Дагестанские Электронные Математические Известия

Специальный выпуск

СМЕШАННЫЕ РЯДЫ ПО КЛАССИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

Шарапудинов И.И.

Дагестанский научный центр РАН,
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН и РСО-А

2015

УДК 517.538

Излагаются основы интенсивно развивающейся теории специальных (смешанных) рядов со свойством прилипания их частичных сумм по классическим полиномам, ортогональным как на интервалах, так и на равномерных сетках. Показано, по своим аппроксимативным свойствам частичные суммы специальных рядов выгодно отличаются от соответствующих частичных сумм рядов Фурье по тем же ортогональным полиномам. Например, частичные суммы смешанных рядов могут быть успешно использованы для решения задачи одновременного приближения дифференцируемой функции и ее нескольких производных, тогда как частичные суммы рядов Фурье по ортогональным полиномам для решения этой задачи не подходят.

Библиография: 59 названий.

The fundamentals of the rapidly developing theory of special (mixed) series with the property of sticking of their partial sums by classical polynomials orthogonal either on the intervals or on uniform grids. It is shown that partial sums of special series compare favorably by approximative properties with those of the corresponding partial sums of Fourier series by the same orthogonal polynomials. For example, the partial sums of mixed series can be successfully used to solve the problem of simultaneous approximation of a differentiable function and its multiple derivatives, while the partial sums of the Fourier series by orthogonal polynomials are not suitable for this task.

Bibliography: 59 items.

Ключевые слова: ряды Фурье; ортогональные полиномы; специальные ряды; смешанные ряды; аппроксимативные свойства; приближение функций и их производных.

Keywords: Fourier series; orthogonal polynomials; special series; mixed series; approximative properties; approximation of functions and their derivatives.

Содержание

Введение

Метод рядов Фурье играет основополагающую роль во многих важнейших разделах современной математики, физики и многих других областей. Ряды Фурье позволяют обобщить на бесконечномерные пространства идею о разложении по ортогональным направлениям произвольного вектора конечномерного пространства. На этом пути была создана современная теория тригонометрических рядов Фурье, эта же идея легла в основу теории общих ортогональных рядов. В частности, это относится к теории рядов Фурье по ортогональным полиномам Якоби, Лагерра, Эрмита и их дискретным аналогам. Остановимся несколько более подробно на некоторых проблемах, возникающих в связи с применением метода рядов Фурье по ортонормированним системам полиномов для приближенного решения дифференциальных уравнений. Для определенности рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots y^{(r-1)}) = 0, \tag{0.1.1}$$

Предположим, что его решение $y = f(x)$ ищется в виде ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{0.1.2}$$

по выбранной ортонормированной системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из достаточно гладких функций $\varphi_k(x)$. Если все ряды вида

$$f^{(\nu)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k^{(\nu)}(x) \quad (0 \leqslant \nu \leqslant r-1) \tag{0,1.3}$$

сходятся, то из (0.1.1) мы находим

$$F\left(x, \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k'(x), \dots, \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k^{(r-1)}(x)\right) = 0. \tag{0.1.4}$$

Численные методы решения уравнкения (0.1.4) относительно неизвестных коэффициентов c_k позволяют найти приближенные значения лишь конечного числа $c_k (k = 0, 1, \dots, N)$. Поэтому вместо точных равенств (0.1.3) мы будем иметь приближенные равенства

$$f^{(\nu)}(x) \approx \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi_k^{(\nu)}(x) = S_N^{(\nu)}(f, x) \quad (0 \leqslant \nu \leqslant r-1), \tag{0.1.5}$$

соответственно, вместо точного равенства (0.1.4) мы будем иметь приближенное равенство

$$F\left(x, \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi_k(x), \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi_k'(x), \dots, \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi_k^{(r-1)}(x)\right) \approx 0. \tag{0.1.6}$$

Выбрав N достаточно большим, мы можем добиться требуемой точности в приближенных равенствах (0.1.5) и (0.1.6) и тогда частичную сумму $S_N(f, x) = S_N^{(0)}(f, x)$ можно взять в качестве приближенного решения (с требуемой точностью) уравнения (0.1.1). Однако, может случиться так, что некоторые из рядов (0.1.3) сходятся очень медленно (чаще всего это характерно для рядов (0.1.3), соответствующих случаю $\nu \geqslant 1$) и тогда для достижения удовлетворительной точности в приближенных равенствах (0.1.5) и (0.1.6) потребуется взять N чрезмерно большим. Это создает целый ряд неудобств, связанных с практическим использованием (хранением, численной реализацией и другими) разложений в (0.1.5). Естественно возникает задача о замене «длинных» разложений в (0.1.5) существенно более «короткими», но без существенной потери точности приближенных равенств (0.1.5). Такая ситуация является типичной, например, в задачах, в которых в качестве ортонормированной системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ берется одна из систем классических ортогональных полиномов Лежандра, Чебышева, Якоби, Лагерра или их дискретных аналогов.

Хорошо известно, что аппроксимативные свойства разложений по полиномам Якоби и Лагерра существенно зависят от асимптотических свойств самих ортогональных полиномов. Поскольку при росте степеней ортонормированных полиномов Якоби и Лагерра их производные неограниченно (и достаточно быстро) растут вблизи концов интервалов ортогональности соответствующих полиномов, то, как следствие, существенно ухудшаются аппроксимативные свойства разложений по этим полиномам. В частности, это существенно ограничивает возможности применения рядов Фурье по полиномам Якоби и Лагерра в задаче одновременного приближения исходной функции и ее производных и во многом из-за этого ряди Фурье по ортогональным полиномам все еще не заняли свое подобающее место в арсенале методов приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений. Кроме быстрого роста (падения) вблизи концов отрезка ортогональности, отметим еще одно свойство полиномов Якоби, из-за которого суммы Фурье-Якоби (включая суммы Фурье-Чебышева) плохо проявляют себя в задаче одновременного приближения дифференцируемой функции и ее производных. Речь идет об асимптотическом поведении нулей полинома Якоби, когда его степень становится большим. Дело в том, что как хорошо известно, нули полинома Якоби сильно сгущаются около точек -1 и 1, когда его степень растоет и, следовательно, сам полином Якоби быстро колеблется вблизи концов отрезка $[-1, 1]$. Это обстоятельство неизбежно вызывает резкие колебания частичной суммы Фурье-Якоби вблизи концов -1 и 1 и ,как следствие, производная суммы Фурье-Якоби функции f плохо аппроксимирует производную самой функции f, даже если она обладает высокой гладкостью. Фраза «плохо аппроксимирует производную» означает, что для достижения уовлетворительной точности приближения производной функции f посредством производной n–той частичной суммы Фурье-Якоби число n (порядок частичной суммы) приходится брать слишком большим. И все же, применение рядов Фурье по полиномам Якоби и Лагерра для решения целого ряда типов дифференциальных и интегральных уравнений является естественным. Это объясняется тем, что часто удается найти простые алгоритмы для нахождения коэффициентов Фурье-Якоби или Фурье-Лагерра неизвестной функции (решения уравнения). В этом случае возникает идея решать такие задачи в два этапа. На первом этапе решается исходное уравнение методом рядов Фурье и находят достаточное число коэффициентов Фурье по соответствующей ортонормированной системе для искомого решения уравнения. Если при этом потребовалось привлечь слишком большое число этих коэффициентов, то на втором этапе решается задача «сжатия» вектора, составленного из них. Решить эту задачу простым «отбрасыванием» некоторых из них не удается. Требуется осуществить более глубокие преобразования, учитывающие информацию о дифференциальных свойства искомого решения, содержащуюся во всех найденных коэффициентах. Одна из целей настоящей работы заключается в том, чтобы осуществить подобные преобразования «длинных» частичных Фурье-Якоби и Фурье-Лагерра. На этом пути появились новые ряды по ортогональным полиномам, которых мы назвали «смешанными».

Детальный анализ причин, из-за которых возникают указанные выше недостатки рядов Фурье по ортогональным полиномам привели нас к построению *смешанных* рядов по полиномам Якоби и Лагерра, обладающих столь же простой конструкцией, что и ряды Фурье по указанным полиномам, но обладают значительно лучшими, чем ряды Фурье аппроксимативными свойствами (см. главы 5 и 8 настоящей работы). В частности, (*смешанные*) ряды успешно могут быть использованы для одновременного приближения функции и ее нескольких производных.

Следует отметить также, что, например, смешанные ряды по полиномам Лежандра обладают тем свойством, что частичные суммы этих рядов интерполируют исходную функцию на концах промежутка ортогональности [-1,1]. Это свойство имеет важное значение при решении прикладных задач обработки и сжатия изображений.

Наряду со смешанными рядами по полиномам Якоби и Лагерра, в настоящей работе подробно рассмотрены смешанные ряды по полиномам, ортогональным на дискретных сетках. А именно, речь идет о смешанных рядах по полиномам Чебышева, ортогональным на конечной равномерной сетке и смешанных рядах по полиномам Мейкснера, ортогональным на бесконечной равномерной сетке. Смешанные ряды по полиномам, ортогональным на равномерных сетках тесно связаны с разностными уравнениями, на подобие того, как смешанные ряды по полиномам Якоби и Лагерра, как отмечалось выше, связаны с дифференциальными уравнениями. Хорошо известно, что наиболее универсальным методом численного решения дифференциальных уравнений служат разностные уравнения (схемы), полученные путем дискретицации соответствующих дифференциальных уравнениий. Естественным же средством представления решений разностных уравнений с целью их дальнейшего «сжатия» являются ряди Фурье по тем или иным системам, ортогональным на сетках, на которых определены решения указанных разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальные уравнения. Наиболее часто в качестве базисов в пространствах дискретных функций применяют полиномы Чебышева (Хана), ортогональные на конечной равномерной сетке и полиномы Мейкснера, ортогональные на бесконечной равномерной сетке из $[0,\infty)$. Однако, использование частичных сумм Фурье по этим системам полиномов для приближенного представления решений разностных уравнений наталкивается на проблемы, совершенно аналогичные тем, о которых шла речь выше в связи с использованием рядов Фурье по полиномам Якоби и Лагерра для приближения решений дифференциальных уравнений. Только, речь идет уже о конструировании операторов, которые могут быть эффективно использованы для решения задачи одновременного приближения дискретной функции и ее конечных разностей. На эту роль, в частности, и претендуют частичные суммы смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на конечной равномерной сетке (представляющим собой дискретный аналог полиномов Якоби) и частичные суммы смешанных рядов по полиномам Мейкснера, ортогнональным на бесконечной равномерной сетке (являющимся дискретным аналогом полиномов Лагерра). Эти вопросы подробно рассмотрены в главах 7 и 8 настоящей монографии. В главе 9 обсуждается некоторые вопросы, связанные с применениями смешанных рядов по ортогональным полиномам. Что же касается глав 2–4, в которых дано подробное изложении теории полиномов, ортогональных на сетках, то они с одной стороны являются вспомогательными для глав 7 и 8, с другой - носят самостоятельтный характер и могут быть использоваанны для изучения собственно теории полиномов, ортогональных на сетках, включая их асимптотические свойства, разработанные автором в связи с некоторыми задачами теории приближений.

Выше ничего не говорилось о смешанных рядах по полиномам Эрмита и это не случайно. Дело в том, что для полиномов Эрмита понятия смешанного ряда и ряда Фурье по этим полиномам совпадают.

Глава 1. Предварительные сведения

§ 1.1. Обозначения

Через c, c_k, $c_k(\gamma, \dots, \beta)$ обозначаем положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров.

Пишем $f(z) = O(g(z))$ и $f(z) = o(g(z))$, $z \to z_0$, $z \in G$, для функций $f(z)$ и $g(z)$, определенных на множестве G с предельной точкой z_0, соответственно если $|f(z)/g(z)|$ ограничено в некоторой окрестности точки z_0, за исключением, быть может, самой точки z_0, и если $f(z)/g(z) \to 0$ при $z \to z_0$. Если из контекста ясно, о каких z_0 и G идет речь, то мы их опускаем.

Запись $f(z) \asymp g(z)$ $(z \to z_0, z \in G)$ означает, что одновременно $f(z) = O(g(z))$ и $g(z) = O(f(z))$ при $z \to z_0, z \in G$.

$\mathcal{P}^n$ – пространство алгебраических полиномов степени $\leqslant n$.

$|\Omega|$ – мощность множества Ω.

Будем пользоваться обозначениями:

$$z^{[0]} = 1, \quad z^{[n]} = z(z-1)\cdots(z-n+1);$$

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1),$$

где n – натуральное число;

Вместо «дискретная случайная величина» пишем д.с.в.

§ 1.2. Гамма-функция

Гамма-функция Эйлера в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ может быть определена равенством

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.2.1}$$

Посредством аналитического продолжения $\Gamma(z)$ доопределяется на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, за исключением точек $0, -1, -2, \dots$. В этих точках $\Gamma(z)$ имеет простые полюсы, причем функция $1/\Gamma(z)$ является целой. Хорошо известны следующие функциональные уравнения:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{1.2.2}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{1.2.3}$$

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}). \tag{1.2.4}$$

Если n – натуральное число, то из (1.2.2) имеем:

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\cdots(a+n-1) = (a)_n, \tag{1.2.5}$$

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)} = (z-1)\cdots(z-n) = (-1)^n \frac{\Gamma(-z+n+1)}{\Gamma(-z+1)}. \tag{1.2.6}$$

По определению гамма-функции, $\Gamma(1) = 1$. Поэтому

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdots n = n!. \tag{1.2.7}$$

Положим
$$\frac{\Gamma(z+\gamma)}{\Gamma(z+\nu)} = z^{\gamma-\nu}[1+r(z;\gamma,\nu)], \tag{1.2.8}$$
где γ и ν – фиксированные числа. Если $\gamma \geqslant 0$, то из (1.2.8) следует, что функция $r(z) = r(z;\gamma,\nu)$ является аналитической во всей комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси, причем (см. [1], т. 1, §1.18)
$$|r(z,\gamma,\nu)| = O\left(\frac{1}{z}\right) \ (z\to\infty,\ |\arg z| \leqslant \pi-\delta,\ \delta>0). \tag{1.2.9}$$

Для гамма–функции справедлива следующая асимптотическая формула:
$$\ln\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + R(z), \tag{1.2.10}$$
где $|\arg z| < \pi/2$,
$$|R(z)| \leqslant \frac{K(z)}{12|z|}, \quad K(z) = \sup_{u\geqslant 0}\left|\frac{z^2}{u^2+z^2}\right|. \tag{1.2.11}$$
В частности, имеет место формула Стирлинга
$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{\theta/(12n)},\ \ 0<\theta<1,\ n\geqslant 1. \tag{1.2.12}$$
Интеграл Эйлера первого рода (бета-функция)
$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,\ \ p>0,\ q>0 \tag{1.2.13}$$
может быть выражен через гамма-функцию следующим образом:
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.2.14}$$

