ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ДАГЕСТАНСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК №
Регистрационный №
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Врио председателя ДНЦ РАН

___________ Муртазаев А.К.
«___»___________ 2018 г.

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ УСРЕДНЕНИЯ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСОВ МОМЕНТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСОВ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С P- И P(X)-ЛАПЛАСИАНОМ. ЛУЧЕВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ И ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

(итоговый отчет за 2017 г.)

Руководитель НИР,
Зав. Отделом математики и информатики _____________ Шарапудинов И.И.
ДНЦ РАН, доктор физ.-мат. наук

г. Махачкала, 2018

Список исполнителей

Научный руководитель,
в.н.с. Отдела математики и информатики ДНЦ РАН, д.ф.-м.н., ____________________
М.М. Сиражудинов

в.н.с. ОМИ, д.ф.-м.н,
Кадиев Р.И., ____________________
с.н.с. ОМИ, к.ф.-м.н,
Абдурагимов Э.И., ____________________
с.н.с. ОМИ, к.ф.-м.н,
Меджидов З.Г. ____________________

Нормоконтролер, н.с. ОМИ,
Султанахмедов М.С. ____________________

Реферат

Отчет содержит Х с., Х источников.

Ключевые слова: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ; ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ; СИСТЕМА НАВЬЕ-СТОКСА; G-СХОДИМОСТЬ; G-КОМПАКТНОСТЬ; УСРЕДНЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ; НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДУ; ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА; p-ЛАПЛАСИАН; p-УСТОЙЧИВОСТЬ; ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ; УРАВНЕНИЯ ИТО; УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ; УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ; ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ; РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ; ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ; РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ; ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ; МОМЕНТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ; МЕТОД МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ; ТЕОРЕМЫ ТИПА БОЛЯ-ПЕРРОНА; ЛУЧЕВОЕ.

Настоящий отчёт содержит итоги работы за 2017 год Отдела математики и информатики ДНЦ РАН по теме «Асимптотические методы усреднения недивергентных дифференциальных операторов. Исследование вопросов моментной устойчивости и устойчивости по части переменных для дифференциальных уравнений Ито с импульсными воздействиями и разностных уравнений Ито. Исследование вопросов существования и единственности решений краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений с p- и $p(x)$-лапласианом. Лучевое преобразование векторных и тензорных полей и некоторые его обобщения» из Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы.

Метод усреднения дифференциальных операторов, основанный на асимптотических разложениях по малому параметру, широко используется в математической и физической литературе. Этот метод позволяет помимо теоремы усреднения получить оценки разности точного решения и его приближений. Нами впервые к усреднению обобщенного уравнения Бельтрами привлечены асимптотические методы, что позволило получить теорему усреднения и оценки порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ разности точного решения и его приближений в нормах пространств Лебега и Соболева.

Эти оценки получены асимптотическими методами при минимальных предположениях гладкости на данные задачи:

- коэффициенты — измеримые ограниченные ε-периодические функции;
- граница области из класса C^2;
- правая часть из пространства Соболева W_2^1.

Получены операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами. Изучены вопросы гельдеровости решений задачи Римана-Гильберта для обобщенных систем уравнений Бельтрами при минимальных условиях на данные задачи.

Применяя метод модельных уравнений, исследованы вопросы моментной устойчивости решений по части переменных относительно начальных данных для линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием. Получены достаточные условия

устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений в терминах параметров этих уравнений. Эти результаты могут быть применены при исследованию на устойчивость развитие различных процессов биологии, физики, химии, экономики, подверженных случайным воздействиям.

Изучены вопросы глобальной экспоненциональной p-устойчивости ($2 \leq p < \infty$) систем линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями специального вида, используя теорию положительно обратимых матриц. Для этого применяется идеи и методы, разработанная Н.В. Азбелевым и его учениками для исследования вопросов устойчивости для детерминированных функционально–дифференциальных уравнений. Получены достаточные условия глобальной экспоненциональной p-устойчивости ($2 \leq p < \infty$) систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями в терминах положительной обратимости матрицы, построенной по исходной системе. Проверена выполнимость этих условий для конкретных уравнений.

Исследованы вопросы моментной устойчивости решений относительно начальных данных и допустимости пар пространств для линейных дифференциально–разностных уравнений Ито. Исследование проведено методом вспомогательных или модельных уравнений.

Исследованы вопросы существования, единственности, построения решения численными методами решения задачи Дирихле для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с p-лапласианом.

Доказано существование и единственность решения двухточечной краевой задачи для одного семейства нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

Исследованы вопросы существования, единственности, построения решения численными методами решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с дробными производными.

Введены в рассмотрение два двухпараметрических семейства ломаных на плоскости. Решена задача восстановления функции по ее интегралам вдоль этих ломаных, когда весовая функция – квазимногочлен. Для частных случаев весовых функций получены формулы обращения. В общем случае доказана единственность решения поставленной задачи. Результаты применены к доказательству единственности задачи интегральной геометрии с возмущением.

Доказана единственность восстановления функции, суммируемой в полосе на плоскости, заданной своими интегралами вдоль дуг двухпараметрических кривых второго порядка с весом, аналитическим по части переменных.

Доказаны формулы для определения неизвестного векторного поля на плоскости, заданного своим поперечным лучевым преобразованием в ограниченном угловом диапазоне. В первой формуле используется интегральная формула интерполяции функции с ограниченным спектром. Восстанавливается преобразование Фурье дивергенции неизвестного поля. Во второй формуле интерполяция производится по дискретным значениям функции. Восстанавливаются координатные функции потенциальной части искомого поля. Векторное поле ищется в классе вектор-функций, сосредоточенных в некоторой полосе, достаточно быстро убывающих на бесконечности и имеющих непрерывные вторые производные.

Содержание

Введение 8
1 О гельдеровости решений задачи Римана-Гильберта для обобщенной системы уравнений Бельтрами 12
1.1 Обобщенная система Бельтрами 12
1.2 Об одной краевой задаче Римана – Гильберта в односвязной области 14
1.3 Треугольные системы 16
1.4 О гельдеровости решений общей задачи Римана – Гильберта 16
1.5 О нетеровости задачи Римана – Гильберта в $W_p^1(Q; \mathbb{C})$ 17
2 Операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами 19
2.1 Формулировка результатов 19
3 Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями 24
3.1 Предварительные сведения и объект исследования 24
3.2 Основной результат 26
3.3 Следствия основного результата 26
3.4 Пример 29
4 Существование и единственность положительного решения задачи Дирихле в шаре для нелинейного эллиптического уравнения с $p-$ лапласианом 31
4.1 Предварительные сведения 31
4.2 Достаточные условия существования 31
5 Двухточечная краевая задача нелинейного дифференциального уравнения с дробными производными, имеющего экспоненциальный рост по решению 33
5.1 Предварительные сведения 33
5.2 Существование положительного решения 34
5.3 Единственность и численный метод построения положительного решения краевой задачи 34
6 Восстановление векторного поля по данным его поперечного лучевого преобразования в ограниченном угловом диапазоне на плоскости 35
6.1 Интегральная формула обращения 35
6.2 Интерполяция по дискретному множеству значений 35
7 Восстановление функции по ее интегралам вдоль ломаных одного семейства на плоскости 37
7.1 Основная формула 37
7.2 Теорема единственности 38
Заключение 39
Список использованных источников 41

Обозначения и сокращения

ДНЦ — Дагестанский научный центр

ОМИ — Отдел математики и информатики

РАН — Российская академия наук

Введение

Согласно плану научно-исследовательской работы за 2017 год исследования, проводимые в Отделе математики и информатики Дагестанского научного центра РАН, включают в себя работы по теме «Асимптотические методы усреднения недивергентных дифференциальных операторов. Исследование вопросов моментной устойчивости и устойчивости по части переменных для дифференциальных уравнений Ито с импульсными воздействиями и разностных уравнений Ито. Исследование вопросов существования и единственности решений краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений с p- и $p(x)$-лапласианом. Лучевое преобразование векторных и тензорных полей и некоторые его обобщения».

Метод усреднения дифференциальных операторов, основанный на асимптотических разложениях по малому параметру, широко используется в математической и физической литературе. Этот метод позволяет помимо теоремы усреднения получить оценки разности точного решения и его приближений. Нами впервые к усреднению обобщенного уравнения Бельтрами привлечены асимптотические методы, что позволило получить теорему усреднения и оценки порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ разности точного решения и его приближений в нормах пространств Лебега и Соболева. Эти оценки получены асимптотическими методами при минимальных предположениях гладкости на данные задачи: 1) коэффициенты — измеримые ограниченные ε-периодические функции; 2) граница области из класса C^2; 3) правая часть из пространства Соболева W_2^1 (см. [1, 2, 4]). Получены операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами. Изучены вопросы гельдеровости решений задачи Римана-Гильберта для обобщенных систем уравнений Бельтрами при минимальных условиях на данные задачи (см. [3, 5–10]).

Вопросам устойчивости решений систем со случайными параметрами посвящено большое количество работ. Достаточно полный их список приведен в монографиях [11–14]. В этих работах для исследования вопросов стохастической устойчивости, в основном, применялся традиционный метод, основанный на функционалах Ляпунова – Красовского – Разумихина. Однако применение этих методов во многих случаях встречало серьёзные трудности. Поэтому эффективные признаки устойчивости обычно удавалось доказывать лишь для сравнительно узких классов стохастических дифференциальных уравнений с последействием. С другой стороны, в теории устойчивости детерминированных функционально–дифференциальных уравнений высокую эффективность показал «W-метод», т.е. метод преобразования исходного уравнения с помощью вспомогательного уравнения, разработанный Н.В. Азбелевым и его учениками. Результатом таких преобразований является получение более простого уравнения, для которого легко выяснить наличие для его решений исследуемых свойств.

Для нелинейных дифференциальных уравнений Ито с последействием вопросы устойчивости мало изучены. В работах [15], [16] изучались вопросы локальной устойчивости решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с последействием с помощью «W-метода». В случае линейных уравнений локальная устойчивость решений и глобальная устойчивость решений эквивалентны, а в нелинейном случае из глобальной устойчивости решения следует локальная устойчивость этого же решения, а обратное неверно. Кроме того, в случае линейных уравнений из локальной устойчивости некоторого решения уравнения следует локальная устойчивость любого решения этого же уравнения, а в случае нелинейных уравнений этот факт не имеет место. Исследуются вопросы глобальной экспоненциональной p-устойчивости ($2 \leq p < \infty$) систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями специального вида, применяя идеи «W-метода» и используя теорию положительно обратимых матриц. Отличие в том, что преобразуется отдельно каждое уравнение системы в отдельности и сначала оценивается каждая компонента решения. Такой подход и специальный вид уравнения позволяет получить новые результаты не только для нелинейных уравнений, но и для линейных уравнений, как частный случай нелинейных уравнений. При проведении исследований использован подход работы [17], примененный для исследования глобальной экспоненциальной устойчивости систем детерминированных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздываниями.

Изучены вопросы единственности при $n \geqslant 2$ положительного решения задачи Дирихле в шаре $S = \{x \in R^n : |x| \ < 1\}$ с границей Γ для уравнения

$$\Delta_p u + a(|x|)|u|^q = 0,\ x \in S,$$

где $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), 1 < p \leq 2, q > 1$-константы, $a(t)-$ непрерывная неотрицательная при $t \geqslant 0$ функция. Результаты относительно единственности положительного радиально-симметричного решения решения, полученные ранее в случае $a(|x|) = |x|^m, m \geqslant 0$, обобщены на более общий случай $a(|x|)$.

Доказаны существование и единственность положительного решения краевой задачи

$$D^{\alpha}_{0+}u(t) + f(t,u(t)) = 0{,}0 < t < 1,$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

в случае, когда $f(t,u)$ имеет степенной рост по u, а также предложен численный метод его построения.

Кроме того, рассмотрена задача о восстановлении векторного поля по данным его поперечного лучевого преобразования в ограниченном угловом диапазоне на плоскости. Поперечное лучевое преобразование $P^{\perp}$ векторного поля $f = (f_1,f_2)$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ определяется формулой

$$P^{\perp} f(\xi,s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, f(s\xi + t\eta)\rangle \, dt, \tag{0.1}$$

$\xi \in \mathbb{R}^2, s \in \mathbb{R}$. Интегрирование ведется вдоль прямой $l : x = s\xi + t\eta$ с направляющим вектором $\eta = (\eta_1, \eta_2), \xi = (\xi_1,\xi_2) = \eta^{\perp}$ – ортогональный вектор. Преобразования вида (0.1) возникают в физике плазмы, в фотоэластичности, в акустической томографии, в задачах визуализации крови в человеческом теле путем измерений ультразвуковых сигналов (см. [44, 45]). Установлению свойств поперечного преобразования, получению формул его обращения, а также алгоритмов обращения в случае, когда функция $P^{\perp}f(\xi,s)$ задана на всем цилиндре $\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, посвящено много работ (см., например, [45] и процитированную там литературу). Практически обоснованным является решение задачи обращения в случае, когда функция $P^{\perp}f(\xi,s)$ задана не на всем цилиндре $\mathbb{Z}$, а лишь на некоторой его части. Мы предполагаем, что вектор ξ меняется в произвольно малом угловом диапазоне. Однозначное решение задачи оказывается возможным в классе полей, имеющих финитные преобразования Фурье.

