ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ДАГЕСТАНСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК №
Регистрационный №
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Врио председателя ДНЦ РАН

___________ Муртазаев А.К.
«___»___________ 2019 г.

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ТЕОРИЯ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО СОБОЛЕВУ. АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПО СОБОЛЕВУ. ПРИЛОЖЕНИЯ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО СОБОЛЕВУ

(итоговый отчет за 2018 г.)

Руководитель НИР,
Врио зав. Отделом математики и информатики ДНЦ РАН, канд. физ.-мат. наук ____________ Шарапудинов Т.И.

г. Махачкала, 2019

Список исполнителей

Научный руководитель,
Зав. Отделом математики и информатики ДНЦ РАН, д.ф.-м.н.,
И.И. Шарапудинов

с.н.с. ОМИ, к.ф.-м.н,
Магомед-Касумов М.Г.,

с.н.с. ОМИ, к.ф.-м.н,
Шарапудинов Т.И.,

н.с. ОМИ,
Гаджиева З.Д.,

н.с. ОМИ,
Султанахмедов М.С.,

м.н.с. ОМИ,
Гаджимирзаев Р.М.,

инж.-иссл. ОМИ,
Гусейнов И.Г.

Нормоконтролер, н.с. ОМИ,
Султанахмедов М.С.

Реферат

Отчет содержит X с., X источников.

Ключевые слова: СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ; РЯДЫ ФУРЬЕ; СМЕШАННЫЕ РЯДЫ; ЗАДАЧА КОШИ; ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ; ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ; УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ; ПОЛИНОМЫ ЯКОБИ; ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА; ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА; ПОЛИНОМЫ ЛАГЕРРА; ФУНКЦИИ ХААРА; СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ; СПЕЦИАЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ; НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ; ФУНКЦИЯ ЛЕБЕГА; НЕРАВНОМЕРНЫЕ СЕТКИ; СРЕДНИЕ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА.

Настоящий отчёт содержит итоги работы за 2017 год Отдела математики и информатики ДНЦ РАН по теме «Теория полиномов, ортогональных по Соболеву. аппроксимативные свойства рядов Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву. приложения полиномов, ортогональных по Соболеву» из Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы.

В отчетном году продолжены исследования по теории систем функций, ортогональных по Соболеву, порожденных классическими ортогональными системами. Особое внимание уделено вопросам сходимости рядов Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным классическими ортогональными полиномами непрерывной и дискретной переменной. Изучены асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных указанными классическими системами. В частности, изучены алгебраические и асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных классическими полиномами Якоби, Лагерра, полиномами Чебышева дискретной переменной, полиномами Мейкснера и полиномами Шарлье.

На основе систем функций, ортогональных по Соболеву, разработаны алгоритмы для численно-аналитического решения систем линейных и нелинейных дифференциальных и разностных уравнений. Для широкого класса систем функций, ортогональных по Соболеву, найдены условия, при соблюдении которых сходятся итерационные процессы, на которых основываются указанные алгоритмы для приближенного решения систем дифференциальных и разностных уравнений. Ряд разработанных алгоритмов доведены до численных экспериментов (разработаны прикладные программные пакеты, реализующие указанные алгоритмы). Проведенные эксперименты показывают высокую эффективность предлагаемого численно-аналитического подхода к решению систем дифференциальных и разностных уравнений.

Содержание

Введение 6
0.1 Приближение непрерывных 2π-периодических кусочно гладких функций дискретными суммами Фурье 10
0.2 Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье для кусочно-гладких разрывных функций 14
Заключение 20
Список использованных источников 22

Обозначения и сокращения

ДНЦ — Дагестанский научный центр

ОМИ — Отдел математики и информатики

РАН — Российская академия наук

Введение

Согласно плану научно-исследовательской работы за 2017 год исследования, проводимые в Отделе математики и информатики Дагестанского научного центра РАН, включают в себя работы по теме «Теория полиномов, ортогональных по Соболеву. аппроксимативные свойства рядов Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву. приложения полиномов, ортогональных по Соболеву».

Теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева, получила в последние три десятилетия интенсивное развитие и нашла ряд важных приложений (см. [12–15,18,71] и цитированную там литературу). Характерной особенностью скалярных произведений типа Соболева является, в частности, то, что они, как правило, содержат слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в одной или нескольких точках числовой оси. Например, часто рассматривают скалярное произведение вида

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int\limits_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt, \tag{0.1}$$

в котором f и g — функции, заданные на $[a,b]$ и непрерывно дифференцируемые там $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ и $g^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны и $f^{(r)}(x)$, $g^{(r)}(x) \in L^2_\rho(a,b)$, где $L^2_\rho(a,b)$ — пространство Лебега с весом $\rho(x)$. Следует отметить, что полиномы, ортогональные по Соболеву, по своим свойствам могут весьма существенно отличаться от обычных ортогональных на интервале полиномов. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале (a,b), могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах интервала (a,b) со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a,b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. Скалярное произведение (0.1) имеет одну особую точку, а именно, точку a, в окрестности которой «контролируется», поведение соответствующих полиномов, ортогональных по Соболеву. Это достигается за счет наличия в скалярном произведении (0.1) слагаемого вида $\sum\limits_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a)$.

Надо отметить, что полиномы, ортогональные по Соболеву, совпадают в частных случаях с так называемыми смешанными рядами, исследования по которым были начаты в [1] и продолжены в работах [2–8]. В этих работах смешанные ряды не трактовались как ряды Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву. Вместо этого при исследовании аппроксимативных свойств смешанных рядов в [1–8] использовался тот факт, что частичная сумма смешанного ряда представляет собой проектор на соответствующее подпространство алгебраических полиномов, не обращая внимание на то, что она является суммой Фурье по тем самым полиномам, которые фигурируют в смешанном ряде и образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения типа Соболева. В данной работе, напротив, мы будем рассматривать смешанные ряды именно как ряды Фурье по полиномам, ортонормированным относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, что позволяет применять к исследованию некоторых важных свойств этих рядов терминологию и аппарат теории гильбертовых пространств. С этой целью для натурального r и $\alpha,\beta > -1$ рассмотрены полиномы $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$, ассоциированные с классическими полиномами Якоби, ортонормированные относительно скалярного произведения типа Соболева

$$< f,g >= \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)g^{(k)}(-1) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\kappa(t)dt, \tag{0.2}$$