§ 1.3. Гипергеометрический ряд

Для двух натуральных чисел p и q и двух произвольных групп чисел $a_1,\cdots,a_p$ и $b_1,\cdots,b_q$ обобщенный гипергеометрический ряд определяется равенством (см. (1.2.5))
$${}_pF_q(a_1,\cdots,a_p;b_1,\cdots,b_q;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}. \tag{1.3.1}$$
Для натурального n имеем:
$$\begin{gathered}{}_2F_1(-n,\alpha;\gamma;t) = \\ = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+n-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\alpha)}{}_2F_1(-n,\alpha;\alpha-n-\gamma+1;1-t),\end{gathered} \tag{1.3.2}$$

$$\begin{gathered}{}_3F_2(-n,\alpha,\beta;\gamma,\delta;1) = \\ = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\delta-\beta)}\int\limits_0^1 {}_2F_1(-n,\alpha;\gamma;t)t^{\beta-1}(1-t)^{\delta-\beta-1}\,dt,\end{gathered} \tag{1.3.3}$$

первое из которых хорошо известно, а второе выводится из (1.3.1) почленным интегрированием ряда ${}_2F_1(-n,\alpha;\gamma;t)$, умноженного на $t^{\beta-1}(1-t)^{\delta-\beta-1}$. Из (1.3.2) и (1.3.3) последовательно находим:

$$ {}_3F_2(-n,\alpha,\beta;\gamma,\delta;1) = $$
$$ = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+n-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\alpha)} {}_3F_2(-n,\alpha,\delta-\beta;1+\alpha-\gamma-n,\delta;1), \tag{1.3.4} $$

$$ {}_3F_2(-n,\alpha,\beta;\gamma,\delta;1) = \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta-\alpha+n)\Gamma(\gamma-\alpha+n)}{\Gamma(\delta+n)\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\delta-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\times $$
$$ {}_3F_2(-n,\alpha,1+\alpha+\beta-\gamma-\delta-n;1+\alpha-\delta-n,1+\alpha-\gamma-n;1). \tag{1.3.5} $$

§ 1.4. Полиномы Якоби

Определим полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ с помощью обобщенной формулы Родрига:

$$ P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{\kappa(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\kappa(x)\sigma^n(x)\right\}, \tag{1.4.1} $$

где α,β – произвольные действительные числа,

$$ \kappa(x) = \kappa(x;\alpha,\beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ \sigma(x) = 1-x^2. $$

Следующие свойства полиномов Якоби хорошо известны [2], [3]:

ортогональность:

$$ \int\limits_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)\kappa(x)dx = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm}, \tag{1.4.2} $$

где

$$ h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \tag{1.4.3} $$

и, следовательно, $h_n^{\alpha,\beta} \asymp n^{-1/2}$ $(n=1,2,\ldots)$;

дифференциальное уравнение $(y = P_n^{\alpha,\beta}(x))$:

$$ (1-x^2)y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0; \tag{1.4.4} $$

связь с гипергеометрической функцией:

$$ P_n^{\alpha,\beta}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_2F_1\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right) $$
$$ = \binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k k!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k, \tag{1.4.5} $$

в частности,

$$ P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}; \tag{1.4.6} $$

соотношение симметрии:

$$ P_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(x); \tag{1.4.7} $$

производная:
$$\frac{d}{dx}\left\{P_n^{\alpha,\beta}(x)\right\} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x); \tag{1.4.8}$$

равенства:
$$(2m+\alpha+\beta)P_m^{\alpha-1,\beta}(x) = (m+\alpha+\beta)P_m^{\alpha,\beta}(x) - (m+\beta)P_{m-1}^{\alpha,\beta}(x), \tag{1.4.9}$$
$$\binom{n}{l}P_n^{-l,\beta}(x) = \binom{n+\beta}{l}\left(\frac{x-1}{2}\right)^l P_{n-l}^{l,\beta}(x), \tag{1.4.10}$$
где l – целое, $1 \leqslant l \leqslant n$.

Пусть α и β – произвольные вещественные числа,
$$k(\theta) = \pi^{-1/2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-1/2},$$
$$\lambda = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \quad \gamma = -\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{\pi}{2}. \tag{1.4.11}$$
Тогда при $0 < \theta < \pi$ имеет место следующая асимптотическая формула:
$$P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta) = n^{-1/2}k(\theta)\left\{\cos(\lambda\theta+\gamma) + \frac{r_n(\theta)}{n\sin\theta}\right\}, \tag{1.4.12}$$

для остаточного члена $r_n(\theta) = r_n(\theta;\alpha,\beta)$ которой имеет место оценка
$$|r_n(\theta)| \leqslant c(\alpha,\beta,\delta)\left(0 < \frac{\delta}{n} \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{\delta}{n}\right). \tag{1.4.13}$$

Кроме того,
$$P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta) = O(n^\alpha) \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\delta}{n}\right) \tag{1.4.14}$$

при $n \to \infty$ и фиксированных $\alpha,\ \beta$ и δ.

Положим
$$\psi = \psi(x;\gamma,\nu) = (1-x)^{\gamma/2+1/4}(1+x)^{\nu/2+1/4}, \tag{1.4.15}$$
$$u_n = u_n(x) = u_n(x;\gamma,\nu) = \psi(x;\gamma,\nu)P_n^{\gamma,\nu}(x), \tag{1.4.16}$$
$$I_n(\gamma,\nu) = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|u_n(x;\gamma,\nu)| \quad \left(\gamma,\nu \geqslant -\frac{1}{2}\right). \tag{1.4.17}$$

Из (1.4.12) - (1.4.14) следует, что
$$I_n(\gamma,\nu) \leqslant c(\gamma,\nu)(n+1)^{-1/2}. \tag{1.4.18}$$

Нам понадобятся оценки для $I_n(\gamma,\nu)$, явно зависящие от n,γ,ν. В этом параграфе мы получим некоторые из них. Предварительно докажем следующее утверждение(С.Н. Бернштейн, [4]):

Лемма 1.4.1. *Пусть* $\rho_1 = \gamma/2 + 1/4$, $\rho_2 = \nu/2 + 1/4$, $\gamma, \nu > 1/2$, $x = \cos\theta$. *Тогда*

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left| \frac{d}{d\theta} u_n(\cos\theta; \gamma, \nu) \right| \leqslant I_n(\gamma, \nu)(n + \rho_1 + \rho_2).$$

Доказательство. Полагая $x = \cos\theta$, преобразуем дифференциальное уравнение (1.4.4) к следующему виду:

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} + \delta_n(x) v = 0, \tag{1.4.19}$$

где $v = v(\theta) = u_n(\cos\theta)$,

$$\delta_n(x) = \delta_n(x; \gamma, \nu)$$

$$= \frac{(1 - x^2)(n + \rho_1 + \rho_2)^2 + \rho_1(1 - 2\rho_1)(1 + x) + \rho_2(1 - 2\rho_2)(1 - x)}{1 - x^2}. \tag{1.4.20}$$

Положим

$$f(\theta) = v^2(\theta) + \frac{(v'(\theta))^2}{(n + \rho_1 + \rho_2)^2}. \tag{1.4.21}$$

Тогда по (1.4.19) и (1.4.20),

$$f'(\theta) = 2v(\theta)v'(\theta) + \frac{2v'(\theta)v''(\theta)}{(n + \rho_1 + \rho_2)^2} = 2v(\theta)v'(\theta) \left(1 - \frac{\delta_n(x)}{(n + \rho_1 + \rho_2)^2}\right)$$

$$= -\left[v^2(\theta)\right]' \frac{\rho_1(1 - 2\rho_1)(1 + x) + \rho_2(1 - 2\rho_2)(1 - x)}{(1 - x^2)(n + \rho_1 + \rho_2)^2}.$$

Следовательно, если $\rho_1, \rho_2 > 1/2$, то функция $f(\theta)$ достигает своих максимумов на промежутке $(0, \pi)$ одновременно с $v^2(\theta)$, так что в силу (1.4.21) имеем:

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} |v'(\theta)| \leqslant (n + \rho_1 + \rho_2) \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} |v(\theta)|. \tag{1.4.22}$$

Лемма 1.4.1 доказана.

Лемма 1.4.2. *Пусть* $\gamma, \nu \geqslant 1/2$. *Тогда для произвольных целых неотрицательных* k *и* l *справедливо неравенство:*

$$I_n(\gamma + k, \nu + l) \leqslant (2 + \sqrt{2})^{k+l} I_n(\gamma, \nu). \tag{1.4.23}$$

Доказательство. Используя формулу Родрига и формулу Лейбница, получим:

$$P_n^{\gamma,\nu+1}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1 - x)^{-\gamma}(1 + x)^{-\nu-1} \frac{d^n}{dx^n} \left\{(1 - x)^{n+\gamma}(1 + x)^{n+\nu+1}\right\}$$

$$= \frac{(-1)^n n}{2^n n!}(1 - x)^{-\gamma}(1 + x)^{-\nu-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{(1 - x)^{n+\gamma}(1 + x)^{n+\nu}\right\} +$$

$$\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1 - x)^{-\gamma}(1 + x)^{-\nu-1} \frac{d^n}{dx^n} \left\{(1 - x)^{n+\gamma}(1 + x)^{n+\nu}\right\}(1 + x)$$

$$= \frac{(-1)^n n}{2^n n!}(1 - x)^{-\gamma}(1 + x)^{-\nu-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{(1 - x)^{n+\gamma}(1 + x)^{n+\nu}\right\} + P_n^{\gamma,\nu}(x)$$

$$= P_n^{\gamma,\nu}(x) - \frac{1 - x}{2} P_{n-1}^{\gamma+1,\nu+1}(x). \tag{1.4.24}$$

В силу (1.4.8) и (1.4.24),

$$P_n^{\gamma,\nu+1}(x) = P_n^{\gamma,\nu}(x) - \frac{1 - x}{n + \gamma + \nu + 1} \frac{d}{dx} P_n^{\gamma,\nu}(x). \tag{1.4.25}$$

Так как (см. (1.4.15) и (1.4.16))

$$\frac{d}{dx}P_n^{\gamma,\nu}(x)=\frac{d}{dx}\left\{\psi(x;\gamma,\nu)P_n^{\gamma,\nu}(x)\frac{1}{\psi(x;\gamma,\nu)}\right\}$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{u_n(x;\gamma,\nu)\frac{1}{\psi(x;\gamma,\nu)}\right\}=\frac{1}{\psi}\frac{du_n}{dx}+u_n\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\psi}\right)$$

$$=\frac{1}{\psi}\frac{du_n}{dx}+\frac{u_n}{\psi}\left[\frac{\gamma/2+1/4}{1-x}-\frac{\nu/2+1/4}{1+x}\right]$$

$$=\frac{1}{\psi}\frac{du_n}{dx}+\frac{u_n}{\psi}\frac{\rho_1(1+x)-\rho_2(1-x)}{1-x^2},$$

то умножив обе части равенства (1.4.25) на $(1+x)^{1/2}\psi$, будем иметь $(-1<x<1)$:

$$u_n(x;\gamma,\nu+1)=$$

$$\left[(x+1)^{1/2}-\frac{\rho_2(1-x)-\rho_1(1+x)}{(1+x)^{1/2}(n+\gamma+\nu+1)}\right]u_n(x;\gamma,\nu)$$

$$-\frac{(1-x)(1+x)^{1/2}}{n+\gamma+\nu+1}\frac{d}{dx}u_n(x;\gamma,\nu).$$

Отсюда имеем $(x=\cos\theta,\ \ u_n(x)=u_n(x;\gamma,\nu))$:

$$u_n(x;\gamma,\nu+1)=\left[(x+1)^{1/2}-\frac{\rho_2(1-x)-\rho_1(1+x)}{(1+x)^{1/2}(n+\gamma+\nu+1)}\right]u_n(x)$$

$$+\frac{(1-x)^{1/2}}{n+\gamma+\nu+1}\frac{d}{d\theta}u_n(\cos\theta;\gamma,\nu). \tag{1.4.26}$$

Пусть сначала

$$\rho_1=\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2},\quad \rho_2=\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}. \tag{1.4.27}$$

Тогда функция $u_n(x)=u_n(x;\gamma,\nu)$ имеет в интервале $(-1,1)$ ровно $n+1$ экстремумов, причем $u_n(-1;\gamma,\nu)=u_n(1;\gamma,\nu)=0$, а из уравнения (1.4.19) следует, что интервал (a,b) из (-1,1), в котором $\delta_n(x)<0$, не может содержать точек экстремумов функции $u_n(x;\gamma,\nu)$. Обозначим через x' и x'' $(-1<x'\leqslant x''<1)$ точки экстремумов функции $u_n(x;\gamma,\nu+1)$, ближайшие соответственно к -1 и к 1. Пусть $x'\leqslant x\leqslant x''$. Тогда $\delta_n(x;\gamma,\nu+1)\geqslant 0$, т.е.

$$(1-x^2)^{1/2}\geqslant\frac{\left[\rho_1(2\rho_1-1)(1+x)+\rho_2(2\rho_2-1)(1-x)\right]^{1/2}}{n+\rho_1+\rho_2+1/2}. \tag{1.4.28}$$

Для $x\in[x',x'']$ из (1.4.26) и (1.4.28) следует:

$$|u_n(x;\gamma,\nu+1)|\leqslant$$

$$\left\{(1+x)^{1/2}+\frac{|\rho_2(1-x)-\rho_1(1+x)|(1-x)^{1/2}}{\left[\rho_1(2\rho_1-1)(1+x)+\rho_2(2\rho_2+1)(1-x)\right]^{1/2}}\right\}|u_n(x)|$$

$$+\frac{(1-x)^{1/2}}{n+\gamma+\nu+1}\left|\frac{d}{d\theta}u_n(\cos\theta;\gamma,\nu)\right|. \tag{1.4.29}$$

Оценим функцию

$$\varphi(x) = \frac{|\rho_2(1-x) - \rho_1(1+x)|(1-x)^{1/2}}{[\rho_1(2\rho_1-1)(1+x) + \rho_2(2\rho_2+1)(1-x)]^{1/2}}. \tag{1.4.30}$$

Рассмотрим два случая. Пусть сначала $1/2 < \rho_1 < 1/\sqrt{2}$. Тогда, считая $\rho_1(1+x) < \rho_2(1-x)$, имеем:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{\rho_2(1-x)}{(\rho_2(2\rho_2+1))^{1/2}} = (1-x)\left(\frac{\rho_2}{2\rho_2+1}\right)^{1/2} < \sqrt{2}. \tag{1.4.31}$$

Если же $\rho_2(1-x) \leqslant \rho_1(1+x)$, то в силу (1.4.7),

$$\varphi(x) \leqslant \frac{\rho_1(1+x)}{(\rho_2(2\rho_2+1))^{1/2}} < \frac{1+x}{[2\rho_2(2\rho_2+1)]^{1/2}} < \sqrt{2}. \tag{1.4.32}$$

Пусть теперь $1/\sqrt{2} \leqslant \rho_1$. Тогда в случае $\rho_1(1+x) < \rho_2(1-x)$ имеет место оценка (1.4.31). Если же $\rho_2(1-x) < \rho_1(1+x)$, то в силу (1.4.47),

$$\varphi(x) < \frac{\rho_1(1+x)(1-x)^{1/2}}{(\rho_1(2\rho_1-1)(1+x))^{1/2}} = \frac{\rho_1(1-x^2)^{1/2}}{[\rho_1(2\rho_1-1)]^{1/2}}$$

$$< \left(\frac{\rho_1}{2\rho_1-1}\right)^{1/2} < \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^{1/2} < \sqrt{2}. \tag{1.4.33}$$

Собирая оценки (1.4.31) – (1.4.33), находим:

$$\varphi(x) < \sqrt{2} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1, \rho_1, \rho_2 > 1/2). \tag{1.4.34}$$

Поскольку

$$(1-x)^{1/2} + (1+x)^{1/2} \leqslant 2 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

то из соотношений (1.4.17), (1.4.29) – (1.4.31), (1.4.34) и леммы 1.4.1 имеем:

$$\max_{x' \leqslant x \leqslant x''} |u_n(x;\gamma,\nu+1)| \leqslant (2+\sqrt{2})I_n(\gamma,\nu) \quad (\gamma,\nu > 1/2). \tag{1.4.35}$$

При $\rho_1, \rho_2 \geqslant 1/2$ имеем:

$$\max_{x' \leqslant x \leqslant x''} |u_n(x;\gamma,\nu+1)| = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |u_n(x;\gamma,\nu+1)|,$$

Поэтому из (1.4.35) получается следующая оценка:

$$I_n(\gamma,\nu+1) \leqslant (2+\sqrt{2})I_n(\gamma,\nu) \quad (\gamma,\nu > 1/2). \tag{1.4.36}$$

Нетрудно видеть, что $I_n(\gamma,\nu)$ – непрерывная функция своих аргументов γ, ν $(\geqslant -1/2)$. Поэтому оценка (1.4.36) остается в силе и при $\gamma,\ \nu \geqslant 1/2$.

