элементов в каждом множестве, начиная с s[1].';

```

Пример формирования **OutString2**:

```

OutString2:='';
for k:=1 to 5 do

```



```

begin
  OutString2:=OutString2+'№да'+#13#10+IntToStr(SetCount(s[k]));
  if k<5 then OutString2:=OutString2+#13#10;
end.

```

В конце второй части осуществляется вывод обоих текстов в файл, соответствующий модулю, — относительно самодостаточной совокупности из нескольких тем, включая и рассматриваемую i -ю тему. Пример текста тестовой единицы, выведенной программой в файл:

№Вопрос3

Пусть $a=5$ и над множествами $s[1]=[7,8,17]$, $s[2]=[7,8,17]$, $s[3]=[6]$,
 $s[4]=[6]$, $s[5]=[0,15]$,

выполнены следующие действия:

$s[1]:=s[1]*s[5]$; $s[1]:=s[1]+s[2]$; $s[3]:=s[4]-s[1]$;

if a in $s[5]$ then include ($s[4],a$) else exclude ($s[4],a$).

Выписать количество элементов в каждом множестве, начиная с $s[1]$.

№да

3

№да

3

№да

1

№да

1

№да

2

В соответствии с требованиями программного обеспечения, используемого в конкретном вузе (ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет») для обработки тестовых единиц и реализации интерфейса с учащимися, каждая тестовая единица начинается с ключевого слова «№Вопрос» с последующей цифрой от 1 до 5 — номером формы тестовой единицы; каждый элемент ответа предваряется служебным словом «№да» или «№нет», при этом только в формах 1–2 данные служебные слова соответствуют элементам ответа по смыслу: «верный» или «ошибочный», в формах же 3–5 служебное слово «№да» применяется в качестве префикса во всех элементах ответа, обозначая их начало.

3 Задачи и тесты для дистанционной олимпиады по программированию среди вузов СКФО

3.1 Формулировки олимпиадных заданий

1. Ошибка компиляции — 10 баллов.

Компиляторы ряда языков (например, PascalABC.NET, C#) диагностируют ошибку переполнения при вычислении произведения $10000000000*10*0$, при этом переполнение не имеет места при вычислении выражения $10000000000*10*0$.

Чем это можно объяснить? Текст объяснений наберите в текстовом редакторе Блокнот и сохраните в файле out1.txt.

2. Знакомое число — 10 баллов. Время счета — 3 мин.

Пусть n - целое положительное число и вычислены n случайных точек (x,y) , такие, что $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$. Обозначим через m количество тех точек, которые попали в единичный круг (круг с центром в точке $(0;0)$ и с радиусом 1). При достаточно большом n значение $4*m/n$ приближенно равно некоторому хорошо известному в математике числу, которое обозначим через P . Программа должна найти значение $4*m/n$, содержащее пять верных знаков числа P , и вывести n и соответствующее значение $4*m/n$, а также время счета: а) в консольное окно; б) в файл out2.txt в следующем виде:

$n = \dots \quad P = \dots \quad t = \dots \text{ sec.}$

3. Треугольник — 20 баллов. Время счета — 1 сек.

Четное положительное число a и целое положительное число h расположены в первой строке файла in3.txt и разделены пробелом. Для равнобедренного треугольника с вершинами в точках $(-a/2;0)$, $(a/2;0)$, $(0;h)$ найти количество точек n с целочисленными координатами, расположенных внутри треугольника (но не на его сторонах). Значения a , h , n и время счета вывести а) в консольное окно; б) в файл out3.txt в следующем виде:

$a = \dots \quad h = \dots \quad n = \dots \quad t = \dots \text{ sec.}$

Например, если a и h равны соответственно 8 и 5, искомое число n равно 16.

Ограничения: $1 < a \leq 1000$, $1 < h \leq 1000$.

4. Бинарный код — 20 баллов. Время счета — 5 сек.

Требуется сгенерировать последовательность всех подмножеств n -элементного множества так, что каждое следующее подмножество получается из предыдущего удалением или добавлением одного элемента.

Каждое подмножество задается последовательностью длины n , состоящей из нулей и единиц: если i -й элемент исходного множества включается в данное подмножество, то i -я позиция последовательности занята единицей, в противном случае — нулем. Значение n задано в файле in4.txt, $n < 10$. Вывод осуществляется в файл out4.txt. Например, при $n=3$ вывод может быть таким:

000

100
110
010
011
111
101
001

5. Разложение — 40 баллов. Время счета — 10 сек.

Найти число разложений $F(N)$ заданного натурального N на натуральные слагаемые и вывести в консольное окно и в файл out5.txt. Значение N задано в файле in5.txt, $0 < N < 501$.

Примечание. Само число N также считается разложением.

Пример вывода: $F(4) = 5$; вот сами разложения (их вывод не требуется):

1+1+1+1
1+1+2
1+3
2+2
4

3.2 Пример решения

Приведем решение задачи 5.

Обозначим через $r(n, m)$ мощность множества $R(n, m)$ разложений n на m натуральных слагаемых.

Тогда $F(N) = r(N, 1) + \dots + r(N, N)$. Рассмотрим способ вычисления $r(n, m)$.

Если $n = m$, то разложение единственно и состоит из n единиц, следовательно, $r(n, m) = 1$;

если $m = 1$, то разложение также единственно и состоит из n , т.е. $r(n, m) = 1$;

если $n < m$, то разложение не существует, т.е. $r(n, m) = 0$.

В противном случае, т.е. при $n > m > 1$, то $r(n, m) = r(n - m, m) + r(n - 1, m - 1)$. Почему? Разобьем множество $R(n, m)$ на два: $R'(n, m)$ — множество разложений n на m слагаемых, превышающих 1; $R''(n, m)$ — множество разложений n на m слагаемых, хотя бы одно из которых равно 1.

Легко видеть, что $|R'(n, m)| = |R(n - m, m)|$, $|R''(n, m)| = |R(n - 1, m - 1)|$. Таким образом, $r(n, m) = r(n - m, m) + r(n - 1, m - 1)$.

Заполним верхний треугольник матрицы $r[1..N, 1..M]$ нулевыми значениями, диагональные элементы и элементы первого столбца — единицами; затем для каждого $n = 3, \dots, N$

для каждого $m = 2, \dots, n - 1$ выполним:

{
если $n - m < m$, то $a := 0$, иначе $a := r(n - m, m)$;
 $r(n, m) := a + r(n - 1, m - 1)$;
}

3.3 Быстрый алгоритм приближенного нахождения решения задачи Коши для ОДУ

Введение. Разработан алгоритм быстрого приближенного нахождения решения задачи Коши для ОДУ, путем вычисления коэффициентов разложения этого решения в ряд по системе функций $\{\varphi_{1,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где $\varphi_{1,0}(x) = 1$, $\varphi_{1,1}(x) = x$, $\varphi_{1,n+1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \sin(\pi n x)$, $n = 1, 2, \dots$, ортонормированной относительно скалярного произведения Соболева $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$ и порожденной косинусами $\varphi_0(x) = 1$, $\{\varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos(\pi n x)\}_{n=1}^{\infty}$. Вычисление коэффициентов осуществляется посредством итерационного процесса, основанного на быстром преобразовании Фурье.

Заклучение. Разработан алгоритм быстрого приближенного нахождения решения задачи Коши для ОДУ, путем вычисления коэффициентов разложения этого решения в ряд по системе функций $\{\varphi_{1,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где $\varphi_{1,0}(x) = 1$, $\varphi_{1,1}(x) = x$, $\varphi_{1,n+1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \sin(\pi n x)$, $n = 1, 2, \dots$, ортонормированной относительно скалярного произведения Соболева $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$ и порожденной косинусами $\varphi_0(x) = 1$, $\{\varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos(\pi n x)\}_{n=1}^{\infty}$. Вычисление коэффициентов осуществляется посредством итерационного процесса, основанного на быстром преобразовании Фурье.

Реферат. В данной работе исследуются некоторые системы функций, порожденные системой косинусов, образующие ортогональную систему в смысле Соболева. Данные системы являются эффективных инструментов решения систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Был разработан быстрый итерационный алгоритм приближенного нахождения коэффициентов разложения по вышеупомянутой системе решения задачи Коши для ОДУ. Результаты данной работы могут быть использованы при написании программ, вычисляющих некоторые типы ОДУ.

3.3.1 Введение

Через $W_{L^2(0,1)}^1$ обозначим пространство Соболева, которое состоит из абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций f и таких, что $f' \in L^2(0,1)$. В работе [14] была введена система функций

$$\varphi_{1,0}(x) = 1, \quad \varphi_{1,1}(x) = x, \quad \varphi_{1,n+1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \sin(\pi n x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

которая ортонормирована относительно скалярного произведения Соболева

$$\langle \varphi_{1,n}, \varphi_{1,m} \rangle = \varphi_{1,n}(0)\varphi_{1,m}(0) + \int_0^1 \varphi'_{1,n}(x)\varphi'_{1,m}(x)dx$$

и порождена системой косинусов

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \{\varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos(\pi n x)\}_{n=1}^{\infty} \quad (3.2)$$

посредством равенств

$$\varphi_{1,0}(x) = 1, \quad \varphi_{1,n}(x) = \int_0^x \varphi_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

В этой же работе было показано, что системы (3.1) и (3.2), взятые вместе являются весьма эффективным инструментом численного решения систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с помощью итерационного процесса, основанного на построении сжимающего оператора A . С подробным описанием этого итерационного процесса и построением сжимающего оператора можно ознакомиться в работе [15]. В настоящей работе мы рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y^0, \quad x \in [0, h], \quad (3.3)$$

где h выбирается из условия (3.8), $f(x, y)$ — функция двух переменных, которая непрерывна в некоторой замкнутой области \bar{G} переменных (x, y) , содержащей точку $(0, y^0)$ и такой, что $[0, h] \times \mathbb{R} \subset \bar{G}$. Кроме того, функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по второй переменной, т.е.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \lambda |y_1 - y_2|, \quad 0 \leq x \leq h.$$

Выполнив замену переменной $x = h \sin \pi t$ в (3.3), мы перейдем к следующей задаче

$$\eta'(t) = h\pi \cos(\pi t) f(h \sin \pi t, \eta(t)), \quad \eta(0) = y^0, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad (3.4)$$

где $\eta(t) = y(h \sin \pi t)$. Заметим, что после такой замены функция $y(h \sin \pi t)$ на отрезке $[0, 1]$ будет симметричной относительно прямой $t = \frac{1}{2}$. Поэтому, в дальнейшем мы будем считать, что $t \in [0, 1]$. Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в области \bar{G} , то $\eta(t) \in W_{L^2(0,1)}^1$. Тогда в силу теоремы 2.2 из работы [16] следует, что функцию $\eta(t)$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд Фурье по системе (3.1), т.е.

$$\eta(t) = \eta(0) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k+1}(\eta) \varphi_{1,k+1}(t), \quad (3.5)$$

где

$$c_{1,k+1}(\eta) = \int_0^1 \eta'(\tau) \varphi_k(\tau) d\tau.$$

Кроме того, в силу полноты системы (3.2) в $L^2(0,1)$, для функций $\eta'(t)$ и $q(t) = \cos(\pi t) f(h \sin \pi t, \eta(t))$ в метрике пространства $L^2(0,1)$, имеют место следующие разложения в ряд Фурье по системе (3.2):

$$\eta'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k+1}(\eta) \varphi_k(t), \quad (3.6)$$

$$q(t) = \cos(\pi t) f(h \sin \pi t, \eta(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(q) \varphi_k(t). \quad (3.7)$$

Тогда из (3.4)–(3.7) для $k \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} c_{1,k+1}(\eta) &= h\pi c_k(q) = h\pi \int_0^1 f(h \sin \pi \tau, \eta(\tau)) \cos(\pi \tau) \varphi_k(\tau) d\tau = \\ &= h\pi \int_0^1 f\left(h \sin \pi \tau, \eta(0) + \sum_{i=0}^{\infty} c_{1,i+1}(\eta) \varphi_{1,i+1}(\tau)\right) \cos(\pi \tau) \varphi_k(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства и есть вышеупомянутый оператор A , сопоставляющий точке $(c_0, c_1, \dots) \in l^2$ точку $(c'_0, c'_1, \dots) \in l^2$ по правилу

$$c'_k = h\pi \int_0^1 f\left(h \sin \pi \tau, \eta(0) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_{1,i+1}(\tau)\right) \cos(\pi \tau) \varphi_k(\tau) d\tau.$$

Если вместо бесконечной суммы в правой части предыдущего равенства рассмотреть ее частичную сумму порядка $N-1$, то мы получим конечномерный аналог оператора A , сопоставляющий точке $(c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ точку $(c'_0, c'_1, \dots, c'_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ по правилу

$$c'_k = h\pi \int_0^1 f\left(h \sin \pi \tau, \eta(0) + \sum_{i=0}^{N-1} c_i \varphi_{1,i+1}(\tau)\right) \cos(\pi \tau) \varphi_k(\tau) d\tau, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Как было показано в работе [15] оператор A будет сжимающим, если

$$h\kappa_\varphi \lambda < 1 \quad (3.8)$$

где $\kappa_\varphi = \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{1,k}(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, и, следовательно, итерационный процесс будет сходиться к его неподвижной точке, которую мы обозначим через $(\bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{N-1})$. Координаты этой точки представляют собой приближенные значения коэффициентов $\{c_{1,k+1}(\eta)\}_{k=0}^{N-1}$. Для вычисления коэффициентов \bar{c}_k , $k = \overline{0, N-1}$ разработан алгоритм и написана программа, используя алгоритм быстрого преобразования Фурье. Подставляя найденные коэффициенты в частичную сумму порядка $N-1$ ряда (3.5), получены значения приближенного решения в узлах сетки $t_j = \frac{j}{N}$, $j = \overline{0, N-1}$, также используя при этом алгоритм быстрого преобразования Фурье.

3.3.2 Описание алгоритма

Опишем подробнее алгоритм приближенного вычисления c'_k ($k = \overline{0, N-1}$). Входными данными являются:

- N — порядок частичной суммы ряда Фурье по системе, порожденной косинусами,
- p — первое приближение коэффициентов искомого решения,
- y_0 — начальное значение задачи Коши в точке 0,

- ε — порог для останковки итерационного процесса,
- f — функция двух переменных, удовлетворяющая условию Липшица по второй переменной.

Алгоритм вычисления суммы $\sum_{i=0}^{N-1} c_i \varphi_{1,i+1}(\tau)$ для некоторых заданных $c_i \in \mathbb{R}$ на сетке $\tau_j = \frac{j}{N}$ был описан в работе авторов [17].

Массив $c = \{c'_k\}_{k=0}^{N-1}$ вычисляется итерационным методом. В качестве первого приближения принимается $c^{(0)} = p$. После этого по формуле

$$c_k^{(m+1)} = \frac{h\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f \left(h \sin(\pi t_j), \eta(0) + \sum_{i=0}^{N-1} c_i^{(m)} \varphi_{1,i+1}(t_j) \right) \cos(\pi t_j) \varphi_k(t_j) \quad (3.9)$$

вычисляются значения $c^{(m+1)}$ пока не выполнится

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (c_k^{(m+1)} - c_k^{(m)})^2} < \varepsilon.$$

Отметим, что при вычислении $c_k^{(m+1)}$ при $k = 0$ требуется дополнительно умножить коэффициент на $\frac{1}{\sqrt{2}}$, так как $\varphi_0(x) = 1$. Кроме того, сумма (3.9) представляет собой дискретное косинус-преобразование функции $f \left(h \sin(\pi t_j), \eta(0) + \sum_{i=0}^{N-1} c_i \varphi_{1,i+1}(t_j) \right) \cos(\pi t_j)$ на сетке $\{t_j = \frac{j}{N}\}_{j=0}^{N-1}$. Используя этот факт, мы можем применить быстрое преобразование Фурье для вычисления (3.9). Последнее полученное значение $c_k^{(m+1)}$ принимается за массив c . Далее взяв частичную сумму порядка $N - 1$ равенства (3.5) и приняв в качестве значений $c_{1,1+k}$ значения массива c мы получим приближенное решение задачи Коши

$$\eta(t) \approx \eta(0) + \sum_{k=0}^{N-1} c'_k \varphi_{1,k+1}(t).$$

Обратим внимание, что при $t = t_j$ это равенство представляет собой формулу обратного синус-преобразования Фурье и может также быть посчитана посредством алгоритма быстрого преобразования Фурье.

