ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ДАГЕСТАНСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК №
Регистрационный №
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Врио председателя ДНЦ РАН

___________ Муртазаев А.К.
«___»___________ 2019 г.

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПОЛИНОМАМИ, РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, СПЛАЙНАМИ И ВЕЙВЛЕТАМИ

(итоговый отчет за 2018 г.)

Руководитель НИР,
Врио зав. Отделом математики и информатики ДНЦ РАН, канд. физ.-мат. наук

____________ Шарапудинов Т.И.

г. Махачкала, 2019

Список исполнителей

Научный руководитель,
Зав. Отделом математики и информатики ДНЦ РАН, д.ф.-м.н.,
И.И. Шарапудинов ____________________

г.н.с. ОМИ, д.ф.-м.н,
Рамазанов А.-Р.К., ____________________

с.н.с. ОМИ, к.ф.-м.н,
Магомед-Касумов М.Г., ____________________

н.с. ОМИ,
Султанахмедов М.С., ____________________

н.с. ОМИ,
Шах-Эмиров Т.Н., ____________________

м.н.с. ОМИ,
Акниев Г.Г., ____________________

м.н.с. ОМИ,
Гаджимирзаев Р.М., ____________________

Нормоконтролер, н.с. ОМИ,
Султанахмедов М.С. ____________________

Реферат

Отчет содержит X с., X источников.

Ключевые слова: функциональные пространства Лебега и Соболева; весовые пространства с переменным показателем; теория приближений; полиномы Якоби; полиномы Мейкснера; специальные ряды по ортогональным полиномам; средние Валле Пуссена.

Объектом исследования являются частичные суммы специального ряда по ультрасферическим полиномам Якоби и их линейные средние, ряды Фурье и специальные ряды по полиномам Мейкснера, интерполяционные рациональные сплайн-функции, фрагментами которых служат трехточечные рациональные интерполянты, дискретные суммы Фурье для кусочно-гладких функций

Цель работы – исследовать аппроксимативные свойства частичных сумм специального ряда по ультрасферическим полиномам Якоби и их линейных средних, получить поточечную оценку для функции Лебега сумм Фурье-Мейкснера и специального ряда по полиномам Мейкснера, исследовать вопросы сохранения интерполяционными рациональными сплайн-функциями выпуклости и ковыпуклости с произвольной переменой направления выпуклости дискретных функций, определенных в узлах сплайн-функций, получить оценки отклонения дискретных сумм Фурье от 2π–периодической кусочно-гладкой функции.

В процессе работы использовались общие методы функционального анализа, конструктивной теории функций, а также методы теории ортогональных полиномов.

В результате исследования получены оценки для приближения дифференцируемых и аналитических функций частичными суммами специальных рядов по ультрасферическим полиномам Якоби со свойством прилипания в точках ± 1. Эти результаты являются новыми и носят окончательный характер. Исследовано поведение функции Лебега частичных сумм Фурье-Мейкснера. Этот результат является обобщением результатов других авторов на эту же тему. Получено решение открытой задачи о ковыпуклой сплайн-интерполяции с переменой направления выпуклости заданной функции в случае рациональных сплайн-функций. Исследованы аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье для кусочно-гладких функций и показано, что полученные оценки неулучшаемы по порядку.

Полученные результаты находят применение при описании физических и биологических явлений, при обработке изображений, в картографии, в некоторых вопросах теории приближений, при спектральном методе решения дифференциальных и разностных уравнений.

Интерполяционные рациональные сплайн-функции разной степени гладкости могут применяться при проектировании сложных кривых и поверхностей для сохранения геометрических свойств исходных данных, в частности, выпуклости или ковыпуклости, а их обобщение – эффективно использовано в численных методах при решении дифференциальных уравнений, вычислении интегралов.

Содержание

Введение 6
1 Равномерное приближение непрерывных функций средними Валле Пуссена специального ряда 8
1.1 Введение 8
1.2 Результаты 10
2 Аппроксимативные свойства операторов $\sigma_n^{\alpha,r}(f,x)$ в весовых пространствах Лебега с переменным показателем 12
3 Формосохраняющие свойства рациональных сплайн-функций класса C^1 16
3.1 Постановка задачи 16
3.2 Основные результаты 17
4 Выпуклая интерполяция рациональными сплайн-функциями класса C^2 18
4.1 Введение 18
4.2 Основной результат 19
5 Оценка функции Лебега сумм Фурье по модифицированным полиномам Мейкснера 20
5.1 Некоторые сведения о модифицированных полиномах Мейкснера 21
5.2 Полученные результаты 22
6 Приближение дискретных функций специальными рядами по модифицированным полиномам Мейкснера 23
6.1 Введение 23
6.2 Неравенство Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Мейкснера 23
7 Приближение 2π-периодических кусочно гладких функций дискретными суммами Фурье 26
7.1 Введение 26
7.2 Оценка $|R_{n,N}(f,x)|$ для $f \in C_\Omega^{0,1}$ 28
Заключение 33
Список использованных источников 35

Обозначения и сокращения

ДНЦ — Дагестанский научный центр

ОМИ — Отдел математики и информатики

РАН — Российская академия наук

Введение

Согласно плану научно-исследовательской работы за 2018 год исследования, проводимые в Отделе математики и информатики Дагестанского научного центра РАН, включают в себя работы по теме «Функциональные пространства с переменным показателем и их приложения. Некоторые вопросы теории приближений полиномами, рациональными функциями, сплайнами и вейвлетами».

Исследования, проводимые в рамках данной темы, направлены на решение ряда актуальных задач, возникающих в таких областях как обработка и сжатие временных рядов и изображений, приближённое решение начальных и краевых задач для дифференциальных и разностных уравнений, численное обращение преобразования Лапласа, идентификация линейных и нелинейных систем автоматического регулирования и управления и других. При этом во многих случаях существенным преимуществом было бы использование аппроксимирующих аппаратов, которые r-кратно совпадали бы с аппроксимируемой функцией в одной или нескольких точках. Как было показано в работах [1–3,42,77] таким свойством обладают так называемые специальные ряды по классическим ортогональным полиномам, в частности по ультрасферическим полиномам Якоби [1]. В отчетном году были исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм указанных специальных рядов и их линейных средних. Также исследованы вопросы равномерного приближения функций из пространства $C[-1,1]$ (теоремы 1.1, 1.2). В случае, когда функция задана на бесконечной равномерной сетке и принадлежит пространству $l^2_{\rho_N}$ получена оценка отклонения частичных сумм специального ряда по полиномам Мейкснера от исходной функции (теорема 6.1).

В 2018 г. в ОМИ продолжены исследования вопросов формосохраняющей интерполяции сплайн-функциями. Такого рода интерполяции сплайн-функциями является предметом исследования многих работ. В достаточно полной форме эти вопросы изучены для различных видов полиномиальных сплайнов. Д. Швайкерт [21] для выпуклой интерполяции кубическими сплайнами в их конструкцию ввел гиперболические функции. В.Г. Мирошниченко [22], [23] получил достаточные условия монотонной и выпуклой интерполяции кубическими сплайнами. Дальнейшие результаты и сведения об исследовании вопросов формосохранения при интерполяции полиномиальными сплайнами можно найти в работах [24–27].

Вопросы монотонной и выпуклой интерполяции рациональными сплайнами специального вида рассматривали Р. Шабак [28] и другие авторы (см., напр., [29–31]). Однако вопрос о достаточных условиях ковыпуклой интерполяции сплайн-функциями требует своего дальнейшего исследования. Для исследования вопросов сохранения ковыпуклости с произвольной переменой направления выпуклости данных эффективно можно применить интерполяционные сплайн-функции $R_{N,1}(x)$, построенные по дискретным данным с использованием трехточечных рациональных интерполянтов. В отчетном году получены достаточные условия выпуклой интерполяции дискретных данных рациональными сплайн-функциями $R_{N,2}(x, f, \Delta, g)$ класса $C^2[a,b]$ (теорема 4.1).

Также рассмотрены вопросы приближения функций тригонометрическими полиномами. А именно, исследованы аппроксимативные свойства тригонометрических полиномов, обладающих наименьшим квадратическим отклонением от функции в узлах равномерной сетки, при приближении некоторых классов 2π–периодических кусочно-гладких функций. Были получены как равномерные, так и локальные оценки отклонения данных полиномов как от непрерывных кусочно-гладких функций, так и обладающих разрывами первого рода. Доказано, что полученные результаты неулучшаемы по порядку.

Другим направлением исследований, проводившихся в отчетном году, были исследования вопросов приближения в весовых пространствах Лебега с переменным показателем. Пространства Лебега $L^{p(x)}(-1,1)$ с переменным показателем суммируемости $p(x)$ позволяют более точно описывать свойства функций, имеющих существенно переменное поведение. Как было показано в работе [4], если $p(x)$ измерима на $[-1,1]$ и $p(x) \geqslant 1$, то в пространстве $L^{p(x)}(-1,1)$, состоящем из функций, удовлетворяющих условию $\int_{-1}^{1} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$, можно ввести норму

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\{\alpha > 0 : \int_{-1}^{1} |f(x)/\alpha|^{p(x)} dx \leq 1\}.$$

Аналогично можно определить весовое пространство Лебега с переменным показателем $L^{p(x)}_{w(x)}(-1,1)$ и норму в нем [5–10], а именно

$$\|f\|_{p(\cdot),w} = \inf\{\alpha > 0 : \int_{-1}^{1} |f(x)/\alpha|^{p(x)} w(x) dx \leq 1\},$$

где $w(x)$ – неотрицательная суммируемая функция, т.е. вес.

Пусть $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям,

1) $p(x) > 1$ для $x \in [-1,1]$;
2) $|p(x) - p(y)| \ln \frac{2}{|x-y|} \leq d$ при $x,y \in [-1,1]$;
3) $p(x)$ принимает постоянные значения вблизи концов отрезка $[-1,1]$: $p(x) = p_1$ при $x \in [-1, -1+\delta_1]$ и $p(x) = p_2$ при $[1-\delta_2, 1]$, где δ_1 и δ_2 – сколь угодно малые положительные числа.

При выполнении этих условий получены взвешенные оценки отклонения функции от частичных сумм соответствующего ей специального ряда по ультрасферическим полиномам Якоби из весового пространства Лебега с переменным показателем (теоремы 2.5, 2.6).

1 Равномерное приближение непрерывных функций средними Валле Пуссена специального ряда

1.1 Введение

Обозначим через $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ полиномы Якоби, которые образуют ортонормированную систему на интервале $(-1,1)$ с весом $\kappa(x) = \kappa(x;\alpha,\beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, т.е. $\int_{-1}^1 \kappa(x)\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\hat{P}_m^{\alpha,\beta}(x)dx = \delta_{nm}$, где δ_{nm} – символ Кронекера. Для краткости ограничимся случаем $\alpha = \beta$ и положим $\kappa^\alpha(x) = \kappa(x;\alpha,\alpha)$, $\hat{P}_n^\alpha(x) = \hat{P}_n^{\alpha,\alpha}(x)$. Для произвольной непрерывной на $[-1,1]$ функции $g(x)$ мы можем рассмотреть ряд Фурье – Якоби

$$g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} g_k^\alpha \hat{P}_n^\alpha(x), \tag{1.1}$$

где $\alpha > -1$, g_k^α – коэффициент Фурье – Якоби функции $g(x)$, т.е.

$$g_k^\alpha = \int_{-1}^1 g(t)\hat{P}_n^\alpha(t)\kappa^\alpha(t)dt. \tag{1.2}$$

При $\alpha = -1$ интеграл (1.2) и ряд (1.1) теряют смысл. С другой стороны, как было показано в [1], частичные суммы ряда вида $S_n^\alpha(g,x) = \sum_{k=0}^n g_k^\alpha \hat{P}_n^\alpha(x)$ при стремлении параметра α к -1 имеют тенденцию приближаться к $g(x)$ в точках ±1, т. е. $S_n^{-1}(g,\pm1) = g(\pm1)$, где $S_n^{-1}(g,x) = \sum_{k=0}^n g_k^{-1}\hat{P}_n^{-1}(x)$, а $g_k^{-1}\hat{P}_k^{-1}(x) = \lim_{\alpha\to-1} g_k^\alpha\hat{P}_n^\alpha(x)$. С помощью дифференциально-разностных свойств полиномов Якоби $\hat{P}_n^\alpha(x)$ в работе [1] было показано, что если ввести функции $l_1(g)(x) = \frac{1}{2}(g(-1)+g(1)) + \frac{1}{2}(g(1)-g(-1))x$ и $q(x) = g(x) - l_1(g)(x)$, то предельный ряд, получаемый из (1.1) при $\alpha \to -1$, приобретает следующий вид

$$g(x) \sim l_1(g)(x) + (1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty} q_k \hat{P}_n^1(x), \tag{1.3}$$