Аналогично получаем:

$$I_n(\gamma+1,\nu) \leqslant (2+\sqrt{2})I_n(\gamma,\nu) \quad (\gamma,\nu \geqslant 1/2). \tag{1.4.37}$$

Повторное применение неравенств (1.4.36) и (1.4.37) приводит к оценке (1.4.23). Лемма доказана.

Лемма 1.4.3. (С.Н. Бернштейн, [4]). *При* $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $n \geqslant 1$ *имеем:*

$$(1-x^2)^{3/4}\left|\frac{d}{dx}P_n^{0,0}(x)\right| \leqslant \left(\frac{6}{\pi n}\right)^{1/2}\frac{2n+1}{2}.$$

Доказательство. При $(x=\cos\theta)$ положим:

$$\phi_n(\theta)=\phi_n(\theta;\gamma,\nu)=v^2(\theta)+\frac{1}{\delta_n(x)}\left(v'(\theta)\right)^2. \tag{1.4.38}$$

В силу (1.4.19),

$$\phi_n'(\theta)=2v(\theta)v'(\theta)+\frac{2}{\delta_n(x)}v'(\theta)v''(\theta)$$

$$+\left(\frac{1}{\delta_n(x)}\right)_\theta'\left(v'(\theta)\right)^2=\left(\frac{1}{\delta_n(x)}\right)_\theta'\left(v'(\theta)\right)^2. \tag{1.4.39}$$

Отсюда, полагая $\varphi_n(x)=\varphi_n(x;\gamma,\nu)=\phi_n(\theta,\gamma,\nu)$, $\rho=\rho_1=\rho_2$, имеем:

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\delta_n(x)}\right)\left(v'(\theta)\right)^2=\frac{[(1-x)^2-(1+x)^2]\rho(1-2\rho)\left(v'(\theta)\right)^2}{[(1-x^2)(n+2\rho)^2+2\rho(1-2\rho)]^2}$$

$$=\frac{4\rho(2\rho-1)x\left(v'(\theta)\right)^2}{[(1-x^2)(n+2\rho)^2+2\rho(1-2\rho)]^2}. \tag{1.4.40}$$

Пусть $0<\rho<1/2$. Тогда из (1.4.40) следует, что функция $\varphi(x)$ возрастает на $(-1,0]$ и убывает на $[0,1)$. Поэтому из (1.4.38) имеем $(-1/2<\gamma<1/2)$:

$$u_n(x;\gamma,\gamma)\leqslant\sqrt{\varphi_n(0;\gamma,\gamma)}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1), \tag{1.4.41}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\delta_n(x)}}\frac{d}{d\theta}u_n(\cos\theta;\gamma,\gamma)\right|\leqslant\sqrt{\varphi_n(0;\gamma,\gamma)}. \tag{1.4.42}$$

В силу (1.4.8),

$$\frac{2(1-x^2)^{\rho+1/2}}{(n+2\gamma+1)}\frac{d}{dx}P_n^{\gamma,\gamma}(x)$$

$$=(1-x^2)^{\rho+1/2}P_{n-1}^{\gamma+1,\gamma+1}(x)=u_{n-1}(x;\gamma+1,\gamma+1). \tag{1.4.43}$$

С другой стороны, все точки экстремумов функции $u_{n-1}(x;\gamma+1,\gamma+1)$ силу (1.4.19) удовлетворяют неравенству $(\rho=\gamma/2+1/4)$:

$$1-x^2>\frac{2\rho(2\rho+1)}{(n+2\rho)^2}. \tag{1.4.44}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\delta_n(x;\gamma,\gamma)}>\frac{2\rho(2\rho+1)}{(n+2\rho)^2[2\rho(2\rho+1)+2\rho(1-2\rho)]}=\frac{\rho+1/2}{(n+2\rho)^2} \tag{1.4.45}$$

для таких x. Из (1.4.42) и (1.4.45) имеем:

$$\left|(1-x^2)^{\rho+1/2}\frac{d}{dx}P_n^{\gamma,\gamma}(x)-2\rho x(1-x^2)^{\rho-1/2}P_n^{\gamma,\gamma}(x)\right|$$

$$=\left|\frac{du_n(x;\gamma,\gamma)}{d\theta}\right|\frac{<n+2\rho}{(\rho+1/2)^{1/2}}\sqrt{\varphi_n(0;\gamma,\gamma)}.$$

Отсюда и из (1.4.41) и (1.4.44) получаем:

$$\frac{\left|(1-x^2)^{\rho+1/2}\right|}{\sqrt{\varphi_n(0;\gamma,\gamma)}}\frac{d}{dx}P_n^{\gamma,\gamma}(x) \leqslant \frac{2\rho}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{n+2\rho}{\sqrt{\rho+1/2}} < \frac{(1+\sqrt{\rho})(n+2\rho)}{\sqrt{\rho+1/2}}. \qquad (1.4.46)$$

Нетрудно показать (см. [5], стр. 172), что

$$\varphi_n(0;0,0) < \frac{2}{\pi n}.$$

Поэтому утверждение леммы следует из (1.4.46) при $\gamma = 0 \quad (\rho = 1/4)$.

Лемма 1.4.4. (С.Н. Бернштейн, [4]). *При $n \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$I_n(0,0) = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}(1-x^2)^{1/4}\left|P_n^{0,0}(0)\right| \leqslant \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2}.$$

Подробное доказательство этого утверждения дано в [2], стр. 172.

Лемма 1.4.5. *Пусть l – натуральное число. Тогда*

$$I_n(0,l) \leqslant \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2}\left[2^{l/2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\left(2+\sqrt{2}\right)^l\right] \quad (n \geqslant 1).$$

Доказательство. Из (1.4.24) имеем:

$$P_n^{0,l}(x) = P_n^{0,l-1}(x) - \frac{1-x}{2}P_{n-1}^{1,l}(x). \qquad (1.4.47)$$

Повторное применение равенства (1.4.47) дает:

$$P_n^{0,l}(x) = P_n^{0,0}(x) - \frac{1-x}{2}\sum_{j=1}^{l}P_{n-1}^{1,j}(x). \qquad (1.4.48)$$

Из (1.4.15) – (1.4.17) и (1.4.48) получаем:

$$I_n(0,l) \leqslant I_n(0,0)2^{l/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{l}2^{(l-j)/2}I_{n-1}(1,j) \qquad (1.4.49)$$

По лемме 1.4.2,

$$I_{n-1}(1,j) \leqslant (2+\sqrt{2})^{j-1}I_{n-1}(1,1). \qquad (1.4.50)$$

Из леммы 1.4.3 и равенства (1.4.8) вытекает, что

$$I_{n-1}(1,1) \leqslant \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{6}{\pi n}\right)^{1/2} \quad (n \geqslant 1). \qquad (1.4.51)$$

Сопоставляя (1.4.49) – (1.4.51) с леммой 1.4.4, будем иметь:

$$\begin{aligned} I_n(0,l) &\leqslant \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2}2^{l/2} + \left(\frac{12}{\pi n}\right)^{1/2}\sum_{j=1}^{l}2^{(l-j)/2}(2+\sqrt{2})^{j-1} \\ &= \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2}2^{l/2} + \left(\frac{12}{\pi n}\right)^{1/2}2^{(l-1)/2}\sum_{j=1}^{l}(1+\sqrt{2})^{j-1} \end{aligned}$$

$$< \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2} 2^{l/2} + \left(\frac{12}{\pi n}\right)^{1/2} \frac{2^{(l-1)/2}(1+\sqrt{2})^{l-1}}{1-1/\left(1+\sqrt{2}\right)}$$
$$= \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2} \left[2^{l/2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\left(2+\sqrt{2}\right)^{l}\right].$$

Лемма 1.4.5 доказана.

Лемма 1.4.6. *Пусть l и m – неотрицательные числа. Тогда*

$$I_n(l,m) \leqslant 2\left(2+\sqrt{2}\right)^{l+m-2}\left(\tfrac{6}{\pi(n+1)}\right)^{1/2} \quad (l,m\geqslant 1);$$

$$I_n(l,m) \leqslant \left(\tfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)^{l+m}\left(\tfrac{2}{\pi(n+1)}\right)^{1/2} \quad (l,m\geqslant 0).$$

Доказательство. Первое неравенство при $n\geqslant 1$ непосредственно следует из леммы 1.4.2 и неравенства (1.4.51). При $n=0$ оно очевидно. Второе неравенство при $n\geqslant 1$ и $l=m=0$ вытекает из леммы 1.4.4. Если же одно из чисел l или m отлично от нуля, а другое равно нулю, то требуемая оценка для $n\geqslant 1$ следует из леммы 1.4.5. Если же $m,l,n\geqslant 1$, то второе неравенство вытекает из первого. Наконец, если $n=0$, то оно очевидно.

Лемма 1.4.7. *Пусть γ и ν – произвольные вещественные числа, $q>0$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$|P_n^{\gamma,\nu}(t)| \leqslant c(\gamma,\nu,q)n^{\gamma} \quad (|1-t|\leqslant qn^{-2}), \tag{1.4.52}$$

$$|P_n^{\gamma,\nu}(t)| \leqslant c(\gamma,\nu,q)n^{\nu} \quad (|1+t|\leqslant qn^{-2}). \tag{1.4.53}$$

Доказательство этого утверждения можно найти в [2].

§ 1.5. Полиномы Лагерра и Эрмита функции Бесселя и Эйри

Определим полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ равенством

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right) \tag{1.5.1}$$

и отметим следующие их свойства [2]:

ортогональность:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha \hat{L}_n^\alpha(x)\hat{L}_m^\alpha(x)\,dx = \delta_{nm} \quad (\alpha>-1), \tag{1.5.2}$$

где

$$\hat{L}_n^\alpha(x) = \left(h_n^\alpha\right)^{-1/2} L_n^\alpha(x), \quad h_n^\alpha = \Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}; \tag{1.5.3}$$

дифференциальные уравнения:

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0, \quad y = L_n^\alpha(x), \tag{1.5.4}$$

$$v_n'' + \left(4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2}\right) v_n = 0, \tag{1.5.5}$$

где

$$v_n(x) = v_n(x, \alpha) = e^{-x^2/2} x^{\alpha+1/2} L_n^\alpha(x^2);$$

явный вид:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^\nu}{\nu!}; \tag{1.5.6}$$

рекуррентная формула:

$$\left.\begin{aligned} &L_0^\alpha(x) = 1, \quad L_1^\alpha(x) = -x + \alpha + 1, \\ &nL_n^\alpha(x) = (-x + 2n + \alpha - 1)L_{n-1}^\alpha(x) - (n + \alpha - 1)L_{n-2}^\alpha(x). \end{aligned}\right\} \tag{1.5.7}$$

равенства:

$$L_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{1.5.8}$$

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{1.5.9}$$

$$L_n^{-k}(x) = (-x)^k \frac{(n-k)!}{n!} L_{n-k}^k(x), \tag{1.5.10}$$

где k- целое, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$L_n^{\alpha-1}(x) = \frac{\alpha}{n+\alpha} L_n^\alpha(x) - \frac{x}{n+\alpha} L_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{1.5.11}$$

Полиномы Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

обладают, в частности, следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \pi^{1/2} 2^n n! \delta_{nm}, \tag{1.5.12}$$

$$Z'' + (2n + 1 - x^2)Z = 0, \quad \text{где } Z = e^{-x^2/2} H_n(x), \tag{1.5.13}$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \tag{1.5.14}$$

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H_{n-1}'(x), \tag{1.5.15}$$

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) = {} & \frac{(-1)^n \Gamma(n + \alpha + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha + 1/2)(2n)!} \\ & \times \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{\alpha - \frac{1}{2}} H_{2n}\left(x^{\frac{1}{2}} t\right) dt, \quad \alpha > -\frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{1.5.16}$$

$$e^{-t^2/2}H_{2n}(t) = \frac{(2n)!}{n!}(-1)^n \cos\left\{(4n+1)^{1/2}t\right\} +$$

$$\frac{1}{(4n+1)^{1/2}}\int\limits_0^t \sin\left\{(4n+1)^{1/2}(t-\tau)\right\}\tau^2 e^{-\tau^2/2}H_{2n}(\tau)\,d\tau. \qquad (1.5.17)$$

В главе 4, при исследовании асимптотических свойств полиномов Мейкснера, нам понадобятся следующие утверждения о полиномах Лагерра $L_n^\alpha(x)$.

