ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ДАГЕСТАНСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК №
Регистрационный №
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Врио председателя ДНЦ РАН

___________ Муртазаев А.К.
«___»___________ 2019 г.

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПОЛИНОМАМИ, РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, СПЛАЙНАМИ И ВЕЙВЛЕТАМИ

(итоговый отчет за 2018 г.)

Руководитель НИР,
Врио зав. Отделом математики и информатики ДНЦ РАН, канд. физ.-мат. наук ____________ Шарапудинов Т.И.

г. Махачкала, 2019

Список исполнителей

Научный руководитель,
Зав. Отделом математики и информатики ДНЦ РАН, д.ф.-м.н., ____________________
И.И. Шарапудинов

с.н.с. ОМИ, к.ф.-м.н,
Магомед-Касумов М.Г., ____________________
с.н.с. ОМИ, к.ф.-м.н,
Шарапудинов Т.И., ____________________
н.с. ОМИ,
Гаджиева З.Д., ____________________
н.с. ОМИ,
Султанахмедов М.С., ____________________
м.н.с. ОМИ,
Гаджимирзаев Р.М., ____________________
инж.-иссл. ОМИ,
Гусейнов И.Г. ____________________

Нормоконтролер, н.с. ОМИ,
Султанахмедов М.С. ____________________

Реферат

Отчет содержит X с., X источников.

Ключевые слова: СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ; РЯДЫ ФУРЬЕ; СМЕШАННЫЕ РЯДЫ; ЗАДАЧА КОШИ; ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ; ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ; УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ; ПОЛИНОМЫ ЯКОБИ; ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА; ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА; ПОЛИНОМЫ ЛАГЕРРА; ФУНКЦИИ ХААРА; СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ; СПЕЦИАЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ; НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ; ФУНКЦИЯ ЛЕБЕГА; НЕРАВНОМЕРНЫЕ СЕТКИ; СРЕДНИЕ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА.

Настоящий отчёт содержит итоги работы за 2017 год Отдела математики и информатики ДНЦ РАН по теме «Теория полиномов, ортогональных по Соболеву. аппроксимативные свойства рядов Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву. приложения полиномов, ортогональных по Соболеву» из Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы.

Для произвольной непрерывной на отрезке числовой оси функции $f(x)$ были построены k раз$(k = 1, 2, \dots)$ непрерывно дифференцируемые на данном отрезке интерполяционные рациональные сплайн-функции $R_{N,k}(x,f)$, последовательность которых (в отличие от классических полиномиальных сплайнов) для любой последовательности сеток с диаметром, стремящимся к нулю, равномерно на этом отрезке сходится к самой функции $f(x)$. Аналогичным свойством безусловной сходимости обладают также последовательности производных построенных сплайн-функций. Интерполяционные сплайн-функции $R_{N,1}(x,f)$ применены для исследования вопросов сохранения ими выпуклости (вверх или вниз) и ковыпуклости с произвольной переменой направления выпуклости дискретной функции $f(x)$. Как известно, конструкция классических полиномиальных сплайнов не позволяет эффективно применять их для решения второй части данной задачи, касающейся сохранения ковыпуклости с произвольной переменой направления выпуклости дискретных данных. Получены достаточно легко проверяемые условия ковыпуклой интерполяции дискретной функции $f(x)$ с возможной переменой направления выпуклости рациональными сплайн-функциями $R_{N,1}(x,f)$ по произвольным сеткам узлов.

Получены достаточные условия выпуклости (вверх или вниз) интерполяционных рациональных сплайн-функций $R_{N,2}(x,f)$ класса C^2 в случае выпуклой (вверх или вниз) функции $f(x)$ и произвольных сеток узлов.

Для дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке функций получены оценки совместного равномерного приближения самих функций и их производных до второго порядка посредством интерполяционных рациональных сплайн-функций и их соответствующих производных.

Содержание

Обозначения и сокращения

ДНЦ — Дагестанский научный центр

ОМИ — Отдел математики и информатики

РАН — Российская академия наук

Введение

Согласно плану научно-исследовательской работы за 2017 год исследования, проводимые в Отделе математики и информатики Дагестанского научного центра РАН, включают в себя работы по теме «Теория полиномов, ортогональных по Соболеву. аппроксимативные свойства рядов Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву. приложения полиномов, ортогональных по Соболеву».

Вопросы формосохраняющей интерполяции сплайн-функциями являются предметом исследования многих работ. В достаточно полной форме эти вопросы изучены для различных видов полиномиальных сплайнов. Д. Швайкерт [1] для выпуклой интерполяции кубическими сплайнами в их конструкцию ввел гиперболические функции. В.Г. Мирошниченко [2], [3] получил достаточные условия монотонной и выпуклой интерполяции кубическими сплайнами. Дальнейшие результаты и сведения об исследовании вопросов формосохранения при интерполяции полиномиальными сплайнами можно найти в работах [4–7].

Вопросы монотонной и выпуклой интерполяции рациональными сплайнами специального вида рассматривали Р. Шабак [8] и другие авторы (см., напр., [9–11]).

Однако вопрос о достаточных условиях ковыпуклой интерполяции сплайн-функциями требует своего дальнейшего исследования. Для исследования вопросов сохранения ковыпуклости с произвольной переменой направления выпуклости данных эффективно можно применить интерполяционные сплайн-функции $R_{N,1}(x)$, построенные по дискретным данным с использованием трехточечных рациональных интерполянтов.

1 Равномерное приближение непрерывных функций средними Валле Пуссена специального ряда

Приведенные выше результаты содержат оценки взвешенного приближения функций частичными суммами специальных рядов и их линейными средними. Однако интерес представляют и вопросы равномерного (без веса) приближения функций.

В работе [?] изучены аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена специального ряда $V^{\alpha}_{n,m}(f) = V^{\alpha,1}_{n,m}(f)$ (см. определение (**??**)) в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ и $n \le qm$, где q — произвольное положительное фиксированное число, а именно, была получена оценка

$$|f(x) - V^{\frac{1}{2}}_{n,m}(f,x)| \le c(q)E_n(f),\ f \in C[-1,1]. \tag{1.1}$$

В данном проекте ставилась задача исследовать аппроксимативные свойства $V^{\alpha}_{n,m}(f)$ для $\frac{1}{2} < \alpha \le \frac{3}{2}$. Нам удалось получить следующие результаты в этом направлении.

Обозначим через $\Lambda^{\alpha}_{n,m}(x)$ функцию Лебега средних Валле Пуссена $V^{\alpha}_{n,m}(f)$:

$$\Lambda^{\alpha}_{n,m}(x) = (1-x^2)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-1}\Big|\frac{1}{m+1}\sum_{k=n}^{n+m}K^{\alpha}_{k-2}(x,t)\Big|dt,$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Если $c_1 m \le n \le c_2 m$, то*

$$\Lambda^{\alpha}_{n,m}(x) \le c(c_1,c_2,\alpha), \quad \frac{1}{2} \le \alpha < \frac{3}{2}, \quad -1 \le x \le 1. \tag{1.2}$$

Из (**??**), (**??**) и (**??**) нетрудно получить равенство

$$V^{\alpha}_{n,m}(f,x) = l_1(f,x) + (1-x^2)\int\limits_{-1}^{1}\Big[f(t) - l_1(f,x)\Big](1-t^2)^{\alpha-1}\frac{1}{m+1}\sum_{k=n}^{n+m}K^{\alpha}_{k-2}(x,t)dt,$$

из которого выводится следующее неравенство:

$$|V^{\alpha}_{n,m}(f,x)| \le (1 + \Lambda^{\alpha}_{n,m}(f,x))\|f\|_{C[-1,1]}.$$

Отсюда и из теоремы 1.1 вытекает, что семейство операторов $V^{\alpha}_{n,m}(f)$, $\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{3}{2}$, $c_1 m \le n \le c_2 m$, равномерно ограничено в пространстве $C[-1,1]$.

Далее, используя теорему 1.1, мы можем оценку (1.1) распространить при условии $c_1 m \le n \le c_2 m$ на случай $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$.

Теорема 1.2. *Для функций $f \in C[-1,1]$ справедлива следующая оценка остатка при приближении средними Валле Пуссена $V^{\alpha}_{n,m}(f,x)$:*

$$|f(x) - V^{\alpha}_{n,m}(f,x)| \le cE_n(f), \quad c_1 m \le n \le c_2 m, \quad \frac{1}{2} \le \alpha < \frac{3}{2}.$$

2 Аппроксимативные свойства операторов $\sigma_n^{\alpha,r}(f,x)$ в весовых пространствах Лебега с переменным показателем

Пространства Лебега $L^{p(x)}(E)$ с переменным показателем суммируемости $p(x)$ позволяют более точно описывать свойства функций, имеющих существенно переменное поведение. Пусть $1 \le p(x)$ – измеримая функция, заданная на $[-1,1]$. Через $L^{p(x)}(-1,1)$ обозначим пространство таких измеримых функций $f(x)$, что $\int_{-1}^{1} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$. Для $f(x) \in L^{p(x)}(-1,1)$, как это было показано в [?], можно ввести норму $\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\{\alpha > 0 : \int_{-1}^{1} |f(x)/\alpha|^{p(x)} dx \le 1\}$. Для целого $r \ge 0$ через $W^{r,p(x)}(-1,1)$ обозначим пространство Соболева с переменным показателем $p(x)$, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ $r-1$-раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1,1]$ и $f^{(r-1)}(x) \in L^{p(x)}(-1,1)$. Далее, через $W^{r,p(x)}(-1,1,M)$ обозначим класс функций из $W^{r,p(x)}(-1,1)$, для которых $\|f^{(r)}\|_{p(\cdot)} \le M$. В последние годы наблюдается заметный всплеск интереса к изучению теории так называемых весовых пространств Лебега с переменным показателем, состоящих из измеримых функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \infty$, где $w(x)$ – неотрицательная суммируемая функция (вес), для которых норма определяется равенством $\|f\|_{p(\cdot),w} = \inf\{\alpha > 0 : \int_{-1}^{1} |f(x)/\alpha|^{p(x)} w(x) dx \le 1\}$. Аналогично безвесовому случаю определяются весовые пространства Соболева $W_w^{r,p(x)}(-1,1)$. Используя методы, разработанные в работах [?,?,?,?,?,?,?], в настоящем проекте предполагается исследовать вопросы, связанные с приближением функций $g(x) \in W^{r,p(x)}(-1,1)$ частичными суммами $\sigma_n^{\alpha}(g,x)$. В частности, ставится следующая

В ходе выполнения настоящего проекта нам удалось установить следующий результат.