где $q_k = \int_{-1}^1 q(t)\hat{P}_n^1(t)dt$. В [1] было показано, что для широкого класса непрерывных на $[-1,1]$ функций $g(x)$ ряд в правой части соотношения (1.3) равномерно на $[-1,1]$ сходится и имеет место равенство $g(x) = l_1(g)(x) + (1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty} q_k\hat{P}_n^1(x)$. Полагая $F(x) = q(x)/(1-x^2)$, перепишем это равенство в следующем виде

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \hat{P}_k^1(x). \tag{1.4}$$

Правая часть этого равенства представляет собой ряд Фурье – Якоби функции $F(x)$ по ортонормированной системе полиномов Якоби $\hat{P}_k^1(x)$. Отправляясь от равенства (1.4), установленного в [1], в работе [2] были рассмотрены более общие специальные ряды по ультрасферическим полиномам $\hat{P}_k^\alpha(x)$, частичные суммы которых «склеены» в точках $x = \pm1$. Идея их конструирования непосредственно возникает из равенства (1.4). В самом деле, вместо ряда Фурье функции $F(x)$ по полиномам $P_k^1(x)$ мы можем рассмотреть ряд Фурье по общим ультрасферическим полиномам $\hat{P}_k^\alpha(x)$, который имеет вид

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k^\alpha \hat{P}_k^\alpha(x), \tag{1.5}$$

где $\alpha > 0$,

$$q_k^\alpha = \int_{-1}^{1} F(t)\hat{P}_n^\alpha(t)(1-t^2)^\alpha dt = \int_{-1}^{1} q(t)\hat{P}_n^\alpha(t)(1-t^2)^{\alpha-1}dt. \tag{1.6}$$

Вернувшись к функции $g(x) = l_1(g)(x) + (1-x^2)F(x)$, мы можем переписать (1.5) в виде

$$g(x) = l_1(g)(x) + (1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty} q_k^\alpha \hat{P}_n^\alpha(x). \tag{1.7}$$

Правую часть равенства (1.7) мы будем называть специальным рядом по ультрасферическим полиномам Якоби $\hat{P}_k^\alpha(x)$ со «склеенными» на концах $x = \pm 1$ частичными суммами. Обозначим через $\sigma_n^\alpha(g,x)$ частичную сумму ряда (1.7) следующего вида

$$\sigma_n^\alpha(g,x) = l_1(g)(x) + (1-x^2)\sum_{k=0}^{n-2} q_k^\alpha \hat{P}_n^\alpha(x). \tag{1.8}$$

Из (1.8) непосредственно следует, что для любых n и m имеют место равенства $\sigma_n^\alpha(g,\pm 1) = \sigma_m^\alpha(g,\pm 1) = g(\pm 1)$. Другими словами, $\sigma_n^\alpha(g,x)$ и $\sigma_m^\alpha(g,x)$ «склеены» в точках $x = \pm 1$ друг с другом и с исходной функцией $g(x)$. Для функции Лебега $\Lambda_n^\alpha(x)$ частичной суммы $\sigma_n^\alpha(g,x)$ при $\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{3}{2}$ в [2] доказана оценка

$$\Lambda_n^\alpha(x) \le c(\alpha)(1 + \ln(n\sqrt{1-x^2}+1)) \quad (-1 \le x \le 1). \tag{1.9}$$

Кроме того, для частичных сумм $\sigma_n^\alpha(g,x)$ имеет место неравенство типа Лебега

$$|g(x) - \sigma_n^\alpha(g,x)| \le 2E_n(g)[1 + \Lambda_n^\alpha(x)], \tag{1.10}$$

где $E_n(g)$ – наилучшее приближение непрерывной функции $g(x)$ алгебраическими полиномами степени n на $[-1,1]$. Неравенство (1.10) и оценка (1.9), взятые вместе, показывают, что операторы $\sigma_n^\alpha(g) = \sigma_n^\alpha(g,x)$ при $\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{3}{2}$ по скорости приближения ими непрерывной функции $g(x)$ в равномерной метрике не уступают суммам Фурье $S_n^{-1/2}(g,x)$ по полиномам Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, а локально, в окрестностях концов $x = \pm 1$ операторы $\sigma_n^\alpha(g,x)$ приближают $g(x)$ лучше, чем $S_n^{-1/2}(g,x)$, причем $\sigma_n^\alpha(g,\pm 1) = g(\pm 1)$, тогда как $S_n^{-1/2}(g,x)$ этим важным для приложений свойством не обладает.

Как уже отмечалось выше, частичные суммы $\sigma_n^\alpha(g,x)$ совпадают с исходной функцией $g(x)$ в концевых точках $x = \pm 1$. Этого достаточно, чтобы при решении задачи приближения функции $f(t)$, заданной на длинном промежутке $[0,T]$, функцией $\overline{f}(t)$, полученной в результате «пристыковки» фрагментов $\overline{f}_i(t) = \sigma_{n_i}^\alpha(g_i, \frac{t-a_i}{a_{i+1}-a_i} - 1)$, где $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = T$, $g_i(x) = f(a_i + (a_{i+1}-a_i)\frac{x+1}{2})$, у приближающей функции $\overline{f}(t)$ не возникли нежелательные разрывы в точках «стыка» a_i $(1 \le j \le m-1)$. Однако этого недостаточно для того, чтобы приближающая функция $\overline{f}(t)$ оказалась гладкой вместе с $f(t)$. Возникает вопрос о конструировании новых специальных рядов, частичные суммы которых «гладко склеены» между собой. Мы вкратце отметим один из путей построения таких рядов. Пусть $1 \le r$ – целое, $g(x) \in W^{r,1}(-1,1)$, $l_{2r-1}(g) = l_{2r-1}(g)(x)$ – интерполяционный полином Эрмита степени $2r-1$, для которого имеют место равенства

$$l_{2r-1}^{(\nu)}(g)(\pm 1) = g^{(\nu)}(\pm 1) \quad (\nu = 0,1,\ldots,r-1). \tag{1.11}$$

Сопоставим функции

$$q_r(x) = \frac{g(x) - l_{2r-1}(g)(x)}{(1-x^2)^r} \tag{1.12}$$

ее ряд Фурье – Якоби

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_{r,k}^{\alpha} \hat{P}_k^{\alpha}(x), \tag{1.13}$$

где $\alpha > r - 1$,

$$q_{r,k}^{\alpha} = \int_{-1}^{1} q(t)\hat{P}_k^{\alpha}(t)(1-t^2)^{\alpha}dt = \int_{-1}^{1} (g(x) - l_{2r-1}(g)(x))\hat{P}_k^{\alpha}(t)(1-t^2)^{\alpha-r}dt. \tag{1.14}$$

Если ряд Фурье – Якоби сходится, то, учитывая (1.12), мы можем записать

$$g(x) = l_{2r-1}(g)(x) + (1-x^2)^r \sum_{k=0}^{\infty} q_{r,k}^{\alpha} \hat{P}_k^{\alpha}(x). \tag{1.15}$$

Через $\sigma_n^{\alpha,r}(g) = \sigma_n^{\alpha,r}(g,x)$ обозначим частичную сумму ряда (1.15) следующего вида

$$\sigma_n^{\alpha,r}(g,x) = l_{2r-1}(g)(x) + (1-x^2)^r \sum_{k=0}^{n-2r} q_{r,k}^{\alpha} \hat{P}_k^{\alpha}(x). \tag{1.16}$$

Нетрудно увидеть, что $\sigma_n^{\alpha,r}(g)$ представляет собой проектор на подпространство алгебраических полиномов $p_n(x)$ степени n, т. е. $\sigma_n^{\alpha,r}(p_n) = p_n$. Кроме того, из (1.11) и (1.16) вытекает, что $g^{(\nu)}(\pm 1) = (\sigma_n^{\alpha,r}(g,x))_{x=\pm 1}^{(\nu)} = (\sigma_m^{\alpha,r}(g,x))_{x=\pm 1}^{(\nu)}$ $(\nu = 0,1,\dots,r-1)$ для любых n и m. Это означает, что ряд (1.15) является специальным рядом, частичные суммы которого гладко «склеены» в точках $x = \pm 1$, причем степень гладкости равна r.

Можно показать, что специальные ряды вида (1.15) при $\alpha = r$, где $1 \le r$ – целое, могут быть истолкованы как ряды Фурье по классическим полиномам Якоби $P_k^{-r,-r}(x) = \frac{(-1)^r}{n!\kappa(x)} \left(\kappa(x)(1-x^2)^n\right)^{(n)}$ с $\kappa(x) = \kappa(x; -r-r)$, ортогональным в смысле некоторого соболевского скалярного произведения. Теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева, получила в последнее время интенсивное развитие в работах многочисленных авторов (см., например, работы [12–16] и др.). С другой стороны, можно показать, что ряды вида (1.15) при $\alpha = r$, где $1 \le r$ – целое, представляют собой не что иное как смешанные ряды по полиномам Лежандра, введенные и исследованные в работах [18–20]. Это позволяет применить к исследованию аппроксимативных свойств рядов вида (1.15) и рядов Фурье по полиномам Якоби, ортогональным в смысле Соболева, методы и подходы, разработанные в указанных работах [18–20].

1.2 Результаты

В работе [3] изучены аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена специального ряда

$$V_{n,m}^{\alpha}(g) = V_{n,m}^{\alpha}(g,x) = \frac{1}{m+1}[\sigma_n^{\alpha}(g,x) + \dots + \sigma_{n+m}^{\alpha}(g,x)]. \tag{1.17}$$

в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ и $n \leq qm$, где q — произвольное положительное фиксированное число, а именно, была получена оценка

$$|f(x) - V_{n,m}^{\frac{1}{2}}(f,x)| \leq c(q)E_n(f), \ f \in C[-1,1]. \tag{1.18}$$

В отчетном году была предпринята исследовать аппроксимативные свойства $V_{n,m}^{\alpha}(f)$ для $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{2}$. Нам удалось получить следующие результаты в этом направлении.

Обозначим через $\Lambda_{n,m}^{\alpha}(x)$ функцию Лебега средних Валле Пуссена $V_{n,m}^{\alpha}(f)$:

$$\Lambda_{n,m}^{\alpha}(x) = (1-x^2)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-1}\Big|\frac{1}{m+1}\sum_{k=n}^{n+m}K_{k-2}^{\alpha}(x,t)\Big|dt,$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Если $c_1 m \leq n \leq c_2 m$, то*

$$\Lambda_{n,m}^{\alpha}(x) \leq c(c_1, c_2, \alpha), \quad \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1. \tag{1.19}$$

Из (1.6), (1.8) и (1.17) находим

$$V_{n,m}^{\alpha}(f,x) = l_1(f,x) + (1-x^2)\int\limits_{-1}^{1}\Big[f(t) - l_1(f,x)\Big](1-t^2)^{\alpha-1}\frac{1}{m+1}\sum_{k=n}^{n+m}K_{k-2}^{\alpha}(x,t)dt,$$

откуда выводим следующее неравенство:

$$|V_{n,m}^{\alpha}(f,x)| \leq (1 + \Lambda_{n,m}^{\alpha}(f,x))\|f\|_{C[-1,1]}.$$

Отсюда и из теоремы 1.1 вытекает, что семейство операторов $V_{n,m}^{\alpha}(f)$, $\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{2}$, $c_1 m \leq n \leq c_2 m$, равномерно ограничено в пространстве $C[-1,1]$.

Далее, используя теорему 1.1, мы можем оценку (1.18) распространить при условии $c_1 m \leq n \leq c_2 m$ на случай $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$.

Теорема 1.2. *Для функций $f \in C[-1,1]$ справедлива следующая оценка остатка при приближении средними Валле Пуссена $V_{n,m}^{\alpha}(f,x)$:*

$$|f(x) - V_{n,m}^{\alpha}(f,x)| \leq cE_n(f), \quad c_1 m \leq n \leq c_2 m, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{2}.$$

2 Аппроксимативные свойства операторов $\sigma_n^{\alpha,r}(f,x)$ в весовых пространствах Лебега с переменным показателем

Пространства Лебега $L^{p(x)}(E)$ с переменным показателем суммируемости $p(x)$ позволяют более точно описывать свойства функций, имеющих существенно переменное поведение. Пусть $1 \le p(x)$ – измеримая функция, заданная на $[-1,1]$. Через $L^{p(x)}(-1,1)$ обозначим пространство таких измеримых функций $f(x)$, что $\int_{-1}^1 |f(x)|^{p(x)}dx < \infty$. Для $f(x) \in L^{p(x)}(-1,1)$, как это было показано в [4], можно ввести норму $\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\{\alpha > 0 : \int_{-1}^1 |f(x)/\alpha|^{p(x)}dx \le 1\}$. Для целого $r \ge 0$ через $W^{r,p(x)}(-1,1)$ обозначим пространство Соболева с переменным показателем $p(x)$, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ $r-1$-раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1,1]$ и $f^{(r-1)}(x) \in L^{p(x)}(-1,1)$. Далее, через $W^{r,p(x)}(-1,1,M)$ обозначим класс функций из $W^{r,p(x)}(-1,1)$, для которых $\|f^{(r)}\|_{p(\cdot)} \le M$. В последние годы наблюдается заметный всплеск интереса к изучению теории так называемых весовых пространств Лебега с переменным показателем, состоящих из измеримых функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^{p(x)}w(x)dx < \infty$, где $w(x)$ – неотрицательная суммируемая функция (вес), для которых норма определяется равенством $\|f\|_{p(\cdot),w} = \inf\{\alpha > 0 : \int_{-1}^1 |f(x)/\alpha|^{p(x)}w(x)dx \le 1\}$. Аналогично безвесовому случаю определяются весовые пространства Соболева $W_w^{r,p(x)}(-1,1)$. С помощью методов, разработанных в работах [5–11], были исследованы некоторые вопросы приближения функций $g(x) \in W^{r,p(x)}(-1,1)$ частичными суммами $\sigma_n^{\alpha}(g,x)$.