Лемма 1.5.1. *Пусть α – натуральное число, $n \geqslant 0$. Тогда*

$$|L_n^\alpha(1)| \leqslant \binom{n+\alpha}{n}\left(e^{1/2}+2^{-1/2}\right).$$

Доказательство. Из (1.5.16) и (1.5.17) имеем:

$$L_n^\alpha(1) = \frac{2\Gamma(n+\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)n!}\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{t^2/2}\cos\left\{(4n+1)^{1/2}t\right\}dt$$

$$+\frac{(-1)^n 2\pi^{-1/2}\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)(2n)!(4n+1)^{1/2}}\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{t^2/2}dt$$

$$\times\int\limits_0^t \sin\left\{(4n+1)^{1/2}(t-\tau)\right\}\tau^2 e^{-\tau^2/2}H_{2n}(\tau)\,d\tau = q_1+q_2. \qquad (1.5.18)$$

Оценим $|q_1|$. Поскольку

$$\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{t^2/2}\,dt < e^{1/2}\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{e^{1/2}}{2}\int\limits_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,dt < e^{1/2}2^{2\alpha-1}\int\limits_0^1 \left[t(1-t)\right]^{\alpha-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= e^{1/2}2^{2\alpha-1}B\left(\alpha+\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right) = e^{1/2}2^{2\alpha-1}\frac{(\Gamma(\alpha+1/2))^2}{\Gamma(2\alpha+1)}, \qquad (1.5.19)$$

и

$$\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) = 2^{1/2-2\alpha}(2\pi)^{1/2}\Gamma(2\alpha)/\Gamma(\alpha),$$

то из (1.5.18) и (1.5.19) получаем:

$$|q_1| \leqslant \frac{e^{1/2}2^{2\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\alpha+1/2)}{\pi^{1/2}n!\Gamma(2\alpha+1)}$$

$$= \frac{e^{1/2}\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} = e^{1/2}\binom{n+\alpha}{n}. \qquad (1.5.20)$$

Оценим $|q_2|$. Имеем при $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$\left|\int\limits_0^t \sin\left\{(4n+1)^{1/2}(t-\tau)\right\}\tau^2 e^{-\tau^2/2}H_{2n}(\tau)\,d\tau\right|$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau^2/2} |H_{2n}(\tau)|\, d\tau \leqslant \left(\int\limits_0^t \tau^4\, d\tau\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^t e^{-\tau^2} H_{2n}^2(\tau)\, d\tau\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{t^5}{5}\right)^{1/2} 2^{-1/2} \left(\int\limits_{-t}^t e^{-\tau^2} H_{2n}^2(\tau)\, d\tau\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(\frac{t^5}{10}\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} H_{2n}^2(\tau)\, d\tau\right)^{1/2} = \left(\frac{t^5}{10}\right)^{1/2} \pi^{1/4} 2^n ((2n)!)^{1/2}. \tag{1.5.21}$$

Из (1.5.18), (1.5.19) и (1.5.21) находим ($n \geqslant 1$):

$$|q_2| \leqslant \frac{e^{1/2} 2^{2\alpha} \Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\alpha+1/2) 2^n}{\pi^{1/4}\sqrt{10}\Gamma(2\alpha+1)[(2n)!(4n+1)]^{1/2}}$$

$$= \frac{e^{1/2}\pi^{1/4}\Gamma(n+\alpha+1)2^n}{\sqrt{10}\Gamma(\alpha+1)[(2n)!(4n+1)]^{1/2}}$$

$$= \frac{e^{1/2}(2\pi)^{1/2}\Gamma(n+\alpha+1)}{\sqrt{10}\Gamma(\alpha+1)[\Gamma(n)\Gamma(n+1/2)2n(4n+1)]^{1/2}}$$

$$= \left(\frac{\pi e}{20}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)[n!\Gamma(n+1/2)(2n+1/2)]^{1/2}}$$

$$< \left(\frac{\pi e}{20}\right)^{1/2} \binom{n+\alpha}{n}. \tag{1.5.22}$$

Утверждение леммы 1.5.1 вытекает из равенства (1.5.18) и оценок (1.5.20) и (1.5.22).

Лемма 1.5.2. *Пусть $\alpha \geqslant 1$ – целое, $n \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда*

$$|L_n^\alpha(x)| \leqslant \left(e^{1/2} + 2^{-1/2}\right) \binom{n+\alpha}{n}.$$

Доказательство. Известно (см. [2], стр. 184), что последовательность, образованная относительными максимумами функции $|L_n^\alpha(x)|$ и значением этой функции в точке $x = 0$ является убывающей при $x < \alpha + 1/2$. С другой стороны, $L_n^\alpha(0) = \binom{n+\alpha}{n}$. Следовательно, во всех расположенных левее $\alpha + 1/2$ точках максимумов функции $|L_n^\alpha(x)|$ ее значения не превосходят величины $\binom{n+\alpha}{n}$, а в интервале, заключенном между ближайшей слева к единице точкой максимума и точкой $x = 1$ функция $|L_n^\alpha(x)|$ монотонна. Поэтому утверждение леммы 1.5.2 вытекает из леммы 1.5.1.

Лемма 1.5.3. *Пусть $\alpha > 1/2$, $\nu = 4n + 2\alpha + 2, n \geqslant 1$. Тогда*

$$\max_{x \geqslant 0} |v_{n-1}(x; \alpha+1)| \leqslant \nu^{1/2} \max_{x \geqslant 0} |v_n(x; \alpha)|.$$

Доказательство. Положим

$$f(x) = v_n^2(x) + \frac{1}{\nu}\left(v_n'(x)\right)^2. \tag{1.5.23}$$

В силу (1.5.5) имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2v_nv_n' + 2v_n'v_n''/\nu = 2v_n'(v_n + v_n''/\nu) \\ &= 2v_nv_n'\left[1 - \tfrac{1}{\nu}\left(\nu - x^2 + \left(\tfrac14 - \alpha^2\right)/x^2\right)\right] \\ &= \tfrac{2}{\nu}v_nv_n'\left[x^2 + \left(\alpha^2 - \tfrac14\right)/x^2\right] = \tfrac{1}{\nu}\left(v_n^2\right)'\left[x^2 + \left(\alpha^2 - \tfrac14\right)/x^2\right]. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(x)$ достигает экстремума одновременно с v_n^2. В частности, при $\alpha^2 - 1/4 > 0$ максимумы функции $f(x)$ соответствуют максимумам v_n^2. Поэтому в этом случае из (1.5.23) получаем:

$$\max_{x>0}|v_n'(x)| \leqslant \nu^{1/2}\max_{x>0}|v_n(x)| \quad (\alpha > 1/2) \tag{1.5.24}$$

В силу (1.5.5) и (1.5.9),

$$\frac{d}{dx}v_n(x;\alpha) = \frac{1}{x}(\alpha + \frac12 - x^2)v_n(x;\alpha) - 2v_{n-1}(x,\alpha+1),$$

откуда находим:

$$v_{n-1}(x;\alpha+1) = \frac12\left(\frac{\alpha+1/2}{x} - x\right)v_n(x;\alpha) - \frac12\frac{d}{dx}v_n(x;\alpha). \tag{1.5.25}$$

Положим $\varphi_m(x;\alpha) = 4m + 2\alpha + 2 - x^2 + (1/4-\alpha^2)/x^2$. Обозначим через x' и x'' соответственно наименьшую и наибольшую точки экстремумов функции $v_{n-1}(x;\alpha+1)$. В силу (1.5.5), $\varphi_{n-1}(x;\alpha+1) \geqslant 0$ при $x \in [x', x'']$. Отсюда $\mu = 4n+2\alpha \geqslant x^2 + ((\alpha+1)^2 - 1/4)/x^2$, так что при $x' \leqslant x \leqslant x''$ имеем:

$$\left(\frac{(\alpha+1)^2 - 1/4}{\mu}\right)^{1/2} \leqslant x \leqslant \mu^{1/2}. \tag{1.5.26}$$

Если $\alpha \geqslant -1/2$, то $((\alpha+1)^2 - 1/4)^{1/2} > \alpha + 1/2$, поэтому из нижней оценки (1.5.26) имеем: $(\alpha+1/2)/x \leqslant \mu^{1/2}$ $(x' \leqslant x \leqslant x'')$. Так как при этом $|(\alpha+1/2)/x - x| \leqslant \max\{(\alpha+1/2)/x, x\} \leqslant \mu^{1/2}$, то из (1.5.24) и (1.5.25) выводим:

$$\begin{aligned} |v_{n-1}(x;\alpha+1)| &= \frac12\left(\mu^{1/2}|v_n(x;\alpha)| + \left|\frac{d}{dx}v_n(x;\alpha)\right|\right) \\ &\leqslant \frac12\left(\mu^{1/2} + \nu^{1/2}\right)\max_{t>0}|v_n(t;\alpha)| \leqslant \nu^{1/2}\max_{t>0}|v_n(t;\alpha)|. \end{aligned} \tag{1.5.27}$$

Поскольку, очевидно,

$$\max_{x\geqslant 0}|v_{n-1}(x;\alpha+1)| = \max_{x'\leqslant x\leqslant x''}|v_{n-1}(x;\alpha+1)|,$$

то утверждение леммы 1.5.3 следует из (1.5.27).

Лемма 1.5.4. *Пусть α – произвольное вещественное число, $0 \leqslant k$ – целое. Тогда*

$$L_n^{\alpha+k}(x) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}L_{n-j}^{\alpha+j}(x),$$

где $L_p^q(x) \equiv 0$ $(p = -1, -2, \ldots)$.

Доказательство. Для $k = 0$ имеем $L_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x)$. Пусть утверждение леммы имеет место для $k \geqslant 1$. Воспользовавшись равенством (1.5.8), получим:

$$L_n^{\alpha+k+1}(x) = L_n^{\alpha+k}(x) - L_{n-1}^{\alpha+k+1}(x).$$

Применим утверждение леммы 1.5.4 для пар (α, n) и $(\alpha+1, n-1)$:

$$\begin{aligned}
L_n^{\alpha+k+1}(x) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} L_{n-j}^{\alpha+j}(x) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} L_{n-j-1}^{\alpha+j+1}(x) \\
&= L_n^\alpha(x) + L_{n-1-k}^{\alpha+1+k}(x) + \sum_{j=0}^{k-1} L_{n-j-1}^{\alpha+j+1}(x) \left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j+1}\right] \\
&= L_n^\alpha(x) + L_{n-1-k}^{\alpha+1+k}(x) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j+1} L_{n-j-1}^{\alpha+j+1}(x) \\
&= L_n^\alpha(x) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} L_{n-j}^{\alpha+j}(x) + L_{n-1-k}^{\alpha+1+k}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} L_{n-j}^{\alpha+j}(x),
\end{aligned}$$

т.е. из справедливости утверждения леммы для k следует его справедливость для $k+1$. Тем самым лемма 1.5.4 доказана.

Положим

$$u_n(x;\alpha) = v_n\left(x^{1/2};\alpha\right) = e^{-x/2} x^{\alpha/2+1/4} L_n^\alpha(x), \tag{1.5.28}$$

$$\kappa_n^\alpha = \max_{x\geqslant 0} |u_n(x;\alpha)|\, n^{-\alpha/2+1/12}, \quad \kappa^\alpha = \sup_{n\geqslant 1} \kappa_n^\alpha. \tag{1.5.29}$$

Очевидно, если $\alpha \geqslant -1/2$, то $\kappa^\alpha < \infty$.

Лемма 1.5.5. *Если k и j – целые, $k \geqslant n+1$, $0 \leqslant j \leqslant n$, то*

$$\left|L_j^{k-j}(t)\right| \leqslant \kappa^1 n^{5/12} t^{-3/4} e^{t/2} \left(\frac{2}{t}\right)^{\frac{1}{2}(n-j)} \left[1 + \left(\frac{2}{t}\right)^{1/2}\right]^{k-n-1} \left(\frac{(2n+2)!}{(n+j+2-s)!}\right)^{1/2},$$

где $t > 0$, $s = \min\{j, k-n-1\}$.

Доказательство. Из леммы 1.5.4 и равенства (1.5.28) следует:

$$L_j^{k-j}(t) = \sum_{p=0}^{k-n-1} \binom{k-n-1}{p} L_{j-p}^{n+1-j+p}(t)$$

$$= t^{-1/4} e^{t/2} \sum_{p=0}^{s} \binom{k-n-1}{p} t^{\frac{1}{2}(j-n-1-p)} u_{j-p}(t; n+1-j+p). \tag{1.5.30}$$

По лемме 1.5.3,

$$\max_{t\geqslant 0} |u_{j-p}(t; n+1-j+p)| \leqslant$$

$$\left(\frac{(2n+2)!}{(n+j+2-p)!}\right)^{1/2} 2^{(n-j+p)/2} \max_{t>0} |u_n(t;1)|\,. \tag{1.5.31}$$

Отсюда и из (1.5.30) для $t > 0$ получаем:

$$\left|L_j^{k-j}(t)\right| \leqslant t^{-3/4} e^{t/2} \left(\frac{2}{t}\right)^{(n-j)/2} \left(\frac{(2n+2)!}{(n+j+2-s)!}\right)^{1/2}$$

$$\times\kappa^1 n^{5/12}\sum_{p=0}^{s}\binom{k-n-1}{p}\left(\frac{2}{t}\right)^{p/2}, \tag{1.5.32}$$

где постоянная κ^1 определена равенствами (1.5.29), а

$$\sum_{p=0}^{s}\binom{k-n-1}{p}\left(\frac{2}{t}\right)^{p/2} < \left[1+\left(\frac{2}{t}\right)^{1/2}\right]^{k-n-1}. \tag{1.5.33}$$

Сопоставляя (1.5.32) и (1.5.33), приходим к утверждению леммы.

Нам понадобятся функции Бесселя

$$J_\alpha(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2\nu}}{\nu!\Gamma(\nu+\alpha+1)},\quad I_\alpha(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2\nu}}{\nu!\Gamma(\nu+\alpha+1)}. \tag{1.5.34}$$

Имеют место следующие соотношения [6]:

$$|J_\alpha(z)|=O\left(|z|^\alpha\right)\ \ (z\to 0); \tag{1.5.35}$$

$$|J_\alpha(z)|=O\left(|z|^{1/2}\right)\ \ (|z|\to\infty,\ \operatorname{Im} z=0); \tag{1.5.36}$$

$$J'_\alpha(z)=\frac{1}{2}\left[J_{\alpha-1}(z)-J_{\alpha+1}(z)\right]. \tag{1.5.37}$$

С помощью функций Бесселя можно определить следующие функции ($\xi=\frac{2}{3}z^{3/2}$)

$$\left.\begin{array}{rcl} Ai(z) & = & \frac{1}{3}\sqrt{z}\left[I_{-\frac{1}{3}}(\xi)-I_{\frac{1}{3}}(\xi)\right], \\ Ai(-z) & = & \frac{1}{3}\sqrt{z}\left[J_{-\frac{1}{3}}(\xi)+J_{\frac{1}{3}}(\xi)\right]; \end{array}\right\} \tag{1.5.38}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} Bi(z) & = & \sqrt{z/3}\left[I_{-\frac{1}{3}}(\xi)+I_{\frac{1}{3}}(\xi)\right], \\ Bi(-z) & = & \sqrt{z/3}\left[J_{-\frac{1}{3}}(\xi)-J_{\frac{1}{3}}(\xi)\right], \end{array}\right\} \tag{2.5.39}$$

которые называются функциями Эйри. Хорошо известны [6] следующие оценки:

$$\left.\begin{array}{rcl} |Ai(-|z|)| & = & O\left((|z|+1)^{-1/4}\right), \\ |Bi(-|z|)| & = & O\left((|z|+1)^{-1/4}\right), \end{array}\right\} \tag{1.5.40}$$

$$|Ai(|z|)|=O\left[(|z|+1)^{-1/2}\exp\left(-\frac{2}{3}|z|^{3/2}\right)\right]. \tag{1.5.41}$$

$$|Ai'(z)|=O\left[(|z|+1)^{1/2}\widetilde{Ai}(z)\right], \tag{1.5.42}$$

где

$$\widetilde{Ai}(z)=\begin{cases} Ai(z), & \text{если } z\geqslant 0, \\ \left(|Ai(z)|^2+|Bi(z)|^2\right)^{1/2}, & \text{если } z<0. \end{cases} \tag{1.5.43}$$

Положим

$$\psi(t)=\frac{1}{2}\left[(t-t^2)^{1/2}+\arcsin\sqrt{t}\right]\qquad (0\leqslant t<1). \tag{1.5.44}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\left[\arccos\sqrt{t} - \sqrt{t(1-t)}\right]\right)^{2/3}, & \text{если } 0 < t \leqslant 1, \\ -\left(\frac{3}{4}\left[\sqrt{t(t-1)} - arcch\sqrt{t}\right]\right)^{2/3}, & \text{если } 1 < t. \end{cases} \tag{1.5.45}$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\psi'(t)}{\psi} = (2t)^{-1}\left(1 + o(t)\right), \tag{1.5.46}$$

$$[\phi'(t)]^2 = \frac{1-t}{4t\phi(t)}, \tag{1.5.47}$$

$$\phi(t) = (1-t)\left[\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1/2)_k}{(k+3/2)k!}(1-t)^k\right]^{2/3} \qquad (0 < t < 2), \tag{1.5.48}$$

$$-\phi'(t) = (4t)^{-1/2}\left[\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1/2)_k}{(k+3/2)k!}(1-t)^k\right]^{-1/3} \quad (0 < t < 2). \tag{1.5.49}$$

Пусть $s = s(n,\alpha) = 4n + 2\alpha + 2$, $t = x/s$,$Q = Q(n,\alpha) = s(n,\alpha)/4$,

$$\tilde{J}_\alpha(z) = \begin{cases} z^\alpha, & \text{если } 0 < z \leqslant 1, \\ z^{1/2}, & \text{если } 1 < z. \end{cases} \tag{1.5.50}$$

В работах [7], [8] установлены следующие асимптотические формулы.