3.3.3 Численные эксперименты

Пример 3.1. Решить задачу Коши

$$y' = xy, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, 2.$$

Решение. Точное решение этой задачи имеет вид: $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$. Полагая $x = 1, 2 \sin(\pi t)$, $\eta(t) = y(1, 2 \sin(\pi t))$ и учитывая, что функция $\eta(t)$ симметрична относительно прямой $t = \frac{1}{2}$, исходная задача примет следующий вид:

$$\eta'(t) = 1, 2^2 \cos(\pi t) \sin(\pi t) \eta(t), \quad \eta(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.10)$$

Ниже на рис. 3.1 приведены первые 4 итерации применения программы к задаче (3.10) при $N = 64$. Синим цветом обозначено точное решение, красным – приближенное.

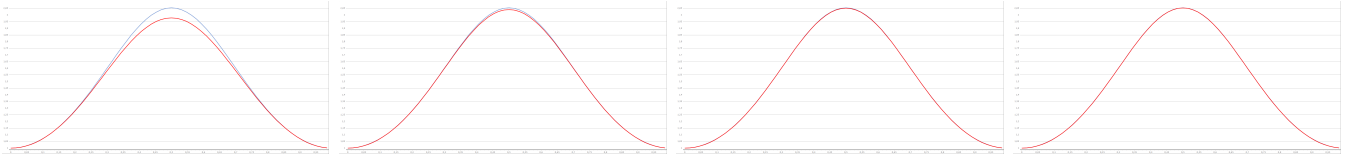


Рисунок 3.1 —

Пример 3.2. Решить задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad (3.11)$$

при

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - y^2} \sin(x), & |y| \leq 0,9, \\ \sqrt{1 - 0,9^2} \sin(x), & y \in \mathbb{R} \setminus [-0,9; 0,9], \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,5.$$

Решение. Точное решение этой задачи имеет вид: $y(x) = \sin(1 - \cos(x))$. При $x = 1,5 \sin(\pi t)$, $\eta(t) = y(1,5 \sin(\pi t))$ и с учетом того, что функция $\eta(t)$ симметрична относительно прямой $t = \frac{1}{2}$, задача (3.11) примет следующий вид:

$$\eta'(t) = 1,5 \cos(\pi t) \sin(1,5 \sin(\pi t)) \sqrt{1 - \eta^2(t)}, \quad \eta(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.12)$$

На рис. 3.2 приведены первые 3 итерации применения программы к задаче (3.12) при $N = 64$. Синим цветом обозначено точное решение, красным – приближенное.

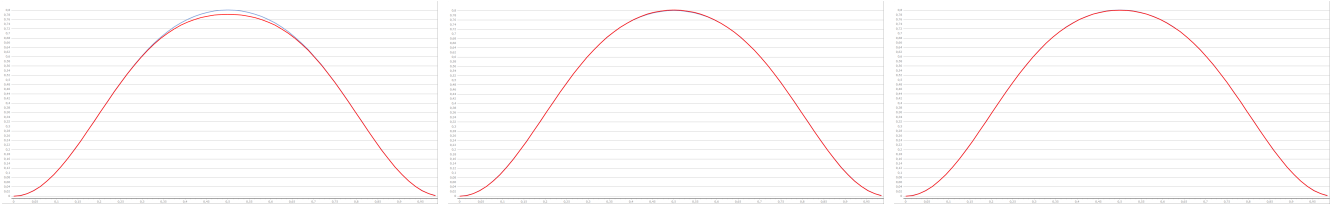


Рисунок 3.2 —

3.3.4 Заключение

Программно реализован итерационный метод нахождения приближенного решения задачи Коши для ОДУ, путем вычисления коэффициентов разложения этого решения в ряд Фурье по функциям, ортонормированным относительно скалярного произведения Соболева и порожденным косинусами. Вычисление неизвестных коэффициентов осуществляется посредством применения алгоритма быстрого преобразования Фурье. Разработанная программа зарегистрирована в Роспатенте под названием «Программа нахождения приближенного решения задачи Коши для ОДУ».

3.4 Быстрое вычисление линейных комбинаций соболевских функций, порожденных функциями Хаара

Аннотация. Рассмотрены некоторые свойства ортогональных по Соболеву функций $\chi_{1,n}(x)$, порожденных функциями Хаара. В частности, получены рекуррентные формулы для функций $\chi_{1,n}(x)$. Разработан алгоритм вычисления линейных комбинаций N функций $\chi_{1,n}(x)$ за $O(\log N)$ операций.

3.4.1 Введение

В данной статье рассмотрен быстрый алгоритм вычисления линейных комбинаций функций $\chi_{1,n}(x)$, ортогональных относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx \quad (3.13)$$

и порожденных системой Хаара. Напомним, что система Хаара состоит из ортогональных на отрезке $[0,1]$ кусочно постоянных функций $\chi_n(x)$, определяемых следующим образом [38, глава 3, с. 70]:

$$\chi_1(x) = 1, \quad \chi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \bar{\Delta}_n, \\ 2^{k/2}, & \text{если } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2}, & \text{если } x \in \Delta_n^-, \end{cases} \quad (3.14)$$

где $n = 2^k + i$, $1 \leq i \leq 2^k$, $\Delta_n = \Delta_k^i = (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k})$ — двоичный интервал, а $\bar{\Delta}_n$ — замыкание двоичного интервала Δ_n .

В работах Шарпудина И. И. (см., например, [39–45]) разработаны теория и методы построения систем функций $\Phi_r = \{\varphi_{r,n}\}_{n=0}^\infty$, $r \geq 1$, ортонормированных относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\mu(x)dx, \quad (3.15)$$

частным случаем которого является (3.13). Для построения системы Φ_r выбирается одна из классических систем $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$, ортонормированных относительно обычного скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mu(t)dt, \quad (3.16)$$

и на её основе строятся функции $\varphi_{r,n}(x)$ посредством равенств

$$\varphi_{r,n}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, r-1, \quad (3.17)$$

$$\varphi_{r,n}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi_{n-r}(t)dt, \quad n = r, r+1, \dots \quad (3.18)$$

Система функций $\Phi_r = \{\varphi_{r,n}\}_{n=0}^{\infty}$, определённая формулами (3.17), (3.18), как было показано в упомянутых выше работах, будет ортонормирована относительно скалярного произведения (3.15). Ряд Фурье функции $y(x)$ по системе функций Φ_r имеет следующий вид:

$$y(x) \sim \sum_{n=0}^{r-1} y^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \sum_{n=r}^{\infty} c_{r,n}(y) \varphi_{r,n}(x), \quad (3.19)$$

где

$$c_{r,n}(y) = \int_{-1}^1 y^{(r)}(t) \varphi_{n-r}(t) \mu(t) dt. \quad (3.20)$$

Ряды Фурье по функциям, ортогональным в смысле Соболева, могут быть эффективно использованы при решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, в [46–49] предложен основанный на применении рядов Фурье по системам $\Phi_1 = \{\varphi_{1,n}\}$ итерационный метод решения задачи Коши для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Метод основан на представлении неизвестного решения $y(x)$ рассматриваемой задачи Коши в виде равномерно сходящегося ряда Фурье по системе вида Φ_1 :

$$y(x) = y(a) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n}(y) \varphi_{1,n}(x),$$

и поиске посредством некоторых итерационных процедур первых N неизвестных коэффициентов $c_{1,n}(y)$, $k = 1, \dots, N$. В качестве приближенного решения берется частичная сумма указанного ряда:

$$y(x) \approx y(a) + \sum_{n=0}^{N-1} c_{1,n+1}(y) \varphi_{1,n+1}(x). \quad (3.21)$$

Упомянутый выше итерационный метод устроен так, что при его выполнении приходится неоднократно вычислять в узлах некоторой сетки линейные комбинации вида

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \varphi_{1,n+1}(x), \quad (3.22)$$

где α_n — известные вещественные числа. В настоящей статье предложен быстрый алгоритм вычисления линейных комбинаций (3.22) для соболевских функций $\varphi_{1,n}(x) = \chi_{1,n}(x)$, порожденных функциями Хаара (3.14) по формулам (3.17), (3.18), в которых $\varphi_n(x) = \chi_{n+1}(x)$, $n \geq 0$.

3.4.2 Некоторые свойства функций $\chi_{1,n}$

В статье [51] получен явный вид функций $\chi_{1,n}(x)$, $n = 2^k + i$, $1 \leq i \leq 2^k$, $k \geq 0$:

$$\chi_{1,1}(x) = x, \quad \chi_{1,n}(x) = 2^{\frac{k}{2}} \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{i-1}{2^k}; \\ x - \frac{i-1}{2^k}, & \frac{i-1}{2^k} \leq x \leq \frac{2i-1}{2^{k+1}}; \\ \frac{i}{2^k} - x, & \frac{2i-1}{2^{k+1}} \leq x \leq \frac{i}{2^k}; \\ 0, & \frac{i}{2^k} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.23)$$

При фиксированном $k \geq 0$ совокупность функций $\chi_{1,n}$ с номерами $n = 2^k + i$, $1 \leq i \leq 2^k$, называется k -й пачкой ($\chi_{1,1}$ не попадает ни в какую пачку). Чтобы подчеркнуть принадлежность функции $\chi_{1,n}$ к той или иной пачке, мы будем использовать обозначение $\chi_{1,k,i}(x) = \chi_{1,n}(x)$, $n = 2^k + i$.

Заметим, что для заданной точки $x \in [0,1]$ в k -й пачке найдется не более одной функции, отличной от нуля в точке x . Именно этот факт позволит нам значительно ускорить процесс вычисления линейных комбинаций вида (3.22). Более того, если x является двоично-рациональной, то, начиная с некоторой пачки, все функции $\chi_{1,n}$ будут равны нулю в точке x . Остановимся более подробно на этом вопросе.

Ниже мы будем считать функции $\chi_{1,n}(x)$, $n \geq 2$, продолженными по непрерывности на всю ось, т. е. мы полагаем $\chi_{1,n}(x) = 0$, $x \notin [0,1]$, $n \geq 2$. В дальнейшем особую роль будет играть функция $\chi_{1,2}(x)$, поэтому мы выпишем тут ее явную формулу для наглядности:

$$\chi_{1,2}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 - x, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (3.24)$$

Утверждение 3.1. *Для функций $\chi_{1,n}(x)$ имеют место следующие соотношения:*

$$\chi_{1,k+m,i}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \chi_{1,k,i}(2^m x), \quad 1 \leq i \leq 2^k, \quad k \geq 0, \quad m \geq 0; \quad (3.25)$$

$$\chi_{1,k,i}(x) = \chi_{1,k,1}\left(x - \frac{i-1}{2^k}\right), \quad 1 \leq i \leq 2^k, \quad k \geq 0; \quad (3.26)$$

$$\chi_{1,k,i}(x) = 2^{-\frac{k}{2}} \chi_{1,2}(2^k x - i + 1), \quad 1 \leq i \leq 2^k, \quad k \geq 0. \quad (3.27)$$

Доказательство. Первые две формулы получаются непосредственно из определения (3.23), а последняя формула легко выводится с помощью первых двух:

$$\chi_{1,k,i}(x) = \chi_{1,k,1}\left(x - \frac{i-1}{2^k}\right) = 2^{-\frac{k}{2}} \chi_{1,2}(2^k x - i + 1).$$

□

Утверждение 3.2. *Для любой двоично-рациональной точки x все функции последовательно $\chi_{1,n}$, начиная с некоторого номера, будут равны нулю в этой точке. Более точно, если $x = \frac{j}{2^m}$, $0 \leq j \leq 2^m$, то*

$$\chi_{1,k,i}(x) = 0, \quad k \geq m, \quad 1 \leq i \leq 2^k.$$

Доказательство. Из соотношения (3.27) вытекает, что

$$\chi_{1,k,i}\left(\frac{j}{2^m}\right) = 2^{-\frac{k}{2}} \chi_{1,2}(2^{k-m}j - i + 1),$$

причем аргумент $2^{k-m}j - i + 1$ при условиях утверждения всегда является целым числом. Остается заметить, что, как это видно из (3.24), функция $\chi_{1,2}$ обращается в ноль в любой целочисленной точке. □

Утверждение 3.3. В каждой пачке для любой фиксированной точки $x \in [0,1]$ отличной от нуля в этой точке может быть лишь функция с номером $\nu(k,x) = [2^k x] + 1$, где k — номер пачки, а $[t]$ — целая часть t , т. е.

$$\chi_{1,k,i}(x) = 0, \quad i \neq \nu(k,x), \quad k \geq 0. \quad (3.28)$$

Кроме того,

$$\chi_{1,k,\nu(k,x)}(x) = 2^{-\frac{k}{2}} \chi_{1,2}(2^k x - [2^k x]). \quad (3.29)$$

Доказательство. Поскольку функция $\chi_{1,2}(x)$ отлична от нуля только при $0 < x < 1$, то из формулы (3.27) следует, что при заданных k и x неравенство $\chi_{1,k,i}(x) \neq 0$ имеет место только для тех i , которые удовлетворяют условию $0 < 2^k x - i + 1 < 1$. Следовательно, для i имеем $2^k x < i < 2^k x + 1$. Так как i — целое, то последнее соотношение может быть выполнено только при $i = [2^k x] + 1$. Отсюда следует справедливость соотношения (3.28). Оставшаяся часть утверждения получается непосредственной подстановкой выражения для $\nu(k,x)$ в формулу (3.27). \square

3.4.3 Математические основы алгоритма быстрого вычисления линейных комбинаций функций $\chi_{1,n}$

Пусть для заданных $x \in [0,1]$ и α_n , $0 \leq n \leq N-1$, требуется вычислить линейную комбинацию

$$S_{1,N}(x) = S_{1,N}(x; \{\alpha_n\}) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \chi_{1,n+1}(x). \quad (3.30)$$

Нетрудно подсчитать, что для вычисления $S_{1,N}(x)$ по данной формуле понадобится $O(N)$ операций.

Для оптимизации процесса вычисления линейной комбинации $S_{1,N}(x)$, $N = 2^K + I$, $1 \leq I \leq 2^K$, представим ее в следующем виде:

$$S_{1,N}(x) = \alpha_0 \chi_{1,1}(x) + \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \alpha_{n-1} \chi_{1,n}(x) + \sum_{n=2^K+1}^N \alpha_{n-1} \chi_{1,n}(x).$$

Отсюда, используя утверждение (3.3), выводим:

$$S_{1,N}(x) = \alpha_0 x + \sum_{k=0}^{\tilde{K}} \alpha_{2^k + \nu(k,x) - 1} 2^{-\frac{k}{2}} \chi_{1,2}(2^k x - [2^k x]), \quad \tilde{K} = \begin{cases} K, & \nu(K,x) \leq I, \\ K-1, & \nu(K,x) > I. \end{cases} \quad (3.31)$$

Для вычисления $S_{1,N}(x)$ по этой формуле требуется $O(K) = O(\log N)$ операций, что на порядок быстрее, чем при использовании формулы (3.30).