Пусть $\hat{\mathcal{P}}$ обозначает класс переменных показателей $p(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $p(x) > 1$ для $x \in [-1,1]$;
2) $|p(x) - p(y)| \ln \frac{2}{|x-y|} \le d$ при $x,y \in [-1,1]$;
3) $p(x)$ принимает постоянные значения вблизи концов отрезка $[-1,1]$: $p(x) = p_1$ при $x \in [-1, -1+\delta_1]$ и $p(x) = p_2$ при $[1-\delta_2, 1]$, где δ_1 и δ_2 – сколь угодно малые положительные числа.

Одним из основных результатов настоящего раздела является

Теорема 2.1. *Если $p(x) \in \hat{\mathcal{P}}$ и $p(\pm 1) \in (\frac{4}{3},4)$, то для $g(x) \in W^{r,p(x)}(-1,1,1)$ имеют место оценки*

$$|g^{(\nu)}(x) - (\sigma_n^{r,r}(g,x))^{(\nu)}| \le c \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{r-\nu-\frac{1}{p(x)}}, \tag{2.1}$$

$$\|g^{(r)} - (\sigma_n^{r,r}(g))^{(r)}\|_{p(\cdot)} \le cE_{n-r}(g^{(r)})_{p(\cdot)}, \tag{2.2}$$

где $x \in [-1,1]$, $0 \le \nu \le r-1$, $E_m(f)_{p(\cdot)}$ – наилучшее приближение функции $f \in L^{p(x)}(-1,1)$ алгебраическими полиномами степени m.

Оценка (2.1) показывает, что применение пространств Соболева $W^{r,p(x)}$ с переменным показателем $p(x)$ позволяет учитывать существенно переменное поведение производных функции $g(x)$ при оценке погрешности $|g^{(\nu)}(x) - (\sigma_n^{r,r}(g,x))^{(\nu)}|$ приближения $g^{(\nu)}(x)$ посредством $(\sigma_n^{r,r}(g,x))^{(\nu)}$. Говоря более точно, имеется в виду следующее: если $p(x) > 1$, $r \geq 1$, $g \in W^{r,p(x)}$, то, оставаясь в шкале пространств Соболева W^{r,p_0} с постоянным показателем p_0, мы можем утверждать лишь, что $g \in W^{r,p_0}$, где $p_0 = \min\limits_x p(x)$. Поэтому вместо оценки (2.1) мы будем иметь

$$|g^{(\nu)}(x) - (\sigma_n^{r,r}(g,x))^{(\nu)}| \leq c\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{r-\nu-\frac{1}{p_0}}, \tag{2.3}$$

Но для точки x, в которой $p(x) > p_0$, оценка (2.3) по порядку хуже оценки (2.1).

В отчетном году рассмотрена задача об исследовании аппроксимативных свойств операторов $\sigma_n^{\alpha,r} = \sigma_n^{\alpha,r}(f,x)$ в весовых пространствах Лебега $L_w^{p(x)}(-1,1)$ с весами вида $w(x) = (1-x^2)^\alpha$. При этом следует отметить, что основополагающую роль при доказательстве оценок (2.1) и (2.2) в безвесовом случае для функции $g(x) \in W^{r,p(x)}(-1,1,1)$ сыграл тот факт, что если переменный показатель $p(x)$ подчинен вышеуказанным условиям 1) – 3) и $p(\pm 1) \in (\frac{4}{3},4)$, то система ортонормированных полиномов Лежандра $\{\hat{P}_n^0(x)\}$, как было доказано в работе [17], является базисом Шаудера в пространстве $L^{p(x)}(-1,1)$. Основная сложность при решении задачи об аппроксимативных свойствах операторов $\sigma_n^{\alpha,r}$ в весовых пространствах была связана с отсутствием исследований о базисности ультрасферических полиномов Якоби $\hat{P}_n^\alpha(x)$ в весовом пространстве Лебега $L_w^{p(x)}(-1,1)$ с весом вида $w(x) = (1-x^2)^\alpha$. В этом направлении нами ранее были установлены следующие результаты.

Теорема 2.2. *Пусть $\alpha > -1/2$, $\mu = \mu(x) = (1-x^2)^\alpha$, $p \in \hat{\mathcal{P}}$,*

$$4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(\pm 1) < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}.$$

Тогда система ультрасферических полиномов Якоби $\{\hat{P}_n^{\alpha,\alpha}(x)\}_{n=0}^\infty$ является базисом Шаудера в весовом пространстве Лебега $L_w^{p(x)}(-1,1)$ с весом вида $w(x) = (1-x^2)^\alpha$.

Отметим, что указанная теорема была доказана и в более общем случае.

Теорема 2.3. *Пусть $\alpha,\beta > -1/2$, $w = w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $p \in \hat{\mathcal{P}}$,*

$$4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(1) < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}, \quad 4\frac{\beta+1}{2\beta+3} < p(-1) < 4\frac{\beta+1}{2\beta+1},$$

Тогда система полиномов Якоби $\{\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\}_{n=0}^\infty$ является базисом Шаудера в весовом пространстве Лебега $L_w^{p(x)}(-1,1)$.

Рассмотрим отдельно случай $\alpha = -1/2$, который не входит в теорему 2.2. Хорошо известно, что сумма Фурье – Якоби $S_n^{\alpha,\alpha}(f)$ при $\alpha = -1/2$ представляет собой сумму Фурье по полиномами Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ $(n = 0,1,\ldots)$. Это обстоятельство позволяет доказать равномерную ограниченность сумм Фурье – Чебышева $S_n^{-1/2,-1/2}(f)$ в пространстве $L_\mu^{p(x)}([-1,1])$ с $\mu(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ в том случае, когда переменный показатель подчиняется на $[-1,1]$ лишь условиям 1) и 2). Причём это условие является в определённом смысле также и необходимым. Чтобы сформулировать соответствующий окончательный результат, введем обозначение. Обозначим через $\mathcal{P}^\beta$ класс переменных показателей $p(x) > 1$, удовлетворяющих на $[-1,1]$ следующему условию:

$$|p(x) - p(y)| \left(\ln \frac{2}{|x-y|}\right)^\beta \le d \quad (\beta, d > 0, \quad x,y \in [-1,1]). \tag{2.4}$$

Теорема 2.4. *Пусть $\mu = \mu(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Тогда суммы Фурье – Якоби $S_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(f)$ $(n = 0,1,\ldots)$ равномерно ограничены в весовом пространстве Лебега $L_\mu^{p(x)}([-1,1])$ с произвольным переменным показателем $p \in \mathcal{P}^\beta$ тогда и только тогда, когда $\beta \ge 1$. Другими словами, если $\beta \ge 1$, то найдется такое положительное число $c(\beta,p)$, зависящее только от указанных параметров β и $p \in \mathcal{P}^\beta$, что для произвольной функции $f \in L_\mu^{p(x)}([-1,1])$ имеет место оценка*

$$\|S_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(f)\|_{p(\cdot),\mu}([-1,1]) \le c(\beta,p)\|f\|_{p(\cdot),\mu}([-1,1]). \tag{2.5}$$

Если же $0 < \beta < 1$, то найдется переменный показатель $p_\beta \in \mathcal{P}^\beta$ и $f_\beta \in L_\mu^{p_\beta(x)}([-1,1])$, для которых

$$\|S_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(f_\beta)\|_{p_\beta(\cdot),\mu}([-1,1]) \to \infty \quad (n \to \infty). \tag{2.6}$$

Вернёмся теперь к задаче об аппроксимативных свойствах операторов $\sigma_n^{\alpha,r} = \sigma_n^{\alpha,r}(f,x)$ в весовых пространствах Лебега $L_w^{p(x)}(-1,1)$ с весами вида $w(x) = (1-x^2)^\alpha$. Мы будем полагать, что функция $f = f(x)$ подчинена двум условиям: i) существуют производные $f^{(\nu)}(\pm 1)$ при $\nu = 0,\ldots r-1$; ii) функция $q_r(f) = q_r(f,x)$, определённая равенством (1.12), принадлежит весовому пространству Лебега $L_w^{p(x)}(-1,1)$ с весом $w(x) = (1-x^2)^\alpha$, т. е. $q_r(f) \in L_w^{p(x)}(-1,1)$, что, в свою очередь, означает конечность интеграла:

$$\int_{-1}^{1} |q_r(f,x)|^{p(x)}(1-x^2)^\alpha dx < \infty. \tag{2.7}$$

Пространство всех функций $f = f(x)$, для которых справедливо неравенство (2.7), обозначим через $\mathcal{F}_{r,\alpha,p(\cdot)}$. Далее, пусть H^n – пространство алгебраических полиномов Q_n степени не выше n, $E_n(g)_{p,w}$ – наилучшее приближение функции $g \in L_w^{p(x)}(-1,1)$ полиномами $Q_n \in H^n$, т. е.

$$E_n(g)_{p(\cdot),w} = \inf_{Q_n \in H^n} \|g - Q_n\|_{p(\cdot),w}. \tag{2.8}$$

Сформулируем теперь следующие результаты, полученные в отчетном году.

Теорема 2.5. *Пусть $\alpha > -1/2$, $\mu = \mu(x) = (1-x^2)^r$, $w = w(x) = (1-x^2)^\alpha$, $p \in \hat{\mathcal{P}}$,*

$$4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(\pm 1) < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}.$$

Тогда если $f \in \mathcal{F}_{r,\alpha,p(\cdot)}$, то имеет место оценка

$$\left\|\frac{f - \sigma_n^{\alpha,r}(f)}{\mu}\right\|_{p(\cdot),w} \le c(r,\alpha,p)E_n(q_r(f))_{p(\cdot),w}.$$

Теорема 2.6. *Пусть* $\mu = \mu(x) = (1-x^2)^r$, $w = w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $p(x) \in \mathcal{P}^1$. *Тогда если* $f \in \mathcal{F}_{r,-\frac{1}{2},p(\cdot)}$, *то имеет место оценка*

$$\left\| \frac{f - \sigma_n^{-\frac{1}{2},r}(f)}{\mu} \right\|_{p(\cdot),w} \le c(r,p) E_n(q_r(f))_{p(\cdot),w}.$$

3 Формосохраняющие свойства рациональных сплайн-функций класса C^1

3.1 Постановка задачи

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ ($N \geqslant 3$), в которых определена дискретная функция $f(x)$. При $i = 1,2,\ldots,N-1$ коэффициенты рациональной функции

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \frac{\gamma_i}{x - g_i} \tag{3.1}$$

с произвольным полюсом $g_i \notin [x_{i-1},x_{i+1}]$ определим из интерполяционных условий $R_i(x_j) = f(x_j)$ $(j = i-1,i,i+1)$.

Тогда, используя разделенные разности $f(x_{j-1}, x_j)$ и $f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1})$, получим

$$\begin{aligned}
&\alpha_i = f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i),\\
&\beta_i = f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i),\\
&\gamma_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Будем считать также $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$ и на отрезке $[a,b]$ определим ([32]) непрерывно дифференцируемую рациональную сплайн-функцию $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$, полагая

$$R_{N,1}(x) = R_i(x)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} \tag{3.3}$$

при $x \in [x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,N)$.

Для исследования поведения сплайн-функции $R_{N,1}(x)$ на всем отрезке $[a,b]$ возникает необходимость рассмотрения для интерполянтов $R_i(x)$ полюсов двух видов, а именно, полюсы g_{i-1} и g_i соответственно интерполянтов $R_{i-1}(x)$ и $R_i(x)$ в одном случае должны удовлетворять неравенству $g_{i-1} < g_i$, а в другом случае — неравенству $g_{i-1} > g_i$.