где $\kappa(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$. Для этих полиномов установлены явный вид (теорема **??**) и связь с полиномами Якоби $P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)$ (теорема **??**). Особое внимание уделено случаю $\alpha = \beta = 0$. Соответствующие полиномы $p_{r,k}(x) = p_{r,k}^{0,0}(x)$, ортогональные по Соболеву, определяются равенством (**??**) при $\alpha = \beta = 0$ (порождены полиномами Лежандра). Они связаны с полиномами Якоби особенно просто (см. (**??**) и (**??**)). Именно этот факт позволяет (см. п. **??**) ввести в рассмотрение некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам Якоби $p_k^{\alpha,\alpha}(x)$, частичные суммы $\sigma_{r,n}^{\alpha}(f)$ которых обладают важным для приложений (см. начало п. **??**) свойством «прилипания» в точках ±1. Эти ряды возникают как естественное обобщение смешанного ряда по полиномам Лежандра $p_k(x) = p_k^{0,0}(x)$, представляющего собой ряд Фурье по полиномам $p_{r,k}(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$. При этом отметим, что в случае $\alpha = r$ введенный в п. **??** специальный ряд совпадает с рядом Фурье по полиномам $p_{r,k}(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$ (или, что то же, со смешанным рядом по полиномам Лежандра). Упомянутое выше свойство прилипания частичных сумм $\sigma_{r,n}^{\alpha}(f) = \sigma_{r,n}^{\alpha}(f,x)$ с исходной функцией $f(x)$ в точках ±1 (и, следовательно, $\sigma_{r,n}^{\alpha}(f,x)$ и $\sigma_{r,m}^{\alpha}(f,x)$ друг с другом) состоит в том, что если функция $f(x)$ $r-1$-раз дифференцируема в точках ±1 , то $f^{(\nu)}(\pm1) = (\sigma_{r,N}^{\alpha}(f,\pm1))^{(\nu)}$, $\nu = 0,1,\ldots,r-1$. Это свойство позволяет использовать $\sigma_{r,n}^{\alpha}(f)$ как аппарат приближения в задаче о взвешенной с весом $(1-x^2)^{-r+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}$ аппроксимации алгебраическими полиномами дифференцируемых и аналитических функций, заданных на $[-1,1]$. Результаты работы, сформулированные в теоремах **??** и **??**, касаются оценок взвешенного приближения на $[-1,1]$ с весом $(1-x^2)^{-r+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}$ функции $f(x)$ частичными суммами $\sigma_{r,n}^{\alpha}(f,x)$. Оценка $|f(x)-\sigma_{r,N}^{\alpha}(f,x)|/(1-x^2)^{r-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \le c(r,\alpha)\sum_{k=0}^{N}\frac{E_{N+k}^{r}(f)}{k+1}$, установленная в теореме **??**, в которой величина $E_n^r(f)$ представляет собой взвешенное с весом $(1-x^2)^{-r/2}$ наилучшее приближение функции f на $[-1,1]$ алгебраическими полиномами $p_n(x)$ степени n, которые подчиняются условиям $p_n^{(\nu)}(\pm1) = f^{(\nu)}(\pm1)$ $(\nu = 0,\ldots,r-1)$, показывает, что частичные суммы $\sigma_{r,n}^{\alpha}(f,x)$ обладают весьма привлекательными с точки зрения различных приложений аппроксимативными свойствами. Кроме того, оценка $|f(x)-\sigma_{r,N}^{\alpha}(f,x)|/(1-x^2)^{r-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \le \frac{c(r,\alpha,B)}{(1-q)^2}q^{N-2r+1}$, полученная в теореме **??** для аналитической в эллипсе $\mathcal{E}_q$ с фокусами в точках ±1, сумма полуосей которого равна $R = 1/q > 1$, функции f показывает, что по своим аппроксимативным свойствам на классах аналитических функций $A_q(B)$ (см. п. **??**) $\sigma_{r,n}^{\alpha}(f,x)$ не уступают суммам Фурье $S_n(f,x)$ по полиномам Чебышева первого рода. При этом, как уже отмечалось, $\sigma_{r,n}^{\alpha}(f,x)$

обладает свойством прилипания: $f^{(\nu)}(\pm 1) = (\sigma_{r,N}^{\alpha}(f,\pm 1))^{(\nu)}$, $\nu = 0,1,\ldots,r-1$, тогда как суммы Фурье — Чебышева $S_n(f,x)$ этим важным свойством, вообще говоря, не обладают.

Результаты, сформулированные в виде теорем **??** и **??** (п.**??**), направлены на исследование свойств самих полиномов $p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x)$. В теореме **??** получен явный вид полинома $p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x)$, представляющий собой разложение $p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x)$ по степеням $(x+1)^{k+r}$ с $0 \le k \le n$. Этот результат нацелен в первую очередь на изучение асимптотического поведения полиномов $p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x)$ в окрестности точки $x = -1$ при $n \to \infty$. Кроме того, он может быть использован для нахождения значений полиномов $p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x)$ с небольшими степенями $n+r$ в заданной точке x. Это касается также наиболее детально изученного нами ранее случая $\alpha = \beta = 0$. Дело заключается в том, что результат, полученный в теореме **??**, в которой установлена связь полиномов $p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x)$ с классическими полиномами Якоби $P_{n+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)$, не справедлив для нескольких начальных степеней $n+r$ и, стало быть, не может быть использован для описания свойств полиномов $p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x)$ с такими степенями. Например, для отмеченного уже частного случая $\alpha = \beta = 0$ равенства (**??**) и (**??**) теряют смысл для полиномов $p_{r,k}(x) = p_{r,k}^{0,0}(x)$, у которых $r \le k \le 2r-1$. Теорема **??** позволяет, в частности, восполнить этот пробел (см. (**??**)). Что касается самой теоремы **??**, то она может быть использована при исследовании асимптотических свойств полиномов $p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(z)$ при $|1+z| \ge \varepsilon > 0$ и $n \to \infty$.

Частичные суммы рядов Фурье — Соболева (смешанных рядов) по классическим ортогональным полиномами, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. Такие проблемы непременно возникают, например, при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В параграфе **??** рассмотрено применение рядов Фурье по полиномам, порожденным классическими полиномами Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$, к задаче обращения преобразования Лапласа. В этом параграфе в связи задачей об обращении преобразования Лапласа вводятся обобщенные специальные ряды по полиномам Лагерра, обладающие на конечных отрезках вида $[0,A]$ лучшими, чем у классических рядов Фурье — Лагерра, аппроксимативными свойствами для дифференцируемых функций (см. п. **??**).