3.4.4 Компьютерная реализация

В данном пункте приводится описание численного алгоритма вычисления линейной комбинации $S_{1,N}(x)$, основанного на использовании формулы (3.31) и реализованного в методе FastCalc класса SobolevHaarLinearCombination

На вход метод FastCalc принимает массив коэффициентов α длины N и точку $x \in [0,1]$. Основные вычисления производятся в цикле по k , который соответствует сумме в формуле (3.31). На каждой итерации требуется вычислять величины $2^{-k/2}$, $2^k x$, $\nu(k, x) = [2^k x] + 1$ и $n = 2^k + \nu(k, x)$. В целях оптимизации вычисления указанных величин вводятся дополнительные переменные $\text{row}2k$, $\text{row}2kx$, $\text{row}2k2$, которые на k -й итерации содержат значения 2^k , $2^k x$, $2^{-k/2}$ соответственно. Эти переменные инициализируются значениями 1, x , 1 и на каждой итерации обновляются согласно формулам: $2^{k+1} = 2^k * 2$, $2^{k+1}x = 2^k x * 2$, и $2^{-\frac{k+1}{2}} = \frac{2^{-\frac{k}{2}}}{\sqrt{2}}$. Затем введенные переменные используются для вычисления очередного k -го члена суммы из формулы (3.31).

Заметим, что выполнение цикла досрочно завершается на k -ой итерации, если число x является двоично-рациональным вида $\frac{j}{2^k}$, $j = 0, 1, \dots, 2^k$, поскольку согласно утверждению 3.2 функции $\chi_{1,l,i}(\frac{j}{2^k}) = 0$ для всех $l \geq k$ и $1 \leq i \leq 2^l$. В коде условие досрочного прерывания цикла имеет вид $\text{row}2kx+1==\text{nu}$, где $\text{nu}=(\text{int})\text{row}2kx+1$, так как выполнение этого условия означает равенство $2^k x = [2^k x]$, откуда и следует, что x двоично-рациональное число вида $\frac{j}{2^k}$.

3.4.5 Заключение

Разработан алгоритм вычисления линейных комбинаций N функций $\chi_{1,n}(x)$ за $O(\log N)$ операций. Рассмотрены некоторые свойства ортогональных по Соболеву функций $\chi_{1,n}(x)$, порожденных функциями Хаара.

3.5 Спектральный метод решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений посредством ортогональной в смысле Соболева системы функций, порожденной системой Хаара

Аннотация. Рассмотрен итерационный метод решения задачи Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на использовании ортогональной в смысле Соболева системы функций, порожденной функциями Хаара.

3.5.1 Введение

Рассмотрим задачу Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(a) = y^0, \quad x \in [a, b], \quad (3.32)$$

где $f = (f_1, \dots, f_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$. Вектор-функцию $f(x, y)$ будем считать непрерывной в некоторой замкнутой области \bar{G} переменных (x, y) , содержащей точку (a, y^0) . Будем также полагать, что по переменной y функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x, \alpha) - f(x, \beta)\| \leq \lambda \|\alpha - \beta\|, \quad a \leq x \leq b, \quad (3.33)$$

где $\|(y_1, \dots, y_m)\| = \sqrt{\sum_{l=1}^m y_l^2}$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $[a, b] \times \mathbb{R}^m \subset \bar{G}$, так как в случае необходимости мы всегда можем продолжить функцию $f(x, y)$ по переменной y на всё \mathbb{R}^m , сохраняя свойство её подчинённости условию Липшица (3.33).

В статье [52] описан итерационный метод решения задачи Коши вида (3.32) с помощью представления решения $y(x)$ в виде ряда Фурье

$$y(x) = y(a) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{1,k}(y) \varphi_{1,k}(x), \quad (3.34)$$

где $y(a) = y^0$ — начальное условие задачи Коши, а $c_{1,k}(y) = (c_{1,k}(y_1), \dots, c_{1,k}(y_m))$ — вектор неизвестных коэффициентов Фурье, которые требуется найти, $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}(x)\}$ — система функций, ортогональных на отрезке $[u, v]$ относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g \rangle = f(u)g(v) + \int_u^v f'(x)g'(x)\mu(x)dx. \quad (3.35)$$

В работах Шарапудинова И. И. (см., например, [53–59]) разработаны теория и методы построения ортонормированных относительно (3.35) систем функций. Для этого выбирается одна из классических систем $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, ортогональных относительно обычного скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_u^v f(t)g(t)\mu(t)dt, \quad (3.36)$$

и на её основе строятся функции $\varphi_{1,k}(x)$ посредством равенств

$$\varphi_{1,0}(x) = 1, \quad \varphi_{1,k}(x) = \int_u^x \varphi_{k-1}(t)dt, \quad k \geq 1. \quad (3.37)$$

Полученная система функций $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}_{k=0}^{\infty}$, как показано в упомянутых выше работах, ортонормирована относительно скалярного произведения (3.35). Системы вида (3.37) называются ортогональными по Соболеву системами, порожденными системой функций Φ .

Суть итерационного метода, предложенного в [52] (см. также [60]), заключается в разбиении отрезка $[a, b]$ на подотрезки $\Delta_j = [a + jh, a + (j+1)h]$ длины h и последовательном решении исходной задачи Коши на полученных подотрезках. При этом за начальное условие задачи (будем обозначать его y^j) на отрезке Δ_j , $j > 0$, берется значение в точке $a + jh$ приближенного решения, полученного на предыдущем отрезке. Для поиска приближенного решения задачи на отрезке Δ_j :

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in \Delta_j, \quad y(a + jh) = y^j, \quad (3.38)$$

осуществляется перевод этой задачи с помощью линейной замены

$$x = \frac{t-u}{v-u}h + a + jh$$

на отрезок ортогональности $[u, v]$. Если ввести обозначение $\eta(t) = y\left(\frac{t-u}{v-u}h + a + jh\right)$, то задача (3.38) примет вид

$$\eta'(t) = \frac{h}{v-u} f\left(\frac{t-u}{v-u}h + a + jh, \eta(t)\right), \quad t \in [u, v], \quad \eta(u) = y^j. \quad (3.39)$$

Построение приближенного решения полученной задачи производится с помощью специальным образом сконструированного оператора A , действующего в гильбертовом пространстве l_2^m , состоящем из элементов $d = \{d^i, i = \overline{1, m}\}$, где $d^i = \{d_k^i\} \in l_2$, с нормой $\|d\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_k (d_k^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Оператор A устроен таким образом, что его неподвижной точкой являются коэффициенты Фурье $\mathcal{C}(\eta) = \left\{ \{c_{1,k}(\eta_i), k \geq 1\}, i = 1, \dots, m \right\}$ разложения вида (3.34) решения $\eta(t)$ по системе соболевских функций $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}(t)\}$ на отрезке $[u, v]$, т. е. $A(\mathcal{C}(\eta)) = \mathcal{C}(\eta)$. В связи с этим важным становится вопрос о наличии у оператора A свойства сжимаемости. Оказывается [52], оператор A можно сделать сжимающим в том случае, когда функции системы Φ_1 обладают следующим свойством:

$$\kappa^2 = \kappa^2(\Phi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_u^v (\varphi_{1,1+k}(t))^2 \mu(t) dt < \infty. \quad (3.40)$$

Более точно, имеет место следующее неравенство:

$$\|A\mathcal{C}_1 - A\mathcal{C}_2\|_{l_2^m} \leq h\lambda\kappa\|\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2\|_{l_2^m},$$

т. е. оператор A будет сжимающим, если $h\lambda\kappa < 1$, а этого всегда можно добиться за счёт выбора h , если $\kappa < \infty$.

Идея построения оператора A основана на следующих соотношениях:

$$\eta(t) = \eta(0) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k+1}(\eta) \varphi_{1,k+1}(t), \quad (3.41)$$

$$\eta'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k+1}(\eta) \varphi_k(t), \quad (3.42)$$

$$q(t) = \frac{1}{v-u} f\left(\frac{t-u}{v-u}h + a + jh, \eta(t)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(q) \varphi_k(t), \quad (3.43)$$

где первое соотношение — это разложение функции $\eta(t) \in W_{L_\mu^1}$ в ряд Фурье по системе $\{\varphi_{1,k}\}$, а второе и третье представляют собой ряды Фурье по системе $\{\varphi_k\}$ функций $\eta'(t) \in L_\mu^2$ и $q(t) \in L_\mu^2$ соответственно. Отметим, что в соотношении (3.41) ряд Фурье сходится равномерно (см., например, [59, теорема 2]), а в (3.42) и (3.43) — в метрике L_μ^2 (в силу полноты системы φ_k в пространстве L_μ^2). Из (3.39), (3.42) и (3.43) следует

$$c_{1,k+1}(\eta) = hc_k(q) = \frac{h}{v-u} \int_u^v f\left(\frac{t-u}{v-u}h + a + jh, \eta(t)\right) \varphi_k(t) \mu(t) dt,$$

что с учетом (3.41) приводит к соотношению ($k \geq 0$)

$$c_{1,k+1}(\eta) = \frac{h}{v-u} \int_u^v f\left(\frac{t-u}{v-u}h + a + jh, \eta(0) + \sum_{l=0}^{\infty} c_{1,l+1}(\eta) \varphi_{1,l+1}(t)\right) \varphi_k(t) \mu(t) dt.$$

Выражение в правой части и представляет собой упомянутый оператор A , сопоставляющий точке $\bar{d} \in l_2^m$ точку $\bar{\bar{d}} \in l_2^m$ по следующему правилу

$$\bar{\bar{d}}^i = \left\{ \frac{h}{v-u} \int_u^v f\left(\frac{t-u}{v-u}h + a + jh, \eta(0) + \sum_{l=0}^{\infty} \bar{d}_l^i \varphi_{1,l+1}(t)\right) \varphi_k(t) \mu(t) dt, k \geq 0 \right\},$$

где $i = \overline{1, m}$.

3.5.2 Численная реализация

В данной статье мы рассмотрим численную реализацию описанного выше итерационного метода на основе системы \mathcal{X} функций Хаара (3.44) и порождённой ею по формулам (3.37) системы \mathcal{X}_1 функций (3.45).

Функции Хаара определяются следующим образом [61]:

$$\chi_1(t) = 1, \quad \chi_k(t) = \chi_n^s(t) = \begin{cases} 2^{n/2}, & t \in \Delta_{n+1}^{2s-1}, \\ -2^{n/2}, & t \in \Delta_{n+1}^{2s}, \\ 0 & t \in [0,1) \setminus \Delta_n^s, \end{cases} \quad (3.44)$$

где $k = 2^n + s$, а числовые промежутки $\Delta_n^s = [2^{-n}(s-1), 2^{-n}s)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $s = \overline{1, 2^n}$, называют двоичными интервалами ранга k . Для функций системы \mathcal{X}_1 , порождённой системой функций Хаара по формулам (3.37) ($\varphi_k = \chi_{k+1}$), можно выписать явный вид [53, 62]:

$$\chi_{1,0}(t) = 1, \quad \chi_{1,1}(t) = t, \quad \chi_{1,k}(t) = 2^{n/2} \begin{cases} t - 2^{-n}(s-1), & x \in \Delta_{n+1}^{2s-1}, \\ 2^{-n}s - t, & x \in \Delta_{n+1}^{2s}, \\ 0, & x \in [0,1) \setminus \Delta_n^s, \end{cases} \quad (3.45)$$

где $k = 2^n + s$, $n \in \mathbb{N}_0$, $s = \overline{1, 2^n}$.

Искомые коэффициенты $c_{1,k+1}(\eta)$ разложения решения $\eta(t)$ задачи (3.39) в ряд Фурье — Соболева вида (3.34), как это видно из предыдущего пункта, являются неподвижной точкой оператора A . Шарापудиновым И. И. было показано, что $\kappa(\mathcal{X}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому для заданной правой части $f(x,y)$ при выборе $h < \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$ (λ — константа Липшица функции $f(x,y)$) оператор A будет сжимающим. Следовательно, коэффициенты $c_{1,k+1}(\eta)$ можно найти методом простых итераций.

В численной реализации описанного итерационного метода мы будем использовать конечномерный аналог оператора A , в котором вместо бесконечной суммы используется частичная сумма порядка N :

$$A_N(\bar{d}) = \left\{ h \int_0^1 f\left(ht + a + jh, \eta(0) + \sum_{l=0}^N \bar{d}_l^i \varphi_{1,l+1}(t)\right) \chi_k(t) dt, \quad k \geq 1 \right\}_{i=1}^m. \quad (3.46)$$

В данной формуле мы учли, что для системы Хаара вес $\mu(t) = 1$ и отрезок ортогональности $[u,v] = [0,1]$. Заметим, что для вычисления значения оператора A_N часто требуется находить значение линейных комбинаций порожденных функций (второй аргумент функции f). Для их вычисления мы воспользуемся быстрым алгоритмом, предложенным в статье [63]. Далее, интеграл в формуле (3.46) представляет собой коэффициент Фурье $c_k(q) = c_k(q; \mathcal{X})$ по системе Хаара (3.45) функции $q(t) = f\left(ht + a + jh, \eta(0) + \sum_{l=0}^N \bar{d}_l^i \varphi_{1,l+1}(t)\right)$. Для быстрого вычисления коэффициентов с номерами $k = \overline{1, N}$, $N = 2^{n_{max}+1}$, мы воспользуемся следующими формулами (см. также [64, с. 47]). Введем в рассмотрение следующие вспомогательные величины:

$$a_{n,s} = 2^{n/2} \int_{\Delta_{n+1}^s} q(t) dt, \quad s = \overline{1, 2^{n+1}}. \quad (3.47)$$

Поскольку по определению

$$c_k(q) = c_n^s(q) = 2^{n/2} \left(\int_{\Delta_{n+1}^{2s-1}} q(t) dt - \int_{\Delta_{n+1}^{2s}} q(t) dt \right), \quad k = 2^n + s, \quad s = \overline{1, 2^n},$$

то

$$c_n^s(q) = a_{n, 2s-1} - a_{n, 2s}, \quad s = \overline{1, 2^n}. \quad (3.48)$$

Заметим также, что величины $a_{n-1, s}$ можно выразить через $a_{n, s}$ по формуле:

$$a_{n-1, s} = \frac{a_{n, 2s-1} + a_{n, 2s}}{\sqrt{2}}, \quad s = \overline{1, 2^n}. \quad (3.49)$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов с номерами $k = \overline{1, 2^{n_{max}+1}}$ мы сначала находим $a_{n_{max}, s}$, $s = \overline{1, 2^{n_{max}+1}}$ с помощью одной из квадратурных формул. Затем, уменьшая n от n_{max} до 0, последовательно вычисляем как $a_{n-1, s}$ по формуле (3.49), так и коэффициенты $c_n^s(q)$ по формуле (3.48).

3.5.3 Компьютерные эксперименты

Рассмотрим применение приведенной выше программы на нескольких примерах.

Пример 3.3. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, & y_1(0) = 2, \\ y_2' = -4y_1 + y_2, & y_2(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Точное решение этой задачи имеет вид: $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x + e^x$. При $N = 8$ результат выполнения программы для первых 6 итераций приведен на рис. 3.3.