Пусть $\hat{\mathcal{P}}$ обозначает класс переменных показателей $p(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $p(x) > 1$ для $x \in [-1,1]$;
2) $|p(x) - p(y)| \ln \frac{2}{|x-y|} \le d$ при $x,y \in [-1,1]$;
3) $p(x)$ принимает постоянные значения вблизи концов отрезка $[-1,1]$: $p(x) = p_1$ при $x \in [-1,-1+\delta_1]$ и $p(x) = p_2$ при $[1-\delta_2, 1]$, где δ_1 и δ_2 – сколь угодно малые положительные числа.

Теорема 2.1. *Если $p(x) \in \hat{\mathcal{P}}$ и $p(\pm 1) \in (\frac{4}{3},4)$, то для $g(x) \in W^{r,p(x)}(-1,1,1)$ имеют место оценки*

$$|g^{(\nu)}(x) - (\sigma_n^{r,r}(g,x))^{(\nu)}| \le c \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^{r-\nu-\frac{1}{p(x)}}, \tag{2.1}$$

$$\|g^{(r)} - (\sigma_n^{r,r}(g))^{(r)}\|_{p(\cdot)} \le c E_{n-r}(g^{(r)})_{p(\cdot)}, \tag{2.2}$$

где $x \in [-1,1]$, $0 \le \nu \le r-1$, $E_m(f)_{p(\cdot)}$ – наилучшее приближение функции $f \in L^{p(x)}(-1,1)$ алгебраическими полиномами степени m.

Оценка (2.1) показывает, что применение пространств Соболева $W^{r,p(x)}$ с переменным показателем $p(x)$ позволяет учитывать существенно переменное поведение производных функции $g(x)$ при оценке погрешности $|g^{(\nu)}(x) - (\sigma_n^{r,r}(g,x))^{(\nu)}|$ приближения $g^{(\nu)}(x)$ посредством $(\sigma_n^{r,r}(g,x))^{(\nu)}$. Говоря более точно, имеется в виду следующее: если $p(x) > 1$, $r \geq 1$, $g \in W^{r,p(x)}$, то, оставаясь в шкале пространств Соболева W^{r,p_0} с постоянным показателем p_0, мы можем утверждать лишь, что $g \in W^{r,p_0}$, где $p_0 = \min_x p(x)$. Поэтому вместо оценки (2.1) мы будем иметь

$$|g^{(\nu)}(x) - (\sigma_n^{r,r}(g,x))^{(\nu)}| \leq c \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{r-\nu-\frac{1}{p_0}}, \tag{2.3}$$

Но для точки x, в которой $p(x) > p_0$, оценка (2.3) по порядку хуже оценки (2.1).

Одной из целей настоящего проекта являлась задача об исследовании аппроксимативных свойств операторов $\sigma_n^{\alpha,r} = \sigma_n^{\alpha,r}(f,x)$ в весовых пространствах Лебега $L_w^{p(x)}(-1,1)$ с весами вида $w(x) = (1-x^2)^\alpha$. При этом следует отметить, что основополагающую роль при доказательстве оценок (2.1) и (2.2) в безвесовом случае для функции $g(x) \in W^{r,p(x)}(-1,1,1)$ сыграл тот факт, что если переменный показатель $p(x)$ подчинен вышеуказанным условиям 1) – 3) и $p(\pm 1) \in (\frac{4}{3},4)$, то система ортонормированных полиномов Лежандра $\{\hat{P}_n^0(x)\}$, как было доказано в работе [?], является базисом Шаудера в пространстве $L^{p(x)}(-1,1)$. Основная сложность при решении задачи об аппроксимативных свойствах операторов $\sigma_n^{\alpha,r}$ в весовых пространствах была связана с отсутствием исследований о базисности ультрасферических полиномов Якоби $\hat{P}_n^\alpha(x)$ в весовом пространстве Лебега $L_w^{p(x)}(-1,1)$ с весом вида $w(x) = (1-x^2)^\alpha$. В этом направлении нами установлены следующие результаты.

Теорема 2.2. *Пусть $\alpha > -1/2$, $\mu = \mu(x) = (1-x^2)^\alpha$, $p \in \hat{\mathcal{P}}$,*

$$4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(\pm 1) < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}.$$

Тогда система ультрасферических полиномов Якоби $\{\hat{P}_n^{\alpha,\alpha}(x)\}_{n=0}^\infty$ является базисом Шаудера в весовом пространстве Лебега $L_w^{p(x)}(-1,1)$ с весом вида $w(x) = (1-x^2)^\alpha$.

Отметим, что указанная теорема была доказана и в более общем случае.

Теорема 2.3. *Пусть $\alpha,\beta > -1/2$, $w = w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $p \in \hat{\mathcal{P}}$,*

$$4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(1) < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}, \quad 4\frac{\beta+1}{2\beta+3} < p(-1) < 4\frac{\beta+1}{2\beta+1},$$

Тогда система полиномов Якоби $\{\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\}_{n=0}^\infty$ является базисом Шаудера в весовом пространстве Лебега $L_w^{p(x)}(-1,1)$.

Рассмотрим отдельно случай $\alpha = -1/2$, который не входит в теорему 2.2. Хорошо известно, что сумма Фурье – Якоби $S_n^{\alpha,\alpha}(f)$ при $\alpha = -1/2$ представляет собой сумму Фурье по полиномами Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ $(n = 0,1,\ldots)$. Это обстоятельство позволяет доказать равномерную ограниченность сумм Фурье – Чебышева $S_n^{-1/2,-1/2}(f)$ в пространстве

$L^{p(x)}_\mu([-1,1])$ с $\mu(x)=(1-x^2)^{-\frac12}$ в том случае, когда переменный показатель подчиняется на $[-1,1]$ лишь условиям 1) и 2). Причём это условие является в определённом смысле также и необходимым. Чтобы сформулировать соответствующий окончательный результат, введем обозначение. Обозначим через $\mathcal{P}^\beta$ класс переменных показателей $p(x)>1$, удовлетворяющих на $[-1,1]$ следующему условию:

$$|p(x)-p(y)|\left(\ln\frac{2}{|x-y|}\right)^\beta\le d\quad(\beta,d>0,\quad x,y\in[-1,1]).\tag{2.4}$$

Теорема 2.4. *Пусть $\mu=\mu(x)=(1-x^2)^{-\frac12}$. Тогда суммы Фурье – Якоби $S_n^{-\frac12,-\frac12}(f)$ $(n=0,1,\ldots)$ равномерно ограничены в весовом пространстве Лебега $L^{p(x)}_\mu([-1,1])$ с произвольным переменным показателем $p\in\mathcal{P}^\beta$ тогда и только тогда, когда $\beta\ge1$. Другими словами, если $\beta\ge1$, то найдется такое положительное число $c(\beta,p)$, зависящее только от указанных параметров β и $p\in\mathcal{P}^\beta$, что для произвольной функции $f\in L^{p(x)}_\mu([-1,1])$ имеет место оценка*

$$\|S_n^{-\frac12,-\frac12}(f)\|_{p(\cdot),\mu}([-1,1])\le c(\beta,p)\|f\|_{p(\cdot),\mu}([-1,1]).\tag{2.5}$$

Если же $0<\beta<1$, то найдется переменный показатель $p_\beta\in\mathcal{P}^\beta$ и $f_\beta\in L^{p_\beta(x)}_\mu([-1,1])$, для которых

$$\|S_n^{-\frac12,-\frac12}(f_\beta)\|_{p_\beta(\cdot),\mu}([-1,1])\to\infty\quad(n\to\infty).\tag{2.6}$$

Вернёмся теперь к задаче об аппроксимативных свойствах операторов $\sigma_n^{\alpha,r}=\sigma_n^{\alpha,r}(f,x)$ в весовых пространствах Лебега $L^{p(x)}_w(-1,1)$ с весами вида $w(x)=(1-x^2)^\alpha$. Мы будем считать, что функция $f=f(x)$ подчинена двум условиям: i) существуют производные $f^{(\nu)}(\pm1)$ при $\nu=0,\ldots r-1$; ii) функция $q_r(f)=q_r(f,x)$, определённая равенством (**??**), принадлежит весовому пространству Лебега $L^{p(x)}_w(-1,1)$ с весом $w(x)=(1-x^2)^\alpha$, т. е. $q_r(f)\in L^{p(x)}_w(-1,1)$, что, в свою очередь, означает конечность интеграла:

$$\int_{-1}^1|q_r(f,x)|^{p(x)}(1-x^2)^\alpha dx<\infty.\tag{2.7}$$

Пространство всех функций $f=f(x)$, для которых справедливо неравенство (2.7), обозначим через $\mathcal{F}_{r,\alpha,p(\cdot)}$. Далее, пусть H^n – пространство алгебраических полиномов Q_n степени не выше n, $E_n(g)_{p,w}$ – наилучшее приближение функции $g\in L^{p(x)}_w(-1,1)$ полиномами $Q_n\in H^n$, т. е.

$$E_n(g)_{p(\cdot),w}=\inf_{Q_n\in H^n}\|g-Q_n\|_{p(\cdot),w}.\tag{2.8}$$

С помощью теоремы 2.2 и 2.4 в ходе выполнения проекта получены следующие результаты.

Теорема 2.5. *Пусть $\alpha>-1/2$, $\mu=\mu(x)=(1-x^2)^r$, $w=w(x)=(1-x^2)^\alpha$, $p\in\hat{\mathcal{P}}$,*

$$4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3}<p(\pm1)<4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}.$$

Тогда если $f\in\mathcal{F}_{r,\alpha,p(\cdot)}$, то имеет место оценка

$$\left\|\frac{f-\sigma_n^{\alpha,r}(f)}{\mu}\right\|_{p(\cdot),w}\le c(r,\alpha,p)E_n(q_r(f))_{p(\cdot),w}.\tag{2.9}$$

Теорема 2.6. *Пусть* $\mu = \mu(x) = (1-x^2)^r$, $w = w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $p(x) \in \mathcal{P}^1$. *Тогда если* $f \in \mathcal{F}_{r,-\frac{1}{2},p(\cdot)}$, *то имеет место оценка*

$$\left\| \frac{f - \sigma_n^{-\frac{1}{2},r}(f)}{\mu} \right\|_{p(\cdot),w} \leq c(r,p) E_n(q_r(f))_{p(\cdot),w}. \tag{2.10}$$

3 Формосохраняющие свойства рациональных сплайн-функций класса C^1

3.1 Введение

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geqslant 3$), в которых определена дискретная функция $f(x)$. При $i = 1,2,\dots,N-1$ коэффициенты рациональной функции

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \frac{\gamma_i}{x - g_i} \tag{3.1}$$

с произвольным полюсом $g_i \notin [x_{i-1},x_{i+1}]$ определим из интерполяционных условий $R_i(x_j) = f(x_j)$ $(j = i-1,i,i+1)$.