В параграфе **??** рассмотрена задача о приближенном решении задачи Коши для ОДУ вида

$$y'(x) = f(x,y), \quad y(0) = y_0, \tag{0.3}$$

суммами Фурье по системе $\{\varphi_{r,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, ортогональной по Соболеву и порожденной ортонормированной системой функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ посредством равенств (**??**) и (**??**). Наряду с различными сеточными методами для решения этой задачи часто применяют так называемые спектральные методы [20–24]. Напомним, что суть спектрального метода решения задачи Коши для ОДУ (**??**) заключается в том, что в первую очередь искомое решение $y(x)$ представляется в виде ряда Фурье

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{y}_k \psi_k(x) \tag{0.4}$$

по подходящей ортонормированной системе $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ (чаще всего в качестве $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ используют тригонометрическую систему, ортогональные полиномы, вэйвлеты, корневые функции того или иного дифференциального оператора и некоторые другие). На втором этапе осуществляется подстановка вместо $y(x)$ упомянутого ряда Фурье в уравнение (0.3). Это приводит к системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\hat{y}_k$ ($k = 0,1,\ldots$). На третьем этапе требуется решить эту систему с учетом начальных условий $y^{(k)}(-1) = y_k$, $k = 0,1,\ldots,r-1$ исходной задачи Коши. Одна из основных трудностей, которая возникает на этом этапе, состоит в том, чтобы выбрать такой ортонормированный базис $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^\infty$, для которого искомое решение $y(x)$ уравнения (0.3), представленное в виде ряда (0.4), удовлетворяло начальным условиям $y^{(k)}(-1) = y_k$, $k = 0,1,\ldots,r-1$. Более того, поскольку в результате решения системы уранений относительно неизвестных коэффициентов $\hat{y}_k$ будет найдено только конечное их число с $k = 0,1,\ldots,n$, то весьма важно, чтобы частичная сумма ряда (0.4) вида $y_n(x) = \sum_{k=0}^n \hat{y}_k\psi_k(x)$, будучи приближенным решением рассматриваемой задачи Коши, также удовлетворяла начальным условиям $y_n^{(k)}(-1) = y_k$, $k = 0,1,\ldots,r-1$. Как показано в параграфе **??**, базис $\{\psi_k(x) = p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^\infty$, состоящий из полиномов $p_{r,k}^{\alpha,\beta}x)$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (0.2) и порожденных ортонормированными полиномами Якоби $p_k^{\alpha,\beta}(x)$ посредством равенства (**??**), требуемыми свойствами обладает. С использованием рядов Фурье по системе $p_{r,k}^{\alpha,\beta}x)$ разработан итерационный метод решения задачи Коши для ОДУ. Таким образом, полиномы, ортогональные по Соболеву относительно скалярного произведения (0.2), тесно связаны с задачей Коши для уравнения (0.3). Можно также показать,что полиномы $p_{r,k}^{0,0}(x)$ могут служить удобным и эффективным методом приближенного решения двухточечной краевой задачи для уравнений типа (0.3).

В отчетном году было продолжено рассмотрение систем дискретных функций $\psi_{r,n}(x)$ ($r \in \mathbb{N}, n = 0,1,\ldots$), ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева следующего вида

$$\langle f,g\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0)\Delta^k g(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j)\Delta^r g(j)\rho(j), \tag{0.5}$$

где функции f и g заданы на множестве $\Omega = \{0,1,\ldots,\}$, $\rho = \rho(j)$ $(j \in \Omega)$ – дискретная весовая функция. В случае, когда $r = 0$ мы будем считать, что $\sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0)\Delta^k g(0) = 0$. При $r \geq 1$ особой точкой в скалярном произведении (0.5) является $x = 0$, в которой «контролируется» поведение соответствующих ортогональных по Соболеву функций дискретной переменной, благодаря присутствию в (0.5) выражения $\sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0)\Delta^k g(0)$. Нам удалось показать, что системы дискретных функций, ортонормированные по Соболеву, могут быть использованы для приближенного решения разностных уравнений (в том числе и нелинейных) спектральными методами путем представления искомого решения рассматриваемого уравнения (систем уравнений) в виде рядов по функциям, ортогональным по Соболеву. Основная идея рассматриваемого подхода заключается в конструировании некоторого итерационного процесса для приближенного нахождения неизвестных коэффициентов указанного разложения искомого решения разностного уравнения. При доказательстве сходимости сконструированного итерационного процесса решающую роль играют свойства функций, ортонормированных по Соболеву и порожденных заданной ортонормированной системой функций $\psi_n(x)$ $(n = 0,1,\ldots)$.

Как частный случай системы $\psi_{r,n}(x)$ рассмотрена система полиномов $s_{r,n}(x)$, порожденная системой классических ортонормированных полиномов Шарлье $s_n(x)$. Основное внимание уделено получению различных свойств полиномов $s_{r,n}(x)$.

0.1 Приближение непрерывных 2π-периодических кусочно гладких функций дискретными суммами Фурье

0.1.1 Аннотация

Пусть $N \geqslant 2$ — некоторое натуральное число. Выберем на вещественной оси N равномерно расположенных точек $t_k = 2\pi k/N + u$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$. Обозначим через $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f,x)$ $(1 \leqslant n \leqslant N/2)$ тригонометрический полином порядка n, обладающий наименьшим квадратичным отклонением от f относительно системы $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. Выберем $m+1$ точку $-\pi = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = \pi$, где $m \geqslant 2$, и обозначим $\Omega = \{a_i\}_{i=0}^{m}$. Через C_Ω^r обозначим класс 2π-периодических непрерывных функций f, r-раз дифференцируемых на каждом сегменте $\Delta_i = [a_i,a_{i+1}]$, причем производная $f^{(r)}$ на каждом Δ_i абсолютно непрерывна. В данной работе рассмотрена задача приближения функций $f \in C_\Omega^2$ полиномами $L_{n,N}(f,x)$. Показано, что вместо оценки $|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant c \ln n/n$, которая следует из известного неравенства Лебега, найдена точная по порядку оценка $|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant c/n$ $(x \in \mathbb{R})$, которая равномерна относительно $1 \leqslant n \leqslant N/2$. Кроме того, найдена локальная оценка $|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant c(\varepsilon)/n^2$ $(|x - a_i| \geqslant \varepsilon)$, которая также равномерна относительно $1 \leqslant n \leqslant N/2$. Доказательства этих оценок основаны на сравнении дискретных и непрерывных конечных сумм ряда Фурье.

0.1.2 Введение

Пусть Ω — множество из $m+1$ точек $\{a_i\}_{i=0}^{m}$ $(m > 2)$, таких, что $-\pi = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = \pi$. Обозначим через $C_\Omega^{0,r}$ класс всех 2π-периодических функций с r абсолютно непрерывными производными на каждом интервале (a_i, a_{i+1}), и через C_Ω^r обозначим подкласс всех непрерывных функций из $C_\Omega^{0,r}$ (здесь мы говорим, что f абсолютно непрерывна на интервале (a,b) если функция $\overline{f}$ абсолютно непрерывна на сегменте $[a,b]$, где $\overline{f}(x) = f(x)$ для $x \in (a,b)$, $\overline{f}(a) = f(a+0)$, и $\overline{f}(b) = f(b-0)$).

