ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ДАГЕСТАНСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК №
Регистрационный №
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Врио председателя ДНЦ РАН

___________ Муртазаев А.К.
«___»___________ 2019 г.

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ УСРЕДНЕНИЯ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСОВ МОМЕНТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСОВ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С P- И P(X)-ЛАПЛАСИАНОМ. ЛУЧЕВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ И ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

(итоговый отчет за 2018 г.)

Руководитель НИР,
Врио зав. Отделом математики и информатики ДНЦ РАН, канд. физ.-мат. наук ____________ Шарапудинов Т.И.

г. Махачкала, 2019

Список исполнителей

Научный руководитель,
в.н.с. Отдела математики и информатики ДНЦ РАН, д.ф.-м.н., ________________
М.М. Сиражудинов

в.н.с. ОМИ, д.ф.-м.н,
Кадиев Р.И., ________________
с.н.с. ОМИ, к.ф.-м.н,
Абдурагимов Э.И., ________________
с.н.с. ОМИ, к.ф.-м.н,
Меджидов З.Г. ________________

Нормоконтролер, н.с. ОМИ,
Султанахмедов М.С. ________________

Реферат

Отчет содержит X с., X источников.

Ключевые слова: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ; ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ; СИСТЕМА НАВЬЕ-СТОКСА; G-СХОДИМОСТЬ; G-КОМПАКТНОСТЬ; УСРЕДНЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ; НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДУ; ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА; p-ЛАПЛАСИАН; p-УСТОЙЧИВОСТЬ; ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ; УРАВНЕНИЯ ИТО; УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ; УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ; ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ; РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ; ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ; РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ; ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ; МОМЕНТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ; МЕТОД МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ; ТЕОРЕМЫ ТИПА БОЛЯ-ПЕРРОНА; ЛУЧЕВОЕ.

Настоящий отчёт содержит итоги работы за 2017 год Отдела математики и информатики ДНЦ РАН по теме «Асимптотические методы усреднения недивергентных дифференциальных операторов. Исследование вопросов моментной устойчивости и устойчивости по части переменных для дифференциальных уравнений Ито с импульсными воздействиями и разностных уравнений Ито. Исследование вопросов существования и единственности решений краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений с p- и $p(x)$-лапласианом. Лучевое преобразование векторных и тензорных полей и некоторые его обобщения» из Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы.

Метод усреднения дифференциальных операторов, основанный на асимптотических разложениях по малому параметру, широко используется в математической и физической литературе. Этот метод позволяет помимо теоремы усреднения получить оценки разности точного решения и его приближений. Нами впервые к усреднению обобщенного уравнения Бельтрами привлечены асимптотические методы, что позволило получить теорему усреднения и оценки порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ разности точного решения и его приближений в нормах пространств Лебега и Соболева.

Эти оценки получены асимптотическими методами при минимальных предположениях гладкости на данные задачи:

– коэффициенты — измеримые ограниченные ε-периодические функции;
– граница области из класса C^2;
– правая часть из пространства Соболева W_2^1.

Получены операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами. Изучены вопросы гельдеровости решений задачи Римана-Гильберта для обобщенных систем уравнений Бельтрами при минимальных условиях на данные задачи.

Применяя метод модельных уравнений, исследованы вопросы моментной устойчивости решений по части переменных относительно начальных данных для линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием. Получены достаточные условия устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений в терминах параметров этих уравнений. Эти результаты могут быть применены при исследованию на устойчивость развитие различных процессов биологии, физики, химии, экономики, подверженных случайным воздействиям.

Изучены вопросы глобальной экспоненциональной p-устойчивости $(2 \le p < \infty)$ систем линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями специального вида, используя теорию положительно обратимых матриц. Для этого применяется идеи и методы, разработанная Н.В. Азбелевым и его учениками для исследования вопросов устойчивости для детерминированных функционально–дифференциальных уравнений. Получены достаточные условия глобальной экспоненциональной p-устойчивости $(2 \le p < \infty)$ систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями в терминах положительной обратимости матрицы, построенной по исходной системе. Проверена выполнимость этих условий для конкретных уравнений.