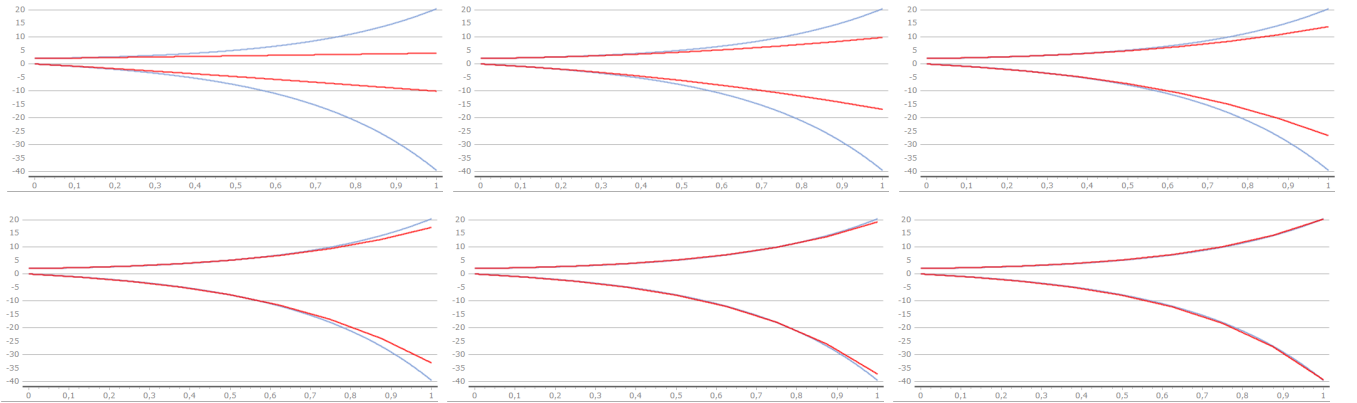


Рисунок 3.3 — Первые 6 итераций применения программы к задаче 3.3 (в первой строке итерации 1–3). Синим цветом обозначено точное решение, красным — его приближение, полученное с помощью программы

Пример 3.4. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2, & y_1(0) = 1, \\ y_2' = 3y_1 + y_2, & y_2(0) = -1, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Точным решением являются функции $y_1(x) = e^x \cos 3x + \sin 3x$, $y_2(x) = e^x \sin 3x - \cos 3x$. Результат выполнения программы для первых 6 итераций приведен на рис. 3.4.

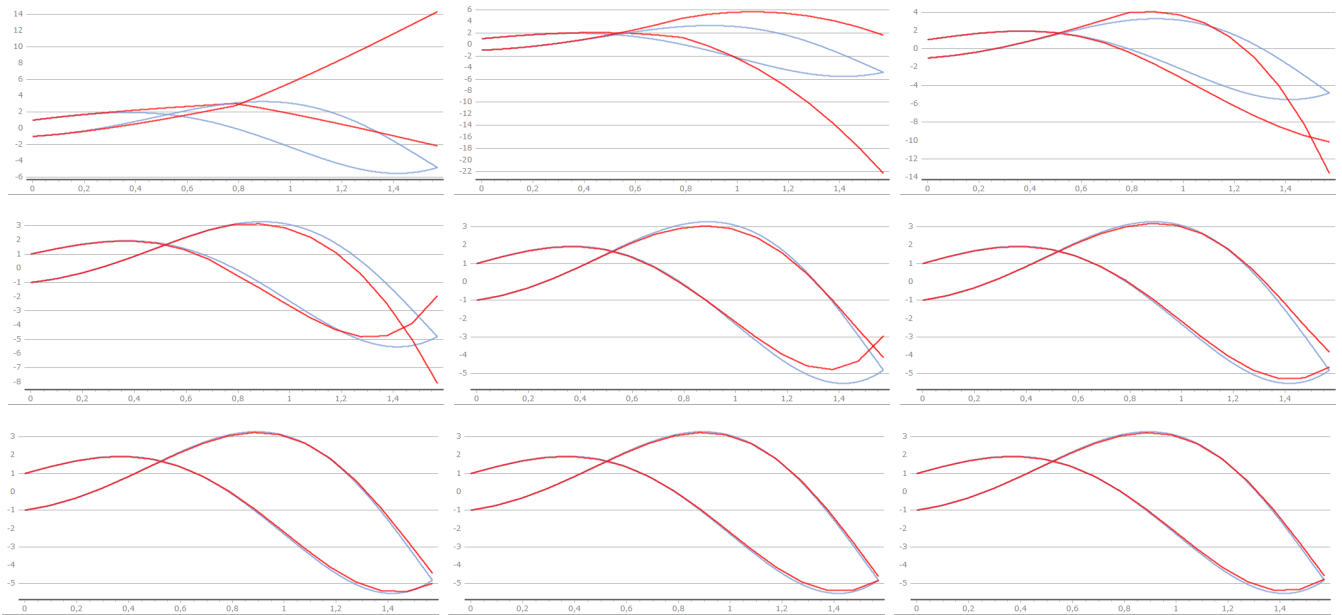


Рисунок 3.4 — Первые 9 итераций применения программы к задаче 3.4 (в первой строке итерации 1–3) при количестве кусков для каждого уравнения равным 2. Синим цветом обозначено точное решение, красным — его приближение, полученное с помощью программы

Пример 3.5. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3, & y_1(0) = 2, \\ y_2' = y_1 + y_2, & y_2(0) = 0, \\ y_3' = 3y_1 + y_3, & y_3(0) = -4, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

Точное решение этой задачи имеет вид: $y_1(x) = e^x(2 \sin 2x + 2 \cos 2x)$, $y_2(x) = e^x(1 - \cos 2x + \sin 2x)$, $y_3(x) = e^x(-1 - 3 \cos 2x + 3 \sin 2x)$. При $N = 16$ результат выполнения программы для первых 9 итераций приведен на рис. 3.5.

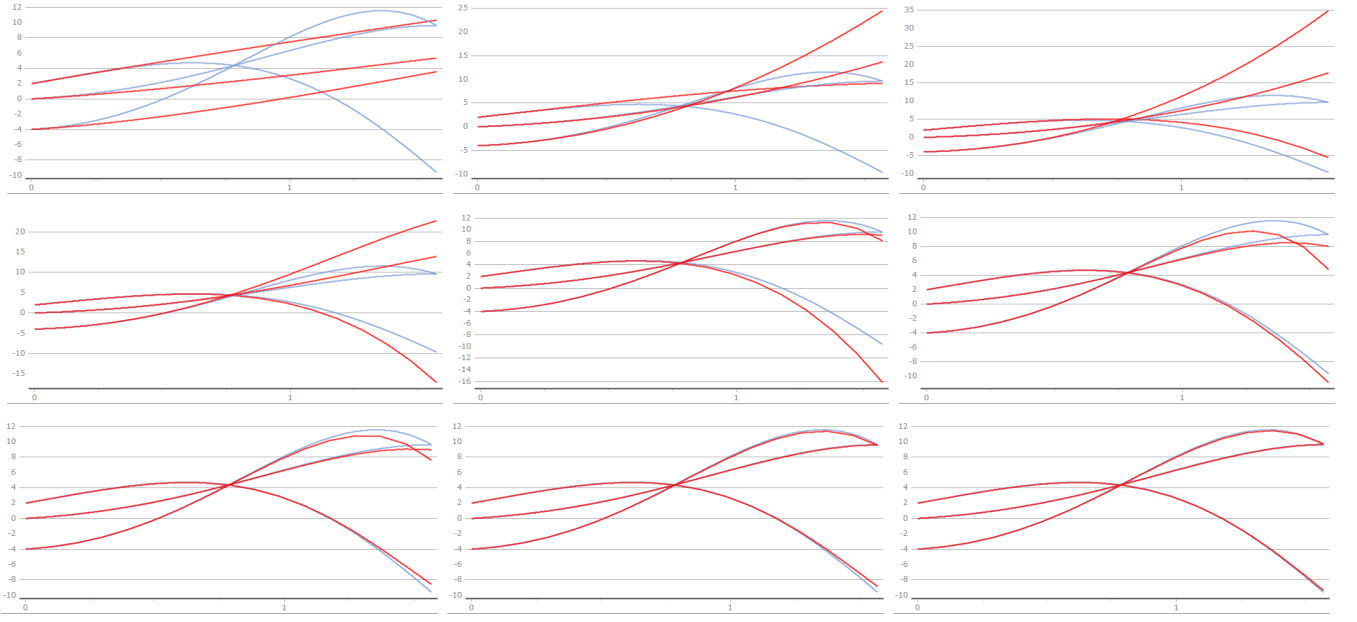


Рисунок 3.5 — Первые 9 итераций применения программы к задаче 3.5 (в первой строке итерации 1–3). Синим цветом обозначено точное решение, красным — его приближение, полученное с помощью программы

3.5.4 Заключение

Рассмотрен итерационный метод решения задачи Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на использовании ортогональной в смысле Соболева системы функций, порожденной функциями Хаара.

3.6 Алгоритм быстрого дискретного преобразования для сумм Фурье по ортогональным по Соболеву полиномам, порожденным полиномами Чебышева первого рода

Аннотация. Рассмотрена задача о численной реализации линейных комбинаций вида $S_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k T_{1,k+1}(x)$, где $T_{1,n}(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) — ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные полиномами Чебышева первого рода $T_0 = 1/\sqrt{2}$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ($n \in \mathbb{N}$) посредством равенств $T_{1,0} = 1$, $T_{1,n+1}(x) = \int_{-1}^x T_n(t) dt$ ($n = 1, \dots$). Для решения этой задачи на сетке $x_j = \cos \frac{(2j+1)\pi}{2M}$ ($0 \leq j \leq M-1$) осуществлен ряд преобразований выражения $S_N(x)$, которые в итоге позволяют свести рассматриваемую задачу к применению быстрого дискретного преобразования Фурье. Разработаны соответствующий алгоритм и программа на языке C#. С их помощью проведены численные эксперименты, которые показывают, что алгоритм, основанный на быстром преобразовании значительно выигрывает в смысле скорости вычислений по сравнению с методом непосредственного вычисления суммы $S_N(x)$ пользуясь явным видом полиномов $T_{1,n}(x)$.

3.6.1 Введение

В последние десятилетия получила интенсивное развитие теория полиномов, ортогональных относительно скалярного произведения типа Соболева, которых принято называть полиномами, ортогональными по Соболеву [65, 66]. В работе [66] были введены и исследованы полиномы $T_{r,k}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$), ортогональные по Соболеву, порожденные полиномами Чебышева первого рода $T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$, $k = 1, 2, \dots$, посредством следующих равенств

$$T_{r,k}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (3.50)$$

$$T_{r,r}(x) = \frac{(x+1)^r}{\sqrt{2r!}}, \quad T_{r,r+n}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} T_n(t) dt, \quad n = 1, \dots \quad (3.51)$$

Эти новые полиномы $T_{r,k}(x)$ ортонормированы [66] относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1) g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^1 f^{(r)}(x) g^{(r)}(x) \mu(x) dx, \quad (3.52)$$

где $\mu(x) = \frac{2}{\pi} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Обозначим через $W_{L_\mu^2(-1,1)}^r$ пространство Соболева, состоящее из функций $f = f(x)$, непрерывно дифференцируемых $r-1$ -раз, причем $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L_\mu^2(-1,1)$. В [66] было показано, что система полиномов $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ образует базис в $W_{L_\mu^2(-1,1)}^r$, кроме того в [66] показано, что ряд Фурье функции $f \in W_{L_\mu^2(-1,1)}^r$ имеет следующий вид

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1) \frac{(1+x)^\nu}{\nu!} + \sum_{k=r}^\infty \hat{f}_{r,k} T_{r,k}(x), \quad (3.53)$$

где

$$\hat{f}_{r,k} = \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) T_{k-r}(t) \mu(t) dt, \quad (k \geq r). \quad (3.54)$$

При этом, как показано в [66], ряд Фурье, фигурирующий в правой части равенства (3.53), сходится к $f(x)$ равномерно относительно $x \in [-1, 1]$. В частности, при $r = 1$ ряд (3.53) принимает следующий вид:

$$f(x) = f(-1) + \sum_{k=1}^\infty \hat{f}_k T_{1,k}(x), \quad (3.55)$$

где

$$\hat{f}_k = \int_{-1}^1 f'(t) T_{k-1}(t) \mu(t) dt, \quad (k \geq 0). \quad (3.56)$$

Ряды Фурье вида (3.55) встречаются в различных прикладных задачах, в том числе при приближенном решении систем дифференциальных уравнений так называемыми спектральными методами путем применения некоторых итерационных процедур. При этом, в качестве промежуточной возникает необходимость многократного вычисления выражения вида

$$S_N(x) = S_N(p, x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k T_{1,k+1}(x), \quad (3.57)$$

где $p = \{p_k\}_{k=0}^{N-1}$ – произвольные действительные числа.

В настоящей работе для решения этой задачи на сетке $x_j = \cos \frac{(2j+1)\pi}{2M}$ ($0 \leq j \leq M-1$) осуществлен ряд преобразований выражения $S_N(x)$, которые в итоге позволяют свести рассматриваемую задачу к применению быстрого дискретного преобразования Фурье. Разработаны соответствующий алгоритм и программа на языке C#. С их помощью проведены численные эксперименты, которые показывают, что алгоритм, основанный на быстром преобразовании значительно выигрывает в смысле скорости вычислений по сравнению с методом непосредственного вычисления суммы $S_N(x)$ пользуясь явным видом полиномов $T_{1,n}(x)$.

3.6.2 Некоторые вспомогательные результаты

При разработке алгоритма решения этой промежуточной задачи нам понадобятся некоторые преобразования правой части равенства (3.57), направленные на то, чтобы показать, что при вычислении $S_N(x)$ на сетке $\{x_j\}_{j=0}^{M-1}$ может быть использовано быстрое дискретное преобразование Фурье. С этой целью воспользуемся следующими свойствами полиномов $T_{1,k}(x)$, установленными в работе [66]:

$$T_{1,0}(x) = 1, \quad T_{1,1}(x) = \frac{1+x}{\sqrt{2}}, \quad T_{1,2}(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \quad (3.58)$$

$$T_{1,k+1}(x) = \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} - \frac{(-1)^k}{k^2 - 1}, \quad (k \geq 2) \quad (3.59)$$

и запишем (3.57) в следующем виде

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{p_0}{\sqrt{2}}(1+x) + \frac{p_1}{2}(x^2 - 1) + \sum_{k=2}^{N-1} p_k \left[\frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} - \frac{(-1)^k}{k^2 - 1} \right] \\ &= - \sum_{k=2}^{N-1} \frac{(-1)^k p_k}{k^2 - 1} + \frac{p_0}{\sqrt{2}}(1+x) + \frac{p_1}{2}(x^2 - 1) + \\ &\quad \sum_{k=2}^{N-1} p_k \left[\frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{N-1} p_k \left[\frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} \right] &= \sum_{k=2}^{N-1} p_k \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \sum_{k=2}^{N-1} p_k \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} = \\ &= \sum_{k=2}^{N-1} p_k \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \sum_{k=0}^{N-3} p_{k+2} \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} = \\ &= -\frac{p_2}{2}T_1(x) - \frac{p_3}{4}T_2(x) + \sum_{k=3}^{N-2} \frac{p_{k-1} - p_{k+1}}{2k}T_k(x) + \frac{p_{N-2}}{2(N-1)}T_{N-1}(x) + \frac{p_{N-1}}{2N}T_N(x), \end{aligned}$$

то мы можем переписать (3.60) в виде

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \bar{p}(N) + \frac{p_0}{\sqrt{2}}(1+x) + \frac{p_1}{2}(x^2 - 1) - \frac{p_2}{2}T_1(x) - \frac{p_3}{4}T_2(x) + \\ &\quad \sum_{k=3}^{N-2} \frac{p_{k-1} - p_{k+1}}{2k}T_k(x) + \frac{p_{N-2}}{2(N-1)}T_{N-1}(x) + \frac{p_{N-1}}{2N}T_N(x), \end{aligned} \quad (3.61)$$

где

$$\bar{p}(N) = - \sum_{k=2}^{N-1} \frac{(-1)^k p_k}{k^2 - 1}. \quad (3.62)$$

Далее имеем

$$\frac{p_0}{\sqrt{2}}(1+x) = p_0 T_0 + \frac{p_0}{\sqrt{2}} T_1(x), \quad \frac{p_1}{2}(x^2 - 1) = \frac{p_1}{4} T_2(x) - \frac{p_1}{2\sqrt{2}} T_0,$$

поэтому из (3.61) и (3.62) окончательно получаем

$$S_N(x) = \bar{p}(N) + \left(p_0 - \frac{p_1}{2\sqrt{2}}\right) T_0 + \left(\frac{p_0}{\sqrt{2}} - \frac{p_2}{2}\right) T_1(x) + \sum_{k=2}^{N-2} \frac{p_{k-1} - p_{k+1}}{2k} T_k(x) + \frac{p_{N-2}}{2(N-1)} T_{N-1}(x) + \frac{p_{N-1}}{2N} T_N(x). \quad (3.63)$$

Полагая $x = \cos \theta$, это равенство можно переписать

$$Q_N(\theta) = S_N(\cos \theta) = \bar{p}(N) + \frac{p_0}{\sqrt{2}} - \frac{p_1}{4} + \left(\frac{p_0}{\sqrt{2}} - \frac{p_2}{2}\right) \cos \theta + \sum_{k=2}^{N-2} \frac{p_{k-1} - p_{k+1}}{2k} \cos k\theta + \frac{p_{N-2}}{2(N-1)} \cos(N-1)\theta + \frac{p_{N-1}}{2N} \cos N\theta. \quad (3.64)$$

Таким образом, вычисление значений алгебраического полинома $S_N(x)$ на сетке x_j ($0 \leq j \leq M-1$) сводится к вычислению четного тригонометрического полинома $Q_N(\theta)$ на сетке $\theta_j = \frac{(2j+1)\pi}{2M}$ ($0 \leq j \leq M-1$), которое можно осуществлять путем быстрого дискретного косинусного преобразования Фурье. Перейдем к более подробному обсуждению этого вопроса.