Через $L_{n,N}(f,x)$ обозначим тригонометрических полином порядка n обладающих наименьшим квадратичным отклонением от функции f в точках $\{t_j\}_{i=0}^{N-1}$, где $t_j = u + 2\pi j/N$, $n \leqslant N/2$, $N \geqslant 2$, и $u \in \mathbb{R}$. Другими словами, $L_{n,N}(f,x)$ доставляет минимум сумме $\sum_{j=0}^{N-1} |f(t_j) - T_n(t_j)|^2$ на множестве всех тригонометрических полиномов степени не выше n. Подробнее о приближении функций тригонометрическими полиномами можно прочитать в работах [75–84].

Также, мы будем обозначать через c или $c(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ некие положительные константы, которые зависят только от указанных аргументов и могут различаться в разных местах в тексте. Через $S_n(f,x)$ обозначим n-ю частичную сумму ряда Фурье функции f. Также отметим, что легко показать, что ряд Фурье любой функции $f \in C^2_\Omega$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и возможно следующее представление:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \tag{0.6}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt. \tag{0.7}$$

Рассмотрим задачу оценки значения $|f(x) - L_{n,N}(f,x)|$ для $f \in C^2_\Omega$. Заметим, что для одного частного случая данная задача была рассмотнера в работе [85], где значение $|f(x) - L_{n,N}(f,x)|$ оценено для 2π-периодической функции $f(x) = |x|$ ($x \in [-\pi,\pi]$). В следующей теореме мы обобщим результат, полученный в [85], для произвольной $f \in C^2_\Omega$.

Теорема 0.1. *Для любой $f \in C^2_\Omega$ выполняются следующие неравенства:*

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{0.8}$$

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{n^2}, \quad x \in |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{0.9}$$

Данные оценки неулучшаемые по порядку.

Для доказательства данной теоремы нам понадобится лемма из [86]:

Лемма 0.1 (Sharapudinov, [86])**.** *Если ряд Фурье функции f сходится в точках $t_k = u+2k\pi/N$, тогда имеет место представление*

$$L_{n,N}(f,x) = S_n(f,x) + R_{n,N}(f,x), \tag{0.10}$$

где

$$R_{n,N}(f,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)\cos\mu N(u-t)f(t)dt, \tag{0.11}$$

$2n < N$ и $D_n(x)$ — это ядро Дирихле:

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx. \tag{0.12}$$

Данная лемма рассматривает только случай, когда $2n < N$. Если $2n = N$ (когда N — четное) мы можем записать (см. [86])

$$L_{n,2n}(f,x) = L_{n-1,2n}(f,x) + a_n^{(2n)}(f)\cos n(x-u), \tag{0.13}$$

где

$$a_n^{(2n)}(f) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k)\cos n(t_k - u). \tag{0.14}$$

Чтобы доказать неравенства (0.8) и (0.9) из Теоремы 0.1 воспользуемся формулами

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant |f(x) - S_n(f,x)| + |R_{n,N}(f,x)|, \quad n < N/2, \tag{0.15}$$

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant |f(x) - S_{n-1}(f,x)| + |R_{n-1,N}(f,x)| + \left|a_n^{(2n)}(f)\right|, \quad n = N/2, \tag{0.16}$$

которые сразу следуют из (0.10) и (0.13). Далее мы найдем оценки для $|f(x) - S_n(f,x)|$, $|R_{n,N}(f,x)|$, и $|a_n^{(2n)}(f)|$.

0.1.3 Оценка величины $|f(x) - S_n(f,x)|$

Чтобы оценить $|f(x) - S_n(f,x)|$ нем понадобится следующая лемма:

Лемма 0.2. *Для $f \in C_\Omega^2$ справедливо следующее неравенство:*

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t+\alpha))dt\right| \leqslant \frac{c(f)}{k^2},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и

$$h_p(x) = \begin{cases} \cos x, & p = 0, \\ \sin x, & p = 1. \end{cases} \tag{0.17}$$

Лемма 0.3. *Для $f \in C_\Omega^2$ справедливы неравенства*

$$|f(x) - S_n(f,x)| \leqslant \frac{c(f)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{0.18}$$

$$|f(x) - S_n(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{n^2}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{0.19}$$

0.1.4 Оценка величины $|R_{n,N}(f,x)|$

Из (0.11) и (0.12) следует $R_{n,N}(f,x) = R^1_{n,N}(f,x) + R^2_{n,N}(f,x)$, где

$$R^1_{n,N}(f,x) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\mu N(u-t)dt,$$

$$R^2_{n,N}(f,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k(x-t)\cos\mu N(u-t)dt. \tag{0.20}$$

Очевидно, $|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \left|R^1_{n,N}(f,x)\right| + \left|R^2_{n,N}(f,x)\right|$. Величины $\left|R^1_{n,N}(f,x)\right|$ and $\left|R^2_{n,N}(f,x)\right|$ оценены ниже, для чего мы используем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 0.4. *Для $f \in C_{\Omega}^{0,1}$ справедливо:*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt =$$

$$\frac{(-1)^q \mu N}{(\mu N)^2 - k^2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f(a_i - 0) - f(a_i + 0)\right) h_p(k(a_i - x))h_{1-q}(\mu N(a_i - u)) -$$

$$\frac{(-1)^q \mu N}{(\mu N)^2 - k^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{'}(t)h_p(k(t-x))h_{1-q}(\mu N(t-u))dt +$$

$$\frac{(-1)^{1+p} k}{(\mu N)^2 - k^2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f(a_i - 0) - f(a_i + 0)\right) h_{1-p}(k(a_i - x))h_q(\mu N(a_i - u)) -$$

$$\frac{(-1)^{1+p} k}{(\mu N)^2 - k^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{'}(t)h_{1-p}(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt. \quad (0.21)$$

Следствие 0.1. *Если $f \in C_{\Omega}^{2}$, тогда $f(a_i - 0) - f(a_i + 0) = 0$, таким образом, мы можем записать* (0.38) *как*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt = \frac{(-1)^q \mu N}{(\mu N)^2 - k^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{'}(t)h_p(k(t-x))h_{1-q}(\mu N(t-u))dt -$$

$$\frac{(-1)^{1+p} k}{(\mu N)^2 - k^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{'}(t)h_{1-p}(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt.$$

Лемма 0.5. *Имеют место следующие оценки:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} h_p(kx)\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

Лемма 0.6. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — монотонная последовательность (возрастающая или убывающая) n положительных чисел. Имеет место следующее неравенство:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_p(kx)\right| \leqslant \frac{2\alpha_n + \alpha_1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