Исследован вопрос о восстановлении функции по ее интегралам вдоль ломаных одного семейства на плоскости. Пусть $\omega = (\omega_1,\omega_2), \theta = (\theta_1, \theta_2)$ – линейно независимые единичные векторы на плоскости, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ – произвольная точка. Символом $\Gamma_{\omega,\theta}(x)$ обозначим объединение лучей с вершиной в точке x и направляющими векторами ω и θ соответственно:

$$\Gamma_{\omega,\theta}(x) = \Gamma_{\omega}(x) \cup \Gamma_{\theta}^{-}(x),$$

где $\Gamma_{\omega}(x) = \{\xi = (\xi_1,\xi_2)) \in \mathbb{R}^2 : \xi = x + \theta t, t \geqslant 0\}$; знак "$-$" в символе $\Gamma_{\theta}^{-}(x)$ означает, что луч $\Gamma_{\theta}(x)$ проходится в направлении, противоположном направлению вектора θ . При фиксированных ω и θ $\Gamma_{\omega,\theta}(x)$ – двухпараметрическое семейство ломаных, зависящих от координат вершины $x = (x_1,x_2)$.

Рассмотрим множество криволинейных интегралов 1-го рода вдоль $\Gamma_{\omega,\theta}(x)$

$$g_{\rho}(x;\omega,\theta) = \int\limits_{\Gamma_{\omega,\theta}(x)} \rho(x,\xi)f(\xi)d\xi = \int\limits_{\Gamma_{\omega}(x)} \rho(x,\xi)f(\xi)d\xi - \int\limits_{\Gamma_{\theta}(x)} \rho(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{0.2}$$

где ρ – некоторая весовая функция.

Задача состоит в восстановлении финитной функции $f(x)$ по известным интегралам (0.2), в которых ω и θ – фиксированные векторы.

В пространстве четной размерности задача определения функции по ее интегралам вдоль конических поверхностей с единичной весовой функцией решена в работе А. Бегматова [46]. Сформулируем этот результат.

Пусть $\{\Gamma(x,y)\}$, где $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, $y \geqslant 0, n = 2m > 2$, – семейство конусов с вершинами в точках (x,y):

$$\sum_{k=1}^{n-1}(x_k - \xi_k)^2 = (y - \eta)^2, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant y,$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots,\xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \eta \in \mathbb{R}$, $\eta \geqslant 0$. Через U обозначим класс функций $f(x,y)$, которые всюду имеют все непрерывные частные производные до n-го порядка включительно и финитны с носителем в слое

$$\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in (o,h),\ h < +\infty\}.$$

Тогда решение уравнения

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} f(\xi,\eta)ds = g(x,y)$$

в классе U единственно, причем имеет место представление

$$f(x,y) = C\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \Delta_x\right)^m \int\limits_0^y g(x,y)d\eta, \tag{0.3}$$

где Δ_x – оператор Лапласа.

В статье [47] вводится в рассмотрение двухпараметрическое семейство симметричных относительно вертикальной оси ломаных $(\xi_1,\xi_2) = (x \pm r\sin\varphi, r\cos\varphi)$ с вершинами $M(x,0)$ на оси $O\xi$, где $r \geqslant 0, 0 < \varphi < \pi/2$. Соответствующее интегральное преобразование имеет вид

$$g(x,\tau) = \int\limits_0^\infty f(x \pm r\sin\varphi, r\cos\varphi)dr,$$

где $\tau = \operatorname{tg}\varphi$. Формула обращения, которую можно понимать как композицию свертки и обратной проекции, имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}\left(p.v.\int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\left(\frac{g'(\xi,\tau)}{\xi - x - y\tau} + \frac{g'(\xi,\tau)}{\xi - x + y\tau}\right)\right);$$

внутренний интеграл понимается в смысле главного значения, а штрих означает производную по переменной ξ.

Первым шагом решим задачу обращения интегрального преобразования

$$g_\rho(x;\omega) = \int\limits_{\Gamma_\omega(x)} \rho(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{0.4}$$

в котором интегралы берутся вдоль лучей, параллельных вектору ω, а весовая функция – квазимногочлен вида

$$\rho(x,\xi) = (x_1 - \xi_1)_1^n(x_2 - \xi_2)_2^n e^{\langle a,x-\xi\rangle}, \tag{0.5}$$

где $a = (a_1,a_2)$, $\langle a,x - \xi\rangle = a_1(x_1 - \xi_1) + a_2(x_2 - \xi_2)$.

Преобразования вида (0.2), (0.4) с различными весовыми функциями – частными случаями функции (0.5) – изучены в работах [48,49]. Применением преобразований Фурье и Лапласа для них получены формулы обращения в классе гладких финитных функций с носителями, лежащими в некоторой полосе на плоскости.

1 О гельдеровости решений задачи Римана-Гильберта для обобщенной системы уравнений Бельтрами

1.1 Обобщенная система Бельтрами

Изучаются вопросы гельдеровости решений следующей системы уравнений

$$\partial_{\bar z} w + \mu_1(x)\partial_z w + \mu_2(x)\partial_{\bar z}\overline{w} + c_1(x)w + c_2(x)\overline{w} = f, \quad x \in Q, \tag{1.1}$$

где μ_1, μ_2, c_1, c_2 — квадратные матрицы порядка n, $n \geqslant 1$, элементы которых принадлежат $L_\infty(Q;\mathbb{C})$; w, f — вектор–столбцы.

Как известно, уравнением Бельтрами называется скалярное уравнение (1.1) без младших членов и $\mu_2 = 0$, причем почти всюду в области Q имеет место неравенство $|\mu_1(x)| \leqslant k_0 < 1$, где $k_0 > 0$ — постоянная. Отсюда следует, что естественно назвать системой Бельтрами систему

$$\partial_{\bar z} w + \mu(x)\partial_z w = f, \quad x \in Q, \tag{1.2}$$

спектральный радиус $\rho(\mu(x))$ матрицы $\mu(x)$ которой удовлетворяет условию:

$$\rho(\mu(x)) \leqslant k_0 < 1 \qquad \text{п. в.} \;\; x \in Q. \tag{1.3}$$

(Здесь и далее $k_0 > 0$ — постоянная.)

Условие (1.3) означает, что корни характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \det(\lambda E + \mu(x)) = 0,$$

где E — единичная матрица, расположены внутри круга $|\lambda| \leqslant k_0 < 1$, следовательно, условие (1.3) — условие эллиптичности системы Бельтрами (1.2). Отметим, что без нарушения эллиптичности нельзя заменить k_0 на единицу. Например, уравнение $\partial_{\bar z} u + \partial_z u = f$ не является эллиптическим.

Пусть мы имеем систему n уравнений $\mathbf{a}\mathscr{D}_1 w + \mathbf{b}\mathscr{D}_2 w = f$, где w, f — n-компонентные вектор-функции, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — квадратные матрицы порядка n с измеримыми комплекснозначными ограниченными элементами и пусть все собственные значения матрицы $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$ для почти всех $x \in Q$ расположены в полуплоскости $\{\operatorname{Im}\lambda \geqslant \alpha_0 > 0\}$, где α_0 — постоянная. Тогда эту систему можно представить в виде системы Бельтрами $\partial_{\bar z} w + \mu\, \partial_z w = \mathbf{a}^{-1} f$, где $\mu = (\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} + iE)^{-1}(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} - iE)$, при этом в (1.3) $k_0 = (1+\alpha_0)^{-1}$.

Систему (1.1), где $\mu_2 \neq 0$, будем называть обобщенной системой Бельтрами. Эллиптичность системы (1.1) означает выполнение почти всюду в области Q одного из двух следующих эквивалентных условий:

– Для любого $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеем: $\det D(\xi,\overline{\xi},\overline{\xi},\xi) \neq 0$, где

$$D(\xi,\eta,\delta,\gamma) = \begin{pmatrix} E\xi + \mu_1(x)\eta & \mu_2(x)\,\xi \\ \overline{\mu_2(x)}\,\delta & E\delta + \overline{\mu_1(x)}\,\gamma \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

E — единичная матрица.

– Характеристическое уравнение $\Delta(\lambda) \equiv \det D(\lambda,1,\overline{\lambda},1) = 0$ не имеет корней на единичной окружности $|\lambda| = 1$.

Так как система (1.1) является обобщением системы Бельтрами, естественно считать, что корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ расположены внутри единичного круга $|\lambda| < 1$. В дальнейшем под условием эллиптичности системы (1.1) будем понимать именно это условие. Кроме того (если не оговорено противное) будем предполагать, что система (1.1) удовлетворяет условию

$$\underset{x\in Q}{vrai\,sup}\,(\|\mu_1(x)\| + \|\mu_2(x)\|) \leqslant k_0 < 1, \tag{1.5}$$

k_0 — положительная постоянная (постоянная эллиптичности), $\|\mu_j\|$ — норма матрицы μ_j, рассматриваемой как оператор умножения в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Из условия (1.5) следует, что корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ расположены внутри единичного круга $|\lambda| < 1$. Действительно, из структуры матрицы $D(\lambda,1,\overline{\lambda},1)$ (см. (1.4)), где λ — корень характеристического уравнения, следует, что однородная система $Dg = 0$ линейных алгебраических уравнений имеет решения вида $g = \left(\begin{smallmatrix} h \\ \overline{h} \end{smallmatrix}\right)$, $h \in \mathbb{C}^n$, $h \neq 0$. Следовательно, имеем равенство $\lambda\left(Eh + \mu_2\overline{h}\right) = -\mu_1 h$. Отсюда, согласно (1.5), получим:

$$|\lambda|\,(1 - \|\mu_2\|) \leqslant \|\mu_1\| \quad \Longrightarrow \quad |\lambda| \leqslant \frac{\|\mu_1\|}{1 - \|\mu_2\|} < 1.$$

Как известно, любую равномерно эллиптическую систему двух уравнений первого порядка с действительными непрерывными коэффициентами можно представить в виде скалярного уравнения (1.1) ($n = 1$), причем выполнено условие (1.5).

Отметим, что характеристическое уравнение скалярного уравнения (1.1) есть уравнение окружности: $|\lambda - \mu_1| = |\mu_2|$. Поэтому условие эллиптичности в этом случае совпадает с условием (1.5). В общем случае $n > 1$ это не так. Условие (1.5) налагает дополнительное ограничение на расположение корней характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, аналогично условию Кордеса для недивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Действительно, рассмотрим, например, систему Бельтрами. Условием эллиптичности является условие (1.3): для почти каждого $x \in Q$ спектральный радиус $\rho(\mu_1(x))$ матрицы $\mu_1(x)$ меньше единицы. Как известно, спектральный радиус меньше или равен норме матрицы, поэтому условие (1.5) сужает класс рассматриваемых обобщенных систем Бельтрами.

Пусть μ_1, μ_2 — нормальные матрицы, т. е. они перестановочны со своими сопряженными (например, самосопряженные). Тогда, как известно, спектральные радиусы матриц совпадают с их нормами: $\rho(\mu_j) = \|\mu_j\|$, $j = 1,2$. Такое же совпадение имеет место и для матриц представимых в виде ортогональной суммы $\mu_j = \nu_j \oplus r_j$, где ν_j — нормальная матрица, а r_j удовлетворяет оценкам: $\rho(r_j) \leqslant \rho(\nu_j)$, $\|r_j\| \leqslant \|\nu_j\|$. Следовательно, для таких матриц нормы в (1.5) можно заменить на спектральные радиусы. Отсюда следует, что для системы Бельтрами с нормальной матрицей коэффициентов (или с матрицей коэффициентов вида $\mu_1 = \nu_1 \oplus r_1$) условие (1.5) не требуется, оно есть следствие условия эллиптичности (1.3).

1.2 Об одной краевой задаче Римана – Гильберта в односвязной области

Сначала мы изучим вопросы гельдеровости решений одной специальной краевой задачи Римана – Гильберта в односвязной области для обобщенной системы уравнений Бельтрами без младших членов

$$A_0 w = f \in L_2(Q;\,\mathbb{C}), \qquad w \in W_2^1(Q;\,\mathbb{C}), \tag{1.6}$$

$$\operatorname{Re} w = 0 \quad \text{на} \quad \partial Q_0, \tag{1.7}$$

где Q — односвязная область плоскости с гладкой (класса $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$) границей;

$$A_0 w = \partial_{\bar z} w + \mu_1 \partial_z w + \mu_2 \partial_{\bar z} \overline{w},$$

Здесь μ_1, μ_2 — квадратные матрицы порядка n, $n \geqslant 1$, с элементами из $L_\infty(Q;\mathbb{C})$, для которых имеет место неравенство (1.5).

Имеет место

Теорема 1.1. *Задача Римана – Гильберта* (1.6), (1.7) *при дополнительном предположении*

$$\int_{\partial Q} \operatorname{Im} w\, ds = 0. \tag{1.8}$$

однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q;\mathbb{C})$. При этом имеет место априорная оценка

$$c_0 \|w\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant \|A_0 w\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}, \tag{1.9}$$

где $c_0 > 0$ — постоянная, зависящая только от k_0, n и Q.

Общее решение задачи (1.6), (1.7) *дается формулой: $w = w_0 + ic$, $c \in \mathbb{R}^n$, где w_0 решение задачи* (1.6), (1.7), (1.8)*; $\widetilde{w} = ic$, $c \in \mathbb{R}^n$, — общее решение однородной задачи* (1.6), (1.7).