Определим полюсы интерполянтов через параметр t и расстояния между соответствующими узлами $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots,N)$, полагая при $i = 2,3,\ldots,N-1$ в первом случае

$$g_{i-1}(t) = x_{i-1} - th_{i-1}, \quad g_i(t) = x_i + th_{i+1}, \tag{3.4}$$

а во втором случае

$$g_{i-1}(t) = x_{i-1} + th_i, \quad g_i(t) = x_i - th_i. \tag{3.5}$$

Для всего отрезка $[a,b]$ получим систему полюсов $g(t) = \{g_1(t), g_2(t), \ldots,g_{N-1}(t)\}$, в которой могут встречаться, вообще говоря, полюсы обоих видов.

Ниже будем полагать, что рассматриваемая система полюсов $g(t)$ является согласованной в том смысле, что в каждой паре соседних полюсов системы оба полюса получаются по формулам (3.4) или оба они получаются по формулам (3.5).

Будем придерживаться также следующей терминологии. Тройку данных $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ будем называть строго выпуклой вниз (вверх), если соответствующая разделенная разность $f(x_{i-1}, x_i,x_{i+1})$ больше (меньше) нуля.

Систему всех данных $f(x_0), f(x_1), \dots ,f(x_N)$ будем называть строго выпуклой вниз (вверх), если каждая тройка соседних данных в ней строго выпукла вниз (вверх).

Всюду ниже для отношений разделенных разностей и расстояний между узлами будем придерживаться следующих обозначений:

$$q_i = \frac{f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)}{f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})}, \quad Q_i = \max\left\{\frac{2}{2q_i - 1}, \frac{2q_i}{2 - q_i}\right\},$$

$$H_i = \max\left\{\frac{h_k}{h_j}\middle| \, |k-j| = 1; k,j \in \{i-1,i,i+1\}\right\} \quad (i = 2,3,\dots,N-1);$$

$$T_0 = \max_{2\leqslant i\leqslant N-1} \{17H_iQ_i|q_i > 0, 3H_i|q_i < 0\}.$$

3.2 Основные результаты

Основные результаты сформулируем в виде следующих двух утверждений.

Теорема 3.1. *Если на отрезке $[a,b]$ задана произвольная сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, система данных $f(x_0), f(x_1), \dots ,f(x_N)$ строго выпукла вниз (вверх) и выполняются неравенства $1/2 < q_i < 2$ $(i = 2,3,\dots,N-1)$, то при любом значении $t \geqslant T_0$ рациональная сплайн-функция $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, \Delta, f, g(t))$ выпукла вниз (вверх) на отрезке $[a,b]$.*

Теорема 3.2. *Пусть на сетке узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$ система данных $f(x_0), f(x_1), \dots ,f(x_N)$ содержит перемены направления выпуклости и при каждом $i = 2,3,\dots,N-1$ выполняется двойное неравенство $1/2 < |q_i| < 2$. Тогда для любого значения $t \geqslant T_0$ рациональная сплайн-функция*

$$R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t))$$

сохраняет форму выпуклости в следующем смысле:

1) если при данном $i = 2,3,\dots,N-1$ отношение $q_i > 0$, то $R_{N,1}(x)$ выпукла вниз (вверх) на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ в соответствии с положительной (отрицательной) $f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})$;

2) если при данном $i = 2,3,\dots,N-1$ отношение $q_i < 0$, то $R_{N,1}(x)$ имеет точку перегиба z_i на интервале $(x_{i-1} + 1/3h_i, x_i - 1/3h_i)$, выпукла вверх (вниз) на отрезке $[x_{i-1}, z_i]$ и выпукла вниз (вверх) на отрезке $[z_i, x_i]$ при положительной (отрицательной) $f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})$.

4 Выпуклая интерполяция рациональными сплайн-функциями класса C^2

4.1 Введение

Вопросы выпуклой интерполяции полиномиальными сплайнами в достаточно полной форме исследованы в ряде работ различными авторами (см., напр., [21–25] и цитированные в них источники). Подобные вопросы рассматривались также для рациональных сплайнов специальных видов, например, в работах [28–31].

Ниже вопрос выпуклой (вниз или вверх) интерполяции выпуклых (вниз или вверх, соответственно) дискретных данных рассматривается для дважды непрерывно дифференцируемых сплайн-функций, построенных с помощью трехточечных рациональных интерполянтов.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ ($N \geqslant 3$), в которых определена дискретная функция $f(x)$. При $i = 1,2,\ldots,N-1$ коэффициенты рациональной функции

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i},$$

с произвольным полюсом $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ определим из интерполяционных условий $R_i(x_j) = f(x_j)$ ($j = i-1,i,i+1$).

Тогда с использованием разделенных разностей первого порядка $f(x_{i-1}, x_i)$ и второго порядка $\delta_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ при $i = 1,2,\ldots,N-1$ получим

$$\alpha_i = f(x_i) - \delta_i(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i),$$

$$\beta_i = f(x_{i-1}, x_{i+1}) + \delta_i(x_i - g_i),$$

$$\gamma_i = \delta_i(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i).$$

Будем считать, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$ (допускаются и другие варианты крайних интерполянтов $R_0(x)$ и $R_N(x)$).

Для краткости при $i = 1,2,\ldots,N$ обозначим

$$A_i(x) = \frac{(x - x_{i-1})^2}{(x - x_{i-1})^2 + (x_i - x)^2)}, \quad B_i(x) = 1 - A_i(x)$$

и на отрезке $[a,b]$ определим ([29]) рациональную сплайн-функцию $R_{N,2}(x) = R_{N,2}(x, f, \Delta, g)$ класса $C^2[a,b]$, полагая

$$R_{N,2}(x) = R_i(x)A_i(x) + R_{i-1}(x)B_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1,2,\ldots,N).$$

Всюду ниже придерживаемся также обозначений: $q_i = \delta_{i-1}/\delta_i$ ($i = 2,3,\ldots,N-1$); $h_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1,2,\ldots,N$); $\rho_\Delta = \max\{\, h_i h_j^{-1} \,\big|\, |i-j| = 1; i,j = 1,2,\ldots,N\}$; $\gamma = (2\sqrt{2}+1)/(2\sqrt{2}+5)$.

4.2 Основной результат

Следующее утверждение дает условия выпуклой интерполяции дискретных данных рациональными сплайн-функциями $R_{N,2}(x, f, \Delta, g)$ класса $C^2[a,b]$.

Теорема 4.1. *Пусть для дискретных данных $f(x_i)$ $(i = 0,1,\dots,N)$ на сетке узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$ выполнены неравенства $\delta_i > 0$ (соответственно, $\delta_i < 0$) при $i = 1,2,\dots,N-1$ и $\gamma < q_i < 1/\gamma$ при $i = 2,3,\dots,N-1$.*

Тогда существуют полюсы $g = \{g_1,g_2,\dots,g_{N-1}\}$, для которых рациональная сплайн-функция $R_{N,2}(x) = R_{N,2}(x, f, \Delta,g)$ выпукла вниз (соответственно, вверх) на отрезке $[a,b]$.

5 Оценка функции Лебега сумм Фурье по модифицированным полиномам Мейкснера

5.0.1 Введение

Пусть $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, где $\delta = \frac{1}{N}$, $N \geq 1$. Следуя [38], обозначим через $M_{n,N}^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \ldots$) модифицированные полиномы Мейкснера, образующие при $\alpha > -1$ ортогональную систему на множестве Ω_δ с весом $\rho_N(x) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}$, т.е.

$$\sum_{x\in\Omega_\delta} M_{n,N}^\alpha(x) M_{k,N}^\alpha(x)\rho_N(x) = h_{n,N}^\alpha \delta_{nk},\ \alpha > -1,$$

где δ_{nk} – символ Кронекера, $h_{n,N}^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} e^{n\delta}\Gamma(\alpha+1)$. Соответствующие ортонормированные полиномы обозначим через $m_{n,N}^\alpha(x) = (h_{n,N}^\alpha)^{-1/2} M_{n,N}^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \ldots$).

Далее, пусть C_0 – пространство непрерывных функций, заданных на полуоси $[0,\infty)$ и удовлетворяющих условию

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}|f(x)| = 0.$$

норму в котором определим следующим образом

$$\|f\|_{C_0} = \sup_{x\geqslant 0} e^{-x/2}|f(x)|,$$

H^n – пространство алгебраических полиномов степени $\leqslant n$,

$$E_n(f) = \inf_{p_n \in H^n} \|f - p_n\|_{C_0}$$

– наилучшее приближение функции f полиномами из H^n.

Через $S_{n,N}^\alpha(x) = S_{n,N}^\alpha(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда Фурье функции $f \in C_0$ по полиномам $m_{n,N}^\alpha(x)$:

$$S_{n,N}^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^\alpha m_{k,N}^\alpha(x),$$

где

$$f_k^\alpha = \sum_{t\in\Omega_\delta} f(t) m_{k,N}^\alpha(t)\rho_N(t).$$

В настоящей работе для функции $f \in C_0$ рассматривается задача об оценке величины $e^{-x/2}|f(x) - S_{n,N}^\alpha(x)|$ при $x \in [0,\infty)$. Как известно, с помощью неравенства Лебега

$$e^{-x/2}|f(x) - S_{n,N}^\alpha(x)| \leqslant (1 + \lambda_{n,N}^\alpha(x))E_n(f)$$

эта задача сводится к оценке функции Лебега

$$\lambda_{n,N}^\alpha(x) = \sum_{t\in\Omega_\delta} e^{-\frac{t+x}{2}} \frac{\Gamma(Nt+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\left|\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(t,x)\right|,$$

где $\left|\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(t,x)\right|$ – ядро, определенное равенством (5.1).

Основным результатом является теорема 5.1, в которой получена поточечная оценка для функции $\lambda_{n,N}^{\alpha}(x)$ при $x \in [\theta_n/2,\infty)$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$, $\alpha > -1$. Для $x \in [0,\theta_n/2]$ функция $\lambda_{n,N}^{\alpha}(x)$ была оценена в работе [39]. Отметим также, что при $\alpha = -1/2$ задача об оценке функции $\lambda_{n,N}^{\alpha}(x)$ была исследована в [40].

5.1 Некоторые сведения о модифицированных полиномах Мейкснера

При оценке функции Лебега $\lambda_{n,N}^{\alpha}(x)$ нам понадобятся некоторые свойства модифицированных полиномов Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$, которые мы приведем в этом пункте. Пусть α и q произвольные действительные числа, причем $q \neq 0$. Тогда для классических полиномов Мейкснера $M_n^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(x,q)$ имеют место [36–38]:

– явный вид
$$M_n^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(x,q) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{(\alpha+1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k,$$
где $x^{[k]} = x(x-1)\dots(x-k+1)$, $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$.

– соотношение ортогональности
$$\sum_{x=0}^{\infty} M_n^{\alpha}(x) M_k^{\alpha}(x) \rho(x) = h_n^{\alpha,q} \delta_{nk},\ 0 < q < 1, \alpha > -1,$$
где $\rho(x) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}$, $h_n^{\alpha,q} = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n} \Gamma(\alpha+1)$.

Пусть $q = e^{-\delta}$, $N > 0$, $\delta = 1/N$, $\Omega_\delta = \{0,\delta,2\delta,\dots\}$. Тогда полиномы $M_{n,N}^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(Nx,e^{-\delta})$ при $\alpha > -1$ образуют ортогональную с весом $\rho_N(x)$ систему на сетке Ω_δ. Теперь приведем некоторые свойства полиномов $M_{n,N}^{\alpha}(x)$, которые можно найти в [38]:

– равенства
$$M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x) = M_{n+1,N}^{\alpha}(x) - M_{n,N}^{\alpha}(x);$$
$$M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x) = \frac{\alpha}{n+1} M_{n,N}^{\alpha}(x) - \frac{(e^\delta - 1)Nx}{n+1} M_{n,N}^{\alpha+1}(x-\delta);$$

– формула Кристоффеля–Дарбу
$$\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,x) = \sum_{k=0}^{n} m_{k,N}^{\alpha}(t) m_{k,N}^{\alpha}(x) =$$
$$\frac{\delta\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{e^{\delta/2} - e^{-\delta/2}} \frac{m_{n+1,N}^{\alpha}(t) m_{n,N}^{\alpha}(x) - m_{n,N}^{\alpha}(t) m_{n+1,N}^{\alpha}(x)}{x-t}, \quad (5.1)$$
которую можно записать [40, 41] в следующем виде:
$$\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,x) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} m_{n,N}^{\alpha}(t) m_{n,N}^{\alpha}(x) + \frac{\alpha_n \alpha_{n-1}}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} \frac{\delta}{e^{\delta/2} - e^{-\delta/2}} \frac{1}{x-t} \times$$
$$\left[m_{n,N}^{\alpha}(x)\left(m_{n+1,N}^{\alpha}(t) - m_{n-1,N}^{\alpha}(t)\right) - m_{n,N}^{\alpha}(t)\left(m_{n+1,N}^{\alpha}(x) - m_{n-1,N}^{\alpha}(x)\right)\right],$$
где $\alpha_n = \sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}$, $m_{-1,N}^{\alpha}(x) = 0$.