Лемма 0.7. *Справедливо следующее неравенство: $\left|R_{n,N}^1(f,x)\right| \leqslant c(f)/N^2$.*

Лемма 0.8. *The following estimates hold:*

$$\left|R_{n,N}^2(f,x)\right| \leqslant \frac{nc(f)}{N^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.22)$$

$$\left|R_{n,N}^2(f,x)\right| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N^2}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \quad (0.23)$$

Из вышеприведенных лемм и неравенства $|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \left|R_{n,N}^1(f,x)\right| + \left|R_{n,N}^2(f,x)\right|$ следуют оценки для $|R_{n,N}(f,x)|$:

$$|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{nc(f)}{N^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.24)$$

$$|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N^2}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \quad (0.25)$$

0.1.5 Оценка величины $\left|a_n^{(2n)}(f)\right|$

Лемма 0.9. *Для $a_n^{(2n)}(f)$, где $f \in C_\Omega^2$ и $2n = N$, справедлива оценка $\left|a_n^{(2n)}(f)\right| \leqslant c(f)/N^2$.*

0.1.6 Доказательство Теоремы 0.1

Доказательство Теоремы 0.1 состоит из двух частей: сначала мы докажем неравенства (0.8) и (0.9) теоремы, а затем докажем, что данные оценки не могут быть улучшены для $f \in C_\Omega^2$.

Из неравенств (0.15), (0.16), оценок (0.18), (0.19), (0.24), (0.25) и Леммы 0.9 легко получить (0.8) и (0.9). Чтобы доказать, что порядок этих оценок неулучшаем, рассмотрим вышеупомянутую 2π-периодическую функцию $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi,\pi]$. Очевидно, $f \in C_\Omega^2$. Мы будем рассматривать только случай $n < N/2$. Из (0.10) следует $|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant |f(x) - S_n(f,x)| - |R_{n,N}(f,x)|$. Из (0.24) имеем $|R_{n,N}(f,x)| \leqslant c(f)/N$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти натуральное число N_0, такое, что для каждого $N > N_0$ следует $|R_{n,N}(f,x)| < \varepsilon$. Пусть $N_0(n)$ — натуральное число, такое что для любого $N > N_0(n)$

$$\max_{\substack{x\in E\\ N>N_0(n)}} |R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{1}{2} \max_{x\in E} |f(x) - S_n(f,x)|\,,$$

где $E \subset \mathbb{R}$. Таким образом, мы можем записать

$$\max_{\substack{x\in E\\ N>N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant \frac{1}{2} \max_{x\in E} |f(x) - S_n(f,x)|\,. \tag{0.26}$$

Лемма 0.10. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(f,x)| \geqslant c(f)/n, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\max_{|\pi k - x|\geqslant\varepsilon} |f(x) - S_n(f,x)| \geqslant c(f,\varepsilon)/n^2, \quad |\pi k - x| \geqslant \varepsilon.$$

Из (0.26) и предыдущей леммы следует:

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ N>N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant \frac{c}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\max_{\substack{|\pi k - x|\geqslant\varepsilon\\ N>N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant \frac{c(\varepsilon)}{n^2}, \quad |x - \pi k| \geqslant \varepsilon.$$

Теорема 0.1 доказана.

0.2 Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье для кусочно-гладких разрывных функций

0.2.1 Аннотация

Обозначим через $L_{n,N}(f,x)$ тригонометрический полином порядка не более n наименее отклоняющийся от f на системе $\left\{t_k = u + \frac{2\pi k}{N}\right\}_{k=0}^{N-1}$, где $u \in \mathbb{R}$ и $n \leqslant N/2$. Также обозначим через D^1 пространство 2π-периодических кусочно непрерывно дифференцируемых функции f с конечным количеством точек разрыва $-\pi = a_1 < \ldots < a_m = \pi$, которые имеют абсолютно непрерывную производную на каждом интервале (a_i, a_{i+1}). Мы рассмотрим проблема аппроксимации функций $f \in D^1$ тригонометрическими полиномами $L_{n,N}(f,x)$. Была найдена точная по порядку оценка $|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant c(f,\varepsilon)/n$, $|x - a_i| \geqslant \varepsilon$. Доказательство данной оценки основано на сравнении аппроксимативных свойств дискретных и непрерывных рядов Фурье.

0.2.2 Введение

Пусть D^1 — пространство 2π-периодических функций f, каждая из которых имеет конечное число точек разрыва первого рода $\Omega(f) = \{a_i\}_{i=0}^m$, где $-\pi = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = \pi$, $f(a_i) = (f(a_i - 0) + f(a_i + 0))/2$ и имеет абсолютно непрерывную производную f' на каждом интервале (a_i,a_{i+1}) $(0 \leqslant i \leqslant m)$. Один из простейших примеров таких функций это функция $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$.

Обозначим через $L_{n,N}(f,x)$ $(1 \leqslant n \leqslant \lfloor N/2 \rfloor)$ тригонометрический полином порядка не больше n, обладающий наименьшим квадратичным отклонением от f относительно системы $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$, где $t_k = u + 2\pi k/N$ $(u \in \mathbb{R})$. Другими словами, минимум суммы $\sum_{k=0}^{N-1} |f(t_k) - T_n(t_k)|^2$ на пространстве тригонометрических полиномов T_n порядка не выше n достигается когда $T_n = L_{n,N}(f)$. В частности, $L_{\lfloor N/2 \rfloor,N}(f,t_k) = f(t_k)$. Легко показать (см. [86]), что для $n < N/2$ полином $L_{n,N}(f,x)$ может быть представлен следующим образом:

$$L_{n,N}(f,x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu^{(N)}(f) e^{i\nu x}, \quad c_\nu^{(N)}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i\nu t_k}.$$

Для $n = N/2$ имеем

$$L_{N/2,N}(f,x) = L_{N/2-1,N}(f,x) + a_{N/2}^{(N)}(f) \cos \frac{N}{2}(x - u), \tag{0.27}$$

где

$$a_n^{(2n)}(f) = a_{N/2}^{(N)}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \cos \frac{N}{2}(t_k - u). \tag{0.28}$$

Обозначим через $S_n(f,x)$ частичную сумму ряда Фурье функции f порядка n:

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt.$$

Также, далее нам понадобится функция

$$h_p(x) = \begin{cases} \cos x, & p = 0, \\ \sin x, & p = 1. \end{cases}$$

а также известные выражения

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{0.29}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}h_p(kx)\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}. \tag{0.30}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{0.31}$$

Легко показать, что ряд Фурье сходится поточечно для любой функции $f \in D^1$ и, таким образом, функция может быть представлена в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right).$$

Наша цель — оценить $|f(x) - L_{n,N}(f,x)|$, для $f \in D^1$ когда $n, N \to \infty$. Был получен следующий результат:

Теорема 0.2. *Для функции $f \in D^1$ справедлива оценка:*

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{C(f,\varepsilon)}{n}, \quad |x - a_i| > \varepsilon. \tag{0.32}$$

Данная оценка неулучшаема по порядку.