Для любого $w \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$, $\operatorname{Re} w|_{\partial Q} = 0$ имеет место априорная оценка

$$\frac{1-k_0}{4} \sum_{j=1}^{2} \|\mathscr{D}_j w\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant \|A_0 w\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}. \tag{1.10}$$

Отметим, что имеет место и L_p-аналог этого утверждения ($p > 2$). Сформулируем его. Рассмотрим задачу Римана – Гильберта

$$A_0 w = f \in L_p(Q;\,\mathbb{C}), \qquad w \in W_p^1(Q;\,\mathbb{C}), \tag{1.11}$$

$$\operatorname{Re} w = 0 \qquad \text{на} \qquad \partial Q_0. \tag{1.12}$$

Справедлива следующая

Теорема 1.2. *Существует показатель повышенной суммируемости $p_0 > 2$, $p_0 = p_0(k_0,n)$, зависящее только от k_0 и n, такой, что задача* (1.11), (1.12), (1.8) *однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_p(Q;\mathbb{C})$, $2 < p \leqslant p_0$. Причем имеет место априорная оценка*

$$c_0 \|w\|_{W_p^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant \|A_0 w\|_{L_p(Q;\mathbb{C})}, \quad w \in \Big\{ u \in W_p^1(Q;\,\mathbb{C}) \;\Big|\; \operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0,\ \int_{\partial Q} \operatorname{Im} u\, ds = 0 \Big\}, \tag{1.13}$$

где $c_0 > 0$ — постоянная зависящая только от k_0, n и Q. Общее решение задачи (1.11), (1.12) *дается формулой:* $w = w_0 + ic$, $c \in \mathbb{R}^n$, *где* w_0 *решение задачи* (1.11), (1.12), (1.8)*;* $\widetilde{w} = ic$, $c \in \mathbb{R}^n$, *— общее решение однородной задачи* (1.11), (1.12)*. Любое решение задачи* (1.11), (1.12) *удовлетворяет оценкам:*

$$\sum_{j=1}^{2} \|\mathscr{D}_j w\|_{L_p(Q;\mathbb{C})} \leqslant \alpha_0 \| f \|_{L_p(Q;\mathbb{C})}, \tag{1.14}$$

$$|w(x) - w(y)| \leqslant \alpha_1 \| f \|_{L_p(Q;\mathbb{C})} \cdot |x-y|^{(p-2)/p} \qquad (\forall x, y \in \overline{Q}_0), \tag{1.15}$$

где $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ *— константы, зависящие только от* k_0*,* n *и* Q*.*

В дальнейшем, если нет необходимости, опускаем индекс 0 в показателе повышенной суммируемости.

Из теорем 1.1 и 1.2, очевидно, вытекает следующее свойство гельдеровости решения задачи Римана – Гильберта (1.6), (1.7).

Следствие 1.1. *Пусть* $w \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$ *— решение задачи Римана – Гильберта* (1.6), (1.7)*, где* $f \in L_q(Q;\mathbb{C})$*,* $q > 2$ *и пусть* $2 < p \leqslant \min\{q, p_0\}$*, где* p_0 *– показатель повышенной суммируемости из теоремы 1.2. Тогда* $w \in W_p^1(Q;\mathbb{C})$ *и имеют место оценки* (1.14), (1.15)*. Кроме того, если* w *удовлетворяет еще и граничному условию* (1.8)*, то имеет место оценка* (1.13)*.*

Следующий пример показывает достаточность условия (1.5) для гельдеровости решения.

Пример 1.1. *В единичном круге* $Q = \{|z| < 1\}$ *рассмотрим следующую задачу Римана – Гильберта для системы двух уравнений*

$$\begin{cases} \partial_{\bar z} w + \mu\, \partial_z w = f \in L_q(Q;\mathbb{C}), \quad w \in W_2^1(Q;\mathbb{C}), \\ \operatorname{Re} w = 0 \quad \text{на} \quad \partial Q, \qquad \displaystyle\int_{\partial Q} \operatorname{Im} w\, ds = 0, \end{cases} \tag{1.16}$$

где $q > 2$*,* $\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$*,* a *– измеримая комплекснозначная ограниченная функция,* $|a(z)| \leqslant c_0 < 1$*,* $z \in Q$*,* $c_0 > 0$ *– постоянная;* $w = \binom{w_1}{w_2}$*,* $f = \binom{f_1}{f_2}$ *— вектор-столбцы. Покажем, что решение задачи* (1.16) *гельдерово.*

Собственные значения матрицы μ — 0 и a, следовательно, спектральный радиус $\rho(\mu) \leqslant c_0$. Норма матрицы μ, как оператора умножения в евклидовом пространстве, связана со спектральным радиусом матрицы $\mu\mu^*$ равенством $\|\mu\| = \sqrt{\rho(\mu\mu^*)}$. Легко видеть, что $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 + |a|^2$ — собственные значения матрицы $\mu\mu^*$. Следовательно, $\|\mu(z)\| = \sqrt{1 + |a(z)|^2} \geqslant 1$, $z \in Q$. Значит, система (1.16) не удовлетворяет условию (1.5). Тем не менее для задачи (1.16) имеет место гельдеровость решения. Действительно, ввиду треугольности матрицы μ, второе уравнение следующего вида $\partial_{\bar z} w_2 + a\, \partial_z w_2 = f_2 \in L_q(Q;\mathbb{C})$. Отсюда, согласно граничным условиям (1.16) и следствию 1.1 получим, что $w_2 \in W_p^1(Q;\mathbb{C})$, где $p = p(c_0) > 2$ — показатель повышенной суммируемости. С учетом этого из первого уравнения получим $w_1 \in W_p^1(Q;\mathbb{C})$. Следовательно, в силу вложения $W_p^1(Q;\mathbb{C}) \subset C^\alpha(Q)$, $\alpha = (p-2)/p$, получим гельдеровость решения.

1.3 Треугольные системы

Пусть матрицы $\mu_1 = \{\mu_{lj}^1\}$, $\mu_2 = \{\mu_{lj}^2\}$ коэффициентов системы (1.1) нижние треугольные (или верхние треугольные) матрицы и пусть выполнены условия:

$$\left|\mu_{ll}^1(x)\right| + \left|\mu_{ll}^2(x)\right| \leqslant c_0 < 1, \quad l = 1,\ldots,n, \quad \text{п. в. } x \in Q, \tag{1.17}$$

где $c_0 > 0$ — постоянная. Тогда перестановкой строк и столбцов детерминанта (1.4) получим, что $\det D(\xi,\overline{\xi},\overline{\xi},\xi)$ представляется в виде определителя квазитреугольной матрицы. При этом диагональными блоками будут следующие квадратные матрицы второго порядка

$$\begin{pmatrix} \xi + \mu_{ll}^1\overline{\xi} & \mu_{ll}^2\xi \\ \overline{\mu_{ll}^2\xi} & \overline{\xi} + \overline{\mu_{ll}^1\xi} \end{pmatrix}, \quad l = 1,\ldots,n.$$

Следовательно, характеристическое уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет следующий вид

$$\prod_{l=1}^{n}\left(\left|\lambda + \mu_{ll}^1\right|^2 - \left|\mu_{ll}^2\right|^2\right) = 0.$$

Ввиду (1.17), каждая из окружностей $|\lambda + \mu_{ll}^1| = |\mu_{ll}^2|$, $l = 1,\ldots,n$, расположена внутри единичного круга $|\lambda| < 1$. Значит, эта система эллиптическая.

Аналогично примеру 1.1 получим гельдеровость решений системы с треугольной главной частью. А, именно, имеет место

Теорема 1.3. *Пусть $w \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$ — решение задачи Римана – Гильберта* (1.6), (1.7), (1.8), *где $f \in L_q(Q;\mathbb{C})$, $q > 2$; μ_1, μ_2 — верхние (нижние) треугольные матрицы, удовлетворяющие* (1.17). *Тогда найдется показатель $p > 2$, $p \leqslant q$, зависящий только от c_0 из* (1.17) *такой, что w удовлетворяет условию гельдера* (1.15), *где $\alpha_1 > 0$ — постоянная зависящая только от c_0 и Q.*

1.4 О гельдеровости решений общей задачи Римана – Гильберта

Пусть Q — ограниченная связная область плоскости (класса $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$), граница которой состоит из объединения непересекающихся контуров $L_0,\ldots,L_m$, $m \geqslant 0$, гомеоморфных окружности. Причем Γ_0 содержит внутри себя остальные. Иначе говоря, Q есть $(m+1)$–связная область плоскости. Рассмотрим следующую задачу Римана – Гильберта

$$\begin{cases} Aw \equiv \partial_{\bar z}w + \mu_1\partial_z w + \mu_2\partial_{\bar z}\overline{w} + c_1 w + c_2\overline{w} = f \in L_2(Q;\,\mathbb{C}), \\ w \in W_2^1(Q;\,\mathbb{C}), \\ \operatorname{Re}(\bar\lambda w) = 0 \qquad \text{на} \qquad \partial Q, \end{cases} \tag{1.18}$$

где c_1 и c_2 — квадратные матрицы порядка n, элементы которых принадлежат $L_\infty(Q;\mathbb{C})$; λ — гладкая (класса $C^1(\partial Q)$) унитарная матрица-функция, определенная на ∂Q, матрицы μ_1 и μ_2 такие же как выше. Известно (см. [9]), что краевая задача Римана – Гильберта (1.18) нетерова, причем индекс краевой задачи дается формулой: $\operatorname{ind} A = 2\kappa - n(m-1)$, где κ — индекс функции $\det\lambda$, т. е. деленное на 2π приращение аргумента функции при одном полном обходе границы области в положительную сторону. Имеет место следующая

Теорема 1.4. *Пусть $w \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$ — решение задачи Римана – Гильберта* (1.18)*, где $f \in L_p(Q;\mathbb{C})$, $p > 2$ — показатель повышенной суммируемости из теоремы 1.2. Тогда $w \in W_p^1(Q;\mathbb{C})$ и имеет место оценка*

$$\alpha_0 \|w\|_{W_p^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant \alpha_1 \|w\|_{L_p(Q;\mathbb{C})} + \|f\|_{L_p(Q;\mathbb{C})}, \tag{1.19}$$

где $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$ – постоянные, зависящие только от k_0, n, Q, L_∞–норм коэффициентов при младших членах и C^1-норм элементов матрицы λ.

Из теоремы 1.4, ввиду вложения $W_p^1(Q;\mathbb{C}) \subset C^\alpha(\overline{Q})$, $\alpha = (p-2)/p$, получим справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.5. *Пусть $w \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$ — решение задачи Римана – Гильберта* (1.18)*, где $f \in L_p(Q;\mathbb{C})$, $p > 2$ — показатель повышенной суммируемости. Тогда w удовлетворяет в замыкании области Q условию гельдера с показателем $\alpha = (p-2)/p$ и постоянной, зависящей только от k_0, n, Q, L_∞-норм коэффициентов при младших членах и C^1-норм элементов матрицы λ, а также от L_p-норм w и f.*

1.5 О нетеровости задачи Римана – Гильберта в $W_p^1(Q;\mathbb{C})$

Пусть $p = p(k_0,n) > 2$ — показатель повышенной суммируемости из теоремы 1.2. Рассмотрим задачу Римана – Гильберта:

$$\begin{aligned} &Aw = f \in L_p(Q;\mathbb{C}), \qquad w \in W_p^1(Q;\mathbb{C}),\\ &\operatorname{Re}(\bar{\lambda} w) = 0 \qquad \text{на} \qquad \partial Q, \end{aligned} \tag{1.20}$$

где оператор A тот же, что и в (1.18). Если $f = 0$, то согласно теореме 1.4 элементы ядра оператора A из $W_2^1(Q;\mathbb{C})$ принадлежат $W_p^1(Q;\mathbb{C})$. Следовательно, ввиду вложения $W_p^1(Q) \subset W_2^1(Q)$, ядро оператора A в W_2^1 совпадает с ядром в W_p^1 , т. е. $\operatorname{Ker}(A,W_2^1) = \operatorname{Ker}(A, W_p^1)$. Согласно оценке (1.19) из теоремы 1.4, получим: задача (1.20) нормально разрешима (см. [10, § 7]). Далее, очевидно, что $\operatorname{Ker}(A^*;L_2) \subset \operatorname{Ker}(A^*,L_{p'})$, где $1/p + 1/p' = 1$. На самом деле здесь имеет место совпадение ядер. Докажем это от противного. Пусть существует вектор $f \in L_p(Q;\mathbb{C})$, такой, что имеем

$$J = \operatorname{Re}\int_Q (f,\varphi)_{\mathbb{C}^n}\,dx = 0 \qquad \text{для любого} \qquad \varphi \in \operatorname{Ker}(A^*;L_2)$$

и $J \neq 0$ хотя бы для одного $\varphi \in \operatorname{Ker}(A^*;L_{p'})$. Следовательно, задача (1.20) при таком f не имеет решений. С другой стороны, как было отмечено в предыдущем пункте, оператор

$A : W_2^1(Q;\,\mathbb{C}) \to L_2(Q;\,\mathbb{C})$ – нетеровый. Поэтому, в силу ортогональности f ядру $\mathrm{Ker}\,(A^*; L_2)$, задача (1.20) разрешима в $W_2^1(Q;\,\mathbb{C})$. Тогда согласно теореме 1.4 получим, что это решение принадлежит $W_p^1(Q;\,\mathbb{C})$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathrm{Ker}\,(A^*; L_2) = \mathrm{Ker}\,(A^*; L_{p'})$. Отсюда и теоремы 1.4, следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.6. *Пусть $p = p(k_0,n) > 2$ — показатель повышенной суммируемости. Тогда задача Р–Г (1.20) нетерова и ее индекс равен $\kappa = 2\mathrm{ind}(\det\lambda) - n(m-1)$.*

Далее, если w — решение (1.20), то для него в Q имеет место оценка:

$$\|w\|_{W_p^1(Q;\,\mathbb{C})} \leqslant c(\|w\|_{L_p(Q;\,\mathbb{C})} + \|f\|_{L_p(Q;\,\mathbb{C})}),$$

где $c > 0$ – константа, зависящая только от k_0, n, Q, L_∞–норм коэффициентов при младших членах и $\sup$-норм элементов матрицы λ и ее производных первого порядка.