Для $0 < \delta \le 1$, $N = 1/\delta$, $\lambda > 0$, $1 \le n \le \lambda N$, $\alpha > -1$, $0 \le x < \infty$, $\theta_n = \theta_n(\alpha) = 4n+2\alpha+2$, $s \geqslant 0$ справедливы [38] следующие весовые оценки:

$$e^{-x/2}\left|m_{n,N}^{\alpha}(x \pm s\delta)\right| \le c(\alpha,\lambda,s)\theta_n^{-\alpha/2}A_n^{\alpha}(x),$$

$$e^{-x/2}\left|M_{n,N}^{\alpha}(x \pm s\delta)\right| \le c(\alpha,\lambda,s)A_n^{\alpha}(x),$$

$$e^{-x/2}\left|(M_{n,N}^{\alpha}(x \pm s\delta))'\right| \le c(\alpha,\lambda,s)A_{n-1}^{\alpha+1}(x),$$

$$A_n^{\alpha}(x) = \begin{cases} \theta_n^{\alpha}, & 0 \le x \le \frac{1}{\theta_n}, \\ \theta_n^{\alpha/2-1/4}x^{-\alpha/2-1/4}, & \frac{1}{\theta_n} < x \le \frac{\theta_n}{2}, \\ \left[\theta_n(\theta_n^{1/3} + |x-\theta_n|)\right]^{-1/4}, & \frac{\theta_n}{2} < x \leqslant \frac{3\theta_n}{2}, \\ e^{-x/4}, & \frac{3\theta_n}{2} < x < \infty, \end{cases}$$

$$e^{-x/2}\left|m_{n+1,N}^{\alpha}(x) - m_{n-1,N}^{\alpha}(x)\right| \leqslant$$

$$c(\alpha,\lambda)\begin{cases} \theta_n^{\alpha/2-1}, & 0 \le x \le \frac{1}{\theta_n}, \\ \theta_n^{-3/4}x^{-\alpha/2+1/4}, & \frac{1}{\theta_n} < x \le \frac{\theta_n}{2}, \\ x^{-\alpha/2}\theta_n^{-3/4}\left[\theta_n^{1/3} + |x-\theta_n|\right]^{1/4}, & \frac{\theta_n}{2} < x \leqslant \frac{3\theta_n}{2}, \\ e^{-x/4}, & \frac{3\theta_n}{2} < x < \infty, \end{cases}$$

где здесь и далее $c(\alpha)$, $c(\alpha,\lambda)$, $c(\alpha,\lambda,s)$ – положительные числа, зависящие только от указанных параметров, причем различные в разных местах.

5.2 Полученные результаты

Лемма 5.1. *Пусть* $-1 < \alpha \in \mathbb{R}$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$, $\lambda > 0$, $t \geqslant 0$, $N = 1/\delta$, $0 < \delta \leqslant 1$. *Тогда для* $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$ *имеет место следующая оценка*

$$e^{-t}\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,t) \le c(\alpha,\lambda)n^{1-\alpha}(A_n^{\alpha}(t))^2.$$

Лемма 5.2. *Пусть* $-1 < \alpha \in \mathbb{R}$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$, $\lambda > 0$, $\theta_n/2 \leqslant t \leqslant 3\theta_n/2$, $N = 1/\delta$, $0 < \delta \leqslant 1$. *Тогда для* $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$ *равномерно относительно* t *имеет место следующая оценка*

$$e^{-t}\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,t) \le c(\alpha,\lambda)n^{-\alpha}.$$

Основным результатом настоящего раздела является следующая

Теорема 5.1. *Пусть* $\alpha > -1$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$, $\lambda > 0$, $0 < \delta \leqslant 1$, $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$. *Тогда имеют место следующие оценки:*

1) если $x \in \left[\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}\right]$, *то*

$$\lambda_{n,N}^{\alpha}(x) \leqslant c(\alpha,\lambda)\left[\ln(n+1) + \left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3} + |x-\theta_n|}\right)^{1/4}\right];$$

2) если $x \in \left[\frac{3\theta_n}{2},\infty\right)$, *то*

$$\lambda_{n,N}^{\alpha}(x) \leqslant c(\alpha,\lambda)n^{3/2}e^{-x/4}.$$

6 Приближение дискретных функций специальными рядами по модифицированным полиномам Мейкснера

6.1 Введение

В настоящей работе мы продолжаем начатое в [42] исследование аппроксимативных свойств частичных сумм специальных рядов по модифицированным полиномам Мейкснера $m_{n,N}^{\alpha}(x)$. Специальные ряды по полиномам $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ возникают естественным образом при решении задачи об одновременном приближении дискретной функции d, заданной на равномерной сетке Ω_δ, и ее конечных разностей $\Delta_\delta^\nu d$, соответственно алгебраическим полиномом p и его конечными разностями $\Delta_\delta^\nu p$. Упомянутые специальные ряды по полиномам $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ являются более эффективным альтернативным рядам Фурье–Мейкснера аппаратом для решения этой задачи. Кроме того специальные ряды, в отличии от рядов Фурье–Мейкснера, обладают тем свойством, что они интерполируют исходную функцию в точках $0, \delta, \dots, (r-1)\delta$. Однако следует отметить, что задача об исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм упомянутых рядов оставалась мало исследованной, в частности, оставалась не исследованной задача об изучении на $[\frac{\theta_n}{2},\infty)$ поведения функции Лебега $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ частичных сумм специального ряда по полиномам $m_{n,N}^{\alpha}(x)$. Основным результатом является теорема 6.1, в которой получены оценки сверху для величины $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ на множествах вида $G_3 = [\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}]$ и $G_4 = [\frac{3\theta_n}{2},\infty)$, где $r \in \mathbb{N}$, $r - \frac{1}{2} < \alpha < r + \frac{1}{2}$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$.

6.2 Неравенство Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Мейкснера

Через $l_{\rho_N}^2(\Omega_\delta)$ обозначим пространство функций $f(x)$, заданных на Ω_δ и таких, что $\sum_{x\in\Omega_\delta} f^2(x)\rho_N(x) < \infty$. Пусть $f(x) \in l_{\rho_N}^2(\Omega_\delta)$, тогда при $x \in \Omega_{r,\delta} = \{r\delta, (r+1)\delta, \dots\}$ мы можем определить дискретный аналог полинома Тейлора следующего вида $P_{r-1,N}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Delta_\delta^\nu f(0)}{\nu!}(Nx)^{[\nu]}$. Легко проверить, что функция $f_r(x) = \frac{f(x)-P_{r-1,N}(x)}{N^{-r}(Nx)^{[r]}}$ принадлежит пространству $l_{\rho_{N,r}}^2(\Omega_{r,\delta})$, где $\rho_{N,r}(x) = \rho_N(x - r\delta)$, а модифицированные полиномы Мейкснера $m_{k,N,r}^{\alpha}(x) = m_{k,N}^{\alpha}(x - r\delta)$ $(k = 0, 1, \dots)$ при $\alpha > -1$ образуют ортонормированный базис в $l_{\rho_{N,r}}^2(\Omega_{r,\delta})$. Поэтому мы можем определить коэффициенты Фурье–Мейкснера

$$\hat{f}_{r,k}^{\alpha} = \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} f_r(t)\rho_{N,r}(t)m_{k,N,r}^{\alpha}(t) = \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} \frac{f(t) - P_{r-1,N}(t)}{N^{-r}(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)m_{k,N,r}^{\alpha}(t)$$

и ряд Фурье–Мейкснера $f_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{r,k}^{\alpha} m_{k,N,r}^{\alpha}(x)$, который в силу базисности в $l_{\rho_{N,r}}^2(\Omega_{r,\delta})$ системы полиномов $m_{k,N,r}^{\alpha}(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ сходится равномерно относительно $x \in \Omega_{r,\delta}$. Отсюда следует, что

$$f(x) = P_{r-1,N}(x) + N^{-r}(Nx)^{[r]}\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{r,k}^{\alpha} m_{k,N,r}^{\alpha}(x), \quad x \in \Omega_\delta. \tag{6.1}$$

Следуя [42, 43], мы будем называть (6.1) специальным рядом по полиномам Мейкснера для функции $f(x)$. Частичную сумму ряда (6.1) обозначим через

$$S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x) = P_{r-1,N}(x) + N^{-r}(Nx)^{[r]}\sum_{k=0}^{n}\hat{f}_{r,k}^{\alpha}m_{k,N,r}^{\alpha}(x).$$

Если $f(x) = p_{n+r}(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+r$, то, очевидно, $\hat{f}_{r,k}^{\alpha} = 0$ при $k \geqslant n+1$ и поэтому из (6.1) следует $S_{n+r,N}^{\alpha}(p_{n+r},x) \equiv p_{n+r}(x)$, т.е. $S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов $p_{n+r}(x)$ степени не выше $n+r$. Обозначим через $q_{n+r}(x)$ алгебраический полином степени $n+r$, для которого $\Delta^i f(0) = \Delta^i q_{n+r}(0)$ $(i=\overline{0,r-1})$. Тогда

$$\left|f(x) - S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x)\right| = \left|f(x) - q_{n+r}(x) + q_{n+r}(x) - S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x)\right| \leqslant$$

$$|f(x) - q_{n+r}(x)| + \left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r} - f,x)\right|.$$

Отсюда для $x \in \Omega_{r,\delta}$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x) - S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x)\right| \leqslant e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x) - q_{n+r}(x)\right| +$$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r} - f,x)\right|. \tag{6.2}$$

Так как $P_{r-1,N}(q_{n+r} - f,x) = 0$, то

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r} - f,x)\right| = e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}N^{-r}(Nx)^{[r]}\left|\sum_{k=0}^{n}(\widehat{q_{n+r} - f})_{r,k}^{\alpha}m_{k,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right| \leqslant$$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{|q_{n+r}(t) - f(t)|}{(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)\left|\sum_{k=0}^{n}m_{k,N}^{\alpha}(t-r\delta)m_{k,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right| =$$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{|q_{n+r}(t) - f(t)|}{(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)\left|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta,x-r\delta)\right|. \tag{6.3}$$

Положим

$$E_k^r(f,\delta) = \inf_{q_k}\sup_{x\in\Omega_{r,\delta}} e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x) - q_k(x)\right|, \tag{6.4}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_k(x)$ степени k, для которых $\Delta^i f(0) = \Delta^i q_k(0)$ $(i=\overline{0,r-1})$. Тогда из (6.2) и (6.3) учитывая (6.4), получаем

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x) - S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x)\right| \leqslant E_{n+r}^r(f,\delta)(1 + l_{n,r}^{\alpha,N}(x)), \tag{6.5}$$

где

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\times$$

$$\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{e^{-\frac{t}{2}+r\delta}t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{(Nt)^{[r]}\Gamma(Nt-r+1)}\left|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta,x-r\delta)\right|. \tag{6.6}$$

В связи с неравенством (6.5) возникает задача об оценке на $[r\delta,\infty)$ функции Лебега $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$, определенной равенством (6.6). С этой целью введем следующие обозначения: $G_1 = [r\delta,\frac{3\lambda}{\theta_n}]$, $G_2 = [\frac{3\lambda}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}]$, $G_3 = [\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}]$, $G_4 = [\frac{3\theta_n}{2},\infty)$, Для $x \in G_1 \bigcup G_2$ это задача была решена в работе [42]. В настоящей работе мы будем оценивать функцию $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ на множествах G_3 и G_4.

Теорема 6.1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $r-\frac{1}{2} < \alpha < r+\frac{1}{2}$, $\theta_n = 4n+2\alpha+2$, $\lambda > 0$, $0 < \delta \leqslant 1$, $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$. Тогда имеют место следующие оценки:*

1) если $x \in G_3$, то

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x) \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln(n+1) + \left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{\frac{1}{3}} + |x-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right];$$

2) если $x \in G_4$, то

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x) \leqslant c(\alpha,\lambda,r)n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}}x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{x}{4}}.$$

7 Приближение 2π-периодических кусочно гладких функций дискретными суммами Фурье

7.1 Введение

Через $\overline{f}_{[a,b]}$ мы обозначим функцию

$$\overline{f}_{[a,b]} = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b), \\ f(a+0), & x = a, \\ f(b-0), & x = b. \end{cases}$$

Пусть Ω — множество из $m+1$ точек $-\pi = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = \pi$. Обозначим через $C_\Omega^{0,r}$ класс всех 2π-периодических функций f, таких, что на каждом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ функция $\overline{f}_{[a_i,a_{i+1}]}$ имеет r абсолютно непрерывных производных, а в точках a_i выполняется $f(a_i) = (f(a_i-0) + f(a_i+0))/2$. Через C_Ω^r обозначим подкласс всех непрерывных функций из $C_\Omega^{0,r}$.