(i) Если $0 \leqslant x \leqslant bs$, $0 < b < 1$, $n > n_0$, то

$$L_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)2^{\alpha-1/2}e^{x/2}}{n!s^{(\alpha-1)/2}x^{(\alpha+1)/2}}\left(\frac{\psi(t)}{\psi'(t)}\right)^{1/2}\left[J_\alpha(s\psi(t)) + O\left(\frac{x^{1/2}}{s^{3/2}}\tilde{J}_\alpha(s\psi(t))\right)\right]. \tag{1.5.51}$$

(ii) Если $as \leqslant x$, $a > 0$, $n > n_0$, то

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n\pi^{1/2}2^{5/6}Q^{Q+1/6}e^{x/2}}{n!x^{(\alpha+1)/2}e^Q[-\phi'(t)]^{1/2}}\left[Ai\left(-s^{2/3}\phi(t)\right) + O\left(\frac{\widetilde{Ai}\left(-s^{2/3}\phi(t)\right)}{x}\right)\right]. \tag{1.5.52}$$

Из (1.5.51), (1.5.52) и (1.5.35) – (1.5.50) можно получить оценку ([9], [10], [11]):

$$|L_n^\alpha(x)| \leqslant c(\alpha)A_n^\alpha(x) \qquad (0 \leqslant x < \infty), \tag{1.5.53}$$

где

$$A_n^\alpha(x) = \begin{cases} e^{x/2}s^\alpha, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1/s, \\ e^{x/2}s^{\alpha/2-1/4}x^{-\alpha/2-1/4}, & \text{если } 1/s < x \leqslant s/2, \\ e^{x/2}\left[s\left(s^{1/3} + |x-s|\right)\right]^{-1/4}, & \text{если } s/2 < x \leqslant 3s/2, \\ e^{x/4}, & \text{если } 3s/2 < x, \end{cases} \tag{1.5.54}$$

Отметим также следующую оценку:

$$|L_n^\alpha(x)| \leqslant c(\alpha,p)n^\alpha, \tag{1.5.55}$$

где $\alpha > -1$, $p > 0$, $|x| \leqslant p/n$.

В самом деле, из (1.5.6) при $|x| \leqslant p/n$ имеем:

$$|L_n^\alpha(x)| \leqslant \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]}|x|^k}{(\alpha+1)_k k!} \leqslant \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{p^k}{(\alpha+1)_k k!}$$

$$\leqslant \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{p^k}{k!} < \frac{\alpha+2}{\alpha+1} e^p \binom{n+\alpha}{n} \leqslant c(\alpha, p) n^\alpha.$$

Формула Кристоффеля-Дарбу для полиномов Лагерра имеет вид

$$\mathcal{K}_n^\alpha(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\nu!}{\Gamma(\nu+\alpha+1)} L_\nu^\alpha(x) L_\nu^\alpha(y)$$

$$= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)(x-y)} \left[L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(y) - L_n^\alpha(y)L_{n+1}^\alpha(x)\right]. \tag{1.5.56}$$

Из (1.5.56) имеем:

$$\mathcal{K}_n^\alpha(x,y) =$$

$$\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \left[L_n^\alpha(y) \frac{L_{n+1}^\alpha(y) - L_{n+1}^\alpha(x)}{x-y} + L_{n+1}^\alpha(y) \frac{L_n^\alpha(x) - L_n^\alpha(y)}{x-y}\right].$$

В силу (1.5.9),

$$\mathcal{K}_n^\alpha(x,x) = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \left[L_n^\alpha(x)L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n+1}^\alpha(x)L_{n-1}^{\alpha+1}(x)\right]. \tag{1.5.57}$$

Пусть $s_0 = s(n,\alpha) = 4n+2\alpha+2$, $s_1 = s(n,\alpha+1)$, $s_2 = s(n+1,\alpha)$, $s_3 = s(n-1,\alpha+1)$, $Q_k = s_k/4$ $(0 \leqslant k \leqslant 3)$. Тогда $Q_0 = n+(\alpha+1)/2$, $Q_1 = n+(\alpha+2)/2$, $Q_2 = n+(\alpha+3)/2$, $Q_3 = n+\alpha/2$. Поэтому при помощи формулы Стирлинга $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+O(1/n))$ получаем:

$$\frac{Q_0^{Q_0+1/6} Q_1^{Q_1+1/6}}{(n!)^2 x^{\alpha+3/2} e^{Q_0+Q_1}} = \frac{(Q_0Q_1)^n (Q_0Q_1)^{1/6} Q_0^{(\alpha+1)/2} Q_1^{(\alpha+2)/2}}{n^{2n} e^{-2n} e^{2n+\alpha+3/2} x^{\alpha+3/2} 2\pi n (1+O(\frac{1}{n}))}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Q_0Q_1}{n^2}\right)^n e^{-\alpha-3/2} \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha+3/2} \left(\frac{Q_0}{n}\right)^{(\alpha+1)/2} \left(\frac{Q_1}{n}\right)^{(\alpha+2)/2} \left(\frac{Q_0Q_1}{n^2}\right)^{1/6}$$

$$\times n^{-2/3} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2\pi} n^{-2/3} \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha+3/2} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{1.5.58}$$

Аналогично,

$$\frac{Q_2^{Q_2+1/6} Q_3^{Q_3+1/6} e^{-Q_2-Q_3}}{(n-1)!(n+1)! x^{\alpha+3/2}} = \frac{1}{2\pi} n^{-2/3} \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha+3/2} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{1.5.59}$$

Далее, поскольку

$$s_k^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_k}\right) = \left(s_k^{2/3} - s_0^{2/3}\right)\phi\left(\frac{x}{s_k}\right) + s_0^{2/3}\left[\phi\left(\frac{x}{s_k}\right) - \phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right]$$

$$+ s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right) = s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right) + O\left(n^{-1/3}\right),$$

то из (1.5.40) – (1.5.43) и (1.5.48), (1.5.49) находим:

$$Ai\left(-s_k^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_k}\right)\right) = Ai\left(-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right) + O\left(n^{-1/3}\right)|Ai'(\xi_k)|$$

$$\leqslant Ai\left(-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right) + O\left(n^{-1/3}\right)(1+|\xi_k|)^{1/2}\,\tilde{A}i(\xi_k)$$
$$= Ai\left(-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right) + O\left(n^{-1/3}\right)(1+|\xi_k|)^{1/4},$$

где $(0<\theta<1)$

$$\xi_k = -s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right) + \theta\left[-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right) - s_k^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_k}\right)\right] = -s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right) + O\left(n^{-1/3}\right).$$

Следовательно,

$$Ai\left(-s_k^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_k}\right)\right) = Ai\left(-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right) + O\left(n^{-1/3}\right)\left(1+\left|s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right|\right)^{1/4}. \quad (1.5.60)$$

Кроме того, в силу (1.5.49) при $s_0 \leqslant x \leqslant 3s_0/2$

$$\left[-\phi'\left(\frac{x}{s_k}\right)\right]^{1/2} = \left[-\phi'\left(\frac{x}{s_0}\right)\right]^{1/2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (0\leqslant k\leqslant 3). \quad (1.5.61)$$

Выберем постоянную $n_1 = n_1(\alpha)$ так, чтобы оказалось $s_k/3 \leqslant s_0/2$, $3s_0/2 \leqslant 5s_k/3$ $(0\leqslant k\leqslant 3)$ при $n \geqslant n_1$. Тогда при $s_0/2 \leqslant x \leqslant 3s_0/2$, $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$ мы можем выразить полиномы $L_n^\alpha(x)$, $L_n^{\alpha+1}(x)$, $L_{n+1}^\alpha(x)$, $L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$ асимптотической формулой (1.5.52) А.Эрдейи. Ввиду (1.5.58) – (1.5.61), тогда мы получим:

$$\left[L_n^\alpha(x)L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n+1}^\alpha(x)L_{n-1}^{\alpha+1}(x)\right]\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{x}{n}\right)^{\alpha+3/2}e^{-x}$$
$$= \left[\frac{Ai\left(-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)}{\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)^{1/2}} + O\left(\frac{\widetilde{Ai}\left(-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)}{x\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)^{1/2}}\right)\right]$$
$$\times\left[\frac{Ai\left(-s_1^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_1}\right)\right)}{\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_1}\right)\right)^{1/2}} + O\left(\frac{\widetilde{Ai}\left(-s_1^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_1}\right)\right)}{x\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_1}\right)\right)^{1/2}}\right)\right]O_1$$
$$-\left[\frac{Ai\left(-s_2^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_2}\right)\right)}{\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_2}\right)\right)^{1/2}} + O\left(\frac{\widetilde{Ai}\left(-s_2^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_2}\right)\right)}{x\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_2}\right)\right)^{1/2}}\right)\right]\times$$
$$\left[\frac{Ai\left(-s_3^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_3}\right)\right)}{\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_3}\right)\right)^{1/2}} + O\left(\frac{\widetilde{Ai}\left(-s_3^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_3}\right)\right)}{x\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_3}\right)\right)^{1/2}}\right)\right]O_2 = \left[\frac{Ai\left(-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)}{\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)^{1/2}} + O(1/n)\right]$$
$$\times\left[\frac{Ai\left(-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)}{\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)^{1/2}} + O\left(n^{-1/3}\left(1+\left|s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right|\right)^{1/4}\right)\right]O_3$$
$$-\left[\frac{Ai\left(-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)}{\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)^{1/2}} + O\left(n^{-1/3}\left(1+\left|s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right|\right)^{1/4}\right)\right]$$

$$\times\left[\frac{Ai\left(-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)}{\left(-\phi'\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)^{1/2}}+O\left(n^{-1/3}\left(1+\left|s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right|\right)^{1/4}\right)\right]O_4$$

$$=O\left[Ai\left(-s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right)n^{-1/3}\left(1+\left|s_0^{2/3}\phi\left(\frac{x}{s_0}\right)\right|\right)^{1/4}\right]=O\left(n^{-1/3}\right),$$

где $O_i = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (i = 1,2,3,4)$. Сопоставляя полученную оценку с (1.5.57), мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 1.5.6 *Пусть $\alpha > -1$, $s = 4n + 2\alpha + 2$, $n \geqslant 1$, $s/2 \leqslant x \leqslant 3s/2$. Тогда имеет место оценка*

$$\mathcal{K}_n^\alpha(x,x) \leqslant c(\alpha)e^x n^{-\alpha}.$$

Для нормированных полиномов Лагерра $\hat{L}_n^\alpha(x)$ имеет место оценка

$$e^{-\frac{x}{2}}\left|\hat{L}_{n+1}^\alpha(x)-\hat{L}_{n-1}^\alpha(x)\right| \leqslant$$

$$c(\alpha)=\begin{cases} s^{\alpha/2-1}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1/s,\\ s^{-3/4}x^{-\alpha/2+1/4}, & \text{если } 1/s < x \leqslant s/2,\\ x^{-\alpha/2}s^{-3/4}\left(s^{1/3}+|x-s|\right)^{1/4}, & \text{если } s/2 < x \leqslant 3s/2,\\ e^{-x/4}, & \text{если } 3s/2 < x, = \end{cases} \tag{1.5.63}$$

установленная в работах [9], [10], [11].

§ 1.6. Числа Стирлинга и их обобщение

В комбинаторной теории хорошо известны числа Стирлинга первого и второго рода. При исследовании асимптотических свойств классических полиномов, образующих ортогональные системы на равномерных сетках, они играют существенную роль. Нам понадобятся также числа, представляющие собой некоторое обобщение чисел Стирлинга первого рода.

Числа Стирлинга первого рода $s(n,k) \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$ могут быть определены из следующего равенства:

$$x^{[n]} = x\cdots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \tag{1.6.1}$$

В частности, $s(0,0) = 1$, $s(n,0) = 0$ при $n \geqslant 1$.