2 Операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами

2.1 Формулировка результатов

2.1.1 Задача Римана – Гильберта

Рассмотрим следующую задачу Римана – Гильберта:

$$\begin{cases} Au \equiv \partial_{\bar z} u + \mu\, \partial_z u + \nu\, \partial_{\bar z} \overline{u} = f \in L_2(Q;\mathbb{C}), \\ u \in W_0(Q), \end{cases} \tag{2.1}$$

где коэффициенты $\mu = \mu(x)$, $\nu = \nu(x)$ — измеримые ограниченные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условию

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in Q} \left(|\mu(x)| + |\nu(x)|\right) \leqslant k_0 < 1, \tag{2.2}$$

$k_0 > 0$ — постоянная (константа эллиптичности); Q — ограниченная односвязная область плоскости с кусочно-гладкой границей. Как известно, задача Римана–Гильберта (2.1) однозначно разрешима для любой правой части из $L_2(Q;\mathbb{C})$, причем имеют место априорные оценки:

$$(1-k_0)\,\|\partial_{\bar z} u\|^2_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant \operatorname{Re} \int\limits_Q Au \cdot \overline{\partial_{\bar z} u}\, dx, \tag{2.3}$$

$$(1-k_0)\,\|\partial_{\bar z} u\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant \|Au\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant (1+k_0)\,\|\partial_{\bar z} u\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}\,. \tag{2.4}$$

Оценки (2.3), (2.4) справедливы для любого элемента $u \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$, удовлетворяющего условию $\operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0$, условие на мнимую часть не требуется. Более того они верны и для многосвязных областей.

Выражение

$$\|u\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\bar z} u\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}\,, \quad u \in W_0(Q)$$

задает в подпространстве $W_0(Q)$ норму, эквивалентную норме исходного пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$ (см. [1]), поэтому имеют место оценки:

$$c_1\|u\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant \|Au\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c_2\|u\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}, \tag{2.5}$$

где c_1, $c_2 > 0$ — положительные постоянные, зависящие только от постоянной эллиптичности k_0.

2.1.2 G-сходимость

Обозначим через $\mathscr{A}(k_0;\,Q)$–множество обобщенных операторов Бельтрами (2.1), $\mathscr{A}_0(k_0;\,Q)$– подмножество $\mathscr{A}(k_0;\,Q)$ операторов Бельтрами (2.1) с $\nu = 0$.

Определение 2.1. *Скажем, что последовательность операторов* $\{A_k\}$ *из класса* $\mathscr{A}(k_0;\,Q)$ G*-сходится в области* Q *к оператору* $A \in \mathscr{A}(k_0;\,Q)$ *(и будем писать* $A_k \xrightarrow{G} A$*), если для любого* $f \in L_2(Q;\mathbb{C})$ *последовательность* u_k *решений задачи Р–Г:* $A_k u_k = f$, $u_k \in W_0(Q)$, *сходится в* $L_2(Q;\mathbb{C})$ *к решению задачи Р–Г:* $Au = f$, $u \in W_0(Q)$.

G-предел определен единственным образом. Как известно, см. [1, 6] классы $\mathscr{A}(k_0;\,Q)$, $\mathscr{A}_0(k_0;\,Q)$ обобщенных операторов Бельтрами, операторов Бельтрами G-компактны.

2.1.3 Усреднение

Рассмотрим задачу Римана – Гильберта:

$$\begin{cases} A_\varepsilon u \equiv \partial_{\bar z} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon\, \partial_z u_\varepsilon + \nu^\varepsilon\, \partial_{\bar z} \overline{u}_\varepsilon = f \in L_2(Q;\mathbb{C}), \\ u_\varepsilon \in W_0(Q), \end{cases} \tag{2.6}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$; $\mu(x) = \mu(x_1,x_2)$, $\nu(x) = \nu(x_1,x_2)$ — измеримые ограниченные комплекснозначные периодические (периода T по каждой переменной) функции, удовлетворяющие условию эллиптичности (2.2) на всей плоскости

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}^2} (|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leqslant k_0 < 1.$$

Очевидно, что оператор A_ε принадлежит классу $\mathscr{A}(k_0;\,Q)$.

Определение 2.2. *Скажем, что семейство* $\{A_\varepsilon\}$ *допускает усреднение, если* $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A \in \mathscr{A}(k_0;\,Q)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

В вопросах усреднения важную роль играет ядро оператора $\mathscr{A}^*$, сопряженного оператору периодической задачи:

$$\mathscr{A} u \equiv \partial_{\bar z} u + \mu(x) \partial_z u + \nu(x)\, \partial_{\bar z} \overline{u} = f \in L_2(\square;\mathbb{C}), \quad u \in W_2^1(\square;\mathbb{C}). \tag{2.7}$$

Сформулируем результаты по периодической задаче, необходимые в дальнейшем.

Теорема 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- *Периодическая задача* (2.7) *фредгольмова.*
- *Ядро* $\mathrm{Ker}\mathscr{A}^*$ *сопряженного оператора* $\mathscr{A}^* : L_2(\square;\mathbb{C}) \to W_2^{-1}(\square;\mathbb{C})$ *— двумерное подпространство* $L_2(\square;\mathbb{C})$ *напомним, что наши пространства — пространства над полем* $\mathbb{R}$, *причем один из базисов* $\{p_1,p_2\}$ *ядра* $\mathrm{Ker}\mathscr{A}^*$ *обладает свойствами*

$$\langle p_1 \rangle = 1, \quad \langle p_2 \rangle = i.$$

- *В случае оператора Бельтрами* ($\nu = 0$) *имеем:* $p_2 = i p_1$.

Сформулируем теорему об усреднении.

Теорема 2.2 ((Об усреднении)). *Для семейства операторов* (2.6)*:*

$$A_\varepsilon = \partial_{\bar z} + \mu^\varepsilon \partial_z + \nu^\varepsilon \overline{\partial}_z,$$

где $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$, *имеет место усреднение, причем коэффициенты усредненного оператора*

$$A_0 = \partial_{\bar z} + \mu^0\, \partial_z + \nu^0\, \overline{\partial}_z$$

постоянные, определяемые равенствами

$$\mu^0 = \langle\, \mu\, \mathscr{Q} + \overline{\nu}\, \mathscr{P}\, \langle\,, \quad \nu^0 = \langle\, \overline{\mu}\, \mathscr{P} + \nu\, \mathscr{Q}\, \langle\,, \tag{2.8}$$

где

$$\mathscr{P} = 2^{-1}(p_1 + ip_2), \quad \mathscr{Q} = 2^{-1}(\overline{p_1} + i\,\overline{p_2}),$$

p_1, p_2 *— базисные векторы ядра* $\mathrm{Ker}\mathscr{A}^*$ *из теоремы 2.1,* $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$ *— комплексно сопряженные* p_1, p_2 *функции;* $\overline{\partial}_z$ *— дифференциальный оператор, определенный равенством* $\overline{\partial}_z u = \partial_{\bar z}\overline{u}$.

В случае уравнения Бельтрами имеем: $\mu^0 = \langle \mu\, \overline{p_1} \rangle$, $\nu^0 = 0$.

2.1.4 Задача на ячейке

Рассмотрим следующую периодическую задачу

$$\begin{cases} \mathscr{A} N_j \equiv \partial_{\bar z} N_j + \mu\, \partial_z N_j + \nu\, \partial_{\bar z} \overline{N}_j = \chi_j, \\ N_j \in W_2^1(\square; \mathbb{C}), \quad j = 1; 2, \end{cases} \tag{2.9}$$

где

$$\chi_1 = \frac{1}{2}\left(\mu^0 + \nu^0 - \mu(x) - \nu(x)\right), \quad \chi_2 = \frac{i}{2}\left(\mu^0 - \nu^0 - \mu(x) + \nu(x)\right). \tag{2.10}$$

Здесь μ^0, ν^0 — коэффициенты (2.8) усредненного уравнения. Справедлива следующая

Теорема 2.3 ((см. [2])). *Периодическая задача* (2.9) *разрешима и решения представляются в виде*

$$N_j + c_j, \qquad j = 1; 2,$$

где $c_j \in \mathbb{C}$ *— произвольная постоянная,* $N_j \in W_2^1(\square; \mathbb{C})$ *— решение* (2.9) *со средним равным нулю* $\langle N_j \langle = 0$.

В случае уравнения Бельтрами $\nu = 0$ *имеем* $N_2 = iN_1$.

2.1.5 Первое приближение к решению задачи (2.6)

Пусть правая часть задачи (2.6) f принадлежит пространству $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ и пусть u_ε — решение задачи Римана–Гильберта (2.6). Первым приближением к решению u_ε задачи (2.6) является функция

$$u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon\left((N_1(y) - iN_2(y))\, \partial_z u^0(x) + (N_1(y) + iN_2(y))\, \partial_{\bar z}\overline{u^0(x)}\right), \tag{2.11}$$

где N_1 и N_2 — периодические решения задачи на ячейке (см. теорему 2.3), $y = \varepsilon^{-1}x$; u^0 — решение усредненной задачи: $A_0 u^0 = f$, $u^0 \in W_0(Q;\mathbb{C})$. Оператор A_0 — эллиптический оператор с постоянными коэффициентами, поэтому u^0 принадлежит $W_2^2(Q;\mathbb{C}) \cap W_0(Q)$, ввиду свойств регулярности решений эллиптических уравнений. При этом справедливо соотношение

$$A_\varepsilon u_1^\varepsilon = f + \varepsilon r_\varepsilon, \tag{2.12}$$

где

$$r_\varepsilon = (N_1(y) - iN_2(y))\left(\partial^2_{\bar z z} u^0(x) + \mu(y)\,\partial^2_{zz} u^0(x) + \nu(y)\,\partial^2_{\bar z\bar z}\overline{u^0(x)}\right) + \\ + (N_1(y) + iN_2(y))\left(\partial^2_{\bar z\bar z}\overline{u^0(x)} + \mu(y)\,\partial^2_{z\bar z}\overline{u^0(x)} + \nu(y)\,\partial^2_{\bar z z} u^0(x)\right), \quad y = \varepsilon^{-1}x,$$

причем невязка r_ε принадлежит пространству $L_2(Q;\mathbb{C})$.

Отметим, что первое приближение u_1^ε принадлежит $W_2^1(Q;\mathbb{C})$.

Главным результатом работ [1, 2] является следующая

Теорема 2.4. *Пусть правая часть f задачи Римана – Гильберта* (2.6) *принадлежит пространству $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, Q — односвязная область с гладкой класса C^2 границей, тогда имеют место оценки*

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\,\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}, \quad \|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\,\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}, \tag{2.13}$$

где $c > 0$ — постоянная, независящая от ε и f.

Первая из оценок (2.13) — оценка разности точного решения задачи (2.6) и первого приближения, а вторая есть оценка скорости сходимости точного решения к решению усредненной задачи.