Тогда, используя разделенные разности $f(x_{j-1}, x_j)$ и $f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1})$, получим

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\ \beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i), \\ \gamma_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Будем считать также $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$ и на отрезке $[a,b]$ определим ([12]) непрерывно дифференцируемую рациональную сплайн-функцию $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$, полагая

$$R_{N,1}(x) = R_i(x)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} \tag{3.3}$$

при $x \in [x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,2,\dots,N)$.

Для исследования поведения сплайн-функции $R_{N,1}(x)$ на всем отрезке $[a,b]$ возникает необходимость рассмотрения для интерполянтов $R_i(x)$ полюсов двух видов, а именно, полюсы g_{i-1} и g_i соответственно интерполянтов $R_{i-1}(x)$ и $R_i(x)$ в одном случае должны удовлетворять неравенству $g_{i-1} < g_i$, а в другом случае — неравенству $g_{i-1} > g_i$.

Определим полюсы интерполянтов через параметр t и расстояния между соответствующими узлами $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \dots, N)$, полагая при $i = 2,3,\dots,N-1$ в первом случае

$$g_{i-1}(t) = x_{i-1} - th_{i-1}, \quad g_i(t) = x_i + th_{i+1}, \tag{3.4}$$

а во втором случае

$$g_{i-1}(t) = x_{i-1} + th_i, \quad g_i(t) = x_i - th_i. \tag{3.5}$$

Для всего отрезка $[a,b]$ получим систему полюсов $g(t) = \{g_1(t), g_2(t), \dots, g_{N-1}(t)\}$, в которой могут встречаться, вообще говоря, полюсы обоих видов.

Ниже будем полагать, что рассматриваемая система полюсов $g(t)$ является согласованной в том смысле, что в каждой паре соседних полюсов системы оба полюса получаются по формулам (3.4) или оба они получаются по формулам (3.5).

Будем придерживаться также следующей терминологии. Тройку данных $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ будем называть строго выпуклой вниз (вверх), если соответствующая разделенная разность $f(x_{i-1}, x_i,x_{i+1})$ больше (меньше) нуля.

Систему всех данных $f(x_0), f(x_1), \ldots ,f(x_N)$ будем называть строго выпуклой вниз (вверх), если каждая тройка соседних данных в ней строго выпукла вниз (вверх).

Всюду ниже для отношений разделенных разностей и расстояний между узлами будем придерживаться следующих обозначений:

$$q_i = \frac{f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)}{f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})}, \quad Q_i = \max\left\{\frac{2}{2q_i - 1}, \frac{2q_i}{2 - q_i}\right\},$$

$$H_i = \max\left\{\frac{h_k}{h_j}\middle| \, |k-j| = 1; k,j \in \{i-1,i,i+1\}\right\} \quad (i = 2,3,\ldots,N-1);$$

$$T_0 = \max_{2\leqslant i\leqslant N-1}\{17H_iQ_i|q_i > 0, 3H_i|q_i < 0\}.$$

3.2 Основные результаты

Основные результаты сформулируем в виде следующих двух утверждений.

Теорема 3.1. *Если на отрезке $[a,b]$ задана произвольная сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, система данных $f(x_0), f(x_1), \ldots ,f(x_N)$ строго выпукла вниз (вверх) и выполняются неравенства $1/2 < q_i < 2$ $(i = 2,3,\ldots,N-1)$, то при любом значении $t \geqslant T_0$ рациональная сплайн-функция $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, \Delta, f, g(t))$ выпукла вниз (вверх) на отрезке $[a,b]$.*

Теорема 3.2. *Пусть на сетке узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$ система данных $f(x_0), f(x_1), \ldots ,f(x_N)$ содержит перемены направления выпуклости и при каждом $i = 2,3,\ldots,N-1$ выполняется двойное неравенство $1/2 < |q_i| < 2$. Тогда для любого значения $t \geqslant T_0$ рациональная сплайн-функция*

$$R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t))$$

сохраняет форму выпуклости в следующем смысле:

1) если при данном $i = 2,3,\ldots,N-1$ отношение $q_i > 0$, то $R_{N,1}(x)$ выпукла вниз (вверх) на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ в соответствии с положительной (отрицательной) $f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})$;

2) если при данном $i = 2,3,\ldots,N-1$ отношение $q_i < 0$, то $R_{N,1}(x)$ имеет точку перегиба z_i на интервале $(x_{i-1} + 1/3h_i, x_i - 1/3h_i)$, выпукла вверх (вниз) на отрезке $[x_{i-1}, z_i]$ и выпукла вниз (вверх) на отрезке $[z_i, x_i]$ при положительной (отрицательной) $f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})$.

4 Выпуклая интерполяция рациональными сплайн-функциями класса C^2

4.1 Введение

Вопросы выпуклой интерполяции полиномиальными сплайнами в достаточно полной форме исследованы в ряде работ различными авторами (см., напр., [1–5] и цитированные в них источники). Подобные вопросы рассматривались также для рациональных сплайнов специальных видов, например, в работах [8–11].

Ниже вопрос выпуклой (вниз или вверх) интерполяции выпуклых (вниз или вверх, соответственно) дискретных данных рассматривается для дважды непрерывно дифференцируемых сплайн-функций, построенных с помощью трехточечных рациональных интерполянтов.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, в которых определена дискретная функция $f(x)$. При $i = 1,2,\ldots,N-1$ коэффициенты рациональной функции

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i},$$

с произвольным полюсом $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ определим из интерполяционных условий $R_i(x_j) = f(x_j)$ $(j = i-1,i,i+1)$.

Тогда с использованием разделенных разностей первого порядка $f(x_{i-1}, x_i)$ и второго порядка $\delta_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ при $i = 1,2,\ldots,N-1$ получим

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= f(x_i) - \delta_i(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i),\\
\beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + \delta_i(x_i - g_i),\\
\gamma_i &= \delta_i(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i).
\end{aligned}$$

Будем считать, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$ (допускаются и другие варианты крайних интерполянтов $R_0(x)$ и $R_N(x)$).

Для краткости при $i = 1,2,\ldots,N$ обозначим

$$A_i(x) = \frac{(x - x_{i-1})^2}{(x - x_{i-1})^2 + (x_i - x)^2)}, \quad B_i(x) = 1 - A_i(x)$$

и на отрезке $[a,b]$ определим ([9]) рациональную сплайн-функцию $R_{N,2}(x) = R_{N,2}(x, f, \Delta, g)$ класса $C^2[a,b]$, полагая

$$R_{N,2}(x) = R_i(x)A_i(x) + R_{i-1}(x)B_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1,2,\ldots,N).$$

Всюду ниже придерживаемся также обозначений: $q_i = \delta_{i-1}/\delta_i$ $(i = 2,3,\ldots,N-1)$; $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,\ldots,N)$; $\rho_\Delta = \max\{\, h_i h_j^{-1} \,\big|\, |i-j| = 1; i,j = 1,2,\ldots,N\}$; $\gamma = (2\sqrt{2}+1)/(2\sqrt{2}+5)$.

4.2 Основной результат

Следующее утверждение дает условия выпуклой интерполяции дискретных данных рациональными сплайн-функциями $R_{N,2}(x,f,\Delta,g)$ класса $C^2[a,b]$.

Теорема 4.1. *Пусть для дискретных данных* $f(x_i)$ $(i=0,1,\ldots,N)$ *на сетке узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$ *выполнены неравенства* $\delta_i > 0$ *(соответственно,* $\delta_i < 0$*) при* $i=1,2,\ldots,N-1$ *и* $\gamma < q_i < 1/\gamma$ *при* $i=2,3,\ldots,N-1$.

Тогда существуют полюсы $g = \{g_1,g_2,\ldots,g_{N-1}\}$, *для которых рациональная сплайн-функция* $R_{N,2}(x) = R_{N,2}(x,f,\Delta,g)$ *выпукла вниз (соответственно, вверх) на отрезке* $[a,b]$.

5 Оценка функции Лебега сумм Фурье по модифицированным полиномам Мейкснера

5.0.1 Введение

Пусть $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, где $\delta = \frac{1}{N}$, $N \geq 1$. Следуя [18], обозначим через $M_{n,N}^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \ldots$) модифицированные полиномы Мейкснера, образующие при $\alpha > -1$ ортогональную систему на множестве Ω_δ с весом $\rho_N(x) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}$, т.е.

$$\sum_{x\in\Omega_\delta} M_{n,N}^\alpha(x) M_{k,N}^\alpha(x)\rho_N(x) = h_{n,N}^\alpha \delta_{nk},\ \alpha > -1,$$

где δ_{nk} – символ Кронекера, $h_{n,N}^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} e^{n\delta}\Gamma(\alpha+1)$. Соответствующие ортонормированные полиномы обозначим через $m_{n,N}^\alpha(x) = (h_{n,N}^\alpha)^{-1/2} M_{n,N}^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \ldots$).

Далее, пусть C_0 – пространство непрерывных функций, заданных на полуоси $[0,\infty)$ и удовлетворяющих условию

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}|f(x)| = 0.$$

норму в котором определим следующим образом

$$\|f\|_{C_0} = \sup_{x\geqslant 0} e^{-x/2}|f(x)|,$$

H^n – пространство алгебраических полиномов степени $\leqslant n$,

$$E_n(f) = \inf_{p_n\in H^n} \|f - p_n\|_{C_0}$$

– наилучшее приближение функции f полиномами из H^n.