Для доказательства данной теоремы мы опять используем лемму 0.11 из [86]. Из данной леммы вытекает неравенство

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant |f(x) - S_n(f,x)| + |R_{n,N}(f,x)|, \quad n < N/2. \tag{0.33}$$

В случае $2n = N$ from (0.27) и (0.35) имеем

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant$$
$$|f(x) - S_{n-1}(f,x)| + |R_{n-1,N}(f,x)| + |a_n^{(N)}(f)|, \quad n = N/2. \tag{0.34}$$

Оценка для $|f(x) - S_n(f,x)|$, где $f \in D^1$, была получена в работе [?]:

$$|f(x) - S_n(f,x)| \leqslant \frac{C(f,\varepsilon)}{n}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{0.35}$$

Нам остается оценить величины $|R_{n,N}(f,x)|$ и $|a_n^{(2n)}(f)|$..

0.2.3 Оценка $|R_{n,N}(f,x)|$

Из (0.33) и (0.34) можно получить представление

$$R_{n,N}(f,x) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\mu N(u-t)dt +$$
$$\frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\cos\mu N(u-t)dt =$$
$$R^1_{n,N}(f,x) + R^2_{n,N}(f,x).$$

Лемма 0.11. *Для $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ справедливо следующее неравенство:*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right)} \right| \leqslant c.$$

Лемма 0.12. *Для $f \in D^1$ следует:*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt =$$

$$\frac{(-1)^q \mu N}{(\mu N)^2 - k^2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f(a_i - 0) - f(a_i + 0)\right) h_p(k(a_i - x))h_{1-q}(\mu N(a_i - u)) -$$

$$\frac{(-1)^q \mu N}{(\mu N)^2 - k^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{'}(t)h_p(k(t-x))h_{1-q}(\mu N(t-u))dt +$$

$$\frac{(-1)^{1+p} k}{(\mu N)^2 - k^2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f(a_i - 0) - f(a_i + 0)\right) h_{1-p}(k(a_i - x))h_q(\mu N(a_i - u)) -$$

$$\frac{(-1)^{1+p} k}{(\mu N)^2 - k^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{'}(t)h_{1-p}(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt. \quad (0.36)$$

Лемма 0.13. *Величина $\left|R^1_{n,N}(f,x)\right|$ может быть оценена следующим образом:*

$$\left|R^1_{n,N}(f,x)\right| \leqslant \frac{c(f)}{N}.$$

Лемма 0.14. *Величина $\left|R^2_{n,N}(f,x)\right|$ может быть оценена следующим образом:*

$$\left|R^2_{n,N}(f,x)\right| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon.$$

Наконец, из лемм 0.14 и 0.15 мы имеем

$$|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \quad (0.37)$$

0.2.4 Оценка $|a_n^{(2n)}(f)|$

Из (0.28), используя, что $t_j = u + 2\pi k/N$, имеем

$$a_n^{(N)}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k f(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right)$$

и

$$\left|a_n^N(f)\right| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right|.$$

Обозначим через G подмножество индексов $\{k\}_{k=0}^{n-1}$, таких, что для $k \in G$ отрезок $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ не содержит ни одной точки a_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$, и обозначим $\hat{G} = \{k\}_{k=0}^{n-1} \setminus G$. Теперь запишем

$$\left|a_n^N(f)\right| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{k \in G} \left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right| + \frac{1}{N} \sum_{k \in \hat{G}} \left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right|. \quad (0.38)$$

Для каждого $k \in G$ отрезок $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ полностью лежит внутри какого-то интервала (a_i, a_{i+1}) и, следовательно, функция f дифференцируема на этом отрезке, что позволяет использовать теорему о среднем и получить следующее неравенство:

$$|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})| \leqslant c(f)\,|t_{2k} - t_{2k+1}| \leqslant \frac{c(f)}{N}. \tag{0.39}$$

Для $k \in \hat{G}$ есть $s(k)$ точек $a_{i_{k,1}} < a_{i_{k,2}} < \ldots < a_{i_{k,s(k)}}$ внутри сегмента $[t_{2k}, t_{2k+1}]$. Оценим величину $|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})|$ для $k \in \hat{G}$. Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 0.15. *Для $f \in D^1$ и отрезка $[a,b]$, где $[a,b] \subset [-\pi, \pi]$ выполняется*

$$|f(a) - f(b)| \leqslant c(f)(s + |a-b|),$$

где s — это число точек разрыва первого рода $x_1, x_1, \ldots, x_s$ функции f на $[a,b]$.

Из этой леммы следует

$$\sum_{k\in\hat{G}} |f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})| \leqslant \sum_{k\in\hat{G}} c(f)\left(s(k) + \frac{2\pi}{N}\right) \leqslant c(f)\sum_{k\in\hat{G}} s(k) + \sum_{k\in\hat{G}} \frac{2\pi}{N}.$$

Каждая точка $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ может быть включена в один или два отрезка $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ $(k \in \hat{G})$, следовательно, $\sum_{k\in\hat{G}} s(k) < 2m$. Используя это и то, что $|\hat{G}| \leqslant m$ имеем

$$\sum_{k\in\hat{G}} |f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})| \leqslant c(f). \tag{0.40}$$

Из (0.40), (0.41), and (0.42) следует

$$\left|a_n^N(f)\right| \leqslant \frac{c(f)}{N}. \tag{0.41}$$

0.2.5 Доказательство Теоремы 0.2

Доказательство оценки (0.32) из Теоремы 0.2 немедленно следует из неравенств (0.35), (0.36), (0.37), (0.39), (0.43), и $n \leqslant N/2$. Чтобы доказать, что оценка точна по порядку, рассмотрим величину $\left|f_1(\frac{\pi}{2}) - L_{4n,N}(f_1, \frac{\pi}{2})\right|$, где $4n < N/2$ и $f_1(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$. Из Леммы 0.11 мы может получить неравенство

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant |f(x) - S_n(f,x)| - |R_{n,N}(f,x)|.$$

Нетрудно убедиться, что имеет место следующее представление:

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^k)\sin kx}{k} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\pi}{2k-1}, \tag{0.42}$$

$$S_{2n}(f_1,x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Таким образом, мы можем получить нижнюю оценку величины $\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - S_{4n}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right|$:

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - S_{4n}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right| = \frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2\left(4-\frac{1}{k}\right)\left(4-\frac{3}{k}\right)} > \frac{1/4}{4n}.$$

Отсюда, и из (0.44) мы имеем

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - L_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \geqslant \frac{1/4}{4n} - \left|R_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

Ранее мы показали, что $\left|R_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant c/N$. Через $N(n)$ обозначим натуральное число, такое что для каждого $N \geqslant N(n)$ следует $\left|R_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1/8}{4n}$. Теперь мы имеем

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - L_{4n,N(n)}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \geqslant \frac{1/8}{4n} = \frac{c}{4n}.$$

Отсюда мы видим, что порядок оценки (0.32) не может быть улучшен. Теорема 0.2 доказана.