Исследованы вопросы моментной устойчивости решений относительно начальных данных и допустимости пар пространств для линейных дифференциально–разностных уравнений Ито. Исследование проведено методом вспомогательных или модельных уравнений.

Исследованы вопросы существования, единственности, построения решения численными методами решения задачи Дирихле для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с p-лапласианом.

Доказано существование и единственность решения двухточечной краевой задачи для одного семейства нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

Исследованы вопросы существования, единственности, построения решения численными методами решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с дробными производными.

Введены в рассмотрение два двухпараметрических семейства ломаных на плоскости. Решена задача восстановления функции по ее интегралам вдоль этих ломаных, когда весовая функция – квазимногочлен. Для частных случаев весовых функций получены формулы обращения. В общем случае доказана единственность решения поставленной задачи. Результаты применены к доказательству единственности задачи интегральной геометрии с возмущением.

Доказана единственность восстановления функции, суммируемой в полосе на плоскости, заданной своими интегралами вдоль дуг двухпараметрических кривых второго порядка с весом, аналитическим по части переменных.

Доказаны формулы для определения неизвестного векторного поля на плоскости, заданного своим поперечным лучевым преобразованием в ограниченном угловом диапазоне. В первой формуле используется интегральная формула интерполяции функции с ограниченным спектром. Восстанавливается преобразование Фурье дивергенции неизвестного поля. Во второй формуле интерполяция производится по дискретным значениям функции. Восстанавливаются координатные функции потенциальной части искомого поля. Векторное поле ищется в классе вектор-функций, сосредоточенных в некоторой полосе, достаточно быстро убывающих на бесконечности и имеющих непрерывные вторые производные.

Содержание

Обозначения и сокращения

ДНЦ — Дагестанский научный центр

ОМИ — Отдел математики и информатики

РАН — Российская академия наук

Введение

Метод усреднения дифференциальных операторов, основанный на асимптотических разложениях по малому параметру, широко используется в математической и физической литературе. Этот метод позволяет помимо теоремы усреднения получить оценки разности точного решения и его приближений. Нами впервые к усреднению обобщенного уравнения Бельтрами привлечены асимптотические методы, что позволило получить теорему усреднения и оценки порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ разности точного решения и его приближений в нормах пространств Лебега и Соболева. Эти оценки получены асимптотическими методами при минимальных предположениях гладкости на данные задачи: 1) коэффициенты — измеримые ограниченные ε-периодические функции; 2) граница области из класса C^2; 3) правая часть из пространства Соболева W_2^1 (см. [?, ?, ?]). Получены операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами. Изучены вопросы гельдеровости решений задачи Римана-Гильберта для обобщенных систем уравнений Бельтрами при минимальных условиях на данные задачи (см. [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?]).

Вопросам устойчивости решений систем со случайными параметрами посвящено большое количество работ. Достаточно полный их список приведен в монографиях [?, ?, ?, ?]. В этих работах для исследования вопросов стохастической устойчивости, в основном, применялся традиционный метод, основанный на функционалах Ляпунова – Красовского – Разумихина. Однако применение этих методов во многих случаях встречало серьёзные трудности. Поэтому эффективные признаки устойчивости обычно удавалось доказывать лишь для сравнительно узких классов стохастических дифференциальных уравнений с последействием. С другой стороны, в теории устойчивости детерминированных функционально–дифференциальных уравнений высокую эффективность показал «W-метод», т.е. метод преобразования исходного уравнения с помощью вспомогательного уравнения, разработанный Н.В. Азбелевым и его учениками. Результатом таких преобразований является получение более простого уравнения, для которого легко выяснить наличие для его решений исследуемых свойств.