3.6.3 Описание алгоритма вычисления суммы $S_N(x)$

В настоящем пункте будет описан алгоритм быстрого дискретного преобразования сумм $S_N(x)$. Полагая $x = \cos \theta$ и используя (3.64), мы можем переписать сумму (3.57) в виде следующей суммы по косинусам

$$Q_N(\theta) = d_0 + \sum_{k=1}^N d_k \cos k\theta = S_N(\cos \theta), \quad (3.65)$$

где

$$d_0 = \bar{p}(N) + \frac{p_0}{\sqrt{2}} - \frac{p_1}{4}, \quad d_1 = \frac{p_0}{\sqrt{2}} - \frac{p_2}{2}, \quad (3.66)$$

$$d_k = \frac{p_{k-1} - p_{k+1}}{2k}, \quad (2 \leq k \leq N-2), \quad (3.67)$$

$$d_{N-1} = \frac{p_{N-2}}{2(N-1)}, \quad d_N = \frac{p_{N-1}}{2N}. \quad (3.68)$$

Тогда значения частичной суммы (3.57) в узлах $\{x_j = \cos \theta_j\}_{j=0}^{M-1}$ могут быть вычислены с помощью формулы

$$Q_N(\theta_j) = d_0 + \sum_{k=1}^N d_k \cos k\theta_j, \quad (0 \leq j \leq M-1). \quad (3.69)$$

Как хорошо известно, эта задача в случае, когда $M \geq N + 1$ и $M = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, может быть решена путем применения быстрого косинусного преобразования Фурье, основанного на алгоритме DST-II (см. [67]).

Подводя итоги отметим, что алгоритм вычисления суммы $S_N(x)$, определяемой равенством (3.57), сводится к последовательному осуществлению следующих шагов:

1. На вход алгоритма подаются коэффициенты p_k ;
2. Отправляясь от коэффициентов p_k , по формулам (3.66) – (3.68) вычисляются новые коэффициенты d_k . Тогда исходное выражение (3.57) принимает вид (3.69);
3. Осуществляется вычисление значений $Q_N(\theta)$ в узлах сетки $\{\theta_j\}_{j=0}^{M-1}$ с помощью быстрого дискретного косинусного преобразования Фурье DST-II.

3.6.4 Численные эксперименты

Авторами была разработана компьютерная программа, реализующая предложенный алгоритм.

Принцип работы с программой

1. Пользователь задает количество узлов сетки N и количество M экспериментов, которые он хочет провести.
2. Программа генерирует M наборов случайных коэффициентов в задаваемом пользователем диапазоне. Есть возможность отображения сгенерированных коэффициентов.
3. Пользователь выбирает — осуществление обычных либо быстрых преобразований над сгенерированными наборами коэффициентов.
4. После осуществления преобразований, программа выводит количество затраченного времени (всего и в среднем на один эксперимент), также средние по всем экспериментам погрешности двух видов — максимальное отклонение и отклонение в среднем. Имеется возможность отображения подробных сведений об ошибках для каждого эксперимента.

Далее мы приведем несколько скриншотов с пояснениями.

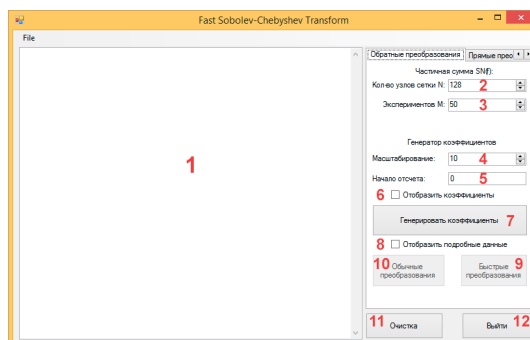


Рисунок 3.6 — Главный экран программы.

Составные части интерфейса:

1. Текстовое поле для вывода сообщений программы («консоль»).
2. Задание количества узлов сетки N . Для осуществления быстрых преобразований требуется чтобы это число было степенью двойки.
3. Задание количества экспериментов M .
4. Задание разброса случайных коэффициентов (дисперсия).
5. Задание математического ожидания наборов случайных коэффициентов.
6. Служит для выбора – отображать подробные данные о сгенерированных коэффициентах или нет.
7. Генерирование коэффициентов с выбранными параметрами.
8. Служит для выбора – отображать подробные об ошибках в экспериментах или нет.
9. Осуществление преобразований по формуле (3.57).
10. Осуществление быстрых преобразований по формуле (3.69).
11. Очистка «консоли».
12. Выход из программы.

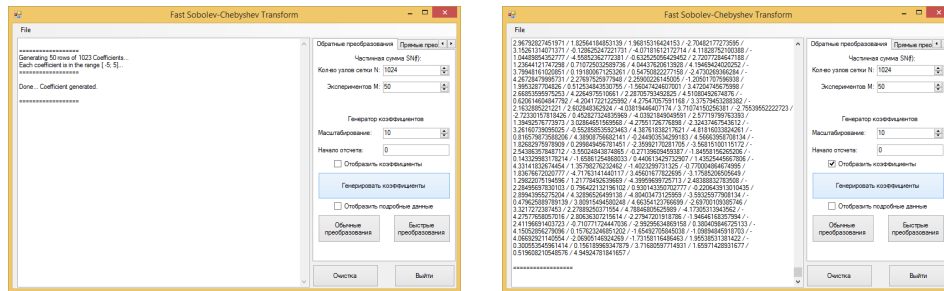


Рисунок 3.7 — Сгенерирован набор случайных коэффициентов. Наборов – 50, количество коэффициентов в каждом – 1023. Справа — подробные данные о коэффициентах.

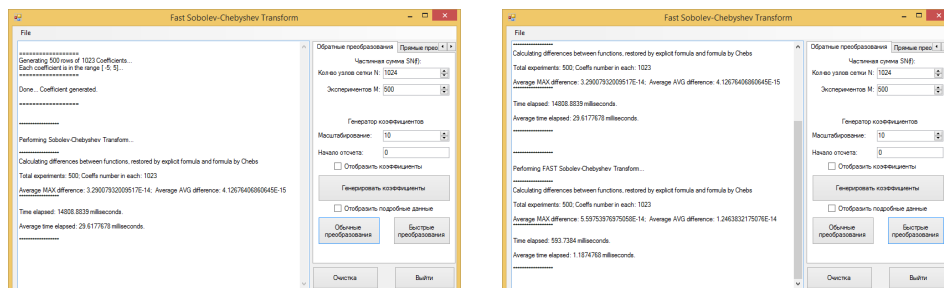


Рисунок 3.8 — Осуществлены обычное (слева) и быстрое (справа) преобразования суммы Фурье по системе полиномов $T_{1,k}(x)$.

Проведено 500 экспериментов с 1023 коэффициентами в каждом. Средняя максимальная погрешность составила $3.29007932009517E-14$, отклонение в среднем –

4.12676406860645E-15. На осуществление всех преобразований затрачено 14808.8839 миллисекунд (мс), в среднем на эксперимент затрачено 29.6177678 мс.

Далее, на том же наборе коэффициентов произведены быстрые преобразования. Средняя максимальная погрешность составила 5.59753976975058E-14, отклонение в среднем – 1.2463832175076E-14. На осуществление всех преобразований затрачено 593.7384 мс, в среднем на эксперимент затрачено 1.1874768 мс. Также приведем сравнительную таблицу среднего времени вычисления $S_N(x_j)$ при различных N посредством быстрой и обычной формул в миллисекундах:

3.6.5 Заключение

3.7 Быстрый алгоритм решения задачи Коши для ОДУ с помощью ортогональных по Соболеву полиномов, порожденных полиномами Чебышева первого рода

Аннотация. Рассмотрена задача о численной реализации итерационного процесса для решения задачи Коши для ОДУ с использованием ортогональных по Соболеву полиномов, порожденных полиномами Чебышева первого рода $T_0 = 1/\sqrt{2}$, $T_k(x) = \cos k \arccos x$ ($k \geq 1$). Составлен алгоритм, реализующий указанный итерационный процесс с применением быстрых косинус-преобразований. Разработана программа и проведен ряд численных экспериментов, которые показывают, что ряды Фурье по порожденным полиномам являются удобным инструментом для решения дифференциальных уравнений.

3.7.1 Введение

Исследуется задача Коши вида

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \quad x \in [0, h], \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{3.70}$$

где $f(x, y)$ полагаем непрерывной в некоторой области G , причем на $[0, h] \times R \subset G$ функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по второй переменной

$$|f(x, q') - f(x, q'')| \leq \lambda |q' - q''|, \quad x \in [0, h]. \tag{3.71}$$

В настоящей работе описывается быстрый алгоритм реализации разработанного в [68] итерационного метода на основе ортогональных по Соболеву полиномов, порожденных полиномами Чебышева первого рода. Прежде, чем перейти к описанию алгоритма, приведем некоторые сведения из теории полиномов, ортогональных относительно скалярного произведения типа Соболева.

Рассмотрим весовое пространство Лебега $L_\mu^2 = L_\mu^2([-1, 1])$ со скалярным произведением

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_{-1}^1 g_1(x) g_2(x) \mu(x) dx, \quad \text{где} \quad \mu(x) = \frac{2}{\pi} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Нетрудно заметить, что полиномы Чебышева первого рода

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, T_k = \cos(k \arccos x), \quad (k = 1, 2, \dots),$$

образуют ортонормированную систему в L_μ^2 . В работе [71] были введены и исследованы полиномы $T_{r,k}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$), ортогональные по Соболеву и порожденные полиномами $T_k(x)$ посредством равенств

$$T_{r,k}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}, \quad (k = 0, 1, \dots, r-1), \quad T_{r,r}(x) = \frac{(x+1)^r}{\sqrt{2}r!}, \quad (3.72)$$

$$T_{r,r+n}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} T_n(t) dt, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.73)$$

Эти полиномы образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} g_1^{(\nu)}(-1) g_2^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^1 g_1^{(r)}(x) g_2^{(r)}(x) \mu(x) dx. \quad (3.74)$$

Через $W_{L_\mu^2(-1,1)}^r$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций $g = g(x)$, непрерывно дифференцируемых $r-1$ -раз, причем $g^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, а $g^{(r)} \in L_\mu^2(-1,1)$. В работе [71] было показано, что система полиномов $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ образует базис в $W_{L_\mu^2(-1,1)}^r$. В этой же работе было показано, что ряд Фурье функции $g \in W_{L_\mu^2(-1,1)}^r$ имеет следующий вид [71]

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} g^{(\nu)}(-1) \frac{(1+x)^\nu}{\nu!} + \sum_{k=r}^\infty \hat{g}_{r,k} T_{r,k}(x), \quad (3.75)$$

где

$$\hat{g}_{r,k} = \int_{-1}^1 g^{(r)}(t) T_{k-r}(t) \mu(t) dt, \quad (k \geq r), \quad (3.76)$$

и сходится к $g(x)$ равномерно на $[-1,1]$. В частности, при $r = 1$ ряд (3.75) принимает следующий вид:

$$g(x) = g(-1) + \sum_{k=0}^\infty c_k(g) T_{1,k+1}(x), \quad (3.77)$$

где

$$c_k(g) = \hat{g}_{1,k+1} = \int_{-1}^1 g'(t) T_{k-1}(t) \mu(t) dt, \quad (k \geq 0). \quad (3.78)$$

3.7.2 Итерационный метод

Положим $x = h(t+1)/2$, $t \in [-1,1]$ и задачу (3.70) сведем к следующей

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{h}{2} f\left(\frac{h}{2}(t+1), \eta\right), \quad t \in [-1,1], \\ \eta(-1) &= y_0, \end{aligned} \quad (3.79)$$

где $\eta(t) = y(h(t+1)/2)$. Легко заметить, что $\eta \in W_{L_\mu^2(-1,1)}^1$.