2.1.6 Операторные оценки усреднения

Имеет место следующая

Теорема 2.5. *Справедливы следующие операторные оценки усреднения задачи Римана–Гильберта* (2.6)

$$\left\|\left(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\right)\partial_{\bar z}^{-1}\right\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})\to L_2(Q;\,\mathbb{C})} \leqslant c\,\sqrt{\varepsilon}, \tag{2.14}$$

$$\left\|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\right\|_{W_0(Q)\to L_2(Q;\,\mathbb{C})} \leqslant c\,\sqrt{\varepsilon}, \tag{2.15}$$

$$\left\|\left(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\right)\partial_{\bar z}^{-1} - \varepsilon\Big(N\partial_z A_0^{-1}\partial_{\bar z}^{-1} + {}+ M\partial_{\bar z}\overline{A_0^{-1}\partial_{\bar z}^{-1}}\Big)\right\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})\to W_2^1(Q;\,\mathbb{C})} \leqslant c\,\sqrt{\varepsilon}, \tag{2.16}$$

$$\left\|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} - \varepsilon\left(N\partial_z A_0^{-1} + M\partial_{\bar z}\overline{A_0^{-1}}\right)\right\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})\to W_2^1(Q;\,\mathbb{C})} \leqslant c\,\sqrt{\varepsilon}, \tag{2.17}$$

где $c > 0$ — постоянная; $\partial_{\bar z}^{-1}$ — оператор обратный к оператору краевой задачи (2.6) *для уравнения Коши – Римана; $\overline{A_0^{-1}\partial_{\bar z}^{-1}}$ — оператор, определенный равенством $\overline{A_0^{-1}\partial_{\bar z}^{-1}}\,v = \overline{A_0^{-1}\partial_{\bar z}^{-1}v}$,* *аналогичный смысл имеет и оператор* $\overline{A_0^{-1}}$. *Здесь* $N = N_1(y) - iN_2(y)$, $M = N_1(y) + iN_2(y)$, $y = \varepsilon^{-1}x$, *где* $N_1(y)$, $N_2(y)$ *— решения задачи на ячейке (см. теорему 2.3);* A_ε^{-1}, A_0^{-1} *— обратные операторы к операторам соответствующих задач Римана–Гильберта.*

В случае оператора Бельтрами ($\nu = 0$), ввиду теоремы 2.3, имеем $N = 2N_1$, $M = 0$. Следовательно, корректоры в (2.16), (2.17) упрощаются и мы имеем для оператора Бельтрами оценки

$$\left\| \left(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} - \varepsilon N \partial_z A_0^{-1} \right) \partial_{\overline{z}}^{-1} \right\|_{L_2(Q;\mathbb{C}) \to W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon},$$
$$\left\| A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} - \varepsilon N \partial_z A_0^{-1} \right\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C}) \to W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}.$$

3 Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями

3.1 Предварительные сведения и объект исследования

Пусть: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, P)$ — стохастический базис; k^n — линейное пространство n–мерных $\mathcal{F}_0$ — измеримых случайных величин; $\mathcal{B}_i, i = 1,...,m$ — независимые стандартные винеровские процессы; $1 \leq p < \infty$; c_p — положительное число, зависящее от p ([18], с. 65); E — символ математического ожидания; $|.|$ — норма в R^n; $||.||$ — норма $n \times n$–матрицы, согласованная с нормой в R^n; $||.||_X$ — норма в нормированном пространстве X; μ — мера Лебега на $[0, +\infty)$.

Пусть $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ — $m \times m$–матрица. Матрица B называют неотрицательной, если $b_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1,...,m$ и положительной, если $b_{ij} > 0$, $i, j = 1,...,m$.

Определение 3.1. *[19] Матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ называют $\mathcal{M}$–матрицей, если $b_{ij} \leqslant 0$ при $i, j = 1,...,m$ и $i \neq j$ и выполнено одно из следующих условий:*
– для матрицы B существует положительная обратная матрица B^{-1};
– диагональные миноры матрицы B положительны.

Лемма 3.1. *[19] Матрица B является $\mathcal{M}$–матрицей, если $b_{ij} \leqslant 0$ при $i, j = 1,...,m$ и $i \neq j$, а также выполнено одно из следующих условий:*
– $b_{ii} > \sum\limits_{j=1 i\neq j}^{m} |b_{ij}|$, $i = 1,...,m$;
– $b_{jj} > \sum\limits_{i=1 i\neq j}^{m} |b_{ij}|$, $j = 1,...,m$;
– существуют положительные числа ξ_i, $i = 1,...,m$ такие, что $\xi_i b_{ii} > \sum\limits_{j=1 i\neq j}^{m} \xi_j |b_{ij}|$, $i = 1,...,m$;
– существуют положительные числа ξ_i, $i = 1,...,m$ такие, что $\xi_j b_{jj} > \sum\limits_{i=1 i\neq j}^{m} \xi_i |b_{ij}|$, $i = 1,...,m$.

Объектом исследования является система дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями вида

$$\begin{gathered} dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(h_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(t,x_j(h_{ij}(t))) \right] dt + \\ \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^l(t,x_j(h_{ij}^l(t))) \right] d\mathcal{B}_l(t)\,(t \geq 0), i = 1,...,n \end{gathered} \tag{3.1}$$

с начальными условиями

$$x_i(t) = \varphi_i(t)\ (t < 0), i = 1,...,n, \tag{3.2}$$

$$x_i(0) = b_i\ , i = 1,...,n, \tag{3.3}$$

где:

1. a_i — измеримая по Лебегу функция, заданная на $[0, \infty)$ такая, что $0 < \bar{a}_i \leqslant a_i \leqslant A_i$ $(t \in [0, \infty))$ μ–почти всюду для некоторых положительных чисел $\bar{a}_i, A_i$ при $i = 1,...,n$;

2.$F_{ij}(.,u)$ — измеримая по Лебегу функция, заданная на $[0,\infty)$, $F_{ij}(t,.)$ — непрерывная функция на R^1 такая, что $|F_{ij}(t,u)| \leqslant \bar{F}_{ij}|u|$ $(t \in [0,\infty))$ μ–почти всюду для некоторого положительного числа $\bar{F}_{ij}$ при $i,j = 1,...,n$;

3.$G^l_{ij}(.,u)$ — измеримая по Лебегу функция, заданная на $[0,\infty)$, $G^l_{ij}(t,.)$ — непрерывная функция на R^1 такая, что $|G^l_{ij}(t,u)| \leqslant \bar{G}^l_{ij}|u|$ $(t \in [0,\infty))$ μ–почти всюду для некоторого положительного числа $\bar{G}^l_{ij}$ при $l = 1,...,m$, $i,j = 1,...,n$;

4. h_i, h_{ij}, h^l_{ij} — измеримые по Лебегу функции, заданные на $[0,\infty)$ такие, что $0 \leqslant t - h_i(t) \leqslant \tau_i, 0 \leqslant t - h_{ij}(t) \leqslant \tau_{ij}, 0 \leqslant t - h^l_{ij}(t) \leqslant \tau^l_{ij}$ $(t \in [0,\infty))$ μ–почти всюду для некоторых положительных чисел $\tau_i, \tau_{ij}, \tau^l_{ij}$ при $l = 1,...,m$, $i,j = 1,...,n$;

5. φ_i — $\mathcal{F}_0$–измеримый скалярный случайный процесс, заданный на $[\sigma_i, 0)$, где $\sigma_i = \max\{\tau_i, \tau_{ij}, \tau^l_{ij}, l = 1,...,m, j = 1,...,n\}$;

6. b_i — $\mathcal{F}_0$–измеримая скалярная случайная величина при $i = 1,...,n\}$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

– $b := col(b_1,...,b_n)$;

– $\varphi := col(\varphi_1,...,\varphi_n)$.

Введем следующее обозначение линейного нормированного подпространства k^n:

$$k^n_p = \left\{\alpha : \alpha \in k^n, \|\alpha\|_{k^n_p} = (E|\alpha|^p)^{1/p} < \infty\right\}.$$

Задача (3.1), (3.2), (3.3) имеет единственное решение, если дополнительно предположить, что функции $F_{ij}(t,u)$, $G^l_{ij}t,u)$ удовлетворяют условию Липщица по u при $l = 1,...,m$, $i,j = 1,...,n$ [20]. В дальнейшем будем считать, что функции $F_{ij}(t,u)$, $G^l_{ij}t,u)$ удовлетворяют условию Липщица по u при $l = 1,...,m$, $i,j = 1,...,n$. Обозначим через $x(t,b,\varphi)$ — решение системы (3.1), удовлетворяющее условиям (3.2) и (3.3), т.е. $x(t,b,\varphi) = \varphi$ при $t < 0$ и $x(0,b,\varphi) = b$. Очевидно, что $x(.,b,\varphi) \in D^n$

Определение 3.2. *Будем говорить, что система* (3.1) *глобально экспоненциально p-устойчива* ($1 \leqslant p < \infty$)*, если существует положительные числа* K,λ *такие, что для решения* $x(t,b,\varphi)$ *задачи* (3.1), (3.2), (3.3) *выполнено неравенство*

$$(E|x(t,b,\varphi)|^p)^{1/p} \leqslant K\exp\{-\lambda t\}\left(||b||_{k^n_p} + vrai\sup_{t<0}(E|\varphi(t)|^p)^{1/p}\right) \ (t \geqslant 0).$$

Лемма 3.2. *Пусть* $f(s)$ — *скалярный случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу* $\mathcal{B}(s)$ *на отрезке* $[0,t]$*. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(E\left|\int_0^t f(s)d\mathcal{B}(s)\right|^{2p}\right)^{1/2p} \leqslant c_p\left(E\left(\int_0^t |f(s)|^2 d(s)\right)^p\right)^{1/2p}, \tag{3.4}$$

где c_p — *некоторое число, зависящее от* p.

Справедливость неравенства (3.4) следует из неравенства 4 работы [18] (стр. 65), где выписано и конкретное выражение для c_p.

Лемма 3.3. *Пусть $g(s)$ — скалярная функция на $[0,\infty)$, квадрат которой локально суммируема, $f(s)$ — скалярный случайный процесс такой, что $\sup\limits_{s\geqslant 0}(E|f(s)|^{2p})^{1/2p}<\infty$. Тогда справедливы следующие неравенства*

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|\int\limits_0^t g(s)f(s)ds\right|^{2p}\right)^{1/2p}\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(\int\limits_0^t |g(s)|ds\right)\sup_{t\geqslant 0}(E|f(s)|^{2p})^{1/2p}, \tag{3.5}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|\int\limits_0^t (g(s))^2(f(s))^2ds\right|^{p}\right)^{1/2p}\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(\int\limits_0^t (g(s))^2ds\right)^{1/2}\sup_{t\geqslant 0}(E|f(s)|^{2p})^{1/2p}. \tag{3.6}$$

3.2 Основной результат

Пусть C — $n\times n$–матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii}=1-\frac{A_i^2\tau_i^2+A_i\bar F_{ii}\tau_i+c_pA_i\sqrt{\tau_i}\sum\limits_{i=1}^m\bar G_{ii}^l+\bar F_{ii}}{\bar a_i}-\frac{c_p\sum\limits_{l=1}^m\bar G_{ii}^l}{\sqrt{2\bar a_i}}, i=1,\ldots,n,$$

$$c_{ij}=-\frac{A_i\bar F_{ij}\tau_i+c_pA_i\sqrt{\tau_i}\sum\limits_{i=1}^m\bar G_{ij}^l+\bar F_{ij}}{\bar a_i}-\frac{c_p\sum\limits_{l=1}^m\bar G_{ij}^l}{\sqrt{2\bar a_i}}, i,j=1,\ldots,n, i\neq j.$$

Теорема. *Если матрица C является $\mathcal{M}$-матрицей, то система* (3.1) *глобально экспоненциально $2p$-устойчива.*

3.3 Следствия основного результата

Отдельно рассмотрим случай, когда система дифференциальных уравнений Ито (3.1) содержит только внедиагональные нелинейности, т.е. имеет вид

$$\begin{gathered}dx_i(t)=\left[-a_i(t)x_i(h_i(t))+\sum_{j=1,i\neq j}^n F_{ij}(t,x_j(h_{ij}(t)))\right]dt+\\ \sum_{l=1}^m\left[\sum_{j=1,i\neq j}^n G_{ij}^l(t,x_j(h_{ij}^l(t)))\right]d\mathcal{B}_l(t)\,(t\geq 0), i=1,\ldots,n.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Пусть C — $n\times n$–матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii}=1-\frac{A_i^2\tau_i^2}{\bar a_i}, i=1,\ldots,n,$$

$$c_{ij}=-\frac{A_i\bar F_{ij}\tau_i+c_pA_i\sqrt{\tau_i}\sum\limits_{i=1}^m\bar G_{ij}^l+\bar F_{ij}}{\bar a_i}-\frac{c_p\sum\limits_{l=1}^m\bar G_{ij}^l}{\sqrt{2\bar a_i}}, i,j=1,\ldots,n, i\neq j.$$

Тогда из теоремы получим

Следствие 3.1. *Если матрица C является $\mathcal{M}$-матрицей, то система* (3.7) *глобально экспоненциально $2p$-устойчива.*

Пусть теперь в линейной части системы (3.1) отсутствуют запаздывания, $h_i(t) = t$ при $i = 1,...,n$, т.е. имеет вид

$$
\begin{gathered}
dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(t,x_j(h_{ij}(t)))\right] dt+ \\
\sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^l(t,x_j(h_{ij}^l(t)))\right] d\mathcal{B}_l(t)\, (t \geq 0), i = 1,...,n.
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

Пусть C — $n \times n$-матрица, элементы которой определены следующим образом

$$
c_{ii} = 1 - \frac{\bar{F}_{ii}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ii}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i = 1,...,n, c_{ij} = -\frac{\bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i,j = 1,...,n, i \neq j.
$$

Тогда из теоремы получим

Следствие 3.2. *Если матрица C является $\mathcal{M}$-матрицей, то система* (3.8) *глобально экспоненциально $2p$-устойчива.*

Пусть система (3.1) линейная система, т.е. имеет вид

$$
\begin{gathered}
dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(h_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(t)x_j(h_{ij}(t))\right] dt+ \\
\sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^l(t)x_j(h_{ij}^l(t))\right] d\mathcal{B}_l(t)\, (t \geq 0), i = 1,...,n,
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