Заключение

В 2017 году в Отделе математики и информатики Дагестанского научного центра РАН проведены научно-исследовательские работы по теме «Теория полиномов, ортогональных по Соболеву. аппроксимативные свойства рядов Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву. приложения полиномов, ортогональных по Соболеву».

Для произвольного натурального r рассмотрены полиномы $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$, ортонормированные относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида

$$< f,g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}dt$$

и изучены их свойства. Введены в рассмотрение ряды Фурье по полиномам $p_{r,k}(x) = p_{r,k}^{0,0}(x)$ и некоторые их обобщения, частичные суммы которых сохраняют некоторые важные свойства частичных сумм ряда Фурье по полиномам $p_{r,k}(x)$, в том числе и свойство r-кратного совпадения («прилипания») частичных сумм ряда Фурье по полиномам $p_{r,k}(x)$ в точках -1 и 1 между собой и с исходной функцией $f(x)$. Основное внимание уделено исследованию вопросов приближения гладких и аналитических функций частичными суммами упомянутых обобщений, представляющих собой специальные ряды по ультрасферическим полиномам Якоби со свойством «прилипания» их частичных сумм точках -1 и 1 .

Рассмотрены системы функций $\varphi_{r,n}(x)$ $(r = 1,2,\ldots,n = 0,1,\ldots)$, ортонормированные по Соболеву относительно скалярного произведения вида

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_{a}^{b} f^{(r)}(t)g^{(r)}(x)\rho(x)dx,$$

порожденные заданной ортонормированной системой функций $\varphi_n(x)$ $(n = 0,1,\ldots)$. Показано, что ряды и суммы Фурье по системе $\varphi_{r,n}(x)$ $(r = 1,2,\ldots,n = 0,1,\ldots)$ являются удобным и весьма эффективным инструментом приближенного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Рассмотрены полиномы $T_{r,n}(x)$ $(n = 0,1,\ldots)$, порожденные многочленами Чебышева $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$, образующие ортонормированную систему по Соболеву относительно скалярного произведения следующего вида

$$< f,g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)g^{(r)}(x)\mu(x)dx,$$

где $\mu(x) = \frac{2}{\pi}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Для $T_{r,n}(x)$ $(n = 0,1,\ldots)$ установлена связь с многочленами Чебышева $T_n(x)$ и получены явные представления, которые могут быть использованы при вычислении значений полиномов $T_{r,n}(x)$ и исследовании их асимптотических свойств.

Рассмотрена задача об обращении преобразования Лапласа посредством специального ряда по полиномам Лагерра, который в частном случае совпадает с рядом Фурье по полиномам $l_{r,k}^{\gamma}(x)$ $(r \in \mathbb{N}, k = 0,1,\ldots)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа

Соболева следующего вида

$$< f,g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)t^\gamma e^{-t}dt, \gamma > -1.$$

Даны оценки приближения функций частичными суммами специального ряда по полиномам Лагерра.

Получены рекуррентные соотношения для системы полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$ (r-натуральное число, $n = 0, 1, \ldots$), ортонормированной относительно скалярного произведения типа Соболева $\langle f,g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)dx$ и порожденной классическими ортонормированными полиномами Лагерра.

Рассмотрены системы дискретных функций $\psi_{r,n}(x)$ ($r = 1,2,\ldots, n = 0,1,\ldots$), ортонормированные по Соболеву относительно скалярного произведения вида

$$\langle f,g\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0)\Delta^k g(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j)\Delta^r g(j)\rho(j),$$

порожденные заданной ортонормированной системой функций $\psi_n(x)$ ($n = 0,1,\ldots$). Показано, что ряды и суммы Фурье по системе $\psi_{r,n}(x)$ ($r = 1,2,\ldots, n = 0,1,\ldots$) является удобным и весьма эффективным инструментом приближенного решения задачи Коши для разностных уравнений.

Список использованных источников

1 Шарапудинов И.И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Мат. сборник, 191(5), 2000. С. 143–160.

2 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Мат. заметки, 72(5), 2002. С.765–795.

3 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Издательство Дагестанского научного центра. Махачкала 2004. С.1–176.

4 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Мат. сборник, 97(3), 2006. С. 135–154.

5 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Мат. заметки, 84(3), 2008. С.452–471.

6 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Мат. сборник, 194(3), 2003. С. 115–148.

7 Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Мат. заметки, 88(1), 2010. С. 116–147.

8 Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 78(5), 2014. С. 201–224.

9 Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Вып. 4.

10 Сеге Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз. Москва. 1962.

11 Gasper G. Positiviti and special function // Theory and appl.Spec.Funct. Edited by Richard A.Askey. 1975. Pp. 375–433.

12 Kwon K.H., Littlejohn L.L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. Iss. 2. 1995. Pp. 289–303.

13 Kwon K.H., Littlejohn L.L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. Vol. 28. 1998. Pp. 547–594.

14 Marcellan F. , Alfaro M., Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 48. 1993. Pp. 113–131.

15 Iserles A., Koch P.E., Norsett S.P., Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory, 65. 1991. Pp. 151–175.

16 Meijer H.G. Laguerre polynimials generalized to a certain. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory, 73. 1993. Pp. 1–16.

17 Lopez G. Marcellan F. Vanassche W. Relative Asymptotics for Polynomials Orthogonal with Respect to a Discrete Sobolev Inner-Product // Constr. Approx. 11:1. 1995. Pp. 107–137.

18 Marcellan F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae, 33(3). 2015. Pp. 308–352.

19 И.И. Шарапудинов Системы функций, ортогональные по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». 2016. С. 329–332.

20 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. Philadelphia. SIAM. 2000.

21 Trefethen L.N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University. 1996.

22 Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. Машиностроение. Москва. 1986.

23 Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. Наука. Москва. 1983. С. 143–160.

24 Магомед-Касумов М.Г. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хаара // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». 2016. С. 176–178.

25 Гончар А.А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Мат. сборник, 97(139):4(8), 1975. С. 607–629.

26 Теляковский С.А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами // Мат. сборник, 70(2), 1966. С.252–265.