Через $S_{n,N}^\alpha(x) = S_{n,N}^\alpha(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда Фурье функции $f \in C_0$ по полиномам $m_{n,N}^\alpha(x)$:

$$S_{n,N}^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^\alpha m_{k,N}^\alpha(x),$$

где

$$f_k^\alpha = \sum_{t\in\Omega_\delta} f(t) m_{k,N}^\alpha(t)\rho_N(t).$$

В настоящей работе для функции $f \in C_0$ рассматривается задача об оценке величины $e^{-x/2}|f(x) - S_{n,N}^\alpha(x)|$ при $x \in [0,\infty)$. Как известно, с помощью неравенства Лебега

$$e^{-x/2}|f(x) - S_{n,N}^\alpha(x)| \leqslant (1 + \lambda_{n,N}^\alpha(x))E_n(f)$$

эта задача сводится к оценке функции Лебега

$$\lambda_{n,N}^\alpha(x) = \sum_{t\in\Omega_\delta} e^{-\frac{t+x}{2}} \frac{\Gamma(Nt+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1} \left|\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(t,x)\right|,$$

где $\left|\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(t,x)\right|$ – ядро, определенное равенством (5.1).

Основным результатом является теорема 5.1, в которой получена поточечная оценка для функции $\lambda_{n,N}^\alpha(x)$ при $x \in [\theta_n/2,\infty)$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$, $\alpha > -1$. Для $x \in [0,\theta_n/2]$ функция $\lambda_{n,N}^\alpha(x)$ была оценена в работе [19]. Отметим также, что при $\alpha = -1/2$ задача об оценке функции $\lambda_{n,N}^\alpha(x)$ была исследована в [20].

5.1 Некоторые сведения о модифицированных полиномах Мейкснера

При оценке функции Лебега $\lambda_{n,N}^\alpha(x)$ нам понадобятся некоторые свойства модифицированных полиномов Мейкснера $M_{n,N}^\alpha(x)$, которые мы приведем в этом пункте. Пусть α и q произвольные действительные числа, причем $q \neq 0$. Тогда для классических полиномов Мейкснера $M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x,q)$ имеют место [16–18]:

– явный вид
$$M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x,q) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]}x^{[k]}}{(\alpha+1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k,$$
где $x^{[k]} = x(x-1)\dots(x-k+1)$, $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$.

– соотношение ортогональности
$$\sum_{x=0}^{\infty} M_n^\alpha(x) M_k^\alpha(x)\rho(x) = h_n^{\alpha,q}\delta_{nk},\ 0 < q < 1, \alpha > -1,$$
где $\rho(x) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}$, $h_n^{\alpha,q} = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n}\Gamma(\alpha+1)$.

Пусть $q = e^{-\delta}$, $N > 0$, $\delta = 1/N$, $\Omega_\delta = \{0,\delta,2\delta,\dots\}$. Тогда полиномы $M_{n,N}^\alpha(x) = M_n^\alpha(Nx,e^{-\delta})$ при $\alpha > -1$ образуют ортогональную с весом $\rho_N(x)$ систему на сетке Ω_δ. Теперь приведем некоторые свойства полиномов $M_{n,N}^\alpha(x)$, которые можно найти в [18]:

– равенства
$$M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x) = M_{n+1,N}^\alpha(x) - M_{n,N}^\alpha(x);$$
$$M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x) = \frac{\alpha}{n+1} M_{n,N}^\alpha(x) - \frac{(e^\delta - 1)Nx}{n+1} M_{n,N}^{\alpha+1}(x-\delta);$$

– формула Кристоффеля–Дарбу
$$\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(t,x) = \sum_{k=0}^{n} m_{k,N}^\alpha(t) m_{k,N}^\alpha(x) =$$
$$\frac{\delta\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{e^{\delta/2} - e^{-\delta/2}} \frac{m_{n+1,N}^\alpha(t)m_{n,N}^\alpha(x) - m_{n,N}^\alpha(t)m_{n+1,N}^\alpha(x)}{x-t}, \quad (5.1)$$

которую можно записать [20, 21] в следующем виде:
$$\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(t,x) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} m_{n,N}^\alpha(t) m_{n,N}^\alpha(x) + \frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} \frac{\delta}{e^{\delta/2} - e^{-\delta/2}} \frac{1}{x-t} \times$$
$$\left[m_{n,N}^\alpha(x)\left(m_{n+1,N}^\alpha(t) - m_{n-1,N}^\alpha(t)\right) - m_{n,N}^\alpha(t)\left(m_{n+1,N}^\alpha(x) - m_{n-1,N}^\alpha(x)\right)\right],$$
где $\alpha_n = \sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}$, $m_{-1,N}^\alpha(x) = 0$.

Для $0<\delta\le 1$, $N=1/\delta$, $\lambda>0$, $1\le n\le\lambda N$, $\alpha>-1$, $0\le x<\infty$, $\theta_n=\theta_n(\alpha)=4n+2\alpha+2$, $s\geqslant 0$ справедливы [18] следующие весовые оценки:

$$e^{-x/2}\left|m_{n,N}^{\alpha}(x\pm s\delta)\right|\le c(\alpha,\lambda,s)\theta_n^{-\alpha/2}A_n^{\alpha}(x),$$

$$e^{-x/2}\left|M_{n,N}^{\alpha}(x\pm s\delta)\right|\le c(\alpha,\lambda,s)A_n^{\alpha}(x),$$

$$e^{-x/2}\left|(M_{n,N}^{\alpha}(x\pm s\delta))'\right|\le c(\alpha,\lambda,s)A_{n-1}^{\alpha+1}(x),$$

$$A_n^{\alpha}(x)=\begin{cases}\theta_n^{\alpha}, & 0\le x\le\frac{1}{\theta_n},\\ \theta_n^{\alpha/2-1/4}x^{-\alpha/2-1/4}, & \frac{1}{\theta_n}<x\le\frac{\theta_n}{2},\\ \left[\theta_n(\theta_n^{1/3}+|x-\theta_n|)\right]^{-1/4}, & \frac{\theta_n}{2}<x\leqslant\frac{3\theta_n}{2},\\ e^{-x/4}, & \frac{3\theta_n}{2}<x<\infty,\end{cases}$$

$$e^{-x/2}\left|m_{n+1,N}^{\alpha}(x)-m_{n-1,N}^{\alpha}(x)\right|\leqslant$$

$$c(\alpha,\lambda)\begin{cases}\theta_n^{\alpha/2-1}, & 0\le x\le\frac{1}{\theta_n},\\ \theta_n^{-3/4}x^{-\alpha/2+1/4}, & \frac{1}{\theta_n}<x\le\frac{\theta_n}{2},\\ x^{-\alpha/2}\theta_n^{-3/4}\left[\theta_n^{1/3}+|x-\theta_n|\right]^{1/4}, & \frac{\theta_n}{2}<x\leqslant\frac{3\theta_n}{2},\\ e^{-x/4}, & \frac{3\theta_n}{2}<x<\infty,\end{cases}$$

где здесь и далее $c(\alpha)$, $c(\alpha,\lambda)$, $c(\alpha,\lambda,s)$ – положительные числа, зависящие только от указанных параметров, причем различные в разных местах.

5.2 Полученные результаты

Лемма 5.1. *Пусть $-1<\alpha\in\mathbb{R}$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda>0$, $t\geqslant 0$, $N=1/\delta$, $0<\delta\leqslant 1$. Тогда для $1\leqslant n\leqslant\lambda N$ имеет место следующая оценка*

$$e^{-t}\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,t)\le c(\alpha,\lambda)n^{1-\alpha}(A_n^{\alpha}(t))^2.$$

Лемма 5.2. *Пусть $-1<\alpha\in\mathbb{R}$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda>0$, $\theta_n/2\leqslant t\leqslant 3\theta_n/2$, $N=1/\delta$, $0<\delta\leqslant 1$. Тогда для $1\leqslant n\leqslant\lambda N$ равномерно относительно t имеет место следующая оценка*

$$e^{-t}\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,t)\le c(\alpha,\lambda)n^{-\alpha}.$$

Основным результатом настоящего раздела является следующая

Теорема 5.1. *Пусть $\alpha>-1$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda>0$, $0<\delta\leqslant 1$, $1\leqslant n\leqslant\lambda N$. Тогда имеют место следующие оценки:*
1) если $x\in\left[\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}\right]$, то

$$\lambda_{n,N}^{\alpha}(x)\leqslant c(\alpha,\lambda)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3}+|x-\theta_n|}\right)^{1/4}\right];$$

2) если $x\in\left[\frac{3\theta_n}{2},\infty\right)$, то

$$\lambda_{n,N}^{\alpha}(x)\leqslant c(\alpha,\lambda)n^{3/2}e^{-x/4}.$$

6 Приближение дискретных функций специальными рядами по модифицированным полиномам Мейкснера

6.1 Введение

В настоящей работе мы продолжаем, начатое в [22], исследование аппроксимативных свойств частичных сумм специальных рядов по модифицированным полиномам Мейкснера $m_{n,N}^{\alpha}(x)$. Специальные ряды по полиномам $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ возникают естественным образом при решении задачи об одновременном приближении дискретной функции d, заданной на равномерной сетке Ω_δ, и ее конечных разностей $\Delta_\delta^\nu d$, соответственно алгебраическим полиномом p и его конечными разностями $\Delta_\delta^\nu p$. Упомянутые специальные ряды по полиномам $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ являются более эффективным альтернативным рядам Фурье–Мейкснера аппаратом для решения этой задачи. Кроме того специальные ряды, в отличии от рядов Фурье–Мейкснера, обладают тем свойством, что они интерполируют исходную функцию в точках $0,\delta,\dots,(r-1)\delta$. Однако следует отметить, что задача об исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм упомянутых рядов оставалась мало исследованной, в частности, оставалась не исследованной задача об изучении на $[\frac{\theta_n}{2},\infty)$ поведения функции Лебега $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ частичных сумм специального ряда по полиномам $m_{n,N}^{\alpha}(x)$. Основным результатом является теорема 6.1, в которой получены оценки сверху для величины $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ на множествах вида $G_3=[\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}]$ и $G_4=[\frac{3\theta_n}{2},\infty)$, где $r\in\mathbb{N}$, $r-\frac{1}{2}<\alpha<r+\frac{1}{2}$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$.