Через $L_{n,N}(f,x)$ обозначим тригонометрический полином порядка n, обладающий наименьшим квадратичным отклонением от функции f в точках $\{t_j\}_{i=0}^{N-1}$, где $t_j = u + 2\pi j/N$, $n \leqslant N/2$, $N \geqslant 2$, и $u \in \mathbb{R}$. Другими словами, $L_{n,N}(f,x)$ доставляет минимум сумме

$$\sum_{j=0}^{N-1} |f(t_j) - T_n(t_j)|^2$$

на множестве всех тригонометрических полиномов степени не выше n. Подробнее о приближении функций тригонометрическими полиномами можно прочитать в работах [118–127].

Также, мы будем обозначать через c или $c(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ некие положительные константы, которые зависят только от указанных в скобках аргументов и могут различаться в разных местах в тексте. Через $S_n(f,x)$ обозначим n-ю частичную сумму ряда Фурье функции f. Также отметим, что легко показать, что ряд Фурье любой функции $f \in C_\Omega^{0,1}$ (и, следовательно, C_Ω^2, в силу очевидного включения $C_\Omega^2 \subset C_\Omega^{0,1}$) сходится поточечно и возможно следующее представление:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \tag{7.1}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt. \tag{7.2}$$

Рассмотрим задачу оценки значения $|f(x) - L_{n,N}(f,x)|$ для $f \in C_\Omega^2$ и для $f \in C_\Omega^{0,1}$. Заметим, что два частных случая данной задачи были рассмотрены в работе [128], где величина $|f(x) - L_{n,N}(f,x)|$ была оценена для 2π-периодической функции $f(x) = |x|$ ($x \in [-\pi,\pi]$) и для $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$. В следующих теоремах мы обобщим результат, полученный в [128], для произвольных $f \in C_\Omega^2$ и $f \in C_\Omega^{0,1}$.

Теорема 7.1. *Для функции $f \in C_{\Omega}^{0,1}$ справедлива оценка:*

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{C(f,\varepsilon)}{n}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{7.3}$$

Данная оценка неулучшаема по порядку.

Теорема 7.2. *Для любой $f \in C_{\Omega}^{2}$ выполняются следующие неравенства:*

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.4}$$

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{n^2}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{7.5}$$

Данные оценки неулучшаемые по порядку.

Для доказательства данных теорем нам понадобится лемма из [129]:

Лемма 7.1 (Sharapudinov, [129])**.** *Если ряд Фурье функции f сходится в точках $t_k = u+2k\pi/N$, тогда имеет место представление*

$$L_{n,N}(f,x) = S_n(f,x) + R_{n,N}(f,x), \tag{7.6}$$

где

$$R_{n,N}(f,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) \cos \mu N(u-t) f(t) dt, \tag{7.7}$$

$2n < N$ *и*

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx. \tag{7.8}$$

Данная лемма рассматривает только случай, когда $2n < N$. Если $2n = N$ (когда N — четное) мы можем записать (см. [129])

$$L_{n,2n}(f,x) = L_{n-1,2n}(f,x) + a_n^{(2n)}(f) \cos n(x-u), \tag{7.9}$$

где

$$a_n^{(2n)}(f) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k) \cos n(t_k - u). \tag{7.10}$$

Чтобы доказать неравенства (7.3), (7.4) и (7.5) из теорем 7.1 и 7.2, воспользуемся формулами

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant |f(x) - S_n(f,x)| + |R_{n,N}(f,x)|, \quad n < N/2, \tag{7.11}$$

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant |f(x) - S_{n-1}(f,x)| + |R_{n-1,N}(f,x)| + \left|a_n^{(2n)}(f)\right|, \quad n = N/2, \tag{7.12}$$

которые сразу следуют из (7.6) и (7.9).

Для доказательства неравенств (7.3), (7.4) и (7.5), нам требуется оценить $|f(x) - S_n(f,x)|$, $|R_{n,N}(f,x)|$, и $|a_n^{(2n)}(f)|$ для $f \in C_\Omega^{0,1}$ и $f \in C_\Omega^2$. Следующая оценка для $|f(x) - S_n(f,x)|$, где $f \in C_\Omega^{0,1}$, была получена в работе [131]:

$$|f(x) - S_n(f,x)| \leqslant \frac{C(f,\varepsilon)}{n}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{7.13}$$

Нам остается оценить величины $|R_{n,N}(f,x)|$ и $|a_n^{(2n)}(f)|$ для $f \in C_\Omega^{0,1}$ и $|f(x) - S_n(f,x)|$, $|R_{n,N}(f,x)|$, и $|a_n^{(2n)}(f)|$ для $f \in C_\Omega^2$.

7.2 Оценка $|R_{n,N}(f,x)|$ для $f \in C_\Omega^{0,1}$

Из (7.7) и (7.8) можно получить представление

$$R_{n,N}(f,x) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\mu N(u-t)dt +$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\cos\mu N(u-t)dt = R_{n,N}^1(f,x) + R_{n,N}^2(f,x).$$

При доказательстве основного результата данного раздела нами будут использованы следующие леммы:

Лемма 7.2. *Для $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ справедливо следующее неравенство:*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right)}\right| \leqslant c.$$

Лемма 7.3. *Для $f \in \mathrm{C}_\Omega^{0,1}$ следует:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt =$$

$$\frac{(-1)^q\mu N}{(\mu N)^2 - k^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(f(a_i - 0) - f(a_i + 0)\right)h_p(k(a_i - x))h_{1-q}(\mu N(a_i - u)) -$$

$$\frac{(-1)^q\mu N}{(\mu N)^2 - k^2}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)h_p(k(t-x))h_{1-q}(\mu N(t-u))dt +$$

$$\frac{(-1)^{1+p}k}{(\mu N)^2 - k^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(f(a_i - 0) - f(a_i + 0)\right)h_{1-p}(k(a_i - x))h_q(\mu N(a_i - u)) -$$

$$\frac{(-1)^{1+p}k}{(\mu N)^2 - k^2}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)h_{1-p}(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt. \tag{7.14}$$

Лемма 7.4. *Величина $\left|R_{n,N}^1(f,x)\right|$ для $f \in \mathrm{C}_\Omega^{0,1}$ может быть оценена следующим образом:*

$$\left|R_{n,N}^1(f,x)\right| \leqslant \frac{c(f)}{N}.$$

Лемма 7.5. *Величина* $\left|R^2_{n,N}(f,x)\right|$ *для* $f \in \mathrm{C}^{0,1}_{\Omega}$ *может быть оценена следующим образом:*

$$\left|R^2_{n,N}(f,x)\right| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N}, \quad |x-a_i| \geqslant \varepsilon.$$

Из лемм 7.4 и 7.5 мы имеем для $f \in \mathrm{C}^{0,1}_{\Omega}$

$$|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N}, \quad |x-a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{7.15}$$

7.2.1 Оценка $|a^{(2n)}_n(f)|$ для $f \in C^{0,1}_{\Omega}$

Из (7.10), используя, что $t_j = u + 2\pi k/N$, имеем

$$a^{(N)}_n(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k f(t_k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right)$$

и

$$\left|a^N_n(f)\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right|.$$

Обозначим через G подмножество индексов из $\{k\}_{k=0}^{n-1}$, таких, что для $k \in G$ отрезок $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ не содержит ни одной точки a_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$, и обозначим $\hat{G} = \{k\}_{k=0}^{n-1} \setminus G$. Теперь запишем

$$\left|a^N_n(f)\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k\in G}\left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right| + \frac{1}{N}\sum_{k\in\hat{G}}\left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right|. \tag{7.16}$$

Для каждого $k \in G$ отрезок $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ полностью лежит внутри какого-то интервала (a_i, a_{i+1}) и, следовательно, функция $f \in \mathrm{C}^{0,1}_{\Omega}$ дифференцируема на этом отрезке, что позволяет использовать теорему о среднем и получить неравенство

$$\left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right| \leqslant c(f)\left|t_{2k} - t_{2k+1}\right| \leqslant \frac{c(f)}{N}. \tag{7.17}$$

Для $k \in \hat{G}$ есть $s(k)$ точек $a_{i_{k,1}} < a_{i_{k,2}} < \ldots < a_{i_{k,s(k)}}$ внутри сегмента $[t_{2k}, t_{2k+1}]$. Оценим величину $|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})|$ для $k \in \hat{G}$. Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 7.6. *Для* $f \in \mathrm{C}^{0,1}_{\Omega}$ *и отрезка* $[a,b]$, *где* $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$ *выполняется*

$$|f(a) - f(b)| \leqslant c(f)(s + |a-b|),$$

где s *— это число точек разрыва первого рода* $x_1, x_1, \ldots, x_s$ *функции* f *на* $[a,b]$.

Из этой леммы следует

$$\sum_{k\in\hat{G}}\left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right| \leqslant \sum_{k\in\hat{G}} c(f)\left(s(k) + \frac{2\pi}{N}\right) \leqslant c(f)\sum_{k\in\hat{G}} s(k) + \sum_{k\in\hat{G}}\frac{2\pi}{N}.$$

Каждая точка $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ может быть включена в один или два отрезка $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ $(k \in \hat{G})$, следовательно, $\sum_{k\in\hat{G}} s(k) < 2m$. Используя это, и то, что $|\hat{G}| \leqslant m$ имеем

$$\sum_{k\in\hat{G}}\left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right| \leqslant c(f). \tag{7.18}$$

Из (7.16), (7.17) и (7.18) для $f \in \mathrm{C}^{0,1}_{\Omega}$ следует

$$\left|a^N_n(f)\right| \leqslant \frac{c(f)}{N}. \tag{7.19}$$

7.2.2 Доказательство Теоремы 7.1

Доказательство оценки (7.3) из Теоремы 7.1 немедленно следует из неравенств (7.11), (7.12), (7.13), (7.15), (7.19), и $n \leqslant N/2$. Чтобы доказать, что оценка точна по порядку, рассмотрим величину $\left|f_1(\frac{\pi}{2}) - L_{4n,N}(f_1,\frac{\pi}{2})\right|$, где $4n < N/2$ и $f_1(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$. Из Леммы 7.1 мы можем получить неравенство

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant |f(x) - S_n(f,x)| - |R_{n,N}(f,x)|.$$

Нетрудно убедиться, что имеет место следующее представление:

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^k)\sin kx}{k} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\pi}{2k-1}, \tag{7.20}$$

$$S_{2n}(f_1,x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Таким образом, мы можем получить нижнюю оценку величины $\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - S_{4n}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right|$:

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - S_{4n}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right| = \frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1}\right) =$$
$$\frac{8}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2\left(4-\frac{1}{k}\right)\left(4-\frac{3}{k}\right)} > \frac{1/4}{4n}.$$

Отсюда, и из (7.20) мы имеем

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - L_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \geqslant \frac{1/4}{4n} - \left|R_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

Ранее мы показали, что $\left|R_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant c/N$. Через $N(n)$ обозначим натуральное число, такое что для каждого $N \geqslant N(n)$ следует $\left|R_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1/8}{4n}$. Теперь мы имеем

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - L_{4n,N(n)}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \geqslant \frac{1/8}{4n} = \frac{c}{4n}.$$

Отсюда мы видим, что порядок оценки (7.3) не может быть улучшен. Теорема 7.1 доказана.

7.2.3 Оценка величины $|f(x) - S_n(f,x)|$ для $f \in C^2_\Omega$

Чтобы оценить $|f(x) - S_n(f,x)|$ нем понадобится следующая лемма:

Лемма 7.7. *Для $f \in C^2_\Omega$ справедливо следующее неравенство:*

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t+\alpha))dt\right| \leqslant \frac{c(f)}{k^2},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и

$$h_p(x) = \begin{cases}\cos x, & p = 0,\\ \sin x, & p = 1.\end{cases} \tag{7.21}$$

Лемма 7.8. *Для $f \in C^2_\Omega$ справедливы неравенства*

$$|f(x) - S_n(f,x)| \leqslant \frac{c(f)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.22}$$

$$|f(x) - S_n(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{n^2}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{7.23}$$

7.2.4 Оценка величины $|R_{n,N}(f,x)|$ для $f \in C^2_\Omega$

Из (7.7) и (7.8) следует $R_{n,N}(f,x) = R^1_{n,N}(f,x) + R^2_{n,N}(f,x)$, где

$$R^1_{n,N}(f,x) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\mu N(u-t)dt,$$

$$R^2_{n,N}(f,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k(x-t)\cos\mu N(u-t)dt. \tag{7.24}$$

Очевидно, $|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \left|R^1_{n,N}(f,x)\right| + \left|R^2_{n,N}(f,x)\right|$. Величины $\left|R^1_{n,N}(f,x)\right|$ and $\left|R^2_{n,N}(f,x)\right|$ оценены ниже, для чего мы используем несколько вспомогательных лемм.