Через $s(n,k,\gamma) \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$ мы обозначим числа, определяемые из равенства

$$(x+\gamma)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k,\gamma)x^k, \tag{1.6.2}$$

где γ – произвольное комплексное число. Сопоставляя (1.6.1) и (1.6.2), замечаем, что $s(n,k,0) = s(n,k)$ – число Стирлинга первого рода. Из (1.6.2) непосредственно вытекают следующие рекуррентные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} s(n,m,\gamma) = s(n-1,m-1,\gamma)-(n-1-\gamma)s(n-1,m,\gamma)\\ (1 \leqslant m < n), \end{aligned}\right\} \tag{1.6.3}$$

$$\left.\begin{aligned} s(n+1,m,\gamma+1) = s(n,m-1,\gamma)+(\gamma+1)s(n,m,\gamma) \\ (1\leqslant m\leqslant n), \end{aligned}\right\} \tag{1.6.4}$$

$$s(n,0,\gamma)=\gamma\cdots(\gamma-n+1)=\gamma^{[n]},\quad s(n,n,\gamma)=1. \tag{1.6.5}$$

Полагая в (1.6.3) $m=n-1$, имеем:

$$s(n,n-1,\gamma)=s(n-1,n-2,\gamma)-(n-1-\gamma)s(n-1,n-1,\gamma)$$

$$=s(n-1,n-2,\gamma)+\gamma-n+1.$$

Последовательное применение этого равенства для $n=2,3,\ldots,k$ дает:

$$s(k,k-1,\gamma)=k\gamma-\frac{k(k-1)}{2}. \tag{1.6.6}$$

Лемма 1.6.1. *Пусть $n\geqslant 0$, $0\leqslant m\leqslant n$, γ – произвольное комплексное число. Тогда имеет место равенство:*

$$s(n,m,\gamma)=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{\gamma}{k}\frac{n!}{(n-k)!}s(n-k,m). \tag{1.6.7}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_\gamma(t,x)=(1+t)^{x+\gamma}$. Так как

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}f_\gamma(t,x)\Big|_{t=0}=(x+\gamma)^{[n]}, \tag{1.6.8}$$

то в окрестности точки $t=0$ имеем разложение:

$$(1+t)^{x+\gamma}=\sum_{n=0}^{\infty}(x+\gamma)^{[n]}\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}s(n,k,\gamma)\frac{t^n}{n!}x^k.$$

Поменяв здесь порядки суммирования, находим:

$$(1+t)^{x+\gamma}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{n=k}^{\infty}s(n,k,\gamma)\frac{t^n}{n!}.$$

Следовательно,

$$\frac{(1+t)^\gamma}{k!}\left[\ln(1+t)\right]^k=\sum_{n=k}^{\infty}s(n,k,\gamma)\frac{t^n}{n!}, \tag{1.6.9}$$

откуда

$$s(n,m,\gamma)=\frac{n!}{2\pi i m!}\int_\lambda(1+z)^\gamma\left[\ln(1+z)\right]^m\frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{1.6.10}$$

где λ – замкнутый контур в комплексной плоскости, охватывающий начало координат и лежащий внутри единичной окружности. Поскольку

$$(1+z)^\gamma=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\gamma}{k}z^k,$$

то

$$s(n,m,\gamma)=\frac{n!}{2\pi i m!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\gamma}{k}\int_\lambda\left[\ln(1+z)\right]^m\frac{dz}{z^{n-k+1}}. \tag{1.6.11}$$

При $n-k<m$ функция $[\ln(+z)]^m/z^{n-k+1}$ аналитична внутри круга $|z|<1$ и соответствующие контурные интегралы в (1.6.11) по теореме Коши обращаются в нуль. Поэтому

$$s(n,m,\gamma)=n!\sum_{k=0}^{n-m}\binom{\gamma}{k}\frac{1}{2\pi i m!}\int_\lambda[\ln(1+z)]^m\frac{dz}{z^{n-k+1}}. \qquad (1.6.12)$$

В силу (1.6.10),

$$s(n-k,m)=s(n-k,m,0)=\frac{(n-k)!}{2\pi i m!}\int_\lambda[\ln(1+z)]^m\frac{dz}{z^{n-k+1}}. \qquad (1.6.13)$$

Сопоставляя (1.6.12) и (1.6.13), приходим к утверждению леммы 1.6.1.

Лемма 1.6.2. *Пусть $0\leqslant\delta_n\leqslant 1$, $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$, $n-\delta_n n^{1/2}\leqslant m\leqslant n$. Тогда имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$s(n,m,\gamma)=(-1)^{n+m}\binom{n}{m}\left(\frac{m}{2}\right)^{n-m}(1+\varepsilon_{n,m}(\gamma)),$$

где $\varepsilon_{n,m}(\gamma)=o(1)$ равномерно относительно n,m.

Доказательство. Воспользуемся следующим результатом Мозера-Вимана (см., например, [5], стр.150)

$$s(n,m)=(-1)^{n+m}\binom{n}{m}\left(\frac{m}{2}\right)^{n-m}(1+\varepsilon_{n,m}), \qquad (1.6.14)$$

в котором

$$\lim_{n\to\infty}\max_{n-\delta_n n^{1/2}\leqslant m\leqslant n}|\varepsilon_{n,m}|=0. \qquad (1.6.15)$$

Из леммы 1.6.1 и равенства (1.6.14) имеем:

$$s(n,m,\alpha)=\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^{n-k+m}\binom{n-k}{m}\left(\frac{m}{2}\right)^{n-k-m}\binom{\gamma}{k}\frac{n!(1+\varepsilon_{n-k,m})}{(n-k)!}$$

$$=(-1)^{n+m}\binom{n}{m}\left(\frac{m}{2}\right)^{n-m}\left[1+\sum_{k=1}^{n-m}\binom{n-m}{k}\left(\frac{2}{m}\right)^k(-\gamma)_k(1+\varepsilon_{n-k,m})+\varepsilon_{n,m}\right]$$

$$=(-1)^{n+m}\binom{n}{m}\left(\frac{m}{2}\right)^{n-m}(1+\varepsilon_{n,m}(\gamma)), \qquad (1.6.16)$$

где $(a)_0=1$, $(a)_k=a\cdots(a+k-1)$,

$$\varepsilon_{n,m}(\gamma)=\sum_{k=1}^{n-m}\binom{n-m}{k}\left(\frac{2}{m}\right)^k(-\gamma)_k(1+\varepsilon_{n-k,m})+\varepsilon_{n,m}. \qquad (1.6.17)$$

С другой стороны, при $n-\delta_n n^{1/2}\leqslant m\leqslant n$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{n-m}\binom{n-m}{k}\left(\frac{2}{m}\right)^k|(-\gamma)_k(1+\varepsilon_{n-k,m})|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n-m}\frac{(n-m)^k2^k(|\gamma|+n-m)^k}{k!m^k}(1+|\varepsilon_{n-k,m}|)$$

$$\leqslant \frac{2}{m}(n-m)(|\gamma|+n-m)\left(1+\max_{m\leqslant l\leqslant n-1}|\varepsilon_{l,m}|\right)\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(n-m)^k 2^k(|\gamma|+n-m)^k}{k!m^k}$$

$$< \frac{2}{m}(n-m)(|\gamma|+n-m)\left(1+\max_{m\leqslant l\leqslant n-1}|\varepsilon_{l,m}|\right)\exp\left(\frac{2}{m}(n-m)(|\gamma|+n-m)\right)$$

$$\leqslant \delta_n\left(1+\max_{m\leqslant l\leqslant n-1}|\varepsilon_{l,m}|\right)O(1). \qquad (1.6.18)$$

Сопоставляя (1.6.15) – (1.6.18), убеждаемся в справедливости леммы 1.6.2.

Лемма 1.6.3. *Пусть γ – произвольное число. Тогда*

$$|s(n,j,\gamma)| \leqslant \binom{n}{j}(n+|\gamma|)^{n-j} \qquad (0\leqslant j\leqslant n). \qquad (1.6.19).$$

Доказательство. Пусть $n=1$. Тогда $|s(1,0,\gamma)|=|\gamma|$, $|s(1,1,\gamma)|=1$, так что оценка (1.6.19) при $n=1$ верна. Предположим, что она верна для $n\geqslant 1$. Тогда из рекуррентной формулы (1.6.3) при $1\leqslant j\leqslant n$ имеем:

$$|s(n+1,j,\gamma)| \leqslant |s(n,j-1,\gamma)|+|n-\gamma||s(n,j,\gamma)|$$

$$\leqslant \binom{n}{j-1}(n+|\gamma|)^{n-j+1}+|n-\gamma|\binom{n}{j}(n+|\gamma|)^{n-j} <$$

$$\binom{n}{j-1}(n+1+|\gamma|)^{n-j+1}+\binom{n}{j}(n+1+|\gamma|)^{n+1-j} =$$

$$\left[\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right](n+1+|\gamma|)^{n+1-j} = \binom{n+1}{j}(n+1+|\gamma|)^{n+1-j}. \qquad (1.6.20)$$

Справедливость оценки (1.6.20) для $j=n+1$ и $j=0$ следует из того, что $s(n+1,n+1,j)=1$, $s(n+1,0,\gamma)=\gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-n)$. Лемма доказана.

Числа Стирлинга второго рода, обозначаемые здесь через $\sigma(k,n)$ $(0\leqslant n\leqslant k)$, могут быть определены из следующего равенства:

$$x^k=\sum_{n=0}^{k}\sigma(k,n)x^{[n]}. \qquad (1.6.21)$$

В частности, $\sigma(k,k)=1$, $\sigma(k,0)=0$ $\ (k\geqslant 1)$. Из (1.6.21) вытекает рекуррентная формула

$$\sigma(k,n)=\sigma(k-1,n-1)+n\sigma(k-1,n) \quad (1\leqslant n\leqslant k-1). \qquad (1.6.22).$$

Отсюда

$$\sigma(k,k-1)=\sigma(k-1,k-2)+(k-1)\sigma(k-1,k-1)=\sigma(k-1,k-2)+k-1.$$

Последовательное применение этого равенства для $k=2,3,\dots,m$ дает:

$$\sigma(m,m-1)=\frac{m(m-1)}{2}. \qquad (1.6.23)$$

Из (1.6.22) нетрудно вывести также равенство

$$\frac{1}{z^{[n+1]}}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\sigma(k,n)}{z^{k+1}} \qquad (|z|>n). \qquad (1.6.24)$$

Лемма 1.6.4. *Пусть* $0 \leqslant n \leqslant k$. *Тогда*

$$\sigma(k,n) \leqslant \frac{k^{2(k-n)}}{(k-n)!(\ln 4)^{k-n}}. \tag{1.6.25}$$

Доказательство. Пусть $k=1$. Тогда $\sigma(1,0)=0$, $\sigma(1,1)=1$, т.е. оценка (1.6.25) при $k=1$ верна. Пусть она верна для $k \geqslant 1$. Если $1 \leqslant n \leqslant k$, то в силу (1.6.22) имеем:

$$\sigma(k+1,n) \leqslant \frac{nk^{2(k-n)}}{(k-n)!(\ln 4)^{k-n}} + \frac{k^{2(k-n+1)}}{(k-n+1)!(\ln 4)^{k-n+1}}$$
$$= \frac{k^{2(k-n+1)}}{(k-n+1)!(\ln 4)^{k-n+1}}\left(1+\frac{n(k-n+1)\ln 4}{k^2}\right)$$
$$\leqslant \frac{(k+1)^{2(k+1-n)}}{(k+1-n)!(\ln 4)^{k+1-n}}\left(1+\frac{(k-n+1)\ln 4}{k}\right)\left(\frac{k}{k+1}\right)^{2(k+1-n)}. \tag{1.6.26}$$

Далее

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{2(k+1-n)} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k\frac{2(k-n+1)}{k}} \geqslant 4^{\frac{k-n+1}{k}}, \tag{1.6.27}$$

$$1+\frac{k-n+1}{k}\ln 4 \leqslant 4^{\frac{k-n+1}{k}}. \tag{1.6.28}$$

Из (1.6.27) – (1.6.28) получаем:

$$\sigma(k+1,n) \leqslant \frac{(k+1)^{2(k-n+1)}}{(k+1-n)!(\ln 4)^{k+1-n}} \quad (1 \leqslant n \leqslant k). \tag{1.6.29}$$

Справедливость оценки (1.6.29) для $n=0$ и $n=k+1$ следует из того, что $\sigma(k+1,0)=0$, $\sigma(k+1,k+1)=1$. Лемма 1.6.4 доказана.

Отметим еще следующую асимптотическую формулу:

$$\sigma(k,n) = \frac{\left(\frac{1}{2}n^2\right)^{k-n}}{(k-n)!}\left[1+\varepsilon_{k,n}\right], \tag{1.6.30}$$

где $\varepsilon_{k,n}=o(1)$ при $k\to\infty$, $k-c\leqslant n\leqslant k$ (см. [5]).

§ 1.7. Z - преобразование

Для конечной функции $f=f(x)$, заданной на множестве $\Omega=\{0,1,\ldots\}$, рассмотрим степенной ряд

$$Z[f]=Z[f](z)=\sum_{x=0}^{\infty} f(x)z^x. \tag{1.7.1}$$

Отображение $f\to Z[f]$ называется Z - преобразованием функции f.

Для двух функций $f=f(x)$ и $g=g(x)$, заданных на Ω определим дискретную свёртку

$$f*g=f*g(s)=\sum_{x=0}^{s} f(x)g(s-x). \tag{1.7.2}$$

Из (1.7.1) и (1.7.2) непосредственно имеем:

$$Z[f*g]=Z[f]Z[g]; \tag{1.7.3}$$

если $f(x) = \binom{x}{n}$, где $n \in \Omega$, то

$$Z[f](z) = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}. \tag{1.7.4}$$

§ 1.8. Конечные разности

Пусть функция $f(x)$ конечна в точках x, $x+1, \ldots, x+n$, где n – натуральное число. Положим

$$\Delta f(x) = \Delta^1 f(x) = f(x+1) - f(x), \;\; \Delta^2 f(x) = \Delta\left(\Delta f(x)\right), \; \ldots$$

и назовем $\Delta^n f(x)$ конечной разностью n - го порядка. Аналогично определяются конечные разности функции $f(x)$ с шагом h, если она задана на сетке x, $x+h, \ldots, x+nh$, т.е

$$\Delta_h f(x) = \Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta_h^n f(x) = \Delta_h\left(\Delta_h^{n-1} f(x)\right).$$

Отметим следующие свойства конечных разностей:

$$\Delta^0 f(x) = f(x), \quad \Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} f(x+k), \tag{1.8.1}$$

$$\Delta^n f(x) g(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} f(x) \Delta^k g(x+n-k), \tag{1.8.2}$$

$$\sum_{x=a}^{a+N-1} f(x) \Delta g(x) = f(x) g(x) \Big|_a^{a+N} - \sum_{x=a}^{a+N-1} g(x+1) \Delta f(x), \tag{1.8.3}$$

$$\Delta^n x^{[n]} = m^{[n]} x^{[m-n]} \qquad (n \leqslant m). \tag{1.8.4}$$

Если функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема на сегменте $[x, x+nh]$ $(h > 0)$, то

$$\Delta_h^n f(x) = h^n f^{(n)}(x + nh\theta) \qquad (0 < \theta < 1). \tag{1.8.5}$$

Следующие разностные свойства гамма-функции вытекают из (1.2.6):

$$\Delta^n \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x-b)} = \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+b-n+1)} \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x-b+n)}, \tag{1.8.6}$$

$$\Delta^n \frac{\Gamma(a-x)}{\Gamma(b-x)} = (-1)^n \frac{\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(a-b-n+1)} \frac{\Gamma(a-x-n)}{\Gamma(b-x)}. \tag{1.8.7}$$

§ 1.9. Формула суммирования Эйлера

Начнем с определения чисел Бернулли B_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu t^\nu}{\nu!} \quad (|t| < 2\pi).$$

В частности, $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_{2k+1} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Имеет место оценка

$$|B_{2k}| \leqslant \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}\left(1 - 2^{1-2k}\right)} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1.9.1}$$

которая может быть без труда выведена из равенства

$$B_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

Пусть $F(x)$ имеет $2n$ непрерывных производных на интервале (a, b). Разделим этот интервал на m равных частей и пусть $h = (b-a)/m$. Тогда имеет место следующая формула Эйлера (см. [6], стр. 609):

$$\sum_{k=0}^{m} F(a+kh) = \frac{1}{h}\int_a^b F(t)\,dt + \frac{1}{2}[F(b)+F(a)]$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \left[F^{(2k-1)}(b) - F^{(2k-1)}(a)\right]$$

$$+\frac{h^{2k}}{(2n)!} B_{2n} \sum_{k=0}^{m-1} F^{(2n)}(a+kh+h\theta) \ \ (0<\theta<1). \tag{1.9.2}$$

Лемма 1.9.1. *Пусть неотрицательная функция $F(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, $h = (b-a)/m$. Тогда:*

1) если $F(x)$ монотонно возрастает на $[a, b]$, то

$$\sum_{k=0}^{m} F(a+kh) \leqslant \frac{1}{h}\int_a^b F(x)\,dx + F(b);$$

2) если $F(x)$ монотонно убывает на $[a, b]$, то

$$\sum_{k=0}^{m} F(a+kh) \leqslant \frac{1}{h}\int_a^b F(x)\,dx + F(a)$$

§ 1.10. Пространство $l_2(\Omega, \rho)$

Рассмотрим дискретное множество Ω, состоящее из конечного или бесконечного числа различных точек действительной оси $\mathbf{R}$, и пусть $\rho = \rho(x)$ – положительная функция, определенная на множестве Ω. Через $l_2(\Omega, \rho)$ обозначим линейное пространство действительных функций $f = f(x)$, определенных на множестве Ω, для которых

$$\sum_{x\in\Omega} f^2(x)\rho(x) < \infty.$$

Если $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$, $\rho(x) = 1$ при $x \in \Omega$, то положим $l_2(\Omega, \rho) = l_2$. Определим скалярное произведение функций $f, g \in l_2(\Omega, \rho)$:

$$(f, g) = \sum_{x\in\Omega} f(x)g(x)\rho(x).$$

Ортогональность двух функций $f, g \in l_2(\Omega, \rho)$ означает, что $(f, g) = 0$.