27 Гопенгауз И.З. К теореме А. Ф. Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке // Мат. заметки, 1(2), 1967. С. 163–172.

28 Осколков К.И. К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки, 18(4), 1975. С. 515–526.

29 Sharapudinov I.I. On the best approximation and polinomial of the least quadratic deviation // Analysis Mathematica, 9(3), 1983. Pp. 223–234.

30 Шарапудинов И.И. О наилучшем приближении и суммах Фурье-Якоби //Мат. заметки, 34(5), 1983. С. 651–661.

31 Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, Москва. 1960.

32 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам // Издательство Дагестанского научного центра. Махачкала. 2004. Стр. 1–176.

33 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математические заметки. 2005. Т. 78. Вып. 3. Стр. 442—465.

34 Шарапудинов И.И. Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. Вып. 2. Стр. 440–467.

35 Meijer H.G. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Pp. 1–16.

36 Marcellan F., Yuan Xu ON SOBOLEV ORTHOGONAL POLYNOMIALS. arXiv: 6249v1 [math.C.A] 25 Mar 2014. Pp. 1–40

37 Lopez G., Marcellan F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product // Constr. Approx. 1995. Vol. 11. Issue 1. Pp. 107–137.

38 Сеге Г. Ортогональные многочлены. Москва. Физматгиз. 1962.

39 Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Mathem. 1965. Vol. 87. Pp. 698–708.

40 Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. Москва. Высшая школа. 1975.

41 Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. Москва. Наука. 1974.

42 Шарапудинов И.И. Ортогональные по Соболеву системы, порожденные ортогональными функциями // Изв. РАН. Сер. Математическая. 2018. Том. 82. (Принята к печати)

43 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. Fhiladelphia. SIAM. 2000.

44 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Применение рядов Чебышева для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Вып. 11. Стр. 517–531.

45 Лукомский Д.С., Терехин П.А. Применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов. ООО «Издательство «Научная книга». 2016. Стр. 171–173.

46 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра. Дифференциальные уравнения. 2017 (принята к печати)

47 Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. Москва. АФЦ 1999.

48 Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 1. Стр. 68 – 76

49 G. Faber Ober die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1910. Vol. 19. Pp. 104–112.

50 Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Якоби // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. Стр. 1—24.

51 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Издательство Дагестанского научного центра. Махачкала. 2004. С. 1–176.

52 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. SIAM. Philadelphia. 2000.

53 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференциальные уравнения. 2017. (принята к печати)

54 Сеге Г. Ортогональные многочлены. Москва. Физматгиз. 1962.

55 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Сиб. электрон. матем. 1983. изв. Вып. 7. Стр. 122—131

56 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Метод решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Выч. мет. программирование. 2013. Вып. 14:2. Стр. 203-214.

57 Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления // Физматлит. Москва. 2001. Т. 2. Стр. 810.

58 Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала, Изд-во Даг. гос. пед. ун-та. 1997.

59 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2016. Т.16. Вып. 3. С. 310–321.

60 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д., Гаджимирзаев Р.М. Разностные уравнения и полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Владикавказский Мат. журнал, 2017. Т.19. Вып. 2. С. 58–72.

61 Шарапудинов И.И. Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Мат. заметки, 2000. Т. 67. Вып. 3. С. 460–470.

62 Шарапудинов Т.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестник Дагестанского научного центра РАН, 2007. Т. 29. С. 12-–23.

63 Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональных по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы. 2016. С. 329–332.

64 Fernandez L., Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar, Xu Y. Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball // Journal of Approximation Theory, 171, 2013, pp. 84–104.

65 Antonia M. Delgado, Fernandez L., Doron S. Lubinsky, Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar. Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 440, № 2, 2016, pp. 716–740.

66 Fernandez L., Marcellan F., Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar, Xu Y. Sobolev orthogonal polynomials on product domains // Journal of Computational and Applied Mathematics, 284, 2015, pp. 202–215.

67 Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем., 2017, № 8, 67–79.

68 Гаджимирзаев Р. М. Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 16:4 (2016), 388–395.

69 Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д., Гаджимирзаев Р. М. Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. С. 31–60.

70 Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

71 Meijer H. G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Iss. 1. Pp. 1–16.

72 Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкалаю. Изд-во ДНЦ РАН. 2004.

73 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. Москва. Наука. 1974.

74 Ширяев А. Н. Вероятность-1. Москва. Изд-во МЦНМО. 2007.

75 Bernshtein S. N. On trigonometric interpolation by the method of least squares // Dokl. Akad. Nauk USSR. Vol. 4 (1934). pp. 1–5. (in Russian)

76 Erdös P. Some theorems and remarks on interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) T. 12 (1950), pp. 11–17.

77 Kalashnikov M. D. On polynomials of best (quadratic) approximation on a given system of points. // Dokl. Akad. Nauk USSR. Vol. 105 (1955). pp. 634–636. (in Russian)

78 Krilov V. I. Convergence of algebraic interpolation with respect to the roots of a Chebyshev polynomial for absolutely continuous functions and functions with bounded variation. // Dokl. Akad. Nauk USSR. Vol. 107 (1956). pp. 362–365. (in Russian)

79 Marcinkiewicz J. Quelques remarques sur l'interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) Vol. 8 (1936). pp. 127–130. (in French)

80 Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynômes d'interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) Vol. 8 (1936). pp. 131–135. (in French)

81 Natanson I. P. On the Convergence of Trigonometrical Interpolation at Equi-Distant Knots. // Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 45, no. 3 (1944). pp. 457-471. DOI:10.2307/1969188.

82 Nikol'skii S. M. On some methods of approximation by trigonometric sums. // Mathematics of the USSR - Izvestiya. Vol. 4 (1940). pp. 509–520. (in Russian)

83 Turetskiy A. H. Interpolation theory in exercises. Minsk. : Vissheyshaya shkola, 1968. 320 p (in Russian).

84 Zygmund A. Trigonometric Series. Vol 1. Cambridge. : Cambridge University Press,1959. 747 p.

85 Akniyev G. G. Discrete least squares approximation of piecewise-linear functions by trigonometric polynomials // Issues Anal., Vol. 6 (24), Issue 2 (2017). pp. 3-24. DOI: 10.15393/j3.art.2017.4070.

86 Sharapudinov I.I. On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation // Anal. Math. V. 9 (1983), Issue 3. pp. 223–234.

87 Sharapudinov I.I. Overlapping transformations for approximation of continuous functions by means of repeated mean Valle Poussin // Daghestan Electronic Mathematical Reports, Issue 8 (2017). pp. 70–92.

88 Courant R. Differential and Integral Calculus Vol. 1. New Jersey. : Wiley-Interscience, 1988. 704 p.