Нам понадобятся некоторые соотношения. Разложение функции $\eta(t) \in W_{L_\mu^2}^1$ в ряд Фурье по системе $\{T_{1,k}\}$

$$\eta(t) = \eta(-1) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\eta}_{1,k} T_{1,k}(t), \text{ где } \hat{\eta}_{1,k} = \int_{-1}^1 \eta'(t) T_{k-1}(t) \mu(t) dt. \quad (3.80)$$

Ряды Фурье по системе $\{T_k\}$ функций $\eta'(t) \in L_\mu^2$ и $\phi(t) \in L_\mu^2$ соответственно

$$\eta'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\eta) T_k(t), \quad (3.81)$$

$$\phi(t) = f\left(\frac{h}{2}(t+1), \eta(t)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\phi}_k T_k(t), \quad (3.82)$$

где

$$c_k(\eta) = \hat{\eta}_{1,k+1}, \quad \hat{\phi}_k = \int_{-1}^1 \phi(t) T_k(t) \mu(t) dt. \quad (3.83)$$

Здесь ряд (3.80) сходится равномерно на $[-1, 1]$ (см. [71]), а ряды (3.81) и (3.82) – в метрике L_μ^2 . В силу (3.79), (3.80) и (3.83) коэффициенты c_k принимают следующий вид

$$c_k(\eta) = \frac{h}{2} \hat{\phi}_k = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 f\left[\frac{h}{2}(t+1), \eta(-1) + \sum_{l=0}^{\infty} c_l T_{1,l+1}(t)\right] T_k(t) \mu(t) dt. \quad (3.84)$$

Выражение в правой части (3.84) представляет собой оператор A , действующий в гильбертовом пространстве l_2 , которое состоит из вещественнозначных последовательностей $C = (c_0, c_1, \dots)$, для которых конечна величина $\|C\| = (\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2)^{1/2}$, задающая норму в l_2 . Из (3.84) следует, что $C(\eta) = (c_0(\eta), c_1(\eta), \dots)$ является неподвижной точкой для оператора A . В [68] было показано, что оператор A является сжимающим в метрике пространства l_2 при условии

$$h\kappa\lambda < 1, \quad (3.85)$$

где

$$\kappa = \left(\int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{\infty} (T_{1,k}(x))^2 \mu(x) dx \right)^{1/2},$$

а λ берется из условия (3.71). Таким образом, выбором величины h можно добиться выполнения условия (3.85). Для практических приложений важно рассмотреть конечномерный аналог A – оператор $A_N : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, ставящий в соответствие точке $C_N = (c_0, \dots, c_{N-1})$ точку $C'_N = (c'_0, \dots, c'_{N-1})$ по правилу

$$c'_k = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 f\left[\frac{h}{2}(t+1), \eta(-1) + \sum_{l=0}^{N-1} c_l T_{1,l+1}(t)\right] T_k(t) \mu(t) dt, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (3.86)$$

Этот оператор также является сжимающим [68] и, следовательно, итерационный процесс $C_N^{j+1} = A_N(C_N^j)$ сходится к точке $C_N(\eta) = (c_0(\eta), \dots, c_{N-1}(\eta))$. В настоящей статье разработан быстрый

алгоритм приближенного вычисления коэффициентов $c_k(\eta)$, $k = 0, \dots, N-1$. Путем подстановки этих коэффициентов в частичную сумму ряда (3.80)

$$S_N(t) = \eta(-1) + \sum_{k=0}^{N-1} c_k(\eta) T_{1,k+1}(t) \quad (3.87)$$

получаем приближенное решение задачи (3.79). В [69] для вычисления суммы из правой части (3.87) был разработан и реализован в виде компьютерной программы быстрый алгоритм. В дальнейшем нам потребуется преобразовать выражение (3.86) посредством замены $t = \cos \tau$ к следующему

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{h}{\pi} \int_0^\pi f \left[\frac{h}{2}(\cos \tau + 1), \eta(-1) + \sum_{l=0}^{N-1} c_l T_{1,l+1}(\cos \tau) \right] T_k(\cos \tau) d\tau = \\ &= \frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \left[\frac{h}{2}(\cos \tau + 1), \eta(-1) + \sum_{l=0}^{N-1} c_l T_{1,l+1}(\cos \tau) \right] T_k(\cos \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Для вычисления интегралов (3.88) мы будем использовать следующую квадратурную формулу

$$c'_k \approx \frac{h}{\pi} \sum_{j=0}^N f \left[\frac{h}{2}(\cos \tau_j + 1), \eta(-1) + \sum_{l=0}^{N-1} c_l T_{1,l+1}(\cos \tau_j) \right] T_k(\cos \tau_j) d\tau, \quad (3.89)$$

где $\tau_j = \frac{2\pi j}{N+1}$, $j = 0, \dots, N$. Отметим, что в (3.89) частичные суммы

$$\eta_j = S_N(\cos \tau_j) = \eta(-1) + \sum_{l=0}^{N-1} c_l T_{1,l+1}(\cos \tau_j), \quad j = 0, \dots, N \quad (3.90)$$

не зависят от k , что позволяет ограничиться однократным вычислением η_j и существенно сэкономить время вычисления c_k . Отметим, что в работе [69], был разработан алгоритм быстрого вычисления сумм $\sum_{l=0}^{N-2} c_l T_{1,l+1}(\cos \theta_l)$, $\theta_l = \frac{(2j+1)\pi}{2N}$, сведением их к сумме

$$Q_N(\theta) = \sum_{l=0}^{N-1} d_l T_l(\cos \theta_l) \quad (3.91)$$

и ее вычислением с помощью быстрого дискретного косинусного преобразования ДСТ-II.

3.7.3 Описание алгоритма

В настоящем пункте будет описан быстрый алгоритм решения задачи Коши (3.79). Входными данными являются

- y_0 – начальное значение задачи Коши в точке 0;
- $f(x, y)$ – правая часть задачи Коши (3.70);
- N – порядок частичной суммы (3.87);
- $C^0 = (c_0^0, \dots, c_{N-2}^0)$ – начальное приближение;

- ε – порог близости векторов $C^{i-1}, C^i \in \mathbb{R}^{N-1}$ ($C^i = (c_0^i, \dots, c_{N-2}^i)$) в метрике R^{N-1} , где $C^i = A_{N-1}(C^{i-1})$, $i = 0, 1, \dots$ при достижении которого останавливается итерационный процесс;
- M – количество итераций.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. На вход подаются начальное условие y_0 , правая часть $f(x, y)$ и порядок частичной суммы N , равный степени двух.
2. Задается начальное приближение $C^0 = (c_0^0, c_1^0, \dots, c_{N-2}^0)$.
3. Вычисляются и сохраняются в массив числа $x_j = h(\cos \frac{2\pi j}{N} + 1)$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$.
4. Осуществляется переход от коэффициентов c_l^i к d_m^i , $l = 0, \dots, N - 2$, $m = 0, \dots, N - 1$ (см. [69], п. 2).
5. Вычисляются η_j , $j = 0, \dots, N - 1$, с использованием быстрого обратного косинусного преобразования массива d_m^i .
6. Создается массив $F_j = hf(x_j, \eta_j)$, $j = 0, \dots, N - 1$.
7. С применением быстрого прямого косинусного преобразования к массиву F_j , вычисляются новые коэффициенты c_k^{i+1} .
8. Повторение шагов 4 – 8 пока не будет достигнут порог точности ε или же проведено требуемое количество итераций, задаваемое числом M .

3.7.4 Заключение.

4 Математическое моделирование сложных физических систем

=====

4.1 Рамазанов М.К.

4.1.1 Аннотация

Методом Монте-Карло выполнены исследования магнитных структур основного состояния и термодинамических свойств антиферромагнитной модели Изинга на объемно-центрированной кубической решетке с конкурирующими обменными взаимодействиями. Исследования проведены для соотношения величины обменного взаимодействия следующих и ближайших соседей $r = J_2/J_1 = 2/3$.

Получены все возможные магнитные структуры основного состояния для данного соотношения обменных взаимодействий. Показано, что при значении $r = 2/3$ конкуренция обменных взаимодействий не приводит к возникновению фрустрации и вырождению основного состояния. На основе гистограммного метода анализа данных показано, что в исследуемой модели при $r = 2/3$ наблюдается фазовый переход второго рода.

4.1.2 Введение

В настоящее время продолжается активное исследование магнитных состояний, фазовых переходов (ФП), критических и термодинамических свойств в спиновых системах с конкурирующими обменными взаимодействиями. Конкуренция обменного взаимодействия может привести к возникновению в системе эффектов фрустрации. Наличие фрустраций в системе может привести к целому ряду изменений свойств фундаментального характера [18–20]. Учет антиферромагнитных взаимодействий следующих ближайших соседей в классической трехмерной модели Изинга приводит к вырождению основного состояния, появлению различных фаз, ФП и аномалий критических и термодинамических свойств [21].

В данной работе, нами на основе метода Монте-Карло (МК) проведено исследование ФП, магнитной структуры основного состояния и термодинамических свойств антиферромагнитной модели Изинга на объемно-центрированной кубической решетке для соотношения величины обменного взаимодействия следующих и ближайших соседей $r = J_2/J_1 = 2/3$ (J_1 и J_2 — константы обменного взаимодействия ближайших и следующих за ближайшими соседями, соответственно).

Литературные данные по исследованию этой модели различными методами свидетельствуют, что для данной модели имеет место ФП второго рода. Эти данные показывают, что учет взаимодействий следующих ближайших соседей в системе может привести к смене ФП. Результаты, имеющиеся в литературе свидетельствуют, что данная модель имеет некоторые особенности критического и термодинамического поведения вблизи точки пересечения трех раз-

личных фаз на фазовой диаграмме. Исследование этих особенностей в самой точке пересечения этих фаз на сегодняшний день не проведено. Исходя из этого, целесообразно более подробно исследовать особенности, наблюдающиеся для этой модели в точке пересечения трех различных фаз. Эти особенности могут быть связаны со структурой основного состояния, которая до сих пор является малоизученной.

В связи с этим, в данной работе, нами предпринята попытка исследовать ФП, термодинамическое поведение системы и магнитную структуру основного состояния в точке пересечения трех различных фаз этой модели. Исследование этой модели на основе современных методов и идей позволит получить ответ на ряд вопросов, связанных со структурой основного состояния, с характером и природой ФП спиновых систем с конкурирующими обменными взаимодействиями.

4.1.3 Результат исследования

Получена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия следующих ближайших соседей (рис. 4.1). На диаграмме видно, что в точке $r = 2/3$ пересекаются три различные фазы: *AF1* – антиферромагнитная, *PM* – парамагнитная и *AF2* – антиферромагнитная 2-го типа. На фазовой диаграмме черными и светлыми стрелками изображены направления спинов во всех подрешетках. Обнаружены все возможные магнитные структуры основного состояния, наблюдаемые в данной модели. Вдоль вертикальной пунктирной линии, соответствующей значению $r = 2/3$ на диаграмме сосуществуют все шесть структур одновременно.

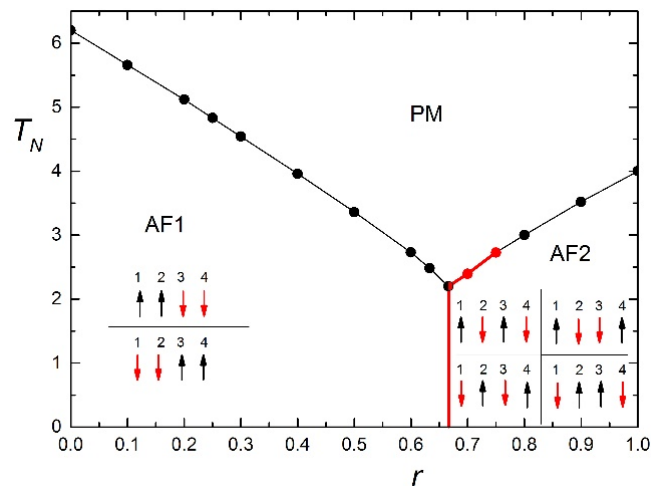


Рисунок 4.1 — Фазовая диаграмма антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке.

Впервые на диаграмме обнаружена узкая область ($2/3 < r \leq 3/4$), где переход из антиферромагнитной фазы в парамагнитную является переходом первого рода. Обнаружено, что при значении $r = 2/3$ конкуренция обменных взаимодействий не приводит к возникновению

фрустрации и вырождению основного состояния. Показано, что в исследуемой модели при $r = 2/3$ наблюдается фазовый переход второго рода.

4.1.4 Заключение

Исследование фазовых переходов, термодинамических свойств и магнитной структуры основного состояния в антиферромагнитной модели Изинга на объемно-центрированной кубической решетке с конкурирующими обменными взаимодействиями выполнено с использованием репличного алгоритма и алгоритма Ванга – Ландау метода Монте-Карло. Показано, что при значении $r = 2/3$ конкуренция обменных взаимодействий не приводит к возникновению фрустрации. На основе гистограммного метода анализа данных показано, что для значения $r = 2/3$ в данной модели наблюдается фазовый переход второго рода.

=====

4.2 Бабаев

4.2.1 Аннотация

На основе метода Монте-Карло рассчитаны относительные дисперсии намагниченности R_m и восприимчивости R_χ в трехмерной неупорядоченной спиновой решеточной модели Изинга в зависимости от концентрации спинов. Показано, что внесение беспорядка в виде немагнитных примесей в трехмерную модель Изинга приводит к отличным от нуля значениям для R_m и R_χ .

4.2.2 Введение

При численных исследованиях, разбавленных изингоподобных систем следует иметь в виду, что есть серьезные основания предполагать наличие зависимости критических параметров от способа реализации беспорядка в исследуемой модели.

Например, в работах [22, 23] было обнаружено, что беспорядок, реализованный каноническим способом (фиксацией доли магнитных узлов), ведет к результатам, отличным от случая, когда беспорядок реализовался способом большого канонического типа (доля магнитных узлов в каждой примесной конфигурации флуктуирует), хотя исследования [24] проведенные ренорм-групповыми методами такое поведение объяснило различием конечно-размерных эффектов в этих двух типах разбавления.

По-видимому, строгое исследование таких закономерностей в ближайшее время возможно лишь на основе данных численного эксперимента и практически невозможно другими методами. Отметим также, что анализ результатов работы [25] полученные на трехмерной разбавленной модели Изинга, в которой замороженный беспорядок внесен в виде случайных ферромагнитных связей, привел авторов к выводу, что в большей части критической области доминирует кроссовер от показателей чистой модели к показателям неупорядоченной модели.

В последнее время предметом изучения методом Монте-Карло стали и другие реализации беспорядка. В качестве обобщения трехмерной разбавленной модели Изинга в работах [26, 27] исследовалась термически разбавленная модель Изинга. В этом случае реализация распределения вакансий определялась из локального распределения спинов чистой модели Изинга в критической точке.

Оказалось, что критические свойства этой модели сильно отличаются от трехмерной разбавленной модели Изинга в которой беспорядок содержится в виде замороженных немагнитных примесей или в виде случайных ферромагнитных связей и соответствуют теоретическим предсказаниям для скоррелированного на больших расстояниях беспорядка [28].

Отметим, что поведение термодинамических критических параметров неупорядоченных моделей при различных реализациях беспорядка в виде немагнитных примесей в широком интервале изменения концентрации примесей c_{imp} , $c_{imp} = 1 - p$, с соблюдением единой методики до настоящего времени исследовано недостаточно полно. Не выяснены особенности распределения термодинамических параметров по соответствующему ансамблю.

В связи с этим нами исследуется проблема самоусреднения термодинамических критических параметров в трехмерной неупорядоченной модели Изинга на основе метода Монте-Карло.

4.2.3 Результат исследования

Рассчитаны относительные дисперсии намагниченности R_m и восприимчивости R_χ для трехмерной неупорядоченной спиновой решеточной модели Изинга в зависимости от концентрации спинов. На рисунках 4.2 и 4.3 представлены зависимости

$$R_m = \frac{\overline{m^2(L)} - \overline{m(L)}^2}{\overline{m(L)}^2}$$

$$R_\chi = \frac{\overline{\chi^2(L)} - \overline{\chi(L)}^2}{\overline{\chi(L)}^2}$$

от размеров L систем. Эти данные позволяют судить об ошибках, связанных с размерами изучаемых систем.

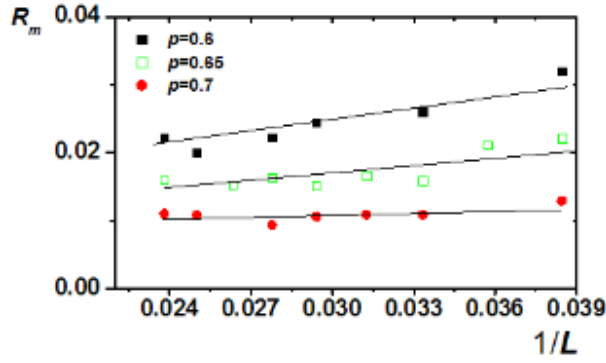


Рисунок 4.2 — Зависимость относительных дисперсий намагниченности R_m от обратных размеров спиновой системы при $T(p) = T_c(p)$.

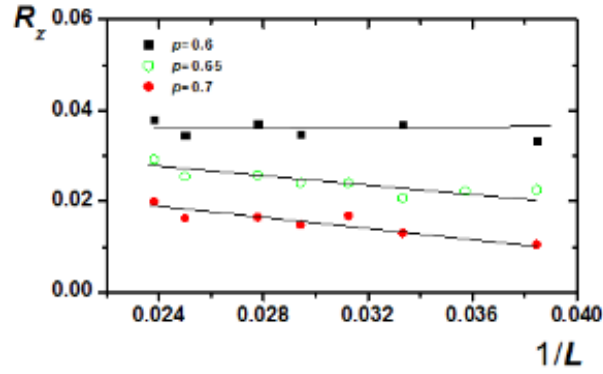


Рисунок 4.3 — Зависимость относительных дисперсий намагниченности R_χ от обратных размеров спиновой системы $1/L$ при $T(p) = T_c(p)$.