Из Леммы 7.3 можно получить следующее следствие:

Следствие 7.1. *Если $f \in C^2_\Omega$, тогда $f(a_i - 0) - f(a_i + 0) = 0$, таким образом, мы можем записать* (7.14) *как*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt = \frac{(-1)^q\mu N}{(\mu N)^2 - k^2}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)h_p(k(t-x))h_{1-q}(\mu N(t-u))dt -$$
$$\frac{(-1)^{1+p}k}{(\mu N)^2 - k^2}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)h_{1-p}(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt.$$

Лемма 7.9. *Имеют место следующие оценки:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} h_p(kx)\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Лемма 7.10. *Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ — монотонная последовательность (возрастающая или убывающая) n положительных чисел. Имеет место следующее неравенство:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_p(kx)\right| \leqslant \frac{2\alpha_n + \alpha_1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Лемма 7.11. *Справедливо следующее неравенство:* $\left|R^1_{n,N}(f,x)\right| \leqslant c(f)/N^2$.

Лемма 7.12. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\left|R^2_{n,N}(f,x)\right| \leqslant \frac{nc(f)}{N^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.25}$$

$$\left|R^2_{n,N}(f,x)\right| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N^2}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{7.26}$$

Из вышеприведенных лемм и неравенства $|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \left|R^1_{n,N}(f,x)\right| + \left|R^2_{n,N}(f,x)\right|$ следуют оценки для $|R_{n,N}(f,x)|$:

$$|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{nc(f)}{N^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.27}$$

$$|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N^2}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{7.28}$$

7.2.5 Оценка величины $\left|a_n^{(2n)}(f)\right|$ для $f \in C^2_\Omega$

Лемма 7.13. *Для $a_n^{(2n)}(f)$, где $f \in C^2_\Omega$ и $2n = N$, справедлива оценка $\left|a_n^{(2n)}(f)\right| \leqslant c(f)/N^2$.*

7.2.6 Доказательство Теоремы 7.2

Доказательство Теоремы 7.2 состоит из двух частей: сначала мы докажем неравенства (7.4) и (7.5) теоремы, а затем докажем, что данные оценки не могут быть улучшены для $f \in C^2_\Omega$.

Из неравенств (7.11), (7.12), оценок (7.22), (7.23), (7.27), (7.28) и Леммы 7.13 легко получить (7.4) и (7.5). Чтобы доказать, что порядок этих оценок неулучшаем, рассмотрим вышеупомянутую 2π-периодическую функцию $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi,\pi]$. Очевидно, $f \in C^2_\Omega$. Мы будем рассматривать только случай $n < N/2$. Из (7.6) следует $|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant |f(x) - S_n(f,x)| - |R_{n,N}(f,x)|$. Из (7.27) имеем $|R_{n,N}(f,x)| \leqslant c(f)/N$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти натуральное число N_0, такое, что для каждого $N > N_0$ следует $|R_{n,N}(f,x)| < \varepsilon$. Пусть $N_0(n)$ — натуральное число, такое что для любого $N > N_0(n)$

$$\max_{\substack{x\in E\\ N>N_0(n)}} |R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{1}{2} \max_{x\in E} |f(x) - S_n(f,x)|,$$

где $E \subset \mathbb{R}$. Таким образом, мы можем записать

$$\max_{\substack{x\in E\\ N>N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant \frac{1}{2} \max_{x\in E} |f(x) - S_n(f,x)|. \tag{7.29}$$

Лемма 7.14. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(f,x)| \geqslant c(f)/n, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\max_{|\pi k - x|\geqslant\varepsilon} |f(x) - S_n(f,x)| \geqslant c(f,\varepsilon)/n^2, \quad |\pi k - x| \geqslant \varepsilon.$$

Из (7.29) и предыдущей леммы следует:

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ N>N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant \frac{c}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\max_{\substack{|\pi k - x|\geqslant\varepsilon\\ N>N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant \frac{c(\varepsilon)}{n^2}, \quad |x - \pi k| \geqslant \varepsilon.$$

Теорема 7.2 доказана.

Заключение

В 2018 году в Отделе математики и информатики Дагестанского научного центра РАН проведены научно-исследовательские работы по теме «Функциональные пространства с переменным показателем и их приложения. Некоторые вопросы теории приближений полиномами, рациональными функциями, сплайнами и вейвлетами».

В отчетном году было показано, что функция Лебега

$$\Lambda_{n,m}^{\alpha}(x) = \Lambda_{n,m}^{\alpha}(x) = (1-x^2)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-1}\Big|\frac{1}{m+1}\sum_{k=n}^{n+m}K_{k-2}^{\alpha}(x,t)\Big|dt,$$

средних Валле Пуссена

$$V_{n,m}^{\alpha}(g) = V_{n,m}^{\alpha}(g,x) = \frac{1}{m+1}[\sigma_n^{\alpha}(g,x) + \cdots + \sigma_{n+m}^{\alpha}(g,x)]$$

равномерно ограничена по норме пространства $C[-1;1]$ при $\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{3}{2}$, $c_1 m \le n \le c_2 m$. Используя неравенство Лебега и равномерную ограниченность функции $\Lambda_{n,m}^{\alpha}(x)$, нами получена оценка отклонения средних $V_{n,m}^{\alpha}(g)$ от функции $g \in C[-1,1]$.

Были изучены аппроксимативные свойства частичных сумм $\sigma_n^{\alpha,r}(g)$ специального ряда

$$g(x) = l_{2r-1}(g)(x) + (1-x^2)^r \sum_{k=0}^{\infty} q_{r,k}^{\alpha}\hat{P}_k^{\alpha}(x)$$

в весовых пространствах Лебега с переменным показателем. Получены оценки отклонения $\sigma_n^{\alpha,r}(g)$ от g (теоремы **??**)

В теоремах 3.1 и 3.2 было показано, что интерполяционные рациональные сплайн-функции $R_{N,1}(x)$ позволяют при выполнении определенных условий (приведенных в формулировках этих теорем) интерполировать дискретные функции с сохранением формы ковыпуклости.

Ранее в работах [32–35] для рациональных сплайн-функций $R_{N,1}(x)$ исследованы их аппроксимативные свойства (в частности, доказана безусловная сходимость для функций и производных, получены оценки скорости сходимости), а также исследованы вопросы отсутствия или наличия явления Гиббса.

Отметим, что найдены приложения рациональных сплайн-функций $R_{N,1}(x)$ к приближенному решению начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений.

Выше теоремы 3.1 и 3.2 получены для сплайн-функций $R_{N,1}(x)$ класса $C^1_{[a,b]}$. Теорема 4.1 представляет собой аналог теоремы 3.1 для сплайн-функций $R_{N,2}(x)$ класса $C^2_{[a,b]}$. При этом теорема 3.1 справедлива при условии $1/2 < q_i < 2$, тогда как теорема 4.1 справедлива при более слабом условии $c < q_i < 1/c$ для $c = (2\sqrt{2}+1)/(2\sqrt{2}+5)$.

Однако остается открытым вопрос о справедливости аналога теоремы 3.2 для сплайн-функций $R_{N,2}(x)$.

Исследовано поведение функции Лебега сумм Фурье по модифицированным полиномам Мейкснера $m_{n,N}^{\alpha}(x)$, $\alpha > -1$. При соблюдении условий, указанных в теореме 5.1, получена верняя оценка для функции Лебега для $x \in \left[\frac{\theta_n}{2}, \infty\right)$. Этот результат является обобщением (относительно параметра α) результатов, полученных в работе [40]. Далее для произвольного натурального r и функции f из пространства $l^2_{\rho_N}(\Omega_\delta)$ построены специальные ряды по полиномам $m^\alpha_{n,N}(x)$. Рассмотрена задача об исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм специального ряда с уделением основного внимания на получение поточечной оценки для соответствующей функции Лебега. При этом отметим, что частичные суммы этих рядов, в отличие от сумм Фурье по тем же полиномам, совпадают с значениями исходной функции f в точках $\{0, \delta, 2\delta, \ldots, (r-1)\delta\}$.

Были исследованы аппроксимативные свойства полиномов $L_{n,N}(f,x)$, обладающих наименьшим квадратическим отклонением от функции f относительно системы $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$, при приближении некоторых классов 2π-периодических кусочно-гладких функций. А именно, были найдены неулучшаемые по порядку оценки для величины $|f(x) - L_{n,N}(f,x)|$, когда f — кусочно-гладкая функции с разрывами первого рода, обладающая абсолютно непрерывной производной на кусках, а также, когда f — непрерывная кусочно-гладкия функция с двумя абсолютно непрерывными производными на кусках. Данные оценки приведены в теоремах 7.1 и 7.2.

Список использованных источников

1 Шарапудинов И.И. Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства // Математические заметки. — 2013. — Т. 94. — № 2. — С. 295—309.

2 Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Известия РАН. Серия математическая. — 2014. — Т. 78. — № 5. — С. 201—224.

3 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Фейера и Валле-Пуссена частичных сумм специального ряда по системе $\{\sin x \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$, Матем. сб. — 2015. — Т. 206. — № 4. — С. 131—148.

4 Шарапудинов И.И. О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$ // Математические заметки. — 1979. — Т. 26. — № 4. — С. 613—632.

5 Шарапудинов И.И. Приближение функций в $L^{p(x)}_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами // Известия РАН: Серия математическая. — 2013. — Т.77. — № 2. — С. 197—224.

6 Шарапудинов И.И. Приближение функций из пространств Лебега и Соболева с переменным показателем суммами Фурье-Хаара // Математический сборник. — 2014. — Т. 205. — № 2. — С. 145—160.

7 Магомед-Касумов М.Г. Особенности поведения частичных сумм Фурье – Хаара в двоично-иррациональных точках разрыва // Сибирский математический журнал. — 2013. — Т. 54. — № 6. — С. 1331–1336.

8 Магомед-Касумов М.Г. Сходимость прямоугольных сумм Фурье – Хаара в пространствах Лебега с переменным показателем $L^{p(x,y)}$ // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13. — № 1(2). — С. 76—81.

9 Магомед-Касумов М.Г. Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказский математический журнал. — 2014. — Т. 16. — № 3. — С. 38—46.

10 Магомед-Касумов М.Г. Приближение функций суммами Хаара в весовых пространствах Лебега и Соболева с переменным показателем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14. — № 3. — С. 295—304.

11 Магомед-Касумов М.Г. Вопросы поточечной сходимости в среднем сумм Фурье и их линейных средних по некоторым ортогональным системам: дис. ... канд. физ-мат. наук. Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону. 2015. URL: http://hub.sfedu.ru/diss/announcement/7cb90672-7c69-4d8e-8a21-8ee1ee849beb/ (дата обращения 10.01.2019).

12 Atia M.J., Littlejohn L.L., Stewart J. Spectral Theory of X_1-Laguerre Polynomials // Advances in Dynamical Systems and Applications. — 2013. — ISSN 0973-5321. — V. 8. — № 2. — P. 181—192.

13 Eliana X.L. de Andrade, Cleonice F. Bracciali, A. Sri Ranga. Asymptotics of zeros of Jacobi–Sobolev orthogonal polynomials // Journal of Approximation Theory. — November 2010. — V. 162. — Iss. 11. — P. 1945—1963.

14 Area I., Godoy E., Marcellan F., Moreno-Balcazar J.J. Δ-Sobolev orthogonal polynomials of Meixner type: asymptotics and limit relation // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2005. — V. 178. — № 1—2. — P. 21—36.

15 Manuel Alfaro, Teresa E. Perez, Miguel A. Pinnar, M. Luisa Rezola. Sobolev Orthogonal Polynomials: The discrete-continuous case // Methods Appl. Anal. — 1999. — V. 6. — № 4. — P. 593—616.

16 Francisco Marcellan, Yuan Xu. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. — 2015. — V. 33. — Iss. 3. — P. 308—352. ISSN 0723-0869. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.exmath.2014.10.002 (дата обращения 10.01.2019).

17 Шарапудинов И.И. О базисности системы полиномов Лежандра в пространстве Лебега $L^{p(x)}(-1{,}1)$ с переменным показателем $p(x)$ // Математический сборник. — 2009. — Т. 200. — № 1. — С. 137—160.

18 Шарапудинов И. И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье – Лежандра // Матем. сб. — 2000. — Т. 191. — № 5. 143—160.

19 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Матем. сб. — 2003. Т. 194. — № 3. — С. 115—148.

20 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Матем. сб. — 2006. — Т. 197. — № 3. — С. 135—154.