6.2 Неравенство Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Мейкснера

Через $l_{\rho_N}^2(\Omega_\delta)$ обозначим пространство функций $f(x)$, заданных на Ω_δ и таких, что $\sum_{x\in\Omega_\delta} f^2(x)\rho_N(x)<\infty$. Пусть $f(x)\in l_{\rho_N}^2(\Omega_\delta)$, тогда при $x\in\Omega_{r,\delta}=\{r\delta,(r+1)\delta,\dots\}$ мы можем определить дискретный аналог полинома Тейлора следующего вида $P_{r-1,N}(x)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{\Delta_\delta^\nu f(0)}{\nu!}(Nx)^{[\nu]}$. Легко проверить, что функция $f_r(x)=\frac{f(x)-P_{r-1,N}(x)}{N^{-r}(Nx)^{[r]}}$ принадлежит пространству $l_{\rho_{N,r}}^2(\Omega_{r,\delta})$, где $\rho_{N,r}(x)=\rho_N(x-r\delta)$, а модифицированные полиномы Мейкснера $m_{k,N,r}^{\alpha}(x)=m_{k,N}^{\alpha}(x-r\delta)$ $(k=0,1,\dots)$ при $\alpha>-1$ образуют ортонормированный базис в $l_{\rho_{N,r}}^2(\Omega_{r,\delta})$. Поэтому мы можем определить коэффициенты Фурье–Мейкснера

$$\hat{f}_{r,k}^{\alpha}=\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} f_r(t)\rho_{N,r}(t)m_{k,N,r}^{\alpha}(t)=\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{f(t)-P_{r-1,N}(t)}{N^{-r}(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)m_{k,N,r}^{\alpha}(t)$$

и ряд Фурье–Мейкснера $f_r(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}_{r,k}^{\alpha}m_{k,N,r}^{\alpha}(x)$, который в силу базисности в $l_{\rho_{N,r}}^2(\Omega_{r,\delta})$ системы полиномов $m_{k,N,r}^{\alpha}(x)$ $(k=0,1,\dots)$ сходится равномерно относительно $x\in\Omega_{r,\delta}$. Отсюда следует, что

$$f(x)=P_{r-1,N}(x)+N^{-r}(Nx)^{[r]}\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}_{r,k}^{\alpha}m_{k,N,r}^{\alpha}(x),\quad x\in\Omega_\delta. \tag{6.1}$$

Следуя [22, 23], мы будем называть (6.1) специальным рядом по полиномам Мейкснера для функции $f(x)$. Частичную сумму ряда (6.1) обозначим через

$$S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x) = P_{r-1,N}(x) + N^{-r}(Nx)^{[r]}\sum_{k=0}^{n}\hat{f}_{r,k}^{\alpha}m_{k,N,r}^{\alpha}(x).$$

Если $f(x) = p_{n+r}(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+r$, то, очевидно, $\hat{f}_{r,k}^{\alpha} = 0$ при $k \geqslant n+1$ и поэтому из (6.1) следует $S_{n+r,N}^{\alpha}(p_{n+r},x) \equiv p_{n+r}(x)$, т.е. $S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов $p_{n+r}(x)$ степени не выше $n+r$. Обозначим через $q_{n+r}(x)$ алгебраический полином степени $n+r$, для которого $\Delta^i f(0) = \Delta^i q_{n+r}(0)$ $(i = \overline{0, r-1})$. Тогда

$$\left|f(x) - S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x)\right| = \left|f(x) - q_{n+r}(x) + q_{n+r}(x) - S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x)\right| \leqslant$$

$$|f(x) - q_{n+r}(x)| + \left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r} - f,x)\right|.$$

Отсюда для $x \in \Omega_{r,\delta}$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x) - S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x)\right| \leqslant e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x) - q_{n+r}(x)\right| +$$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r} - f,x)\right|. \tag{6.2}$$

Так как $P_{r-1,N}(q_{n+r} - f,x) = 0$, то

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r} - f,x)\right| = e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}N^{-r}(Nx)^{[r]}\left|\sum_{k=0}^{n}(\widehat{q_{n+r} - f})_{r,k}^{\alpha}m_{k,N}^{\alpha}(x - r\delta)\right| \leqslant$$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{|q_{n+r}(t) - f(t)|}{(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)\left|\sum_{k=0}^{n}m_{k,N}^{\alpha}(t - r\delta)m_{k,N}^{\alpha}(x - r\delta)\right| =$$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{|q_{n+r}(t) - f(t)|}{(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)\left|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta,x - r\delta)\right|. \tag{6.3}$$

Положим

$$E_k^r(f,\delta) = \inf_{q_k}\sup_{x\in\Omega_{r,\delta}} e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x) - q_k(x)\right|, \tag{6.4}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_k(x)$ степени k, для которых $\Delta^i f(0) = \Delta^i q_k(0)$ $(i = \overline{0, r-1})$. Тогда из (6.2) и (6.3) учитывая (6.4), получаем

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x) - S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x)\right| \leqslant E_{n+r}^r(f,\delta)(1 + l_{n,r}^{\alpha,N}(x)), \tag{6.5}$$

где

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}(1 - e^{-\delta})^{\alpha+1}\times$$

$$\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{e^{-\frac{t}{2}+r\delta}t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma(Nt - r + \alpha + 1)}{(Nt)^{[r]}\Gamma(Nt - r + 1)}\left|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta,x - r\delta)\right|. \tag{6.6}$$

В связи с неравенством (6.5) возникает задача об оценке на $[r\delta,\infty)$ функции Лебега $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$, определенной равенством (6.6). С этой целью введем следующие обозначения: $G_1 = [r\delta,\frac{3\lambda}{\theta_n}]$, $G_2=[\frac{3\lambda}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}]$, $G_3=[\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}]$, $G_4=[\frac{3\theta_n}{2},\infty)$, Для $x\in G_1\bigcup G_2$ это задача была решена в работе [22]. В настоящей работе мы будем оценивать функцию $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ на множествах G_3 и G_4.

Теорема 6.1. *Пусть $r\in\mathbb{N}$, $r-\frac{1}{2}<\alpha<r+\frac{1}{2}$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda>0$, $0<\delta\leqslant 1$, $1\leqslant n\leqslant \lambda N$. Тогда имеют место следующие оценки:*
1) если $x\in G_3$, то

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x)\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{\frac{1}{3}}+|x-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right];$$

2) если $x\in G_4$, то

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x)\leqslant c(\alpha,\lambda,r)n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}}x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{x}{4}}.$$

6.3 Приближение 2π-периодических кусочно гладких функций дискретными суммами Фурье

6.3.1 Аннотация

Пусть $N\geqslant 2$ — некоторое натуральное число. Выберем на вещественной оси N равномерно расположенных точек $t_k=2\pi k/N+u$ $(0\leqslant k\leqslant N-1)$. Обозначим через $L_{n,N}(f)=L_{n,N}(f,x)$ $(1\leqslant n\leqslant N/2)$ тригонометрический полином порядка n, обладающий наименьшим квадратичным отклонением от f относительно системы $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. Выберем $m+1$ точку $-\pi=a_0<a_1<\ldots<a_{m-1}<a_m=\pi$, где $m\geqslant 2$, и обозначим $\Omega=\{a_i\}_{i=0}^m$. Через $C_\Omega^{0,r}$ обозначим класс 2π-периодических функций f, r-раз дифференцируемых на каждом интервале (a_i,a_{i+1}), причем производная $f^{(r)}$ на каждом (a_i,a_{i+1}) абсолютно непрерывна. Через C_Ω^r обозначим множество непрерывных функций из $C_\Omega^{0,r}$. Мы рассмотрим задачу приближения функций из $C_\Omega^{0,1}$ и C_Ω^2 полиномами $L_{n,N}(f,x)$. Была найдена точная по порядку оценка $|f(x)-L_{n,N}(f,x)|\leqslant c(f,\varepsilon)/n$, $|x-a_i|\geqslant\varepsilon$ для функций из $C_\Omega^{0,1}$. Для функций из C_Ω^2, вместо оценки $|f(x)-L_{n,N}(f,x)|\leqslant c\ln n/n$, которая следует из известного неравенства Лебега, найдена точная по порядку оценка $|f(x)-L_{n,N}(f,x)|\leqslant c/n$ $(x\in\mathbb{R})$, которая равномерна относительно $1\leqslant n\leqslant N/2$. Кроме того, для них была найдена локальная оценка $|f(x)-L_{n,N}(f,x)|\leqslant c(\varepsilon)/n^2$ $(|x-a_i|\geqslant\varepsilon)$, которая также равномерна относительно $1\leqslant n\leqslant N/2$. Доказательства этих оценок основаны на сравнении дискретных и непрерывных конечных сумм ряда Фурье.

6.3.2 Реферат

6.3.2.1 Ключевые слова

приближение функций, тригонометрические полиномы, ряды Фурье, дискретное преобразование Фурье, кусочно-гладкие функции

6.3.2.2 Текст

Исследованы аппроксимативные свойства тригонометрических полиномов, обладающих наименьшим квадратическим отклонением от функции в узлах равномерной сетки, при приближении некоторых классов 2π-периодических кусочно-гладких функий. Были получены как равномерные, так и локальные оценки отклонения данных полиномов как от непрерывных кусочно-гладких функий, так и обладающих разрывами первого рода. Полученные результаты неулучшаемы по порядку.

6.3.3 Введение

Через $\overline{f}_{[a,b]}$ мы обозначим функцию

$$\overline{f}_{[a,b]} = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b), \\ f(a+0), & x = a, \\ f(b-0), & x = b. \end{cases}$$

Пусть Ω — множество из $m+1$ точек $-\pi = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = \pi$. Обозначим через $C_\Omega^{0,r}$ класс всех 2π-периодических функций f, таких, что на каждом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ функция $\overline{f}_{[a_i,a_{i+1}]}$ имеет r абсолютно непрерывных производных, а в точках a_i выполняется $f(a_i) = (f(a_i - 0) + f(a_i + 0))/2$. Через C_Ω^r обозначим подкласс всех непрерывных функций из $C_\Omega^{0,r}$.

Через $L_{n,N}(f,x)$ обозначим тригонометрических полином порядка n, обладающий наименьшим квадратичным отклонением от функции f в точках $\{t_j\}_{i=0}^{N-1}$, где $t_j = u + 2\pi j/N$, $n \leqslant N/2$, $N \geqslant 2$, и $u \in \mathbb{R}$. Другими словами, $L_{n,N}(f,x)$ доставляет минимум сумме $\sum_{j=0}^{N-1} |f(t_j) - T_n(t_j)|^2$ на множестве всех тригонометрических полиномов степени не выше n. Подробнее о приближении функций тригонометрическими полиномами можно прочитать в работах [98–107].