Отметим, что наши значения R_m , R_χ заметно отличаются от аналогичных данных, полученных в работе [25] при большом каноническом способе реализации беспорядка (магнитная доля узлов флуктуирует в зависимости от концентрации p), а также и с предположением теории ренормализационной группы $R_m/R_\chi = 1/4$. В указанной работе рассматривался только канонический способ реализации беспорядка и при концентрации спинов $p = 0.7$ отношения $R_m/R_\chi = 0.502, 0.555, 0.559$ для $L = 44, 40, 36$ соответственно.

Эти отношения находятся в достаточно хорошем согласии с отношением $R_m/R_\chi \equiv 2/5$, полученное в работе [22] для беспорядка реализованного каноническим способом при концентрации спинов $p = 0.6$. Отметим, что различие наших данных с данными работы [25], по-видимому, обусловлено различными конечно-размерными эффектами в этих двух различных типах разбавления.

Нами также проводилась обработка этих данных с учетом поправок к КРС. Учет которых особенно важен из-за очень медленного приближения R_χ к своему универсальному асимп-

тотическому значению [24]. Для этого нами использовалось следующее выражение

$$R_\chi(L) = R_\chi(\infty) + A^C L^{-(\phi/\nu)_{random}} \quad (4.1)$$

где $(\phi/\nu)_{random}$ — показатель поправки к скейлингу, A^C — некоторая постоянная зависящая от степени разбавления. Была также получена экстраполяция МК данных для среднеквадратичных отклонений намагниченности R_m на $L \rightarrow \infty$ для всех рассмотренных концентраций спинов p .

В качестве поправки к ведущему члену скейлинга $\omega = (\phi/\nu)_{random}$ следуя работам [29,30] мы брали значения в разбавленной области ($p \leq 0.95$) $\omega = 0.36(6)$. Как видно из приведенных рисунков учет поправки позволяет выйти на асимптотический режим и корректно оценить универсальные параметры (p -independent universal value).

Следует отметить, что в сильно разбавленной области ($p \leq 0.7$) наблюдается заметное отклонение МК данных соответствующих малым размерам системы от прямой. Эти значения при экстраполяции на $L \rightarrow \infty$ нами не учитывались.

4.2.4 Заключение

На основе кластерного алгоритма Вольфа метода Монте-Карло рассчитаны относительные дисперсии для намагниченности R_m , и восприимчивости R_χ в широком интервале разбавлений s , $s = 1 - p$. Показано, что внесение замороженного беспорядка в чистую трехмерную модель Изинга приводит к отличным от нуля значениям для R_m , и для R_χ , что указывает на плохое самоусреднение термодинамических параметров в разбавленных системах.

=====

4.3 Магомедов М.А.

4.4 Аннотация

Модель Поттса на треугольной решетке с учетом взаимодействия как первых, так и вторых ближайших соседей, исследована алгоритмом Ванга – Ландау метода Монте-Карло. Вычислена плотность состояний системы и рассчитаны температурные зависимости энтропии S . Показано, что в зависимости от соотношений обменных взаимодействий между первыми и вторыми ближайшими соседями, основное состояние может быть как сильно вырожденным, что свидетельствует о наличии фрустрации в системе, так и слабо вырожденным.

Определены структуры основного состояния и показано, что в данной системе реализуется Страйповое, триплетное или смешанное страйпово-триплетное состояние для фазы 1, неупорядоченное сильно вырожденное состояние или многослойное слабо вырожденное состояние для фрустрированной фазы и упорядоченное ферромагнитное состояние для ферромагнитной фазы.

Показано, что фазовый переход из ферромагнитной и страйповой-триплетной фаз в парамагнитную является фазовым переходом первого рода, в то время как переход из фруст-

рированной области в парамагнитную является переходом второго рода. Рассчитаны температурные зависимости различных термодинамических параметров. Определены температуры фазовых переходов и построена фазовая диаграмма системы.

4.5 Введение

В последние годы значительное внимание уделяется экспериментальному и теоретическому исследованию различных низкоразмерных, квазиодномерных или двумерных систем, в том числе наноструктур. Такие системы обладают рядом интересных свойств, перспективных в плане практического применения в различных электронных устройствах. Изучение различных свойств этих объектов открывает широкие перспективы для экспериментальных приложений. В ближайшие годы нанотехнологии позволят совершить поистине гигантский технологический скачок в самых различных областях науки и техники [31].

Одними из таких материалов являются делафосситы, названные в честь французского кристаллографа XIX века Ж. Делафосса (Delafosse) [32, 33]. Делафосситы имеют общую химическую формулу $A + B\text{O}_2 + X\text{O}$, где A и B – катионы, X – кислород. Одним из ярких представителей семейства делафосситов, является CuFeO_2 , структура которого приведена на рисунке 4.4.

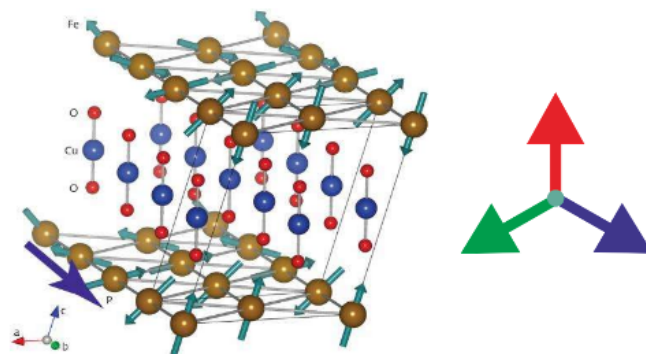


Рисунок 4.4 — Структура делафоссита CuFeO_2 . Справа приведено схематическое и цветное изображение трех возможных направлений ориентации спинов в трехвершинной модели Поттса.

Таким образом, CuFeO_2 имеет явно выраженную плоскостную структуру, взаимодействием между слоями можно пренебречь.

Схематическое и цветное изображение трех возможных направлений ориентации спинов Fe в материале CuFeO_2 приведено на вставке рисунке 4.4. Таким образом, имеется три возможных направления спинов железа. Данная система хорошо описывается моделью Поттса с числом состояний $q = 3$.

Гамильтониан модели Поттса с числом состояний $q = 3$ может быть представлен в следующем виде [34]:

$$H = -J_1 \sum_{i,j} \cos \theta_{i,j} - J_2 \sum_{i,k} \cos \theta_{i,k} \quad (4.2)$$

где J_1 и J_2 – параметры обменного взаимодействия для ближайших и вторых ближайших соседей. $\theta_{i,j}$, $\theta_{i,k}$ – углы между взаимодействующими спинами $S_i - S_j$ и $S_i - S_k$ соответственно.

Численные расчеты, проведенные в работе [34], показали, что при учете только первых ближайших соседей с величиной $J_1 < 0$, эта модель демонстрирует поведение характерное для ФП первого рода. При учете первых и вторых ближайших соседей с величинами $J_1 < 0$ и $J_2 < 0$ соответственно в рассматриваемой модели возможны фрустрации. На данном этапе исследований нами проведены исследования модели Поттса при $J_1 = 0$ и различных значениях J_2 .

Структура основного состояния и фазовая диаграмма трехвершинной модели Поттса на треугольной решетке

Далее нами приводятся результаты исследования модели Поттса на треугольной решетке методом Ванга – Ландау [34–37]. На рисунке 4.5 приведена зависимость энергии основного состояния от величины второго обменного взаимодействия J_2 . Как наглядно видно из рисунка, в системе реализуются один из трех вариантов упорядочения спинов, энергия которых приведены разными цветами. В зависимости от величины J_2 приоритетным оказывается один из этих сценариев.

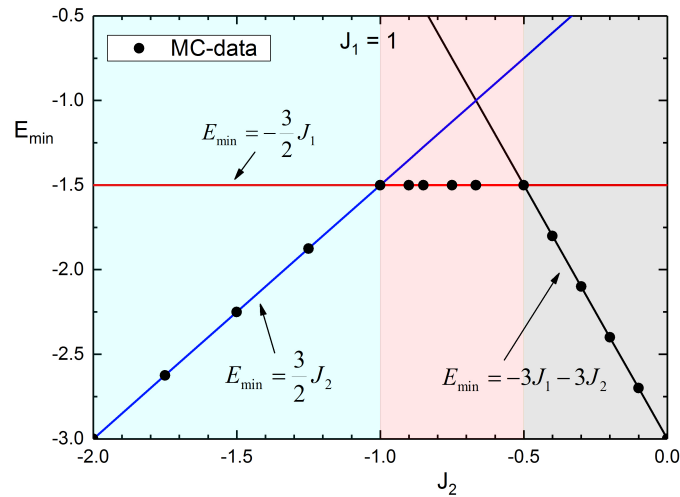


Рисунок 4.5 — Зависимость энергии основного состояния от величины второго обменного взаимодействия J_2 .

На рисунке 4.6 приведена зависимость плотности состояний, рассчитанная методом Ванга – Ландау, от величины второго обменного взаимодействия J_2 . Плотность состояний имеет куполообразную форму с максимумом при нуле. При некоторых значениях J_2 основное состояние вырождено.

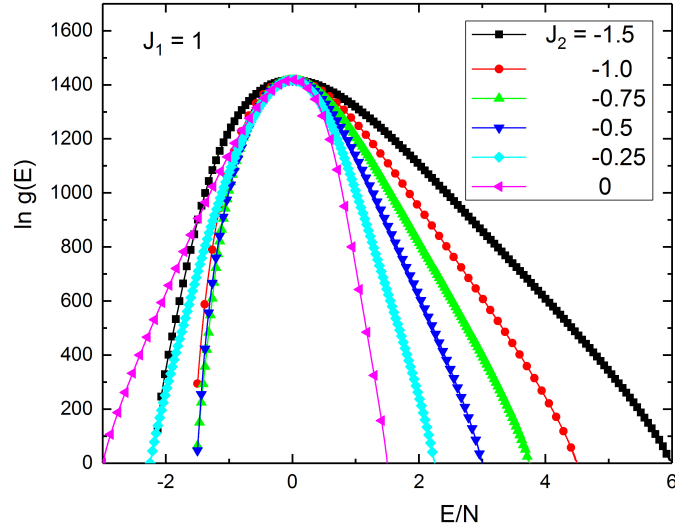


Рисунок 4.6 — Зависимость плотности состояний от величины второго обменного взаимодействия J_2 .

Для определения температуры фазового перехода и его типа использовался метод производной от плотности состояний [37]. Пример определения точки фазового перехода данным методом приведен на рисунке 4.7.

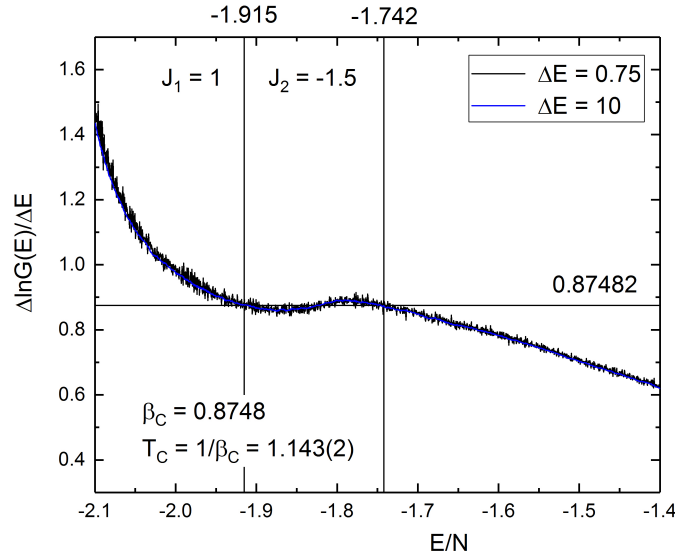


Рисунок 4.7 — Производная от плотности состояний при $J_1 = 1$ и $J_2 = -1.5$.

Зная плотность состояний системы можно рассчитать температурную зависимость любого интересующего нас термодинамического параметра. На рисунке 4.8 приведена температурная зависимость энтропии системы, рассчитанная из плотности состояний, при различных значениях обменного взаимодействия. Как видно из рисунка, при высоких температурах энтропия стремится к теоретическому значению $\ln 3$. С понижением температуры в зависимости от величины J_2 энтропия может как обнуляться, так и стремиться к некоторому ненулевому значению.

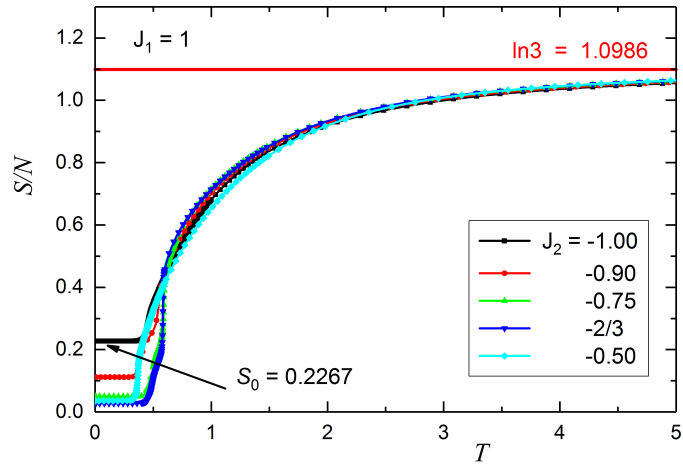


Рисунок 4.8 — Температурная зависимость энтропии системы при $J_1 = 1$ и различных J_2 .

В результате анализа основного состояния системы были определены структуры основного состояния, приведенные на рисунке 4.9.

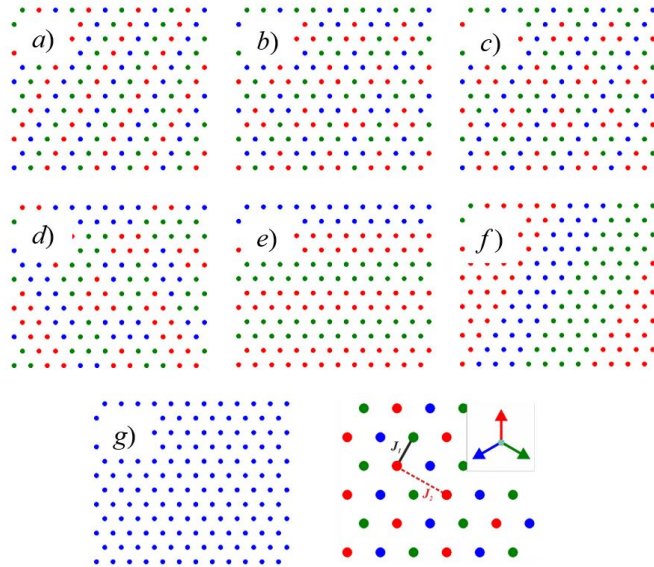


Рисунок 4.9 — Структуры основного состояния, реализуемые в системе при $J_1 = 1$ и различных значениях J_2 .

Фазовая диаграмма системы приведена на рисунке 4.10. На рисунке также в фигурных скобках приведены соответствующие данной фазе структуры с рисунка 4.9.

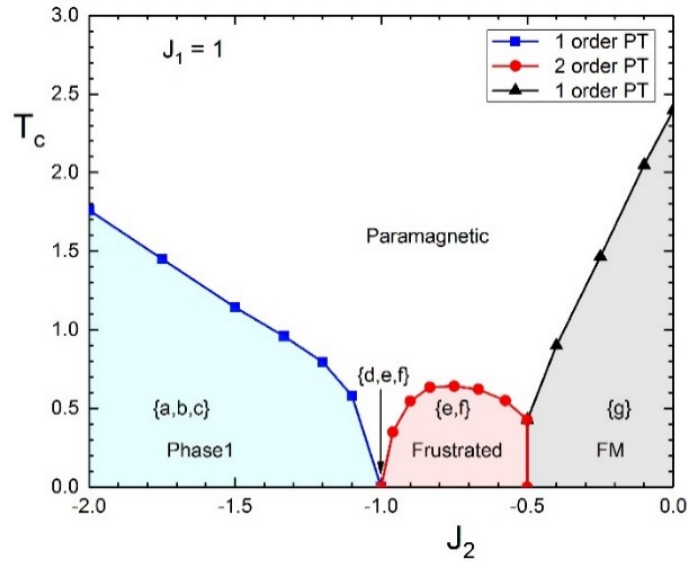


Рисунок 4.10 — Фазовая диаграмма модели Поттса.