21 Schweikert D.G. An interpolation curve using a spline in tension // J. Math. Phys. — 1966. — V. 45. — P. 312—317.

22 Miroshnichenko V.L. Convex and monotone spline interpolation // Constuctive Theory of Function: Proc. Int. Conf. (Varna, 1984). — Sofia: Publ. House of Bulgarian Acad. Sci., 1984. — P. 610–620.

23 Мирошниченко В.Л. Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 // Вычислительные системы: сб. ст. ИМ СО АН СССР. — Новосибирск. — 1990. — № 137: Приближение сплайнами. — С. 31—57.

24 Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. — М.: Физматлит, 2006. — 360 с.

25 Волков Ю.С., Богданов В.В., Мирошниченко В.Л., Шевалдин В.Т. Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88. — № 6. — С. 836—844.

26 Волков Ю.С., Шевалдин В.Т. Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2012. — Т. 18. — № 4. — С. 145—152.

27 Богданов В.В., Волков Ю.С. Об условиях формосохранения при интерполяции параболическими сплайнами по Субботину // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22. — № 4. — С. 102—113.

28 Schaback R. Spezielle rationale Splinefunktionen // J. Approx.Theory. — 1973. — V. 7. — № 2. — P. 281–292.

29 Spath H. Spline algorithms for curves and surfaces. — Winnipeg: Utilitas Mathematica Publ. Inc., 1974. — 198 p.

30 Hussain M.Z., Sarfraz M., Shaikh T.S. Shape preserving rational cubic spline for positive and convex data // Egyptian Informatics Journal. — 2011. — V. 12. — P. 231—236.

31 Edeo A., Gofeb G., Tefera T. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. — 2015. — V. 12. — № 1. — P. 110—122.

32 Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплайны по рациональным интерполянтам // Дагестанские электронные математические известия. — 2015. — № 4. — С 22—31.

33 Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценки скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам для непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23. — № 3. — С. 224—233.

34 Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань, 2017. — Т. 54. — С. 304—306.

35 Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами // Дагестанские электронные математические известия. — 2017. — № 7. — С. 16—28.

36 Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные многочлены дискретной переменной. — М.: Наука, 1985.

37 Bateman H, Erdeyi A. Higher transcendental functions. — Vol. 2. McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1953.

38 Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на сетках. — Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.

39 Gadzhimirzaev R.M. Approximative properties of Fourier–Meixner sums // Пробл. анал. Issues Anal. — 2018. — V. 7(25). — № 1. — P. 23—40.

40 Гаджиева З.Д. Смешанные ряды по полиномам Мейкснера. Кандидатская диссертация - Саратов. Саратовский гос. ун-т. — 2004.

41 Гаджимирзаев Р.М. Приближение функций, заданных на сетке $\{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$ суммами Фурье-Мейкснера // Дагестанские электронные математические известия. — 2017. — № 7. — С. 61—65.

42 Гаджимирзаев Р.М. Аппроксимативные свойства специальных рядов по полиномам Мейкснера // Владикавк. матем. журн. — 2018. — Т. 20. — № 3. — С. 21—36.

43 Гаджимирзаев Р.М. Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16. — № 4. —. С. 388—-395.

44 Шарапудинов И.И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Мат. сборник. — 2000. — Т. 191(5) — С. 143—160.

45 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Мат. заметки. — 2002. — Т. 72(5). — С. 765—795.

46 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. — Махачкала: Издательство Дагестанского научного центра, 2004. — С. 1—176.

47 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Мат. сборник. — 2006. — Т. 97(3). — С. 135—154.

48 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Мат. заметки. — 2008. — Т. 84(3). — С. 452—471.

49 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Мат. сборник. — 2003. — Т. 194(3). — С. 115—148.

50 Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Мат. заметки. — 2010. — Т. 88(1). — С. 116—147.

51 Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. — 2004. — Т. 78(5). — С. 201—224.

52 Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. — 2015. — № 4.

53 Сеге Г. Ортогональные многочлены. — Москва: Физматгиз, 1962.

54 Gasper G. Positiviti and special function // Theory and appl.Spec.Funct. Edited by Richard A.Askey. — 1975. — Pp. 375–433.

55 Kwon K.H., Littlejohn L.L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. Iss. — 1995. — № 2. P. 289—303.

56 Kwon K.H., Littlejohn L.L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. — 1998. — V. 28. — P. 547—594.

57 Marcellan F., Alfaro M., Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1993. — V. 48. — P. 113—131.

58 Iserles A., Koch P.E., Norsett S.P., Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. — 1991. — № 65. — P. 151—175.

59 Meijer H.G. Laguerre polynimials generalized to a certain. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. — 1993. — № 73. — Pp. 1—16.

60 Lopez G. Marcellan F. Vanassche W. Relative Asymptotics for Polynomials Orthogonal with Respect to a Discrete Sobolev Inner-Product // Constr. Approx. — 1995. — № 11:1. — Pp. 107—137.

61 Marcellan F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. — 2015. — № 33(3). — Pp. 308—352.

62 И.И. Шарапудинов Системы функций, ортогональные по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». — 2016. — С. 329—332.

63 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. — Philadelphia: SIAM, 2000.

64 Trefethen L.N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. — Cornell University, 1996.

65 Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. — Москва: Машиностроение, 1986.

66 Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. — Москва: Наука, 1983. — С. 143—160.

67 Магомед-Касумов М.Г. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хаара // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». — 2016. — С. 176—178.

68 Гончар А.А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Мат. сборник. — 1975. — Т. 97(139). — № 4(8). — С. 607—629.

69 Теляковский С.А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами // Мат. сборник. — 1966. — № 70(2). — С. 252—265.

70 Гопенгауз И.З. К теореме А. Ф. Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке // Мат. заметки. — 1967. — № 1(2). — С. 163—172.

71 Осколков К.И. К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки. — 1975. — № 18(4). — С. 515—526.

72 Sharapudinov I.I. On the best approximation and polinomial of the least quadratic deviation // Analysis Mathematica. — 1983. — № 9(3). — P. 223—234.

73 Шарапудинов И.И. О наилучшем приближении и суммах Фурье-Якоби //Мат. заметки. — 1983. — № 34(5). — С. 651—661.

74 Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — Москва: Физматгиз, 1960.

75 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам // — Махачкала: Издательство Дагестанского научного центра, 2004. — С. 1—176.

76 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математические заметки. — 2005. — Т. 78. — № 3. — С. 442—-465.

77 Шарапудинов И.И. Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сибирский математический журнал. — 2017. — Т. 58. № 2. — С. 440—467.

78 Meijer H.G. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. — 1993. — V. 73. — P. 1—16.

79 Marcellan F., Yuan Xu ON SOBOLEV ORTHOGONAL POLYNOMIALS. arXiv: 6249v1 [math.C.A] 25 Mar 2014. Pp. 1–40

80 Lopez G., Marcellan F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product // Constr. Approx. — 1995. — V. 11. — Iss. 1. — P. 107—137.

81 Сеге Г. Ортогональные многочлены. — Москва: Физматгиз, 1962.

82 Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Mathem. — 1965. — V. 87. — P. 698—708.

83 Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. — Москва: Высшая школа, 1975.

84 Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. — Москва: Наука. 1974.

85 Шарапудинов И.И. Ортогональные по Соболеву системы, порожденные ортогональными функциями // Изв. РАН. Сер. Математическая. — 2018. — Т. 82. (Принята к печати)

86 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. — Philadelphia: SIAM, 2000.

87 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Применение рядов Чебышева для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. — 2014. — № 11. — С. 517—531.

88 Лукомский Д.С., Терехин П.А. Применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов. ООО «Издательство «Научная книга». — 2016. — С. 171—173.

89 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра. Дифференциальные уравнения. — 2017 (принята к печати)

90 Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. Москва: АФЦ, 1999.

91 Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 9. № 1. — С. 68—76.

92 G. Faber Ober die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. — 1910. — V. 19. — P. 104—112.

93 Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Якоби // Дагестанские электронные математические известия. — 2016. — № 6. — С. 1—24.

94 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. — Махачкала: Издательство Дагестанского научного центра, 2004. — С. 1–176.

95 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. — Philadelphia: SIAM, 2000.

96 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференциальные уравнения. — 2017. (принята к печати)

97 Сеге Г. Ортогональные многочлены. — Москва. Физматгиз, — 1962.

98 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Сиб. электрон. матем. изв. — 1983. — № 7. — С. 122—131

99 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Метод решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Выч. мет. программирование. — 2013. — № 14:2. — С. 203—214.

100 Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления // Физматлит. Москва. — 2001. — Т. 2. — С. 810.

101 Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала, Изд-во Даг. гос. пед. ун-та. — 1997.

102 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т.16. — № 3. — С. 310—321.

103 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д., Гаджимирзаев Р.М. Разностные уравнения и полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Владикавказский Мат. журнал. — 2017. — Т.19. — № 2. — С. 58—72.

104 Шарапудинов И.И. Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Мат. заметки. — 2000. — Т. 67. № 3. — С. 460—470.

105 Шарапудинов Т.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестник Дагестанского научного центра

РАН. — 2007. — Т. 29. — С. 12—23.

106 Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональных по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Современные проблемы теории функций и их приложения. // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы. — 2016. — С. 329—332.

107 Fernandez L., Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar, Xu Y. Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball // Journal of Approximation Theory. — 2013. — № 171. — P. 84—104.

108 Antonia M. Delgado, Fernandez L., Doron S. Lubinsky, Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar. Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2016. — V. 440. — № 2. — P. 716—740.

109 Fernandez L., Marcellan F., Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar, Xu Y. Sobolev orthogonal polynomials on product domains // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2015. — № 284. — P. 202—215.

110 Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем. — 2017. — № 8. — С. 67—79.

111 Гаджимирзаев Р.М. Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — № 16:4. — С. 388—395.

112 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д., Гаджимирзаев Р.М. Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестанские электронные математические известия. — 2016. — № 6. — С. 31—60.

113 Сеге Г. Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962.

114 Meijer H.G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. — 1993. — V. 73. — Iss. 1. — P. 1—16.

115 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. — Махачкала: Изд-во ДНЦ РАН, 2004.

116 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. — Москва: Наука, 1974.

117 Ширяев А.Н. Вероятность-1. — Москва. Изд-во МЦНМО, 2007.

118 Bernshtein S.N. On trigonometric interpolation by the method of least squares // Dokl. Akad. Nauk USSR. — 1934. — V. 4 — P. 1—5. (in Russian)

119 Erdös P. Some theorems and remarks on interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) — 1950. — V. 12. — P. 11—17.

120 Kalashnikov M.D. On polynomials of best (quadratic) approximation on a given system of points. // Dokl. Akad. Nauk USSR. — 1955. — V. 105. — P. 634—636. (in Russian)

121 Krilov V.I. Convergence of algebraic interpolation with respect to the roots of a Chebyshev polynomial for absolutely continuous functions and functions with bounded variation. // Dokl. Akad. Nauk USSR. — 1956. — V. 107. — P. 362—365. (in Russian)

122 Marcinkiewicz J. Quelques remarques sur l'interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) — 1936. — V. 8. — P. 127—130. (in French)

123 Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynômes d'interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) — 1936. — V. 8. — P. 131—135. (in French)

124 Natanson I.P. On the Convergence of Trigonometrical Interpolation at Equi-Distant Knots. // Annals of Mathematics, Second Series, — 1944. — V. 45. — № 3. — P. 457—471. DOI:10.2307/1969188.

125 Nikol'skii S.M. On some methods of approximation by trigonometric sums. // Mathematics of the USSR - Izvestiya. — 1940. — V. 4. — P. 509—520. (in Russian)

126 Turetskiy A.H. Interpolation theory in exercises. — Minsk: Vissheyshaya shkola, 1968. — 320 p. (in Russian).

127 Zygmund A. Trigonometric Series. Vol 1. — Cambridge: Cambridge University Press, 1959. — 747 p.

128 Akniyev G.G. Discrete least squares approximation of piecewise-linear functions by trigonometric polynomials // Issues Anal. — 2017. — V. 6 (24), — Iss. 2. — P. 3—24. DOI: 10.15393/j3.art.2017.4070.

129 Sharapudinov I.I. On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation // Anal. Math. — 1983. — V. 9. — Iss. 3. — P. 223—234.

130 Sharapudinov I.I. Overlapping transformations for approximation of continuous functions by means of repeated mean Valle Poussin // Daghestan Electronic Mathematical Reports. — 2017. Iss. 8. — P. 70—92.

131 Magomed-Kasumov M.G. Approximation of piecewise smooth functions by the trigonometric Fourier series // Materials of XIX International Saratov Winter School "Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications". — 2018. — P. 190—193.

132 Courant R. Differential and Integral Calculus Vol. 1. — NewJersey: Wiley-Interscience, 1988. — 704 p.