где дополнительно F_{ij} — измеримая по Лебегу функция, заданная на $[0,\infty)$ такая, что $|F_{ij}(t)| \leqslant \bar{F}_{ij}$ $(t \in [0,\infty))$ μ-почти всюду для некоторого положительного числа $\bar{F}_{ij}$ при $i,j = 1,...,n$ и G_{ij}^l — измеримая по Лебегу функция, заданная на $[0,\infty)$ такая, что $|G_{ij}^l(t)| \leqslant \bar{G}_{ij}^l$ $(t \in [0,\infty))$ μ–почти всюду для некоторого положительного числа $\bar{G}_{ij}^l$ при $l = 1,...,m$, $i,j = 1,...,n$. Пусть C — $n \times n$–матрица, элементы которой определены следующим образом

$$
c_{ii} = 1 - \frac{A_i^2\tau_i^2 + A_i\bar{F}_{ii}\tau_i + c_pA_i\sqrt{\tau_i}\sum\limits_{i=1}^{m}\bar{G}_{ii}^l + \bar{F}_{ii}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ii}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i = 1,...,n,
$$

$$
c_{ij} = -\frac{A_i\bar{F}_{ij}\tau_i + c_pA_i\sqrt{\tau_i}\sum\limits_{i=1}^{m}\bar{G}_{ij}^l + \bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i,j = 1,...,n, i \neq j.
$$

Тогда из теоремы получим

Следствие 3.3. *Если матрица C является $\mathcal{M}$-матрицей, то система* (3.9) *глобально экспоненциально $2p$-устойчива.*

Пусть система (3.9) имеет вид

$$
\begin{gathered}
dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(h_i(t)) + \sum_{j=1, i\neq j}^{n} F_{ij}(t)x_j(h_{ij}(t))\right] dt+ \\
\sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1, i\neq j}^{n} G_{ij}^l(t)x_j(h_{ij}^l(t))\right] d\mathcal{B}_l(t)\, (t \geq 0), i = 1,...,n.
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

Пусть C — $n \times n$-матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii} = 1 - \frac{A_i^2 \tau_i^2}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ii}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i = 1,...,n,$$

$$c_{ij} = -\frac{A_i \bar{F}_{ij} \tau_i + c_p A_i \sqrt{\tau_i} \sum\limits_{i=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l + \bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i,j = 1,...,n, i \neq j.$$

Тогда из следствия 3.3 получим

Следствие 3.4. *Если матрица C является $\mathcal{M}$-матрицей, то система* (3.10)*) глобально экспоненциально $2p$-устойчива.*

Пусть система (3.9) имеет вид

$$\begin{gathered} dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(t)x_j(h_{ij}(t)) \right] dt + \\ \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^l(t)x_j(h_{ij}^l(t)) \right] d\mathcal{B}_l(t)\, (t \geq 0), i = 1,...,n. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Пусть C — $n \times n$-матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii} = 1 - \frac{\bar{F}_{ii}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ii}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i = 1,...,n, c_{ij} = -\frac{\bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i,j = 1,...,n, i \neq j.$$

Тогда из следствия 3.3 получим

Следствие 3.5. *Если матрица C является $\mathcal{M}$-матрицей, то система* (3.11) *глобально экспоненциально $2p$-устойчива.*

Пусть система (3.9) имеет вид

$$\begin{gathered} dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1, i\neq j}^{n} F_{ij}(t)x_j(h_{ij}(t)) \right] dt + \\ \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1, i \neq j}^{n} G_{ij}^l(t)x_j(h_{ij}^l(t)) \right] d\mathcal{B}_l(t)\, (t \geq 0), i = 1,...,n. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Пусть C — $n \times n$-матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii} = 1, i = 1,...,n, c_{ij} = -\frac{\bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i,j = 1,...,n, i \neq j.$$

Тогда из следствия 3.3 получим

Следствие 3.6. *Если матрица C является $\mathcal{M}$-матрицей, то система* (3.12) *глобально экспоненциально $2p$-устойчива.*

Следствие 3.7. *Пусть в системе* (3.1) $n = 2$ *и выполнены неравенства*

$$\sqrt{2}(A_1^2\tau_1^2 + A_1\bar{F}_{11}\tau_1 + c_pA_1\sqrt{\tau_1}\sum_{i=1}^{m}\bar{G}_{11}^l + \bar{F}_{11}) + \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{11}^l < \sqrt{2}\bar{a}_1,$$

$$\begin{gathered}(\sqrt{2}\bar{a}_1 - \sqrt{2}(A_1^2\tau_1^2 + A_1\bar{F}_{11}\tau_1 + c_pA_1\sqrt{\tau_1}\sum_{i=1}^{m}\bar{G}_{11}^l + \bar{F}_{11}) - \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{11}^l)\times\\ (\sqrt{2}\bar{a}_2 - \sqrt{2}(A_2^2\tau_2^2 + A_2\bar{F}_{22}\tau_2 + c_pA_2\sqrt{\tau_2}\sum_{i=1}^{m}\bar{G}_{22}^l + \bar{F}_{22}) - \sqrt{\bar{a}_2}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{22}^l) >\\ (\sqrt{2}(A_1\bar{F}_{12}\tau_1 + c_pA_1\sqrt{\tau_1}\sum_{i=1}^{m}\bar{G}_{12}^l + \bar{F}_{12}) + \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{12}^l)\\ (\sqrt{2}(A_2\bar{F}_{21}\tau_2 + c_pA_2\sqrt{\tau_2}\sum_{i=1}^{m}\bar{G}_{21}^l + \bar{F}_{21}) + \sqrt{\bar{a}_2}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{21}^l).\end{gathered}$$

Тогда система (3.1) *глобально экспоненциально* $2p$*-устойчива.*

Из следствий 3.5 и 3.7 получим

Следствие 3.8. *Пусть в системе (18)* $n = 2$ *и выполнены неравенства*

$$\sqrt{2}\bar{F}_{11} + \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{11}^l < \sqrt{2}\bar{a}_1,$$

$$\begin{gathered}(\sqrt{2}\bar{a}_1 - \sqrt{2}\bar{F}_{11} - \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{11}^l)(\sqrt{2}\bar{a}_2 - \sqrt{2}\bar{F}_{22} - \sqrt{\bar{a}_2}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{22}^l) >\\ (\sqrt{2}\bar{F}_{12} + \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{12}^l)(\sqrt{2}F_{21} + \sqrt{\bar{a}_2}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{21}^l).\end{gathered}$$

Тогда система (3.11) *глобально экспоненциально* $2p$*-устойчива.*

Из следствий 3.6 и 3.8 получим

Следствие 3.9. *Пусть в системе* (3.12) $n = 2$ *и выполнены условия*

$$(\sqrt{2}\bar{F}_{12} + \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{12}^l)(\sqrt{2}F_{21} + \sqrt{\bar{a}_2}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{21}^l) < 2\bar{a}_1\bar{a}_2.$$

Тогда система (3.12) *глобально экспоненциально* $2p$*-устойчива.*

3.4 Пример

В качестве примера рассмотрим система двух уравнений следующего вида

$$\begin{gathered}dx_1(t) = [-a_1x_1(t-h_1) + a_{11}F_{11}(x_1(t-h_{11})) + a_{12}F_{12}(x_2(t-h_{12}))]\,dt+\\ [b_{11}G_{11}(x_1(t-\tau_{11})) + b_{12}G_{12}(x_2(t-\tau_{12}))]\,d\mathcal{B}(t)\,(t \geq 0),\\ dx_2(t) = [-a_2x_1(t-h_2)) + a_{21}F_{21}(x_1(t-h_{21})) + a_{22}F_{22}(x_2(t-h_{22}))]\,dt+\\ [b_{21}G_{21}(x_1(t-\tau_{21})) + b_{22}G_{22}(x_2(t-\tau_{22}))]\,d\mathcal{B}(t)\,(t \geq 0),\end{gathered} \tag{3.13}$$

где $a_1, a_2, h_{ij}, \tau_{ij}, a_{ij}, b_{ij}, i, j = 1{,}2$ — некоторые положительные числа, $F_{ij}, G_{ij}, i, j = 1, 2$ — непрерывные скалярные функция на $(-\infty, +\infty)$ такие, что $|F_{ij}(u)| \leqslant |u|, |G_{ij}(u)| \leqslant |u|, i, j = 1, 2$, $\mathcal{B}$

— стандартный винеровский процесс. Из следствия 3.7 получим, что, если для системы (3.13) выполнены неравенства

$$\sqrt{2}(a_1^2h_1^2 + a_1a_{11}h_1 + c_pa_1\sqrt{h_1}b_{11} + a_{11}) + \sqrt{a_1}c_pb_{11} < \sqrt{2}a_1,$$

$$(\sqrt{2}a_1 - \sqrt{2}(a_1^2h_1^2 + a_1a_{11}h_1 + c_pa_1\sqrt{h_1}b_{11} + a_{11}) - \sqrt{a_1}c_pb_{11})\times$$
$$(\sqrt{2}a_2 - \sqrt{2}(a_2^2h_2^2 + a_2a_{22}h_2 + c_pa_2\sqrt{h_2}b_{22} + a_{22}) - \sqrt{a_2}c_pb_{22}) >$$
$$(\sqrt{2}(a_1a_{12}h_1 + c_pa_1\sqrt{h_1}b_{12} + a_{12}) + \sqrt{a_1}c_pb_{12})(\sqrt{2}(a_2a_{21}h_2 + c_pa_2\sqrt{h_2}b_{21} + a_{21}) + \sqrt{a_2}c_pb_{21}),$$

то она глобально экспоненциально $2p$-устойчива. Пусть в системе (3.13) $a_{ii}, b_{ii}, i = 1{,}2/$, тогда, если для нее выполнены неравенства

$$a_1h_1^2 < 1,$$

$$(\sqrt{2}a_1 - \sqrt{2}a_1^2h_1^2)(\sqrt{2}a_2 - \sqrt{2}a_2^2h_2^2) >$$
$$(\sqrt{2}(a_1a_{12}h_1 + c_pa_1\sqrt{h_1}b_{12} + a_{12}) + \sqrt{a_1}c_pb_{12})(\sqrt{2}(a_2a_{21}h_2 + c_pa_2\sqrt{h_2}b_{21} + a_{21}) + \sqrt{a_2}c_pb_{21}),$$

то она глобально экспоненциально $2p$-устойчива.

4 Существование и единственность положительного решения задачи Дирихле в шаре для нелинейного эллиптического уравнения с $p-$ лапласианом

4.1 Предварительные сведения

Рассмотрим в шаре $S = \{x \in R^n : |x| \ < 1\}$ с границей Γ задачу Дирихле

$$\Delta_p u + a(|x|)|u|^q = 0,\ x \in S, \tag{4.1}$$

$$u_\Gamma = 0, \tag{4.2}$$

где $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), 1 < p \leq 2, q > 1$ – константы, $a(t)-$ непрерывная неотрицательная при $t \geqslant 0$ функция.

Под положительным решением задачи (4.1),(4.2) понимается ее решение из класса $C^2(\overline{S})$ положительное в S и удовлетворяющее граничному условию (4.2).

В настоящее время имеется много работ российских и зарубежных математиков, посвященных положительным решениям задач вида (4.1),(4.2) (см., например [25–33]). Существование и единственность положительного радиально-симметричного (п.р-с.) решения задачи (4.1),(4.2) при $p = n = 2$ доказано в работе [31] в случае $a(|x|) = |x|^m$ и $q > 1$, где $m \geqslant 0$. В этом же случае для $n \geqslant 3, p = 2$ в работе [32] существование и единственность п.р-с. решения задачи (4.1),(4.2) доказано при условии $q \leqslant \frac{m+n}{n-2}$. А в работе [33] для $n \geqslant 2, 1 < p \leqslant 2$ – при условии $1 < q \leqslant \frac{(p-1)(m+n)}{n-p}$.

4.2 Достаточные условия существования

Предположим, что $1 < p \leqslant 2$ и функция $a(r)$ непрерывна при $r \in [0,1]$ и удовлетворяет условию

$$c_0 r^m \leqslant a(r) \leqslant c_1, \tag{4.3}$$

где c_0, c_1- положительные постоянные. Доказана

Теорема 4.1. *Если $1 < p \leqslant 2$ при $n \geqslant 3$ и $1 < p < 2$ при $n = 2$, функция $a(r)$ удовлетворяет условию (3) и число q удовлетворяет условию*

$$1 < q < \frac{(p-1)(m+n)}{n-p}, \tag{4.4}$$

то задача Дирихле (4.1),(4.2) *имеет единственное положительное радиально-симметричное решение.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующие две леммы.

Лемма 4.1. *Если $1 < p \leqslant 2$ при $n \geqslant 3$ и $1 < p < 2$ при $n = 2$, выполняются условия (3) и (4), то при любом $A > 0$ существует единственное положительное число $r_0 = r_0(A)$ такое, что существует единственное решение $v(r)$ задачи Коши*

$$(p-1)v'' + \frac{n-1}{r}v' = -A^{q+1-p}a(r)|v|^q|v'|^{p-2}, \tag{4.5}$$

$$v(0) = 1, v'(0) = 0. \tag{4.6}$$

такое, что $v(r_0) = 0, v(r) > 0$ при $r \in [0, r_0)$ и $v \in C^2[0, r_0]$.

С помощью замены

$$t = r^{\frac{p-n}{p-1}}$$

задача (4.5), (4.6) приводится к виду

$$w''(t) = -\frac{(p-1)^{p-1}}{(n-p)^p}A^{q+1-p}t^{-\frac{p(n-1)}{n-p}}a(t^{\frac{p-1}{p-n}})|w|^q|w'|^{2-p}, \tag{4.7}$$

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = 1, \lim_{t\to\infty} w'(t) = 0, \tag{4.8}$$

где $w(t) = v(r^{\frac{p-n}{p-1}})$.

При доказательстве леммы 4.1 показано, что каждому значению $A > 0$ соответствует единственное значение $t_0 > 0$ такое, что $w(t_0) = 0$, где $w(t)-$ решение задачи Коши (4.7), (4.8), т.е. определена функция $t_0 = t_0(A)$.