Для нелинейных дифференциальных уравнений Ито с последействием вопросы устойчивости мало изучены. В работах [?], [?] изучались вопросы локальной устойчивости решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с последействием с помощью «W-метода». В случае линейных уравнений локальная устойчивость решений и глобальная устойчивость решений эквивалентны, а в нелинейном случае из глобальной устойчивости решения следует локальная устойчивость этого же решения, а обратное неверно. Кроме того, в случае линейных уравнений из локальной устойчивости некоторого решения уравнения следует локальная устойчивость любого решения этого же уравнения, а в случае нелинейных уравнений этот факт не имеет место. Исследуются вопросы глобальной экспоненциональной p-устойчивости ($2 \leq p < \infty$) систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями специального вида, применяя идеи «W-метода» и используя теорию положительно обратимых матриц. Отличие в том, что преобразуется отдельно каждое уравнение системы в отдельности и сначала оценивается каждая компонента решения. Такой подход и специальный вид уравнения позволяет получить новые результаты не только для нелинейных уравнений, но и для линейных уравнений, как частный случай нелинейных уравнений. При проведении исследований использован подход работы [?], примененный для исследования глобальной экспоненциальной устойчивости систем детерминированных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздываниями.

Изучены вопросы единственности при $n \geqslant 2$ положительного решения задачи Дирихле в шаре $S = \{x \in R^n : |x| \ < 1\}$ с границей Γ для уравнения

$$\Delta_p u + a(|x|)|u|^q = 0,\ x \in S,$$

где $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), 1 < p \leq 2, q > 1$-константы, $a(t)-$ непрерывная неотрицательная при $t \geqslant 0$ функция. Результаты относительно единственности положительного радиально-симметричного решения решения, полученные ранее в случае $a(|x|) = |x|^m, m \geqslant 0$, обобщены на более общий случай $a(|x|)$.

Доказаны существование и единственность положительного решения краевой задачи

$$D^{\alpha}_{0+}u(t) + f(t{,}u(t)) = 0{,}0 < t < 1,$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

в случае, когда $f(t{,}u)$ имеет степенной рост по u, а также предложен численный метод его построения.

Кроме того, рассмотрена задача о восстановлении векторного поля по данным его поперечного лучевого преобразования в ограниченном угловом диапазоне на плоскости. Поперечное лучевое преобразование $P^{\perp}$ векторного поля $f = (f_1{,}f_2)$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ определяется формулой

$$P^{\perp}f(\xi{,}s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \xi{,}f(s\xi + t\eta)\rangle\, dt, \tag{0.1}$$

$\xi \in \mathbb{R}^2, s \in \mathbb{R}$. Интегрирование ведется вдоль прямой $l : x = s\xi + t\eta$ с направляющим вектором $\eta = (\eta_1, \eta_2), \xi = (\xi_1{,}\xi_2) = \eta^{\perp}$ – ортогональный вектор. Преобразования вида (0.1) возникают в физике плазмы, в фотоэластичности, в акустической томографии, в задачах визуализации крови в человеческом теле путем измерений ультразвуковых сигналов (см. [?, ?]). Установлению свойств поперечного преобразования, получению формул его обращения, а также алгоритмов обращения в случае, когда функция $P^{\perp}f(\xi{,}s)$ задана на всем цилиндре $\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, посвящено много работ (см., например, [?] и процитированную там литературу). Практически обоснованным является решение задачи обращения в случае, когда функция $P^{\perp}f(\xi{,}s)$ задана не на всем цилиндре $\mathbb{Z}$, а лишь на некоторой его части. Мы предполагаем, что вектор ξ меняется в произвольно малом угловом диапазоне. Однозначное решение задачи оказывается возможным в классе полей, имеющих финитные преобразования Фурье.

Исследован вопрос о восстановлении функции по ее интегралам вдоль ломаных одного семейства на плоскости. Пусть $\omega = (\omega_1{,}\omega_2), \theta = (\theta_1, \theta_2)$ – линейно независимые единичные векторы на плоскости, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ – произвольная точка. Символом $\Gamma_{\omega,\theta}(x)$ обозначим объединение лучей с вершиной в точке x и направляющими векторами ω и θ соответственно:

$$\Gamma_{\omega,\theta}(x) = \Gamma_\omega(x) \cup \Gamma_\theta^-(x),$$

где $\Gamma_\omega(x) = \{\xi = (\xi_1,\xi_2)) \in \mathbb{R}^2 : \xi = x + \theta t, t \geqslant 0\}$; знак "$-$" в символе $\Gamma_\theta^-(x)$ означает, что луч $\Gamma_\theta(x)$ проходится в направлении, противоположном направлению вектора θ . При фиксированных ω и θ $\Gamma_{\omega,\theta}(x)$ – двухпараметрическое семейство ломаных, зависящих от координат вершины $x = (x_1,x_2)$.