Система функций $\{\varphi_n = \varphi_n(x)\}$ из $l_2(\Omega, \rho)$ называется ортогональной на множестве Ω с весом $\rho = \rho(x)$, если $(\varphi_n, \varphi_m) = 0$ для любых $n \neq m$, и ортонормированной, если

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}.$$

В последнем случае мы будем называть систему $\{\varphi_n\}$ ОНС.

Пусть $\{\varphi_n\}$ – ОНС, $f \in l_2(\Omega, \rho)$. Определим коэффициенты Фурье

$$\hat{f}_n = (f, \varphi_n) = \sum_{x \in \Omega} f(x)\varphi_n(x)\rho(x) \tag{1.10.1}$$

и сумму Фурье

$$S_n(x) = S_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_n \varphi_n(x) \tag{1.10.2}$$

функции f по системе $\{\varphi_n\}$.

Пусть $Q_n(x) = c_0\varphi_0(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$ – полином по системе $\{\varphi_k\}$. Тогда

$$\sum_{x \in \Omega}[f(x) - Q_n(x)]^2\rho(x) = \sum_{x \in \Omega}[f(x) - S_n(x)]^2\rho(x) + \sum_{k=0}^{n}[c_k - \hat{f}_k]^2. \tag{1.10.3}$$

Отсюда, в частности, следует, что для произвольного полинома $Q_n(x)$ имеет место неравенство

$$\sum_{x \in \Omega}[f(x) - S_n(x)]^2\rho(x) \leqslant \sum_{x \in \Omega}[f(x) - Q_n(x)]^2\rho(x). \tag{1.10.4}$$

§ 1.11. Об ортогональных полиномах

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ – неубывающая функция с числом точек роста $N \leqslant \infty$, заданная на (a, b). Через $L_2(a, b, \alpha)$ обозначим линейное пространство таких функций $f = f(x)$, что

$$\int_a^b f^2(x)\, d\alpha(x) < \infty.$$

Для $f, g \in L_2(a, b, \alpha)$ определим скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\, d\alpha(x).$$

Пусть существуют все моменты

$$c_n = \int_a^b x^n\, d\alpha(x), \qquad 0 \leqslant n < N.$$

Если ортогонализовать последовательность степеней $1, x, x^2, \ldots$, то получим конечную или бесконечную последовательность полиномов $\{p_n(x)\}$ $(0 \leqslant n < N)$, однозначно определенную следующими условиями:

a) $p_n(x)$ – полином точно степени n с положительным коэффициентом при x^n;

b) система $\{p_n(x)\}$, $0 \leqslant n < N$ ортогональна и нормирована, т.е.

$$\int_a^b p_m(x)p_n(x)\, d\alpha(x) = \delta_{nm}, \quad 0 \leqslant n, m < N.$$

Пусть x_0 – произвольное комплексное число, $b_n(x)$ – произвольный полином с комплексными коэффициентами, нормированный условием

$$\int_a^b |b_n(x)|^2 \, d\alpha(x) = 1. \tag{1.11.1}$$

Тогда максимум $|b_n(x_0)|^2$ достигается для полиномов

$$b_n(x) = \varepsilon\{\mathcal{K}_n(x_0,x_0)\}^{-1/2}\mathcal{K}_n(x_0,x), \quad |\varepsilon| = 1,$$

где

$$\mathcal{K}_n(x_0,x) = \overline{p_0(x_0)}p_0(x) + \overline{p_1(x_0)}p_1(x) + \cdots + \overline{p_n(x_0)}p_n(x).$$

Этот максимум равен $\mathcal{K}_n(x_0,x_0)$. Поэтому для любого полинома $b_n(x)$, удовлетворяющего условию (1.11.1), имеем

$$|b_n(x_0)|^2 \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} |p_\nu(x_0)|^2 . \tag{1.11.2}$$

Если вместо (1.11.1) потребовать

$$\int_a^b |b_n(x)|^2 \, d\alpha(x) \leqslant A, \tag{1.11.3}$$

то

$$|b_n(x_0)|^2 \leqslant A\sum_{\nu=0}^{n} |p_\nu(x_0)|^2 . \tag{1.11.4}$$

В частности, когда $a = -1$, $b = 1$, $d\alpha(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $\alpha, \beta > -1$ из (1.11.4) вытекает (см. [2], стр.190), что

$$|b_n(\cos\theta)| \leqslant cA^{1/2}\begin{cases}\theta^{-\alpha-1/2}n^{1/2}, & \text{если } qn^{-1} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\\ n^{\alpha+1}, & \text{если } 0 \leqslant \theta \leqslant qn^{-1},\end{cases} \tag{1.11.5}$$

где $c = c(\alpha, \beta, q)$, $q > 0$.

Глава 2. Полиномы, ортогональные на сетке

В этой главе рассматриваются некоторые свойства полиномов, ортогональных на дискретных подмножествах действительной прямой. Многие из приведенных ниже свойств являются общими для ортогональных полиномов и подробно изложены в литературе (см. [2]), так что нет необходимости в подробном доказательстве этих свойств.

§ 2.1. Ортогональность на сетке

Пусть Ω дискретное множество (сетка), состоящее из конечного или бесконечного числа различных точек, расположенных на действительной прямой, $\rho = \rho(x)$ – положительная функция, определенная на Ω и такая, что $x^n \in l_2(\Omega, \rho)$ для $n = 0, 1, \ldots$. Заметим, что если $|\Omega| = N < \infty$, то пространство $l_2(\Omega, \rho)$ является N-мерным, в котором функции $1, x, \ldots, x^{N-1}$ образуют линейно независимую систему. Применяя к этой системе процесс ортогонализации Грама—Шмидта, мы получим конечную последовательность полиномов

$$p_k(x) = p_k(x; \Omega, \rho) \quad (0 \leqslant k \leqslant N-1),$$

образующих ортонормированную на множестве Ω систему с весом $\rho = \rho(x)$, т.е.

$$\sum_{x \in \Omega} \rho(x) p_n(x) p_m(x) = \delta_{nm}. \tag{2.1.1}$$

Если $|\Omega| = \infty$ и $x^n \in l_2(\Omega, \rho)$ для любого $n \in \{0, 1, \ldots\}$, то функции $1, x, \ldots, x^k$ образуют линейно независимую систему в $l_2(\Omega, \rho)$ для любого k, поэтому существует бесконечная система полиномов $\{p_k(x)\}$, обладающих свойством ортогональности (2.1.1).

Для определенности будем считать, что

$$p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots, \quad a_n > 0. \tag{2.1.2}$$

Будем говорить, что система полиномов $\{p_k(x)\}$ является ОНСП на Ω с весом $\rho(x)$, если она удовлетворяет условию (2.1.1).

§ 2.2. Рекуррентные формулы

Для трех последовательных полиномов $p_n(x)$, $p_{n-1}(x)$ и $p_{n-2}(x)$ ортонормированной системы справедлива рекуррентная формула

$$p_n(x) = (\alpha_n x + \beta_n) p_{n-1}(x) - \gamma_n p_{n-2}(x), \tag{2.2.1}$$

в которой

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \qquad \gamma_n = \frac{a_n a_{n-2}}{a_{n-1}^2}. \tag{2.2.2}$$

Укажем способ нахождения численных значений коэффициентов α_n, β_n и γ_n. Пусть

$$c_n = \sum_{x \in \Omega} x^n \rho(x). \tag{2.2.3}$$

Легко заметить, что

$$p_0(x) = c_0^{-1/2}, \qquad p_1(x) = \frac{c_0 x - c_1}{\sqrt{c_0(c_0 c_2 - c_1^2)}}. \tag{2.2.4}$$

Пусть уже найдены α_k, β_k, γ_k, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда, пользуясь ортонормированностью полиномов $p_k(x)$, из (2.2.1) выводим следующие равенства:

$$\gamma_n = -\alpha_n u_n, \quad \beta_n = -\alpha_n v_n, \tag{2.2.5}$$

где

$$u_n = \sum_{x \in \Omega} x p_{n-2}(x) p_{n-1}(x) \rho(x), \tag{2.2.6}$$

$$v_n = \sum_{x \in \Omega} x p_{n-1}^2(x) \rho(x). \tag{2.2.7}$$

Из (2.2.1) и (2.2.5) имеем:

$$p_n(x) = \alpha_n [(x - v_n) p_{n-1}(x) - u_n p_{n-2}(x)].$$

Отсюда

$$\alpha_n = 1/z_n^{1/2}, \tag{2.2.8}$$

$$z_n = \sum_{x \in \Omega} [(x - v_n) p_{n-1}(x) - u_n p_{n-2}(x)]^2 \rho(x). \tag{2.2.9}$$

Пусть
$$P_n(x) = d_n p_n(x), \quad d_n \neq 0. \tag{2.2.10}$$
Очевидно,
$$d_n^2 = \sum_{x\in\Omega} \rho(x) P_n^2(x). \tag{2.2.11}$$
Для произвольных трех полиномов $P_{n-1}(x)$, $P_n(x)$ и $P_{n+1}(x)$ вида (2.2.10) имеет место следующее равенство:
$$xP_n(x) = A_n P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), \tag{2.2.12}$$
в котором
$$P_n(x) = U_n x^n + V_n x^{n-1} + \ldots, \ 0 \leqslant n < |\Omega| - 1,$$
$$A_n = \frac{U_n}{U_{n+1}}, \quad B_n = \frac{V_n}{U_n} - \frac{V_{n+1}}{U_{n+1}}, \quad C_n = \frac{U_{n-1}}{U_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}. \tag{2.2.13}$$
Если мы положим
$$\tilde{p}_n(x) = \frac{2^n}{a_n} p_n(x) \quad (1 \leqslant n < |\Omega|), \tag{2.2.14}$$
то для $1 \leqslant n \leqslant |\Omega| - 2$ будем иметь:
$$\tilde{p}_{n+1}(x) = 2(x - \tilde{\alpha}_{n+1})\tilde{p}_n(x) - \tilde{\beta}_n \tilde{p}_{n-1}(x), \tag{2.2.15}$$
где $\tilde{p}_0(x) = 1$, $\tilde{p}_1(x) = 2(x - \tilde{\alpha}_1)$,
$$\tilde{\alpha}_{n+1} = \frac{\sum_{x\in\Omega} \rho(x) x \tilde{p}_n^2(x)}{\sum_{x\in\Omega} \rho(x) \tilde{p}_n^2(x)} \qquad (0 \leqslant n \leqslant |\Omega| - 2), \tag{2.2.16}$$
$$\tilde{\beta}_n = \frac{\sum_{x\in\Omega} \rho(x) \tilde{p}_n^2(x)}{\sum_{x\in\Omega} \rho(x) \tilde{p}_{n-1}^2(x)} \qquad (0 \leqslant n \leqslant |\Omega| - 2), \tag{2.2.17}$$
Следствием формул (2.2.1) и (2.2.2) является равенство
$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x) p_k(y) = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{p_n(x) p_{n+1}(y) - p_n(y) p_{n+1}(x)}{y - x}, \tag{2.2.18}$$
называемое формулой Кристоффеля-Дарбу.

§ 2.3. Метод наименьших квадратов

Если $x^k \in l_2(\Omega, \rho)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, то для $f \in l_2(\Omega, \rho)$ мы можем рассмотреть следующую задачу: среди всех полиномов вида $\phi_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ найти тот, для которого величина
$$J(a_0, a_1, \cdots a_n) = \sum_{x\in\Omega} \rho(x)(f(x) - \phi_n(x))^2 \tag{2.3.1}$$
принимает наименьшее значение. Если $n < |\Omega|$, то существует единственный полином $S_n(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$, минимизирующий величину (2.3.1). Его коэффициенты определяются из системы уравнений
$$J'_{a_k}(a_0, \cdots, a_n) = 0 \quad (k = 0, \ldots, n). \tag{2.3.2}$$

Заметим, что коэффициенты a_k полинома $S_n(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ зависят от n, т.е. $a_k = a_k(n)$ $(k = 0, \dots, n)$. Поэтому при переходе от n к $n+1$ приходится вычислять не только новый коэффициент a_{n+1}, но и заново вычислять все коэффициенты $a_k = a_k(n+1)$ $\quad (k = 0, \dots, n+1)$. П.Л.Чебышев предложил иной способ нахождения полинома S_n. Пусть $\{p_k(x)\}$ – ОНСП с весом $\rho(x)$ на Ω. Следуя Чебышеву, представим $\phi_n(x)$ в виде

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k p_k(x) \tag{2.3.3}$$

и потребуем, чтобы коэффициенты c_k в (2.3.3) имели значения, минимизирующие величину (2.3.1). Тогда

$$c_k = \hat{f}_k = (f, p_k) = \sum_{x \in \Omega} f(x) p_k(x) \rho(x) \quad (k = 0, \dots, n) \tag{2.3.4}$$

в силу ортонормированности $\{p_k(x)\}$ и неравенства (1.10.4). Другими словами, решение рассматриваемой задачи доставляет частичная сумма порядка n ряда Фурье функции f по системе $\{p_k(x)\}$: $\phi_n(x) = S_n(x, f)$. Коэффициенты $c_k = \hat{f}_k$, как видно из (2.3.4), не зависят от n, поэтому для перехода от $S_n(x, f)$ к $S_{n+1}(x, f)$ достаточно по формуле (2.3.4) найти единственный коэффициент $\hat{f}_{n+1}$.