Также, мы будем обозначать через c или $c(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ некие положительные константы, которые зависят только от указанных в скобках аргументов и могут различаться в разных местах в тексте. Через $S_n(f,x)$ обозначим n-ю частичную сумму ряда Фурье функции f. Также отметим, что легко показать, что ряд Фурье любой функции $f \in C_\Omega^{0,1}$ (и, следовательно, C_Ω^2, в силу очевидного включения $C_\Omega^2 \subset C_\Omega^{0,1}$) сходится поточечно и возможно следующее представление:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \tag{6.7}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt. \tag{6.8}$$

Рассмотрим задачу оценки значения $|f(x) - L_{n,N}(f,x)|$ для $f \in C_\Omega^2$ и для $f \in C_\Omega^{0,1}$. Заметим, что два частных случая данной задачи были рассмотрены в работе [108], где величина $|f(x) - L_{n,N}(f,x)|$ была оценена для 2π-периодической функции $f(x) = |x|$ $(x \in [-\pi,\pi])$ и для

$f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$. В следующих теоремах мы обобщим результат, полученный в [108], для произвольных $f \in C^2_\Omega$ и $f \in C^{0,1}_\Omega$.

Теорема 6.2. *Для функции $f \in C^{0,1}_\Omega$ справедлива оценка:*

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{C(f,\varepsilon)}{n}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{6.9}$$

Данная оценка неулучшаема по порядку.

Теорема 6.3. *Для любой $f \in C^2_\Omega$ выполняются следующие неравенства:*

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.10}$$

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{n^2}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{6.11}$$

Данные оценки неулучшаемые по порядку.

Для доказательства данных теорем нам понадобится лемма из [109]:

Лемма 6.1 (Sharapudinov, [109])**.** *Если ряд Фурье функции f сходится в точках $t_k = u + 2k\pi/N$, тогда имеет место представление*

$$L_{n,N}(f,x) = S_n(f,x) + R_{n,N}(f,x), \tag{6.12}$$

где

$$R_{n,N}(f,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) \cos \mu N(u-t) f(t) dt, \tag{6.13}$$

$2n < N$ *и*

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx. \tag{6.14}$$

Данная лемма рассматривает только случай, когда $2n < N$. Если $2n = N$ (когда N — четное) мы можем записать (см. [109])

$$L_{n,2n}(f,x) = L_{n-1,2n}(f,x) + a_n^{(2n)}(f) \cos n(x-u), \tag{6.15}$$

где

$$a_n^{(2n)}(f) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k) \cos n(t_k - u). \tag{6.16}$$

Чтобы доказать неравенства (6.9), (6.10) и (6.11) из теорем 6.2 и 6.3, воспользуемся формулами

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant |f(x) - S_n(f,x)| + |R_{n,N}(f,x)|, \quad n < N/2, \tag{6.17}$$

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \leqslant |f(x) - S_{n-1}(f,x)| + |R_{n-1,N}(f,x)| + \left|a_n^{(2n)}(f)\right|, \quad n = N/2, \tag{6.18}$$

которые сразу следуют из (6.12) и (6.15).

Для доказательства неравенств (6.9), (6.10) и (6.11), нам требуется оценить $|f(x) - S_n(f,x)|$, $|R_{n,N}(f,x)|$, и $|a_n^{(2n)}(f)|$ для $f \in C_\Omega^{0,1}$ и $f \in C_\Omega^2$. Следующая оценка для $|f(x) - S_n(f,x)|$, где $f \in C_\Omega^{0,1}$, была получена в работе [111]:

$$|f(x) - S_n(f,x)| \leqslant \frac{C(f,\varepsilon)}{n}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{6.19}$$

Нам остается оценить величины $|R_{n,N}(f,x)|$ и $|a_n^{(2n)}(f)|$ для $f \in C_\Omega^{0,1}$ и $|f(x) - S_n(f,x)|$, $|R_{n,N}(f,x)|$, и $|a_n^{(2n)}(f)|$ для $f \in C_\Omega^2$.

6.3.4 Оценка $|R_{n,N}(f,x)|$ для $f \in C_\Omega^{0,1}$

Из (6.13) и (6.14) можно получить представление

$$R_{n,N}(f,x) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\mu N(u-t)dt+$$
$$\frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\cos\mu N(u-t)dt = R_{n,N}^1(f,x) + R_{n,N}^2(f,x).$$

При доказательстве основного результата данного раздела нами будут использованы следующие леммы:

Лемма 6.2. *Для $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ справедливо следующее неравенство:*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right)}\right| \leqslant c.$$

Лемма 6.3. *Для $f \in \mathrm{C}_\Omega^{0,1}$ следует:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt =$$
$$\frac{(-1)^q\mu N}{(\mu N)^2 - k^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(f(a_i - 0) - f(a_i + 0)\right)h_p(k(a_i - x))h_{1-q}(\mu N(a_i - u)) -$$
$$\frac{(-1)^q\mu N}{(\mu N)^2 - k^2}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)h_p(k(t-x))h_{1-q}(\mu N(t-u))dt+$$
$$\frac{(-1)^{1+p}k}{(\mu N)^2 - k^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(f(a_i - 0) - f(a_i + 0)\right)h_{1-p}(k(a_i - x))h_q(\mu N(a_i - u)) -$$
$$\frac{(-1)^{1+p}k}{(\mu N)^2 - k^2}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)h_{1-p}(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt. \tag{6.20}$$

Лемма 6.4. *Величина $\left|R_{n,N}^1(f,x)\right|$ для $f \in \mathrm{C}_\Omega^{0,1}$ может быть оценена следующим образом:*

$$\left|R_{n,N}^1(f,x)\right| \leqslant \frac{c(f)}{N}.$$

Лемма 6.5. *Величина* $\left|R^2_{n,N}(f,x)\right|$ *для* $f \in \mathrm{C}^{0,1}_{\Omega}$ *может быть оценена следующим образом:*

$$\left|R^2_{n,N}(f,x)\right| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N}, \quad |x-a_i| \geqslant \varepsilon.$$

Из лемм 6.4 и 6.5 мы имеем для $f \in \mathrm{C}^{0,1}_{\Omega}$

$$|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N}, \quad |x-a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{6.21}$$

6.3.5 Оценка $|a_n^{(2n)}(f)|$ для $f \in C^{0,1}_{\Omega}$

Из (6.16), используя, что $t_j = u + 2\pi k/N$, имеем

$$a_n^{(N)}(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k f(t_k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right)$$

и

$$\left|a_n^N(f)\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right|.$$

Обозначим через G подмножество индексов из $\{k\}_{k=0}^{n-1}$, таких, что для $k \in G$ отрезок $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ не содержит ни одной точки a_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$, и обозначим $\hat{G} = \{k\}_{k=0}^{n-1} \setminus G$. Теперь запишем

$$\left|a_n^N(f)\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k\in G}\left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right| + \frac{1}{N}\sum_{k\in \hat{G}}\left|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})\right|. \tag{6.22}$$

Для каждого $k \in G$ отрезок $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ полностью лежит внутри какого-то интервала (a_i, a_{i+1}) и, следовательно, функция $f \in \mathrm{C}^{0,1}_{\Omega}$ дифференцируема на этом отрезке, что позволяет использовать теорему о среднем и получить неравенство

$$|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})| \leqslant c(f)\,|t_{2k} - t_{2k+1}| \leqslant \frac{c(f)}{N}. \tag{6.23}$$

Для $k \in \hat{G}$ есть $s(k)$ точек $a_{i_{k,1}} < a_{i_{k,2}} < \ldots < a_{i_{k,s(k)}}$ внутри сегмента $[t_{2k}, t_{2k+1}]$. Оценим величину $|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})|$ для $k \in \hat{G}$. Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 6.6. *Для* $f \in \mathrm{C}^{0,1}_{\Omega}$ *и отрезка* $[a,b]$, *где* $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$ *выполняется*

$$|f(a) - f(b)| \leqslant c(f)(s + |a-b|),$$

где s *— это число точек разрыва первого рода* $x_1, x_1, \ldots, x_s$ *функции* f *на* $[a,b]$.

Из этой леммы следует

$$\sum_{k\in\hat{G}}|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})| \leqslant \sum_{k\in\hat{G}} c(f)\left(s(k) + \frac{2\pi}{N}\right) \leqslant c(f)\sum_{k\in\hat{G}} s(k) + \sum_{k\in\hat{G}}\frac{2\pi}{N}.$$

Каждая точка $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ может быть включена в один или два отрезка $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ $(k \in \hat{G})$, следовательно, $\sum_{k\in\hat{G}} s(k) < 2m$. Используя это, и то, что $|\hat{G}| \leqslant m$ имеем

$$\sum_{k\in\hat{G}}|f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})| \leqslant c(f). \tag{6.24}$$

Из (6.22), (6.23) и (6.24) для $f \in \mathrm{C}^{0,1}_{\Omega}$ следует

$$\left|a_n^N(f)\right| \leqslant \frac{c(f)}{N}. \tag{6.25}$$

6.3.6 Доказательство Теоремы 6.2

Доказательство оценки (6.9) из Теоремы 6.2 немедленно следует из неравенств (6.17), (6.18), (6.19), (6.21), (6.25), и $n \leqslant N/2$. Чтобы доказать, что оценка точна по порядку, рассмотрим величину $\left|f_1(\frac{\pi}{2}) - L_{4n,N}(f_1,\frac{\pi}{2})\right|$, где $4n < N/2$ и $f_1(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$. Из Леммы 6.1 мы можем получить неравенство

$$|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant |f(x) - S_n(f,x)| - |R_{n,N}(f,x)|.$$

Нетрудно убедиться, что имеет место следующее представление:

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^k)\sin kx}{k} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\pi}{2k-1}, \tag{6.26}$$

$$S_{2n}(f_1,x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Таким образом, мы можем получить нижнюю оценку величины $\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - S_{4n}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right|$:

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - S_{4n}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right| = \frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1}\right) =$$
$$\frac{8}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2\left(4-\frac{1}{k}\right)\left(4-\frac{3}{k}\right)} > \frac{1/4}{4n}.$$

Отсюда, и из (6.26) мы имеем

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - L_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \geqslant \frac{1/4}{4n} - \left|R_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

Ранее мы показали, что $\left|R_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant c/N$. Через $N(n)$ обозначим натуральное число, такое что для каждого $N \geqslant N(n)$ следует $\left|R_{4n,N}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1/8}{4n}$. Теперь мы имеем

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - L_{4n,N(n)}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\right| \geqslant \frac{1/8}{4n} = \frac{c}{4n}.$$

Отсюда мы видим, что порядок оценки (6.9) не может быть улучшен. Теорема 6.2 доказана.