Рассмотрим множество криволинейных интегралов 1-го рода вдоль $\Gamma_{\omega,\theta}(x)$

$$g_\rho(x;\omega,\theta) = \int\limits_{\Gamma_{\omega,\theta}(x)} \rho(x,\xi) f(\xi) d\xi = \int\limits_{\Gamma_\omega(x)} \rho(x,\xi) f(\xi) d\xi - \int\limits_{\Gamma_\theta(x)} \rho(x,\xi) f(\xi) d\xi, \tag{0.2}$$

где ρ – некоторая весовая функция.

Задача состоит в восстановлении финитной функции $f(x)$ по известным интегралам (0.2), в которых ω и θ – фиксированные векторы.

В пространстве четной размерности задача определения функции по ее интегралам вдоль конических поверхностей с единичной весовой функцией решена в работе А. Бегматова [?]. Сформулируем этот результат.

Пусть $\{\Gamma(x,y)\}$, где $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, $y \geqslant 0, n = 2m > 2$, – семейство конусов с вершинами в точках (x,y):

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_k - \xi_k)^2 = (y - \eta)^2, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant y,$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots ,\xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \eta \in \mathbb{R}$, $\eta \geqslant 0$. Через U обозначим класс функций $f(x,y)$, которые всюду имеют все непрерывные частные производные до n-го порядка включительно и финитны с носителем в слое

$$\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in (o,h),\ h < +\infty\}.$$

Тогда решение уравнения

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} f(\xi,\eta) ds = g(x,y)$$

в классе U единственно, причем имеет место представление

$$f(x,y) = C \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \Delta_x \right)^m \int\limits_0^y g(x,y) d\eta, \tag{0.3}$$

где Δ_x – оператор Лапласа.

В статье [?] вводится в рассмотрение двухпараметрическое семейство симметричных относительно вертикальной оси ломаных $(\xi_1,\xi_2) = (x \pm r \sin\varphi, r \cos\varphi)$ с вершинами $M(x,0)$ на оси $O\xi$, где $r \geqslant 0, 0 < \varphi < \pi/2$. Соответствующее интегральное преобразование имеет вид

$$g(x,\tau) = \int\limits_0^\infty f(x \pm r\sin\varphi, r\cos\varphi)dr,$$

где $\tau = \operatorname{tg}\varphi$. Формула обращения, которую можно понимать как композицию свертки и обратной проекции, имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}\left(p.v.\int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\left(\frac{g'(\xi,\tau)}{\xi - x - y\tau} + \frac{g'(\xi,\tau)}{\xi - x + y\tau}\right)\right);$$

внутренний интеграл понимается в смысле главного значения, а штрих означает производную по переменной ξ.

Первым шагом решим задачу обращения интегрального преобразования

$$g_\rho(x;\omega) = \int\limits_{\Gamma_\omega(x)} \rho(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{0.4}$$

в котором интегралы берутся вдоль лучей, параллельных вектору ω, а весовая функция – квазимногочлен вида

$$\rho(x,\xi) = (x_1-\xi_1)_1^n(x_2-\xi_2)_2^n e^{\langle a,x-\xi\rangle}, \tag{0.5}$$

где $a = (a_1,a_2)$, $\langle a,x-\xi\rangle = a_1(x_1-\xi_1) + a_2(x_2-\xi_2)$.

Преобразования вида (0.2), (0.4) с различными весовыми функциями – частными случаями функции (0.5) – изучены в работах [?,?]. Применением преобразований Фурье и Лапласа для них получены формулы обращения в классе гладких финитных функций с носителями, лежащими в некоторой полосе на плоскости.