Лемма 4.2. *Предположим, что выполняется неравенство* (4.4) *и p удовлетворяет условию*

$$1 < p \leqslant 2.$$

Тогда функция $t_0 = t_0(A)$ непрерывна и возрастает при $A > 0$ и

$$\lim_{A\to\infty} t_0(A) = \infty, \quad \lim_{A\to 0} t_0(A) = 0.$$

5 Двухточечная краевая задача нелинейного дифференциального уравнения с дробными производными, имеющего экспоненциальный рост по решению

5.1 Предварительные сведения

В последние десятилетия вышло много публикаций, посвященных дифференциальным уравнениям с дробными производными. Часть данных публикаций посвящена краевым задачам для таких уравнений (см., например, [34–43]). В [39] доказано существование и единственность положительного решения краевой задачи

$$D_{0+}^{\alpha}u(t) + f(t,u(t)) = 0, 0 < t < 1, \tag{5.1}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{5.2}$$

в случае $f(t,u)$ имеет степенной рост по u, а также предложен численный метод его построения. В [33] $5/4 \leqslant \alpha \leqslant 2-$ порядок дробного дифференцирования. Производная понимается в смысле Римана-Лиувилля.

Следуя [34], введем обозначения

$$M(\alpha) = \left(\int_0^1 G(\alpha,s,s)ds\right)^{-1}, N(\alpha) = \left(\int_{1/4}^{3/4} \gamma(\alpha,s)G(\alpha,s,s)ds)\right)^{-1},$$

$$\gamma(\alpha,s) = \begin{cases} \frac{\left[\frac{3}{4}(1-s)\right]^{\alpha-1} - \left(\frac{3}{4}-s\right)^{\alpha-1}}{[s(1-s)]^{\alpha-1}}, s \in (0,r] \\ \frac{1}{(4s)^{\alpha-1}}, s \in [r,1), \end{cases}$$

где $1/4 < r < 3/4-$ единственное решение уравнения

$$\left[\frac{3}{4}(1-s)\right]^{\alpha-1} - \left(\frac{3}{4}-s\right)^{\alpha-1} = \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{4^{\alpha-1}}.$$

Здесь $G(\alpha,t,s)-$ функция Грина, которая имеет вид [34]

$$G(\alpha,t,s) = \begin{cases} \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Справедлива

Теорема А. *Пусть $f(t,u)$ непрерывна на $[0,1] \times [0,\infty)$. Предполагаем, что существуют две положительные константы $r_2 > r_1 > 0$ такие, что*

$$f(t,u) \leqslant M(\alpha)r_2 \text{для всех} (t,u) \in [0,1] \times [0,r_2],$$

$$f(t,u) \geqslant N(\alpha)r_2 \text{для всех} (t,u) \in [0,1] \times [0,r_1],$$

Тогда задача (5.1), (5.2) имеет не менее одного положительного решения и такого, что $r_1 \leqslant \|u\| \leqslant r_2$.

5.2 Существование положительного решения

Предположим, что функция $f(t,u)$ непрерывна при $t \in [0,1]$ и $u \in R$ и удовлетворяет условию

$$b_0 \leqslant f(t,u) \leqslant A\exp(\lambda u) + b(t), b_0 \leqslant b(t) \leqslant B, \tag{5.3}$$

где B,b_0, A,λ- положительные константы.

Доказана

Теорема 5.1. *Если функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию* (5.3)*, в котором A,B и λ удовлетворяют неравенствам*

$$1.46 > A\lambda\exp(1), \tag{5.4}$$

$$\exp\left(\frac{\lambda B}{1.46}\right) \leqslant \frac{1.46}{A\lambda\exp(1)} \tag{5.5}$$

то задача (5.1), (5.2) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

5.3 Единственность и численный метод построения положительного решения краевой задачи

Применяя принцип неподвижной точки, доказана теорема о единственности положительного решения и разработан численный метод построения этого решения.

Справедлива

Теорема 5.2. *Предположим, что выполняются условия* (5.3)–(5.5)*, $\lambda \leqslant 0.73$ и существует положительное число P_0 такое, что*

$$\frac{1}{2} \leqslant P_0 \leqslant \frac{M(\alpha)}{2A\lambda},$$

функция $f(t,u)$ дифференцируема по $u \in R$ и удовлетворяет условию

$$0 \leqslant f'_u(t,u) \leqslant P_0 A\lambda\exp(\lambda u)$$

Тогда граничная задача (5.1), (5.2) *имеет единственное положительное решение и к нему сходится итерационный процесс*

$$u_{k+1}(t) = \int_0^1 G(\alpha,t,s)f(s,u_k(s))ds, r = 0,1,cdots$$

с оценкой погрешности

$$\|u - u_k\| \leqslant 0.5^{k-1}\|u_1 - u_0\|.$$

6 Восстановление векторного поля по данным его поперечного лучевого преобразования в ограниченном угловом диапазоне на плоскости

6.1 Интегральная формула обращения

Символом $S_{m,k}$ обозначим класс функций, имеющих непрерывные частные производные до k-го порядка, причем сами функции и все их частные производные до k-го порядка убывают на бесконечности со скоростью $O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$ Будем говорить, что векторное поле $f = (f_1, f_2)$ принадлежит классу $S_{m,k}$, если координатные функции $f_1, f_2 \in S_{m,k}$.

Посредством символов $d\varphi, \delta\varphi$ обозначим соответственно градиент и дивергенцию поля f. Операторы ортогонального градиента $d^\perp$ и ортогональной дивергенции $\delta^\perp$ определим формулами

$$d^\perp\varphi = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right), \delta^\perp\varphi = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

Лемма 6.1. *Преобразование $P^\perp$ поля $f = (f_1, f_2)$ на плоскости связано с двумерным преобразованием Радона $R(\delta f)(\xi,s) = \int\limits_{x\cdot\xi=s} (\delta f)(x)dx$ функции δf соотношением*

$$R(\delta f)(\xi,s) = \frac{\partial}{\partial s}P^\perp f(\xi,s).$$

Через $g(\xi,\sigma)$ обозначим преобразование Фурье функции $P^\perp f(\xi,s)$ по переменной s.

Теорема 6.1. *Пусть носитель поля $f \in S_{2,1}$ лежит в полосе $|x_1| \geqslant r$, функция $P^\perp f(\xi, s)$ задана на множестве $\mathbb{S}^1_I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, где $I = (-\alpha_0, \alpha_0), 0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, $\mathbb{S}^1_I = \{\xi = (\cos\alpha, \sin\alpha), \alpha \in I\}$. Тогда преобразование Фурье $\tilde{\delta f}$ функции δf восстанавливается по формуле*

$$\tilde{\delta f}(y_1, y_2) = i\exp\left(r\sqrt{K^2y_2^2 - y_1^2}\right)\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{-K|y_2|}\dots - \int\limits_{K|y_2|}^{\infty}\frac{\sin r\sqrt{z^2 - K^2y_2^2}}{\pi(z - y_1)}\sigma g(\xi,\sigma)dz\right),$$

где под первым интегралом многоточие заменяют функцию $\frac{\sin r\sqrt{z^2-K^2y_2^2}}{\pi(z-y_1)}\sigma g(\xi,\sigma)$, $K = \operatorname{ctg}\alpha_0, \sigma = \sqrt{z^2 + y_2^2}$, у квадратного корня выбрана ветвь, у которой $Re\sqrt{K^2y_2^2 - y_1^2} > 0$.

Для решения задачи восстановления потенциальной части неизвестного поля достаточно к функции $\tilde{\delta f}(y_1, y_2)$ применить обратное двумерное преобразование Фурье.

6.2 Интерполяция по дискретному множеству значений

Следующая формула обращения основана на интерполяционной формуле, обобщающей формулу Котельникова.

Теорема 6.2. *Пусть носитель поля $f \in S_{1,2}$ лежит в круге $\{x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2\}$, функция $P^\perp f(\xi,s)$ задана на множестве $\mathbb{S}^1_I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, где $I = (-\alpha_0, \alpha_0), 0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, $\mathbb{S}^1_I = \{\xi = (\cos\alpha, \sin\alpha), \alpha \in$*

$I\}$. Тогда для преобразований Фурье координатных функций u_1 и u_2 потенциальной части поля f справедливы формулы

$$\tilde{u_1}(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi r}\operatorname{ch}\left(2\pi r\sqrt{b^2-y_1^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cos\alpha_k\cdot\frac{\rho_k}{\sigma_k}\left(\frac{g(\xi_k,\sigma_k)}{y_1-\rho_k}-\frac{g(\xi_k',\sigma_k)}{y_1+\rho_k}\right),$$

$$\tilde{u_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi r}\operatorname{ch}\left(2\pi r\sqrt{b^2-y_1^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cos\alpha_k\cdot\frac{y_2}{\sigma_k}\left(\frac{g(\xi_k,\sigma_k)}{y_1-\rho_k}-\frac{g(\xi_k',\sigma_k)}{y_1+\rho_k}\right),$$

где $b=\sqrt{\rho^2-\left(\frac{1}{4r}\right)^2}$, $\alpha_k=\arg(\rho_k+ib)$, $\rho=K|y_2|$, $K=\operatorname{ctg}\alpha_0$, $\rho_k=\sqrt{\rho^2+\frac{k(k+1)}{4r^2}}$, $\sigma_k=\sqrt{\rho_k^2+y_2^2}$, $\xi_k=\left(\frac{\rho_k}{\sigma_k},\frac{y_2}{\sigma_k}\right)$, $\xi_k'=\left(-\frac{\rho_k}{\sigma_k},\frac{y_2}{\sigma_k}\right)$.

7 Восстановление функции по ее интегралам вдоль ломаных одного семейства на плоскости

7.1 Основная формула

Введем дифференциальный оператор $\partial_\omega = \langle \omega, \nabla_x \rangle h = \omega_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + \omega_2 \frac{\partial h}{\partial x_2}$. Если ω – единичный вектор, то ∂_ω – производная скалярного поля h по направлению вектора ω: $\partial_\omega h = \frac{\partial h}{\partial \omega}$. Рассмотрим интегральное преобразование вида

$$h_n(x,\omega) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda t} t^n f(x + t\omega) dt.$$

Справедлива следующая

Лемма 7.1. *Для любого натурального n справедлива формула*

$$\partial_\omega^n h_{n-1}(x,\omega) = (-1)^n (n-1)! f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j \lambda^{n-j} \partial_\omega^j h_{n-1(x,\omega)}, \tag{7.1}$$

где $C_n^j = \frac{n!}{j! \cdot (n-j)!}$ –биномиальные коэффициенты.

Формула (7.1) позволяет написать явную формулу для вычисления $f(x)$ в компактной форме:

$$f(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} (\partial_\omega + \lambda)^{n+1} h_n(x,\omega).$$

Теорема 7.1. *Пусть интегралы* (0.4) *с весовой функцией* (0.5) *и фиксированным вектором ω $(\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0)$ известны всюду в $\mathbb{R}^2$. Тогда задача восстановления функции $f(x)$ однозначно разрешима в классе $C_0^{n_1+n_2+1}(\mathbb{R}^2)$ финитных $n_1 + n_2 + 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций, причем справедлива формула обращения*

$$f(x) = -\frac{1}{\omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2}} (\partial_\omega + \lambda)^{n_1+n_2+1} g_\rho(x;\omega), \tag{7.2}$$

где $\lambda = -\langle a, \omega \rangle$, а $(\partial_\omega + \lambda)^k$ – k-я степень дифференциального оператора $(\partial_\omega + \lambda)h = \partial_\omega h + \lambda h$.