Как видно из рисунка, в зависимости от величин обменных взаимодействий, с понижением температуры системе возможны три сценария упорядочения:

- Страйповое (рисунок 4.9.a), триплетное (рисунок 4.9.b) или смешанное страйпово-триплетное состояние (рисунок 4.9.c);
- Фрустрированное неупорядоченное (рисунок 4.9.d) или многослойное состояние (рисунок 4.9.e, 4.9.f);
- Упорядоченное ферромагнитное состояние (рисунок 4.9.g).

4.6 Заключение

Методом Ванга – Ландау исследована модель Поттса с числом состояний $q = 3$ на треугольной решетке с учетом обменного взаимодействия между первыми и вторыми ближайшими соседями. Вычислена плотность состояний системы и рассчитаны температурные зависимости энтропии S . Показано, что в зависимости от соотношений обменных взаимодействий между первыми и вторыми ближайшими соседями, основное состояние системы может быть сильно вырожденным.

Определены структуры основного состояния и показано, что в данной системе реализуется Страйповое, триплетное или смешанное страйпово-триплетное состояние для фазы 1, неупорядоченное сильно вырожденное состояние или многослойное слабо вырожденное состояние для фрустрированной фазы и упорядоченное ферромагнитное состояние для ферромагнитной фазы.

Показано, что фазовый переход из ферромагнитной и страйповой-триплетной фаз в парамагнитную является фазовым переходом первого рода, в то время как переход из фрустрированной области в парамагнитную является переходом второго рода. Определены температуры фазовых переходов и построена фазовая диаграмма системы.

Заключение

В 2018 году в Отделе математики и информатики Дагестанского научного центра РАН проведены научно-исследовательские работы по теме «Разработка алгоритмов и создание программного обеспечения для моделирования сложных систем. Некоторые вопросы цифровой обработки сигналов и изображений. Исследования по теории графов и теории оптимизации расписаний, компьютерное сопровождение вузовского учебного процесса».

=====

Все известные формулы для перечисления разбиений прямоугольника используют действия с плавающей запятой. С помощью авторского программного обеспечения для ряда случаев уточнены точные значения для количества разбиений с применением ранее полученных автором формул, использующих лишь операции над целыми числами.

Задача перечисления разбиений прямоугольника заданных целочисленных размеров $h \times w$ на прямоугольники 1×2 рассматривалась рядом авторов в связи с вопросами термодинамики потоков жидкости и проблемой перечисления совершенных паросочетаний плоского графа за полиномиальное время.

Но все известные формулы решения задачи используют действия с плавающей запятой, что сопряжено с проблемами округления; исключение составляет лишь полученная в известной монографии Д. Кнута и др. для случая $w = 3$ система из двух взаимно-рекуррентных формул, использующая только операции сложения целых чисел.

В разделе 1 разработан алгоритм, компьютерное воплощение которого способно для искомого перечисления разбиений прямоугольника сгенерировать систему взаимно-рекуррентных формул, использующих лишь операции сложения целых чисел и, таким образом, свободных от проблем округления вещественных чисел.

=====

Приведенный описательный алгоритм компьютерной генерации тестовой единицы 15,3 (тема «Множества», форма 3) позволяет, как мы надеемся, получить вполне определенное представление о структуре и способе генерации тестовых единиц и по другим темам, независимо от выбора одной из пяти перечисленных выше форм.

Алгоритм воплощен в компьютерные программы [?]- [?], которые в течение нескольких лет используются для автоматизации разработки практически неограниченного количества разнообразных тестовых единиц по основным темам языка Delphi 7.0 и для достижения надежности тестового материала, а также для проведения независимого промежуточного контроля усвоения материала.

=====

В олимпиаде приняли участие 34 команды вузов СКФО. Результаты позволяют утверждать, что степень трудности заданий была продумана методически грамотно: так, команда, занявшая 1-е место, набрала 75 баллов из 100 возможных, а команда, занявшая 2-е место — 63 балла (из 100 возможных).

=====

Список использованных источников

- 1 Kateleyn P.W. The statistic of dimers on a lattice I: The number of dimer arrangements on quadratic lattice. *Physica*. — 1961. — V. 27. — P. 1209—1225.
- 2 Temperley H.N.V. and Fisher M.E. Dimer problem in statistical mechanics — an exact result. *Phil. Mag.* — 1961. — V. 6. — P. 1061—1063.
- 3 Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete Mathematics*. — Massachusetts: Addison-Wesley, 1994. — 657 p.
- 4 Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. Пер. с англ. — М.: Мир, 1998. — 704 с.
- 5 С.Г. Волченков. Задача «Паркет» // Информатика и образование. — 1994. — № 3. — С. 52—54.
- 6 Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 455 с.
- 7 Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
- 8 Lawler E.L. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. — University of California at Berkeley, Holt, Rinehart and Winston, 1976. — 384 с.
- 9 Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. — М.: Книжный дом «Либроком», 2009. — 392 с.
- 10 Магомедов А.М., Магомедов Т.А. Перечисление разбиений прямоугольника // Пенза, Проблемы теоретической кибернетики: XVIII международная конференция (19-23 июня 2017 г.). Материалы под редакцией Ю. И. Журавлева. — М.: МАКС Пресс, 2017. — С. 152—154.
- 11 Лаптев В.Н. Методы разработки тестовых заданий в автоматизированной контролирующей системе «Контроль» В.Н. Лаптев, Е.В. Михайленко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. — Краснодар: КубГАУ. — 2015. — № 09(113). С. 826—840. — IDA [article ID]: 1131509061. — URL: <http://ej.kubagro.ru/>.
- 12 Магомедов Т.А. Свидетельство № 2012616494 от 18.06.2012 о государственной регистрации программы для ЭВМ «Генерация тестовых пунктов по дисциплине “Основы программирования”».
- 13 Магомедов А.М. Свидетельство № 2018612561 от 20.02.2018 о государственной регистрации программы для ЭВМ «Автоматизация генерации тестовых пунктов по теме “Множества в языке Delphi”».
- 14 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. Численный метод решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью ортогональной в смысле

- Соболева системы, порожденной системой косинусов // Дагестанские электронные математические известия. — 2017. — № 8. — С. 53—60.
- 15 Шарапудинов И.И. О приближении решения задачи Коши для нелинейных систем ОДУ посредством рядов Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. — 2017. — № 7. — С. 66—76.
 - 16 Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — № 82:1. — С. 212—244.
 - 17 Акниев Г.Г., Гаджимирзаев Р.М. Алгоритм численной реализации полиномов по функциям, ортогональным по Соболеву и порожденным косинусами // Дагестанские электронные математические известия. — 2018. — № 9. — С. 1—6.
 - 18 Dotsenko V.S. Critical phenomena and quenched disorder. // Phys Usp. — 1995. — № 38(5). — P. 457—496.
 - 19 Korshunov S.E. Phase transitions in two-dimensional systems with continuous de-generacy. // Phys Usp. — 2006. — № 49(3). — P. 225—262.
 - 20 Ramazanov M.K., Murtazaev A.K., Magomedov M.A. Thermodynamic, critical properties and phase transitions of the Ising model on a square lattice with competing interactions. // Solid State Comm. — 2016. — № 233. — P. 35—40.
 - 21 Landau D.P., Binder K. Monte Carlo simulations in statistical physics. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
 - 22 Wiseman S. and Domany E. Self-averaging, distribution of pseudocritical temperatures, and finite size scaling in critical disordered systems // Phys. Rev. E. — 1998. — V. 58. — P. 2938.
 - 23 Wiseman S. and Domany E. Finite-Size Scaling and Lack of Self-Averaging in Critical Disordered Systems // Phys. Rev. Lett. — 1998. — V. 81. — P. 22.
 - 24 Aharony A., Harris A.B. and Wiseman S. Critical Disordered Systems with Constraints and the Inequality $\nu > 2/d$ // Phys. Rev. Lett. — 1998. — V. 81. — P. 252.
 - 25 Pierre-Emmanuel Berche, Christophe Chatelain, Bertrand Berche, Wolfhard Janke. Bond dilution in the 3D Ising model: a Monte Carlo study // European Physical Journal B. — 2004. — V. 38. — P. 463.
 - 26 Marqués M.I., Gonzalo J.A., Íñiguez J. Self-averaging of random and thermally disordered diluted Ising systems // Phys. Rev. E. — 1999. — V. 60. — P. 2394.
 - 27 Marqués M.I., Gonzalo J.A., Íñiguez J. Universality class of thermally diluted Ising systems at criticality // Phys. Rev. E. — 2000. — V. 62. — P. 191.
 - 28 Prudnikov V.V., Prudnikov P.V. and Fedorenko A.A. Field-theory approach to critical behaviour of systems with long-range correlated defects // Phys. Rev. B. — 2000. — V. 62. — P. 8777.

- 29 Прудников В.В., Прудников П.В., Вакилов А.Н., Криницин А.С. Компьютерное моделирование критического поведения трехмерной модели неупорядоченной модели Изинга // ЖЭТФ. — 2007. — Т. 132. — С. 417.
- 30 Доценко В.С. Критические явления в спиновых системах с беспорядком // УФН. — 1995. — Т. 165. — С. 481.
- 31 Landau D.P., Binder K. Monte Carlo Simulations in Statistical Physics, Third Edition. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. [<https://doi.org/10.1017/cbo9780511994944>]
- 32 Shannon R.D., Rogers D.B. and Prewitt C.T. Chemistry of Noble Metal Oxides 1. Syntheses and Properties of ABO₂ Delafossite Compounds. // Inorg. Chem. — 1971. — № 10. — P. 713—718. [<https://doi.org/10.1021/ic50098a011>]
- 33 Melanie J., Soraya Heuss-Aßbichler So-Hyun Park et al., Low-temperature synthesis of CuFeO₂ (delafossite) at 70C: A new process solely by precipitation and ageing. // J. Solid State Chem. — 2016. — № 233. — 390—396. [<https://doi.org/10.1016/j.jssc.2015.11.011>]
- 34 Murtazaev A.K., Babaev A.B., Magomedov M.A., Kassan-Ogly F.A., Proshkin A.I. Frustrations and phase transitions in the three vertex Potts model with next nearest neighbor interactions on a triangular lattice. // JETP letters. — 2014. — № 100(4). — P. 242—246. [<https://doi.org/10.1134/s0021364014160115>]
- 35 Wang F., Landau D.P. Efficient, multiple-range random walk algorithm to calculate the density of states. // Phys. Rev. Lett. — 2001. — № 864. — P. 2050—2053. [<https://doi.org/10.1103/physrevlett.86.2050>]
- 36 Landau D.P., Wang F. A new approach to Monte Carlo simulations in statistical physics. // Braz. J. Phys. — 2004. — № 34(2A). 354—362. [<https://doi.org/10.1590/s0103-97332004000300004>]
- 37 Komura Y., Okabe Y. Difference of energy density of states in the Wang-Landau algorithm. // Phys. Rev. E. — 2012. — № 85. — 010102(R). [<https://doi.org/10.1103/physreve.85.010102>]
- 38 Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. — М.: Изд-во АФЦ, 1999. — 560 с.
- 39 Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82. № 1. — С. 225—258.
- 40 Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем. — 2017. — № 8. — С. 67—79.
- 41 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами // Матем. заметки. — 2017. — Т. 101. — № 4. — С. 611—629. (Math. Notes. — 2017. — V. 101. — № 4. — P. 718—734.)
- 42 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д., Гаджимирзаев Р.М. Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестанские электронные ма-

- тематические известия. — 2016. — № 6. — С. 31—60.
- 43 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16. — № 3. — С. 310—321.
- 44 Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. — 2015. — № 4. — С. 31—73.
- 45 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г., Магомедов С.Р. Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода // Дагестанские электронные математические известия. — 2015. — № 4. — С. 1—14.
- 46 Шарапудинов И.И. О приближении решения задачи Коши для нелинейных систем ОДУ посредством рядов Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. — 2017. — № 7. — С. 66—76.
- 47 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. Численный метод решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью ортогональной в смысле Соболева системы, порожденной системой косинусов // Дагестанские электронные математические известия. — 2017. — Вып. 8. — С. 53—60.
- 48 Султанмахмедов М.С., Шарапудинов Т.И. Приближенное решение задачи Коши для систем ОДУ с помощью ортогональной в смысле Соболева системы, порожденной полиномами Чебышева первого рода // Дагестанские Электронные Математические Известия. — 2017. — № 8. — С. 100—109.
- 49 Шарапудинов И.И., Магомедов С.Р. Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с функциями Хаара, и задача Коши для ОДУ // Дагестанские Электронные Математические Известия. — 2017. — № 7. — С. 1—15.
- 50 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д., Гаджимирзаев Р.М. Разностные уравнения и полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Владикавказ. матем. журн. — 2017. — Т. 19. — № 2. — С. 58—72.
- 51 Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства g -кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 9. — № 1. — С. 68—76.
- 52 Шарапудинов И.И. О приближении решения задачи Коши для нелинейных систем ОДУ посредством рядов Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву // Дагестанские Электронные Математические Известия. — 2017. — № 7. — С. 66—76.
- 53 Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства g -кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 9. — № 1. — С. 68—76.

- 54 Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Якоби // Дагестанские электронные математические известия. — 2016. — № 6. — С. 1—24.
- 55 Шарапудинов И.И. Гаджиева З.Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16. — № 3. — С. 310—321.
- 56 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами // Матем. заметки. — 2017. — Т. 101. — № 4. — С. 611—629.
- 57 Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем. — 2017. — № 8. — С. 67—79.
- 58 Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. — 2015. — № 4. — С. 31—73.
- 59 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г., Магомедов С.Р. Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода // Дагестанские электронные математические известия. — 2015. — № 4. — С. 1—14.
- 60 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. Численный метод решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью ортогональной в смысле Соболева системы, порожденной системой косинусов // Дагестанские Электронные Математические Известия. — 2017. — № 8. — С. 53—60.
- 61 Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. — Москва: АФЦ, 1999.
- 62 Sharapudinov I.I., Magomedov S.R. Systems of functions orthogonal in the sense of Sobolev associated with Haar functions and the Cauchy problem for ODEs // Дагестанские Электронные Математические Известия. — 2017. — № 7. — С. 1—15.
- 63 Магомед-Касумов М.Г., Магомедов С.Р. Быстрое вычисление линейных комбинаций соболевских функций, порожденных функциями Хаара // Дагестанские Электронные Математические Известия. — 2018. — № 9. — Стр. 7—14.
- 64 Фарков Ю.А. Ряды Фурье и основы вейвлет-анализа. — Москва, 2007.
- 65 Marcellan F., Yuan Xu. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. — 2015. — V. 33. — № 3. — P. 308—352.
- 66 Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82. — № 1. — С. 225—258.
- 67 K. Rao, P. Yip. Discrete Cosine Transform. Algorithms, Advantages, Applications. 1st Edition. — Academic Press, 2014. — 512 p.

- 68 Шарапудинов И.И. Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода, и задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54. — № 12. — С. 1645—1662.
- 69 Султанмахмедов М.С., Шах-Эмиров Т.Н. Алгоритм быстрого дискретного преобразования для сумм Фурье по ортогональным по Соболеву полиномам, порожденным полиномами Чебышева первого рода // Дагестанские электронные математические известия. — 2018. — № 9. — С. 52—61.
- 70 Marcellan F., Yuan Xu. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. — 2015. — V. 33. № 3. — P. 308—352.
- 71 Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Том. 82. — № 1. — С. 225—258.
- 72 K. Rao, P. Yip. Discrete Cosine Transform. Algorithms, Advantages, Applications. 1st Edition. — Academic Press, 2014. — 512 p.