Заключение

В отчетном году продолжены исследования эллиптических уравнений второго порядка. Для недивергентных эллиптических уравнений второго порядка, коэффициенты которых локально периодичны (с малым периодом) по одной из переменных выведены усредненные уравнения.

В задаче Римана – Гильберта для системы уравнений Бельтрами доказано свойство гельдеровости решения, а для обобщенных уравнений Бельтрами получены оценки усреднения решения.

В случае уравнения Бельтрами с периодическим коэффициентом, зависящим от малого параметра, построено асимптотическое разложение решения задачи Римана – Гильберта и оценена невязка.

За отчетный период были исследованы вопросы глобальной экспоненциональной p-устойчивости $(2 \leq p < \infty)$ систем линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями специального вида, используя теорию положительно обратимых матриц. Кроме того, были исследованы вопросы асимптотической p-устойчивости $(2 \leq p < \infty)$ тривиального решения относительно начальных данных для линейной однородной импульсной системы дифференциальных уравнений Ито с линейными запаздываниями методом вспомогательных или модельных уравнений. Получены достаточные условия устойчивости в терминах параметров исследуемых систем. Результаты исследований опубликованы в работах [?, ?, ?, ?].

Для задачи Дирихле для нелинейного дифференциального уравнения с $p(x)$-лапласианом конструируются верхнее и нижнее решения путем склеивания на двух участках. Построенные верхнее и нижнее решения позволяют не только обосновать существование слабого решения, но и оценить решение сверху и снизу.

Список использованных источников

1 Шарапудинов И.И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Мат. сборник, 191(5), 2000. С. 143–160.

2 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Мат. заметки, 72(5), 2002. С.765–795.

3 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Издательство Дагестанского научного центра. Махачкала 2004. С.1–176.

4 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Мат. сборник, 97(3), 2006. С. 135–154.

5 Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Мат. заметки, 84(3), 2008. С.452–471.

6 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Мат. сборник, 194(3), 2003. С. 115–148.

7 Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Мат. заметки, 88(1), 2010. С. 116–147.

8 Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 78(5), 2014. С. 201–224.

9 Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Вып. 4.

10 Сеге Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз. Москва. 1962.

11 Gasper G. Positiviti and special function // Theory and appl.Spec.Funct. Edited by Richard A.Askey. 1975. Pp. 375–433.

12 Kwon K.H., Littlejohn L.L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. Iss. 2. 1995. Pp. 289–303.

13 Kwon K.H., Littlejohn L.L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. Vol. 28. 1998. Pp. 547–594.

14 Marcellan F. , Alfaro M., Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 48. 1993. Pp. 113–131.

15 Iserles A., Koch P.E., Norsett S.P., Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory, 65. 1991. Pp. 151–175.

16 Meijer H.G. Laguerre polynimials generalized to a certain. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory, 73. 1993. Pp. 1–16.

17 Lopez G. Marcellan F. Vanassche W. Relative Asymptotics for Polynomials Orthogonal with Respect to a Discrete Sobolev Inner-Product // Constr. Approx. 11:1. 1995. Pp. 107–137.

18 Marcellan F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae, 33(3). 2015. Pp. 308–352.

19 И.И. Шарапудинов Системы функций, ортогональные по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». 2016. С. 329–332.

20 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. Philadelphia. SIAM. 2000.

21 Trefethen L.N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University. 1996.

22 Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. Машиностроение. Москва. 1986.

23 Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. Наука. Москва. 1983. С. 143–160.

24 Магомед-Касумов М.Г. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хаара // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». 2016. С. 176–178.

25 Гончар А.А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Мат. сборник, 97(139):4(8), 1975. С. 607–629.

26 Теляковский С.А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами // Мат. сборник, 70(2), 1966. С.252–265.

27 Гопенгауз И.З. К теореме А. Ф. Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке // Мат. заметки, 1(2), 1967. С. 163–172.

28 Осколков К.И. К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки, 18(4), 1975. С. 515–526.

29 Sharapudinov I.I. On the best approximation and polinomial of the least quadratic deviation // Analysis Mathematica, 9(3), 1983. Pp. 223–234.