Вернемся к преобразованию (0.2) с весовой функцией (0.5). Для компактности записей введем обозначения: $n = n_1 + n_2$, $\omega^n = \omega_1^{n_1} \cdot \omega_2^{n_2}$. Подействуем на обе части формулы (0.2) оператором $-\frac{1}{\omega^n n!} (\partial_\omega + \lambda)^{n+1}$ и воспользуемся формулой (7.2):

$$-\frac{1}{\omega^n n!} (\partial_\omega + \lambda)^{n+1} g_\rho(x,\omega,\theta) = f(x) + \frac{1}{\omega^n n!} (\partial_\omega + \lambda)^{n+1} \int\limits_{\Gamma_\theta(x)} \rho(x,\xi) f(\xi) d\xi.$$

К обеим частям полученного равенства подействуем оператором $-\frac{1}{\omega^n n!} (\partial_\theta + \mu)^{n+1}$, где $\mu = -\langle a, \theta \rangle$, и снова воспользуемся формулой (7.2):

$$\left[\frac{1}{\omega^n} (\partial_\omega + \lambda)^{n+1} - \frac{1}{\theta^n} (\partial_\theta + \mu)^{n+1} \right] f(x) = \frac{1}{\omega^n \theta^n n!} \left[(\partial_\theta + \mu)(\partial_\omega + \lambda) \right]^{n+1} g_\rho(x;\omega,\theta). \tag{7.3}$$

7.2 Теорема единственности

Рассмотрим круг $S_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant R\}$ и весовую функцию (0.5) с $\lambda = 0$:

$$\rho(x,\xi) = (x_1 - \xi_1)_1^n (x_2 - \xi_2)_2^n. \tag{7.4}$$

Теорема 7.2. *Пусть интегралы* (0.2) *с весовой функцией* (7.4) *и фиксированными векторами* ω, θ ($\omega_i \neq 0, \theta_i \neq 0, i = 1{,}2$) *известны всюду в* $\mathbb{R}^2$. *Тогда задача восстановления функции* $f(x)$ *однозначно разрешима в классе* $C_0^{n_1+n_2+1}(S_R)$ *финитных* $n_1 + n_2 + 1$ *раз непрерывно дифференцируемых функций.*

Пример 7.1. *Пусть* $\rho(x,\xi) = 1$ *и, стало быть,* $n = 0, \lambda = 0$. *Формула* (7.3) *имеет вид*

$$\partial_{\omega-\theta} f(x) = \partial_{\omega\theta} g(x;\omega,\theta), \tag{7.5}$$

где $\partial_{\omega\theta} = \partial_\omega \partial_\theta$. Положив $\tau = \omega - \theta$, $h(x) = \partial_{\omega\theta} g_\rho(x;\omega,\theta)$, запишем уравнение (7.5) в виде

$$\partial_\tau f(x) = h(x). \tag{7.6}$$

Общее решение этого уравнения, как легко проверить, дается формулой

$$f(x_1, x_2) = -\int\limits_0^{t_0} h(x_1 + \tau_1 t, x_2 + \tau_2 t)dt + F(-\tau_2 x_1 + \tau_1 x_2), \tag{7.7}$$

где $t_0 > 0$ – такое число, что $|x + \tau t_0| \geqslant R$ для всех $x \in S_R$, а F – произвольная функция одной переменной. Значения функции F постоянны на любой прямой, параллельной вектору τ. Такие функции называют плоскими волнами или ридж-функциями. Если ридж-функция равна нулю на какой-либо прямой, перпендикулярной вектору τ, то она тождественно равна нулю.

Рассмотрим значения обеих частей формулы (7.7) в точках прямой $l : x = \chi\tau + \mu\tau^\perp, |\chi| \geqslant R + t_0, \mu \in \mathbb{R}$, перпендикулярной τ (χ фиксировано). Поскольку $|\chi\tau + \mu\tau^\perp| \geqslant R$ и $|(\chi + t)\tau + \mu\tau^\perp| \geqslant R$ для всех $t \in [0,t_0]$, то $f(\chi\tau + \mu\tau^\perp) = 0$ и $h((\chi + t)\tau + \mu\tau^\perp) = 0$, поэтому функция F тождественно равна нулю.

Таким образом, уравнение (7.5) имеет единственное решение и дается оно формулой

$$f(x) = -\int\limits_0^{t_0} \partial_{\omega\theta} g(x + (\omega - \theta)t;\omega,\theta)dt.$$

В частности, если $\omega = (1{,}1)$, $\theta = (1, -1)$, то получим

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) \int\limits_0^{t_0} g(x_1, x_2 + 2t)dt,$$

т. е. с точностью до обозначений формулу (0.3).

Заключение

В 2017 году в Отделе математики и информатики Дагестанского научного центра РАН проведены научно-исследовательские работы по теме «Асимптотические методы усреднения недивергентных дифференциальных операторов. Исследование вопросов моментной устойчивости и устойчивости по части переменных для дифференциальных уравнений Ито с импульсными воздействиями и разностных уравнений Ито. Исследование вопросов существования и единственности решений краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений с $p-$ и $p(x)$-лапласианом. Лучевое преобразование векторных и тензорных полей и некоторые его обобщения».

В отчетном году получены оценки усреднения и операторные оценки усреднения для обобщенных уравнений Бельтрами. Эти уравнения являются недивергентными, поэтому полученные операторные оценки усреднения отличаются от оценок для дивергентных операторов. Применены асимптотические методы.

Были исследованы вопросы глобальной экспоненциональной p-устойчивости ($2 \leq p < \infty$) систем линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями специального вида, используя теорию положительно обратимых матриц. Кроме того, были исследованы вопросы асимптотической p-устойчивости ($2 \leq p < \infty$) тривиального решения относительно начальных данных для линейной однородной импульсной системы дифференциальных уравнений Ито с линейными запаздываниями методом вспомогательных или модельных уравнений. Получены достаточные условия устойчивости в терминах параметров исследуемых систем. Результаты исследований опубликованы в работах [21–24].

Изучены вопросы единственности положительного решения задачи Дирихле для уравнения (4.1) при $n \geqslant 2$. Результаты относительно единственности положительного радиально-симметричного решения, полученные в [31–33] в случае $a(|x|) = |x|^m, m \geqslant 0$, обобщены на более общий случай $a(|x|)$.

Получены достаточные условия существования и единственности положительного решения двухточечной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения с дробными производными и разработан численный метод его построения.

Были введены в рассмотрение два двухпараметрических семейства ломаных на плоскости. Решена задача восстановления функции по ее интегралам вдоль этих ломаных, когда весовая функция — квазимногочлен. Для частных случаев весовых функций получены формулы обращения. В общем случае доказана единственность решения поставленной задачи. Результаты применены к доказательству единственности задачи интегральной геометрии с возмущением.

Доказана единственность восстановления функции, суммируемой в полосе на плоскости, заданной своими интегралами вдоль дуг двухпараметрических кривых второго порядка с весом, аналитическим по части переменных.

Доказаны формулы для определения неизвестного векторного поля на плоскости, заданного своим поперечным лучевым преобразованием в ограниченном угловом диапазоне. В первой формуле используется интегральная формула интерполяции функции с ограниченным спектром. Восстанавливается преобразование Фурье дивергенции неизвестного поля. Во второй формуле интерполяция производится по дискретным значениям функции. Восстанавливаются координатные функции потенциальной части искомого поля. Векторное поле ищется в классе вектор-функций, сосредоточенных в некоторой полосе, достаточно быстро убывающих на бесконечности и име-ющих непрерывные вторые производные.

Список использованных источников

1 Сиражудинов М.М. Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Математический сборник. 2017. Т. 208, №4, С. 87–110.

2 Sirazhudinov M.M. An asymptotic method for homogenization for generalized Beltrami operators // SB MATH. 2017. Vol. 208. N 4. DOI:10.1070/SM8742

3 Сиражудинов М.М., Тихомирова С.В. О гельдеровости решений обобщенных уравнений Бельтрами // Дифференц. уравнения (статья находится в редакции журнала).

4 Сиражудинов М.М. Операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 7. С. 40-46.

5 Sirazhudinov M.M. An asymptotic method for homogenization for a generalized system of Beltrami operators // International Conference of Mathematical Physics Kezenoi-Am 2017

6 Сиражудинов М.М. Операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами// Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», Республика Таджикистан, Кургантюбе, 29-30 сентября 2017 г.

7 Сиражудинов М.М., Джамалудинова С.П. О G-компактности одного класса эллиптических операторов второго порядка// International Conference of Modern methods, problems and applications of operator theory and harmonic analysis, Rostov-on-Don, 23 - 28 April, 2017 г.

8 Сиражудинов М.М. О гельдеровости решений краевой задачи Римана-Гильберта для обобщенной системы Бельтрами с нормальными матрицами коэффициентов // Материалы XII международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». 2017. С.191

9 Сиражудинов М.М., Джамалудинова С.П. О G-компактности одного класса эллиптических систем второго порядка // Материалы XII международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». 2017. С. 192.

10 Сиражудинов М.М., Рамазанов Ш.Р. О гельдеровости решений одной задачи Римана – Гильберта для треугольных системы // Материалы XII международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». 2017. С. 193.

11 Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.

12 Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференционально-функциональных уравнений. Рига: Зинате, 1989.

13 Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. Chichester: Horwood Publishing ltd. 1997. 360 p.

14 Mohammed S.-E.F. Stochastic Functional Differential Equations With Memory. Theory, Examples and Applications // Proceeding of The Sixth on Stochastic Analysis. Geilo. Norway. 1996. Pp. 1–91.

15 Кадиев Р.И. К вопросу об устойчивости стохастических функционально-дифференциальных уравнений по первому приближению // Изв. Вузов. Математика. 1999. № 10. С. 3–8.

16 Кадиев Р.И. Устойчивость решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями по линейному приближению // Дифференц. уравнения. Минск. Т. 49, № 8. 2013. С. 963–970.

17 Berezansky L., Braverman E., Idels L. New global exponential stability criteria for nonlinear delay differential systems with applications to bam neural networks // Applied Mathematics and Computation. 2014. N 243. Pp. 899–910.

18 Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

19 A. Berman and R. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. New York-London. Academic Press, Computer Science and Applied Mathematics. 1979.

20 Кадиев Р.И. Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу //Изв. Вузов. Математика. 1995. № 10. С. 35–40.

21 Кадиев Р.И., Поносов А.В. Устойчивость относительно начальных данных по части переменных решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием // Дифференц. уравнения. Минск. 2017. Т. 53, № 1. С. 20–34.

22 Кадиев Р.И., Поносов А.В. Положительная обратимость матриц устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Дифференц. уравнения. Минск. 2017. Т. 53, № 5. С. 579–590.

23 Кадиев Р.И., Шахбанова З.И. Применение теории положительно обратимых матриц при исследовании устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений Ито // Вестник Дагестанского государственного университета. 2017. № 1. С. 30–36.

24 Кадиев Р.И., Поносов А.В. Использование теории положительно обратимых матриц при исследовании устойчивости решений линейных стохастических дифференциальных уравнений с последействием // Прикладная математика и вопросы управления. Пермь. 2017. № 2. С. 32–48.

25 Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Наука. 1962.

26 Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука. 1975.

27 Похожаев С.И. О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. // ДАН СССР. 1965. Том 165, № 1. С. 36–39.

28 Похожаев С.И. Об одной задаче Овсянникова // ПМТФ. 1989. № 2. С. 5–10.

29 Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlineare elliptic equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1982. Vol. 34. N 4. Pp. 525–598.

30 Kuo-Shung Cheng and Jenn-Tsann Lin. On the elliptic equations $\Delta u = K(x)u^\alpha$ and $\Delta u = K(x)\exp^{2u}$ // Transactions of American mathematical society. 1987. Vol 304. N 2. Pp. 633–668.

31 Абдурагимов Э.И. О положительном радиально-симметричном решении задачи Дирихле для одного нелинейного уравнения и численном методе его получения // Изв. вузов. Математика. 1997. № 5. С. 3–6.

32 Абдурагимов Э.И. О единственности положительного радиально-симетричного решения в шаре задачи Дирихле для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Изв. вузов. Математика. 2008. № 12. С. 3–6.

33 Абдурагимов Э.И. Единственность положительного решения задачи Дирихле в шаре для квазилинейного уравнения с p - лапласианом // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 3–11.

34 Zhanbing Bai, Haishen Li. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation // J. Math. Anal. Appl. 2005. Vol. 311. Pp. 495–505.

35 Changyou Wang, Ruifang Wang, Shu Wang and Chunde Yang. Positive solution of singular Boundary Value Problem for a nonlinear Fraction Differential Equation // Hindawi Publishing Corporation Boundary Value Problems, 2011. Pp. 1–12.

36 Zhang S. Existence of solution for a boundary value problem of fractional order. 2006, Vol. 26. N 2. Pp. 220–228.

37 Bai Z.B., Li H.S. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2005. Vol. 311. N 2. Pp. 495–505.

38 Абдурагимов Э.И., Омарова Р.А. Численный метод построения положительного решения двухточечной краевой задачи для одного дифференциального уравнения второго порядка с дробной производной // Вестник ДГУ. 2014. № 6. С. 40–46.

39 Абдурагимов Э.И., Омарова Р.А. Положительное решение граничной задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения с дробными производными // Вестник ДГУ. 2015. Т. 30, № 6. С. 90–104.

40 Бейбалаев В.Д. О численном решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона с производными дробного порядка // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. 2012. № 2. С. 183–187.

41 Алероев Т.С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными. Дисс. доктора физ.-мат. наук. МГУ. 2000.

42 Ahmed ANBER, Soumia BELARBI and Zoubir DAHMANI. New Existence and Uniqueness Results for Fractional Differential Equations // An. St. Univ. Ovidius Constanta, versita. 2013. Vol. 21(3). Pp. 33–41.

43 Youji Xu. Existence and Multiple of Positive Solution for Nonlinear Fractional Difference Equations with Parameter // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2015. N 3. Pp. 757–760.

44 Braun H., Hauk A. Tomographic reconstruction of vector fields // IEEE Trans. Signal Proc. 1991. Vol. 39, № 2. Pp. 464–471.

45 Деревцов Е.Ю. Вычислительные технологии решения задач рефракционной, векторной и тензорной томографии. Дисс. на соиск. уч. ст. докт. ф-м. н. Новосибирск. 2014. 357 с.

46 Бегматов А.Х. Задача интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве // СМЖ. 1996. Том 37. С. 851–857.

47 Truong T.T., Nguen M. K. On V-line Radon transform in $\mathbb{R}^2$ and thear inversion // J. Phis. A: Math. Theor. 2011. V. 44, №075206. 13 pp.

48 Бегматов А.Х., Пиримбетов А. О., Сейдуллаев А. К. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии с возмущениями на семействе ломаных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Том 15, вып. 1. С. 5–12.

49 Бегматов А.Х., Джайков Г. М. Линейная задача интегральной геометрии с гладкими весовыми функциями и возмущением // Владикавказский математический журнал. 2015. Том 17, вып. 3. С. 14–22.