6.3.7 Оценка величины $|f(x) - S_n(f,x)|$ для $f \in C^2_\Omega$

Чтобы оценить $|f(x) - S_n(f,x)|$ нем понадобится следующая лемма:

Лемма 6.7. *Для $f \in C^2_\Omega$ справедливо следующее неравенство:*

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t+\alpha))dt\right| \leqslant \frac{c(f)}{k^2},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и

$$h_p(x) = \begin{cases}\cos x, & p = 0,\\ \sin x, & p = 1.\end{cases} \tag{6.27}$$

Лемма 6.8. *Для $f \in C^2_\Omega$ справедливы неравенства*

$$|f(x) - S_n(f,x)| \leqslant \frac{c(f)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.28}$$

$$|f(x) - S_n(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{n^2}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{6.29}$$

6.3.8 Оценка величины $|R_{n,N}(f,x)|$ для $f \in C^2_\Omega$

Из (6.13) и (6.14) следует $R_{n,N}(f,x) = R^1_{n,N}(f,x) + R^2_{n,N}(f,x)$, где

$$R^1_{n,N}(f,x) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \mu N(u-t) dt,$$

$$R^2_{n,N}(f,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(x-t) \cos \mu N(u-t) dt. \tag{6.30}$$

Очевидно, $|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \left|R^1_{n,N}(f,x)\right| + \left|R^2_{n,N}(f,x)\right|$. Величины $\left|R^1_{n,N}(f,x)\right|$ and $\left|R^2_{n,N}(f,x)\right|$ оценены ниже, для чего мы используем несколько вспомогательных лемм.

Из Леммы 6.3 можно получить следующее следствие:

Следствие 6.1. *Если $f \in C^2_\Omega$, тогда $f(a_i - 0) - f(a_i + 0) = 0$, таким образом, мы можем записать* (6.20) *как*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_p(k(t-x)) h_q(\mu N(t-u)) dt = \frac{(-1)^q \mu N}{(\mu N)^2 - k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) h_p(k(t-x)) h_{1-q}(\mu N(t-u)) dt -$$

$$\frac{(-1)^{1+p} k}{(\mu N)^2 - k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) h_{1-p}(k(t-x)) h_q(\mu N(t-u)) dt.$$

Лемма 6.9. *Имеют место следующие оценки:*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} h_p(kx) \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

Лемма 6.10. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — монотонная последовательность (возрастающая или убывающая) n положительных чисел. Имеет место следующее неравенство:*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_p(kx) \right| \leqslant \frac{2\alpha_n + \alpha_1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

Лемма 6.11. *Справедливо следующее неравенство:* $\left|R^1_{n,N}(f,x)\right| \leqslant c(f)/N^2$.

Лемма 6.12. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\left|R^2_{n,N}(f,x)\right| \leqslant \frac{nc(f)}{N^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.31}$$

$$\left|R^2_{n,N}(f,x)\right| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N^2}, \quad |x - a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{6.32}$$

Из вышеприведенных лемм и неравенства $|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \left|R^1_{n,N}(f,x)\right| + \left|R^2_{n,N}(f,x)\right|$ следуют оценки для $|R_{n,N}(f,x)|$:

$$|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{nc(f)}{N^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.33}$$

$$|R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{c(f,\varepsilon)}{N^2}, \quad |x-a_i| \geqslant \varepsilon. \tag{6.34}$$

6.3.9 Оценка величины $\left|a_n^{(2n)}(f)\right|$ для $f \in C^2_\Omega$

Лемма 6.13. *Для $a_n^{(2n)}(f)$, где $f \in C^2_\Omega$ и $2n = N$, справедлива оценка $\left|a_n^{(2n)}(f)\right| \leqslant c(f)/N^2$.*

6.3.10 Доказательство Теоремы 6.3

Доказательство Теоремы 6.3 состоит из двух частей: сначала мы докажем неравенства (6.10) и (6.11) теоремы, а затем докажем, что данные оценки не могут быть улучшены для $f \in C^2_\Omega$.

Из неравенств (6.17), (6.18), оценок (6.28), (6.29), (6.33), (6.34) и Леммы 6.13 легко получить (6.10) и (6.11). Чтобы доказать, что порядок этих оценок неулучшаем, рассмотрим вышеупомянутую 2π-периодическую функцию $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi,\pi]$. Очевидно, $f \in C^2_\Omega$. Мы будем рассматривать только случай $n < N/2$. Из (6.12) следует $|f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant |f(x) - S_n(f,x)| - |R_{n,N}(f,x)|$. Из (6.33) имеем $|R_{n,N}(f,x)| \leqslant c(f)/N$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти натуральное число N_0, такое, что для каждого $N > N_0$ следует $|R_{n,N}(f,x)| < \varepsilon$. Пусть $N_0(n)$ — натуральное число, такое что для любого $N > N_0(n)$

$$\max_{\substack{x\in E\\ N>N_0(n)}} |R_{n,N}(f,x)| \leqslant \frac{1}{2}\max_{x\in E}|f(x) - S_n(f,x)|,$$

где $E \subset \mathbb{R}$. Таким образом, мы можем записать

$$\max_{\substack{x\in E\\ N>N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant \frac{1}{2}\max_{x\in E}|f(x) - S_n(f,x)|. \tag{6.35}$$

Лемма 6.14. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x) - S_n(f,x)| \geqslant c(f)/n, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\max_{|\pi k - x|\geqslant\varepsilon}|f(x) - S_n(f,x)| \geqslant c(f,\varepsilon)/n^2, \quad |\pi k - x| \geqslant \varepsilon.$$

Из (6.35) и предыдущей леммы следует:

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ N>N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant \frac{c}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\max_{\substack{|\pi k - x|\geqslant\varepsilon\\ N>N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f,x)| \geqslant \frac{c(\varepsilon)}{n^2}, \quad |x - \pi k| \geqslant \varepsilon.$$

Теорема 6.3 доказана.

Заключение

В 2017 году в Отделе математики и информатики Дагестанского научного центра РАН проведены научно-исследовательские работы по теме «Теория полиномов, ортогональных по Соболеву. аппроксимативные свойства рядов Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву. приложения полиномов, ортогональных по Соболеву».

Как показано в теоремах 3.1 и 3.2, интерполяционные рациональные сплайн-функции $R_{N,1}(x)$ позволяют при выполнении определенных условий (приведенных в формулировках этих теорем) интерполировать дискретные функции с сохранением формы ковыпуклости.

Ранее в работах [12–15] для рациональных сплайн-функций $R_{N,1}(x)$ исследованы их аппроксимативные свойства (в частности, доказана безусловная сходимость для функций и производных, получены оценки скорости сходимости), а также исследованы вопросы отсутствия или наличия явления Гиббса.

Отметим, что найдены приложения рациональных сплайн-функций $R_{N,1}(x)$ к приближенному решению начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений.

Выше теоремы 3.1 и 3.2 получены для сплайн-функций $R_{N,1}(x)$ класса $C^1_{[a,b]}$. Теорема 4.1 представляет собой аналог теоремы 3.1 для сплайн-функций $R_{N,2}(x)$ класса $C^2_{[a,b]}$. При этом теорема 3.1 справедлива при условии $1/2 < q_i < 2$, тогда как теорема 4.1 справедлива при более слабом условии $c < q_i < 1/c$ для $c = (2\sqrt{2}+1)/(2\sqrt{2}+5)$.

Однако остается открытым вопрос о справедливости аналога теоремы 3.2 для сплайн-функций $R_{N,2}(x)$.

Исследовано поведение функции Лебега сумм Фурье по модифицированным полиномам Мейкснера $m^{\alpha}_{n,N}(x)$, $\alpha > -1$. При соблюдении условий, указанных в теореме 5.1, получена верняя оценка для функции Лебега для $x \in \left[\frac{\theta_n}{2}, \infty\right)$. Этот результат является обобщением (относительно параметра α) результатов, полученных в работе [20]. Далее для произвольного натурального r и функции f из пространства $l^2_{\rho_N}(\Omega_\delta)$ построены специальные ряды по полиномам $m^{\alpha}_{n,N}(x)$. Рассмотрена задача об исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм специального ряда с уделением основного внимания на получение поточечной оценки для соответствующей функции Лебега. При этом отметим, что частичные суммы этих рядов, в отличие от сумм Фурье по тем же полиномам, совпадают с значениями исходной функции f в точках $\{0, \delta, 2\delta, \ldots, (r-1)\delta\}$.

Список использованных источников

1 Schweikert D.G. An interpolation curve using a spline in tension // J. Math. Phys. 1966. Vol. 45. pp. 312–317.

2 Miroshnichenko V.L. Convex and monotone spline interpolation // Constuctive Theory of Function: Proc. Int. Conf. (Varna, 1984). Sofia: Publ. House of Bulgarian Acad. Sci., 1984. pp. 610–620.

3 Мирошниченко В.Л. Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 // Вычислительные системы: сб. ст. / ИМ СО АН СССР. Новосибирск, 1990. Вып. 137: Приближение сплайнами. С. 31–57.

4 Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006. 360 с.

5 Волков Ю.С., Богданов В.В., Мирошниченко В. Л., Шевалдин В. Т. Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами // Матем. заметки. 2010. Т. 88, № 6. С. 836–844.

6 Волков Ю.С., Шевалдин В.Т. Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 145–152.

7 Богданов В.В., Волков Ю.С. Об условиях формосохранения при интерполяции параболическими сплайнами по Субботину // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 102–113.

8 Schaback R. Spezielle rationale Splinefunktionen // J. Approx.Theory. 1973. Vol. 7, no. 2. pp. 281–292.

9 Spath H. Spline algorithms for curves and surfaces // Winnipeg: Utilitas Mathematica Publ. Inc., 1974. 198 p.

10 Hussain M.Z., Sarfraz M., Shaikh T.S. Shape preserving rational cubic spline for positive and convex data // Egyptian Informatics Journal. 2011. Vol. 12. pp. 231–236.