30 Шарапудинов И.И. О наилучшем приближении и суммах Фурье-Якоби //Мат. заметки, 34(5), 1983. С. 651–661.

31 Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, Москва. 1960.

32 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам // Издательство Дагестанского научного центра. Махачкала. 2004. Стр. 1–176.

33 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математические заметки. 2005. Т. 78. Вып. 3. Стр. 442—465.

34 Шарапудинов И.И. Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. Вып. 2. Стр. 440–467.

35 Meijer H.G. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Pp. 1–16.

36 Marcellan F., Yuan Xu ON SOBOLEV ORTHOGONAL POLYNOMIALS. arXiv: 6249v1 [math.C.A] 25 Mar 2014. Pp. 1–40

37 Lopez G., Marcellan F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product // Constr. Approx. 1995. Vol. 11. Issue 1. Pp. 107–137.

38 Сеге Г. Ортогональные многочлены. Москва. Физматгиз. 1962.

39 Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Mathem. 1965. Vol. 87. Pp. 698–708.

40 Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. Москва. Высшая школа. 1975.

41 Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. Москва. Наука. 1974.

42 Шарапудинов И.И. Ортогональные по Соболеву системы, порожденные ортогональными функциями // Изв. РАН. Сер. Математическая. 2018. Том. 82. (Принята к печати)

43 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. Philadelphia. SIAM. 2000.

44 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Применение рядов Чебышева для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Вып. 11. Стр. 517–531.

45 Лукомский Д.С., Терехин П.А. Применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов. ООО «Издательство «Научная книга». 2016. Стр. 171–173.

46 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра. Дифференциальные уравнения. 2017 (принята к печати)

47 Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. Москва. АФЦ 1999.

48 Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 1. Стр. 68 – 76

49 G. Faber Ober die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1910. Vol. 19. Pp. 104–112.

50 Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Якоби // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. Стр. 1—24.

51 Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Издательство Дагестанского научного центра. Махачкала. 2004. С. 1–176.

52 Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. SIAM. Philadelphia. 2000.

53 Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференциальные уравнения. 2017. (принята к печати)

54 Сеге Г. Ортогональные многочлены. Москва. Физматгиз. 1962.

55 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Сиб. электрон. матем. 1983. изв. Вып. 7. Стр. 122—131

56 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. Метод решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Выч. мет. программирование. 2013. Вып. 14:2. Стр. 203-214.

57 Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления // Физматлит. Москва. 2001. Т. 2. Стр. 810.

58 Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала, Изд-во Даг. гос. пед. ун-та. 1997.

59 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2016. Т.16. Вып. 3. С. 310–321.

60 Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д., Гаджимирзаев Р.М. Разностные уравнения и полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Владикавказский Мат. журнал, 2017. Т.19. Вып. 2. С. 58–72.

61 Шарапудинов И.И. Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Мат. заметки, 2000. Т. 67. Вып. 3. С. 460–470.

62 Шарапудинов Т.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестник Дагестанского научного центра РАН, 2007. Т. 29. С. 12-–23.

63 Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональных по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы. 2016. С. 329–332.

64 Fernandez L., Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar, Xu Y. Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball // Journal of Approximation Theory, 171, 2013, pp. 84–104.

65 Antonia M. Delgado, Fernandez L., Doron S. Lubinsky, Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar. Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 440, № 2, 2016, pp. 716–740.

66 Fernandez L., Marcellan F., Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar, Xu Y. Sobolev orthogonal polynomials on product domains // Journal of Computational and Applied Mathematics, 284, 2015, pp. 202–215.

67 Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем., 2017, № 8, 67–79.

68 Гаджимирзаев Р. М. Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 16:4 (2016), 388–395.

69 Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д., Гаджимирзаев Р. М. Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. С. 31–60.

70 Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

71 Meijer H. G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Iss. 1. Pp. 1–16.

72 Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкалаю. Изд-во ДНЦ РАН. 2004.

73 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. Москва. Наука. 1974.

74 Ширяев А. Н. Вероятность-1. Москва. Изд-во МЦНМО. 2007.