11 Edeo A., Gofeb G., Tefera T. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. 2015. Vol. 12, no. 1. pp. 110–122.

12 Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплайны по рациональным интерполянтам // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Вып. 4. С. 22–31.

13 Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценки скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам для непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 224–233.

14 Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2017. Т. 54. С. 304–306.

15 Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 7. С. 16–28.

16 Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные многочлены дискретной переменной. М.: Наука. 1985.

17 Bateman H, Erdeyi A. Higher transcendental functions. Vol. 2. McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1953.

18 Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та. 1997.

19 Gadzhimirzaev R.M. Approximative properties of Fourier–Meixner sums // Пробл. анал. Issues Anal., 7(25):1, 2018. Pp. 23–40.

20 Гаджиева З.Д. Смешанные ряды по полиномам Мейкснера. Кандидатская диссертация - Саратов. Саратовский гос. ун-т. 2004.

21 Гаджимирзаев Р.М. Приближение функций, заданных на сетке $\{0, \delta, 2\delta, \dots\}$ суммами Фурье-Мейкснера // Дагестанские электронные математические известия, вып. 7, 2017. С. 61–65.

22 Гаджимирзаев Р.М. Аппроксимативные свойства специальных рядов по полиномам Мейкснера // Владикавк. матем. журн., 20:3, 2018. С. 21–36.

23 Гаджимирзаев Р.М. Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 16:4, 2016. С. 388—395.

24 Шарапудинов И.И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Мат. сборник, 191(5), 2000. С. 143–160.

25 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Мат. заметки, 72(5), 2002. С.765–795.

26 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Издательство Дагестанского научного центра. Махачкала 2004. С.1–176.

27 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Мат. сборник, 97(3), 2006. С. 135–154.

28 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Мат. заметки, 84(3), 2008. С.452–471.

29 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Мат. сборник, 194(3), 2003. С. 115–148.

30 Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Мат. заметки, 88(1), 2010. С. 116–147.

31 Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 78(5), 2014. С. 201–224.

32 Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Вып. 4.

33 Сеге Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз. Москва. 1962.

34 Gasper G. Positiviti and special function // Theory and appl.Spec.Funct. Edited by Richard A.Askey. 1975. Pp. 375–433.

35 Kwon K.H., Littlejohn L.L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. Iss. 2. 1995. Pp. 289–303.

36 Kwon K.H., Littlejohn L.L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. Vol. 28. 1998. Pp. 547–594.

37 Marcellan F. , Alfaro M., Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 48. 1993. Pp. 113–131.

38 Iserles A., Koch P.E., Norsett S.P., Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory, 65. 1991. Pp. 151–175.

39 Meijer H.G. Laguerre polynimials generalized to a certain. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory, 73. 1993. Pp. 1–16.

40 Lopez G. Marcellan F. Vanassche W. Relative Asymptotics for Polynomials Orthogonal with Respect to a Discrete Sobolev Inner-Product // Constr. Approx. 11:1. 1995. Pp. 107–137.

41 Marcellan F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae, 33(3). 2015. Pp. 308–352.

42 И.И. Шарапудинов Системы функций, ортогональные по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». 2016. С. 329–332.

43 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. Fhiladelphia. SIAM. 2000.

44 Trefethen L.N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University. 1996.

45 Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. Машиностроение. Москва. 1986.

46 Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. Наука. Москва. 1983. С. 143–160.

47 Магомед-Касумов М.Г. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хаара // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». 2016. С. 176–178.

48 Гончар А.А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Мат. сборник, 97(139):4(8), 1975. С. 607–629.

49 Теляковский С.А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами // Мат. сборник, 70(2), 1966. С.252–265.

50 Гопенгауз И.З. К теореме А. Ф. Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке // Мат. заметки, 1(2), 1967. С. 163–172.

51 Осколков К.И. К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки, 18(4), 1975. С. 515–526.

52 Sharapudinov I.I. On the best approximation and polinomial of the least quadratic deviation // Analysis Mathematica, 9(3), 1983. Pp. 223–234.

53 Шарапудинов И.И. О наилучшем приближении и суммах Фурье-Якоби //Мат. заметки, 34(5), 1983. С. 651–661.

54 Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, Москва. 1960.

55 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам // Издательство Дагестанского научного центра. Махачкала. 2004. Стр. 1–176.

56 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математические заметки. 2005. Т. 78. Вып. 3. Стр. 442—465.

57 Шарапудинов И.И. Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. Вып. 2. Стр. 440–467.

58 Meijer H.G. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Pp. 1–16.

59 Marcellan F., Yuan Xu ON SOBOLEV ORTHOGONAL POLYNOMIALS. arXiv: 6249v1 [math.C.A] 25 Mar 2014. Pp. 1–40

60 Lopez G., Marcellan F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product // Constr. Approx. 1995. Vol. 11. Issue 1. Pp. 107–137.

61 Сеге Г. Ортогональные многочлены. Москва. Физматгиз. 1962.

62 Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Mathem. 1965. Vol. 87. Pp. 698–708.

63 Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. Москва. Высшая школа. 1975.

64 Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. Москва. Наука. 1974.

65 Шарапудинов И.И. Ортогональные по Соболеву системы, порожденные ортогональными функциями // Изв. РАН. Сер. Математическая. 2018. Том. 82. (Принята к печати)

66 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. Fhiladelphia. SIAM. 2000.

67 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Применение рядов Чебышева для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Вып. 11. Стр. 517–531.

68 Лукомский Д.С., Терехин П.А. Применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов. ООО «Издательство «Научная книга». 2016. Стр. 171–173.

69 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра. Дифференциальные уравнения. 2017 (принята к печати)

70 Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. Москва. АФЦ 1999.

71 Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 1. Стр. 68 – 76

72 G. Faber Ober die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1910. Vol. 19. Pp. 104–112.

73 Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Якоби // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. Стр. 1—24.

74 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Издательство Дагестанского научного центра. Махачкала. 2004. С. 1–176.

75 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. SIAM. Philadelphia. 2000.

76 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференциальные уравнения. 2017. (принята к печати)

77 Сеге Г. Ортогональные многочлены. Москва. Физматгиз. 1962.

78 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Сиб. электрон. матем. 1983. изв. Вып. 7. Стр. 122—131

79 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Метод решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Выч. мет. программирование. 2013. Вып. 14:2. Стр. 203-214.

80 Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления // Физматлит. Москва. 2001. Т. 2. Стр. 810.

81 Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала, Изд-во Даг. гос. пед. ун-та. 1997.

82 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2016. Т.16. Вып. 3. С. 310–321.

83 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д., Гаджимирзаев Р.М. Разностные уравнения и полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Владикавказский Мат. журнал, 2017. Т.19. Вып. 2. С. 58–72.

84 Шарапудинов И.И. Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Мат. заметки, 2000. Т. 67. Вып. 3. С. 460–470.

85 Шарапудинов Т.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестник Дагестанского научного центра РАН, 2007. Т. 29. С. 12-–23.

86 Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональных по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы. 2016. С. 329–332.

87 Fernandez L., Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar, Xu Y. Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball // Journal of Approximation Theory, 171, 2013, pp. 84–104.

88 Antonia M. Delgado, Fernandez L., Doron S. Lubinsky, Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar. Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 440, № 2, 2016, pp. 716–740.

89 Fernandez L., Marcellan F., Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar, Xu Y. Sobolev orthogonal polynomials on product domains // Journal of Computational and Applied Mathematics, 284, 2015, pp. 202–215.

90 Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем., 2017, № 8, 67–79.

91 Гаджимирзаев Р. М. Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 16:4 (2016), 388–395.

92 Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д., Гаджимирзаев Р. М. Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. С. 31–60.

93 Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

94 Meijer H. G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Iss. 1. Pp. 1–16.

95 Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкалаю. Изд-во ДНЦ РАН. 2004.

96 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. Москва. Наука. 1974.

97 Ширяев А. Н. Вероятность-1. Москва. Изд-во МЦНМО. 2007.

98 Bernshtein S. N. On trigonometric interpolation by the method of least squares // Dokl. Akad. Nauk USSR. Vol. 4 (1934). pp. 1–5. (in Russian)

99 Erdös P. Some theorems and remarks on interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) T. 12 (1950), pp. 11–17.

100 Kalashnikov M. D. On polynomials of best (quadratic) approximation on a given system of points. // Dokl. Akad. Nauk USSR. Vol. 105 (1955). pp. 634–636. (in Russian)

101 Krilov V. I. Convergence of algebraic interpolation with respect to the roots of a Chebyshev polynomial for absolutely continuous functions and functions with bounded variation. // Dokl. Akad. Nauk USSR. Vol. 107 (1956). pp. 362–365. (in Russian)

102 Marcinkiewicz J. Quelques remarques sur l'interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) Vol. 8 (1936). pp. 127–130. (in French)

103 Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynômes d'interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) Vol. 8 (1936). pp. 131–135. (in French)

104 Natanson I. P. On the Convergence of Trigonometrical Interpolation at Equi-Distant Knots. // Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 45, no. 3 (1944). pp. 457-471. DOI:10.2307/1969188.

105 Nikol'skii S. M. On some methods of approximation by trigonometric sums. // Mathematics of the USSR - Izvestiya. Vol. 4 (1940). pp. 509–520. (in Russian)

106 Turetskiy A. H. Interpolation theory in exercises. Minsk. : Vissheyshaya shkola, 1968. 320 p (in Russian).

107 Zygmund A. Trigonometric Series. Vol 1. Cambridge. : Cambridge University Press,1959. 747 p.

108 Akniyev G. G. Discrete least squares approximation of piecewise-linear functions by trigonometric polynomials // Issues Anal., Vol. 6 (24), Issue 2 (2017). pp. 3-24. DOI: 10.15393/j3.art.2017.4070.

109 Sharapudinov I.I. On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation // Anal. Math. V. 9 (1983), Issue 3. pp. 223–234.

110 Sharapudinov I.I. Overlapping transformations for approximation of continuous functions by means of repeated mean Valle Poussin // Daghestan Electronic Mathematical Reports, Issue 8 (2017). pp. 70–92.

111 Magomed-Kasumov M. G. Approximation of piecewise smooth functions by the trigonometric Fourier series // Materials of XIX International Saratov Winter School "Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications"(2018). pp. 190-193.

112 Courant R. Differential and Integral Calculus Vol. 1. New Jersey. : Wiley-Interscience, 1988. 704 p.