§ 2.4. О нулях

Пусть $\Omega = \{x_j\}$ – дискретное множество, состоящее из различных точек действительной прямой, $\{p_n(x)\}$ – ОНСП на Ω с весом $\rho(x)$. Положим

$$\Omega' = \inf_j \{x_j : x_j \in \Omega\}, \qquad \Omega'' = \sup_j \{x_j : x_j \in \Omega\},$$

и покажем, что в интервале (Ω', Ω'') содержится ровно n простых корней полинома $p_n(x)$ $(n \geqslant 1)$. Предположим, что это не так. Из равенства

$$\sum_{x \in \Omega} p_n(x) \rho(x) = 0, \qquad n \geqslant 1,$$

следует, что внутри промежутка (Ω', Ω'') лежит по крайней мере один нуль полинома $p_n(x)$, в котором $p_n(x)$ меняет знак (из существования двух полиномов $p_0(x)$ и $p_n(x)$ следует, что $|\Omega| \geqslant 2$). Пусть $t_1, t_2, \dots, t_l$ все такие нули и $\omega_l(x) = (x - t_1) \cdots (x - t_l)$. Произведение $p_n(x)\omega_l(x)$ имеет постоянный знак (т.е. неотрицательно или неположительно) во всем (Ω', Ω''). С другой стороны, если $l < n$, то

$$\sum_{x \in \Omega} p_n(x) \omega_l(x) \rho(x) = 0. \tag{2.4.1}$$

Рассмотрим два случая: $|\Omega| < \infty$ и $|\Omega| = \infty$. Если $|\Omega| = N < \infty$, то мы можем считать, что $\Omega = \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$, где $x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1}$. Тогда из (2.4.1) следует, что точки $x_1, \dots, x_{N-2}$ являются кратными нулями полинома $p_n(x)\omega_l(x)$. Поэтому полином $p_n(x)\omega_l(x)$ степени $n + l \leqslant 2N - 3$ имеет не менее $2(N-2) + 2 = 2N - 2$ корней, чего быть не может. Значит, $l \geqslant n$. Если же $|\Omega| = \infty$, то из (2.4.1) следует, что $p_n(x)\omega_l(x)$, но поскольку это неверно, то снова $l \geqslant n$. Таким образом, $l = n$.

Имеет место

Предложение 2.4.1. *Каждый промежуток* (t_k, t_{k+1}) $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ *содержит хотя бы одну точку множества* Ω.

Доказательство. Если $1 < k < n-1$ и интервал (t_k, t_{k+1}) не содержит точек множества Ω, то полином

$$p_n(x)(x-t_1)\cdots(x-t_{k-1})(x-t_{k+2})\cdots(x-t_n)$$

имеет на Ω постоянный знак. С другой стороны, полагая

$$\omega(x) = (x-t_1)\cdots(x-t_{k-1})(x-t_{k+2})\cdots(x-t_n),$$

в силу ортогональности полиномов $p_n(x)$ и $\omega(x)$ имеем:

$$\sum_{x\in\Omega} p_n(x)\omega(x)\rho(x) = 0.$$

Но это равенство в случае $|\Omega| < \infty$ противоречит тому, что все нули полинома $p_n(x)$ расположены в интервале (Ω', Ω''). Если же $|\Omega| = \infty$, то оно противоречит тому, что $p_n(x)\omega(x)$ не является нулевым полиномом. Если допустить, что в интервале (t_1, t_2) или (t_{n-1}, t_n) отсутствуют точки множества Ω, то мы придем к аналогичному противоречию.

§ 2.5. Разностная формула Родрига

Обобщенные формулы Родрига, с помощью которых определяются классические ортогональные полиномы Якоби, Эрмита и Лагерра можно объединить в одну:

$$Q_n(x) = \frac{k_n}{\kappa(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{\kappa(x)\sigma^n(x)\right\}, \tag{2.5.1}$$

где σ полином, степень которого не превосходит двух, $\{Q_n(x)\}$ – одна из систем полиномов Якоби $\{P_n^{\alpha,\beta}(x)\}$, Эрмита $\{H_n(x)\}$ или Лагерра $\{L_n^\alpha(x)\}$, $\kappa(x)$ – весовая функция, относительно которой система $\{Q_n(x)\}$ ортогональна на промежутке $(a,b) \in \{(-1,1), (-\infty,\infty), (0,\infty)\}$. Естественен вопрос: нельзя ли с помощью формул вида (2.5.1) выразить полиномы, образующие ортогональную систему на дискретной системе точек? Такая задача впервые была поставлена и решена П.Л.Чебышевым [12], который заменил дифференциальный оператор d^n/dx^n разностным оператором Δ^n, функцию $\kappa(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ функцией

$$\rho(x) = \frac{\Gamma(N-x+\alpha)\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(N-x)\Gamma(x+1)}, \quad \alpha,\beta > -1, \tag{2.5.2}$$

выражение $(1-x^2)^n$ произведением

$$\prod_{k=0}^{n-1}\varphi(x-k) = \begin{cases} \varphi(x)\varphi(x-1)\cdots\varphi(x-n+1), & \text{при } n \geqslant 1, \\ 1, & \text{при } n = 0, \end{cases}$$

где $\varphi(x) = x(x-N-\alpha)$, и показал, что формула

$$T_n(x) = \frac{k_n}{\rho(x)}\Delta^n \left\{\rho(x)\prod_{k=0}^{n-1}\varphi(x-k)\right\} \tag{2.5.3}$$

определяет конечную систему полиномов $\{T_n(x)\}_{n=0}^{N-1}$, ортогональных на множестве $\Omega = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ с весом $\rho(x)$.

Следуя П.Л.Чебышеву, покажем сначала, что равенство (2.5.3) определяет при каждом n полином степени n. С этой целью заметим, что если $\varphi(x) = x(x-N-\alpha)$, то

$$\prod_{k=0}^{n-1} \varphi(x-k) = (-1)^n \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(N+\alpha+n-x)}{\Gamma(x-n+1)\Gamma(N+\alpha-x)},$$

и поэтому

$$\Phi(x) = \rho(x) \prod_{k=0}^{n-1} \varphi(x-k) = (-1)^n \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N+\alpha+n-x)}{\Gamma(x-n+1)\Gamma(N-x)}. \tag{2.5.4}$$

Из (2.5.3) и (2.5.4) имеем:

$$T_n(x) = \frac{k_n}{\rho(x)} \Delta^n \Phi(x). \tag{2.5.5}$$

Положим

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x-n+1)}, \qquad g(x) = \frac{\Gamma(N+\alpha+n-x)}{\Gamma(N-x)},$$

и воспользуемся формулой (1.8.2). Тогда

$$(-1)^n \Delta^n \Phi(x) = \Delta^n f(x) g(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda} \Delta^{n-\lambda} \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x-n+1)} \Delta^{\lambda} \frac{\Gamma(N+\alpha-x+\lambda)}{\Gamma(N-x-n+\lambda)}.$$

В силу (1.8.6) и (1.8.7),

$$\Delta^{n-\lambda} \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x-n+1)} = \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\lambda+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x-\lambda+1)},$$

$$\Delta^{\lambda} \frac{\Gamma(N+\alpha-x+\lambda)}{\Gamma(N-x-n+\lambda)} = (-1)^{\lambda} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha-\lambda+1)} \frac{\Gamma(N+\alpha-x)}{\Gamma(N-x-n+\lambda)}.$$

Поэтому

$$\Delta^n \Phi(x) = (-1)^n \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{\lambda} \binom{n}{\lambda}$$
$$\times \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N+\alpha-x)}{\Gamma(\lambda+\beta+1)\Gamma(n+\alpha-\lambda+1)\Gamma(x-\lambda+1)\Gamma(N-x-n+\lambda)}. \tag{2.5.6}$$

Сопоставляя (2.5.2), (2.5.5) и (2.5.6), находим:

$$T_n(x) = k_n \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{n-\lambda} \binom{n}{\lambda} \binom{n+\alpha}{\lambda} \frac{\Gamma(n+\beta+1)\lambda!}{\Gamma(\lambda+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}{\Gamma(x-\lambda+1)\Gamma(N-x-n+\lambda)}. \tag{2.5.7}$$

Так как здесь

$$\frac{\Gamma(N-x)}{\Gamma(N-x-n+\lambda)} = (N-x-1)(N-x-2)\ldots(N-n+\lambda-x),$$

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\lambda+1)} = x(x-1)\ldots(x-\lambda+1),$$

то все слагаемые под знаком суммы (2.5.7) представляют собой полиномы степени n. Тем самым доказано, что $T_n(x)$ является полиномом степени n.

Докажем теперь, что система $\{T_n(x)\}$, $0 \leqslant n < N-1$, при $\alpha, \beta > -1$ ортогональна на множестве $\Omega = \{0, 1, \dots, N-1\}$ с весом $\rho(x)$. Для этого достаточно проверить, что

$$A_k = \sum_{x \in \Omega} x^k T_n(x) \rho(x) = 0 \tag{2.5.8}$$

для каждого $k = 0, 1, \dots, n-1$. Так как

$$\Delta f(x) g(x) = f(x) \Delta g(x) + g(x+1) \Delta f(x),$$

то

$$\sum_{x \in \Omega} x^k \Delta^n \Phi(x) = \sum_{x \in \Omega} x^k \Delta \Delta^{n-1} \Phi(x) = \sum_{x \in \Omega} [\Delta(x^k \Delta^{n-1} \Phi(x)) - \Delta x^k \Delta^{n-1} \Phi(x+1)]$$

$$= x^k \Delta^{n-1} \Phi(x)|_{x=0}^{N} - \sum_{x \in \Omega} \Delta x^k \Delta^{n-1} \Phi(x+1)$$

$$= -\sum_{x \in \Omega} \Delta x^k \Delta^{n-1} \Phi(x+1) = -\Delta x^k \Delta^{n-2} \Phi(x+1)|_{x=0}^{N}$$

$$- \sum_{x \in \Omega} \Delta^2 x^k \Delta^{n-2} \Phi(x+2) = \sum_{x \in \Omega} \Delta^2 x^k \Delta^{n-2} \Phi(x+2) = \cdots$$

$$= (-1)^n \sum_{x \in \Omega} \Phi(x+n) \Delta^n x^k. \tag{2.5.9}$$

В силу (2.5.4) при $\alpha, \beta > -1, n \geqslant 1$ выражения

$$\Delta^{n-1} \Phi(x), \quad \Delta^{n-2} \Phi(x+1), \quad \dots, \quad \Delta \Phi(x+n-2)$$

обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = N$. С другой стороны, при $0 \leqslant k < n$ разность $\Delta^n x^k$ тождественно равна нулю. Поэтому (2.5.8) следует из (2.5.9) и (2.5.5). Этим ортогональность системы $\{T_n(x)\}_{n=0}^{N-1}$ на $\Omega = \{0, \dots, N-1\}$ с весом (2.5.2) доказана.

Рассмотрим следующую более общую задачу: найти общий вид функции $\rho(x)$ и полинома $\varphi(x)$ таких, чтобы равенство (2.5.3) для каждого n определяло полином степени не выше n. Прежде всего убедимся в том, что если степень $\overline{k}$ полинома $\varphi(x)$ превосходит 2, то функция, определяемая с помощью равенства (2.5.3), не для каждого n является полиномом степени в точности n. Пусть $\overline{k} \geqslant 2$. Из (2.5.3) для $n = 1$ имеем:

$$T_1(x) = k_1 (\rho(x))^{-1} \Delta[\rho(x) \varphi(x)].$$

Отсюда находим:

$$\frac{\rho(x)}{\rho(x-1)} = \frac{\varphi(x-1) + T_1(x-1)/k_1}{\varphi(x)}. \tag{2.5.10}$$

При $n = 2$ из (2.5.3) и (2.5.10) имеем:

$$T_2(x) = \frac{k_2}{\rho(x)} \Delta^2 \{\rho(x) \varphi(x) \varphi(x-1)\}$$

$$= \frac{k_2}{\rho(x)} [\rho(x+2) \varphi(x+2) \varphi(x+1) - 2\rho(x+1) \varphi(x+1) \varphi(x) + \rho(x) \varphi(x) \varphi(x-1)]$$

$$= k_2 \left[\varphi(x) \varphi(x-1) - 2 \frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} \varphi(x) \varphi(x+1) + \frac{\rho(x+2)}{\rho(x+1)} \frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} \varphi(x+1) \varphi(x+2) \right]$$

$$= k_2[\varphi(x)\varphi(x-1) - 2(\varphi(x) + T_1(x)/k_1)\varphi(x) + (\varphi(x+1) + T_1(x+1)/k_1)(\varphi(x) + T_1(x)/k_1)]$$
$$= k_2[\varphi(x)\Delta^2\varphi(x-1) + T_1(x)\Delta\varphi(x)/k_1 + \varphi(x)\Delta T_1(x)/k_1 + T_1(x)T_1(x+1)/k_1^2].$$

Отсюда видно, что если $\overline{k} > 2$, то степень полинома $T_2(x)$ больше 2. Поэтому мы можем ограничиться случаем $\overline{k} \leqslant 2$.

Пусть $\overline{k} = 2$. Из (2.5.10) имеем:

$$\frac{\rho(x-1)}{\rho(x)} = \prod_{j=1}^{2} \frac{x+\alpha_j}{x+\beta_j}. \tag{2.5.11}$$

Решением этого уравнения является функция

$$\rho(x) = \prod_{j=1}^{2} \frac{\Gamma(x+\beta_j+1)}{\Gamma(x+\alpha_j+1)}. \tag{2.5.12}$$

Поскольку (2.5.3) не зависит от выбора частного решения уравнения (2.5.11), то

$$T_n(x) = k_n \prod_{j=1}^{2} \frac{\Gamma(x+\alpha_j+1)}{\Gamma(x+\beta_j+1)} \Delta^n \left\{ \prod_{j=1}^{2} \frac{\Gamma(x+\beta_j+1)}{\Gamma(x+\alpha_j+1)} \prod_{l=0}^{n-1} \varphi(x-l) \right\}. \tag{2.5.13}$$

Отсюда

$$T_n(x) = k_n \frac{\Gamma(x+\alpha_1+1)\Gamma(x+\alpha_2+1)}{\Gamma(x+\beta_1+1)\Gamma(x+\beta_2+1)} \Delta^n \frac{\Gamma(x+\beta_1+1)\Gamma(x+\beta_2+1)}{\Gamma(x+\alpha_1-n+1)\Gamma(x+\alpha_2-n+1)}, \tag{2.5.14}$$

то есть

$$T_n(x) = k_n \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p$$
$$\times \frac{\Gamma(x+\alpha_1+1)\Gamma(x+\alpha_2+1)\Gamma(x+\beta_1+1+n-p)\Gamma(x+\beta_2+1+n-p)}{\Gamma(x+\alpha_1+1-p)\Gamma(x+\alpha_2+1-p)\Gamma(x+\beta_1+1)\Gamma(x+\beta_2+1)}.$$

Воспользовавшись для целого p тождеством

$$\Gamma(z-p) = (-1)^p \frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(p+1-z)},$$

получаем:

$$T_n(x) = k_n \frac{\Gamma(x+\beta_1+1+n)\Gamma(x+\beta_2+1+n)}{\Gamma(x+\beta_1+1)\Gamma(x+\beta_2+1)} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p$$
$$\times \frac{\Gamma(-x-\beta_1-n)\Gamma(-x-\beta_2-n)\Gamma(-x-\alpha_1+p)\Gamma(-x-\alpha_2+p)}{\Gamma(-x-\beta_1-n+p)\Gamma(-x-\beta_2-n+p)\Gamma(-x-\alpha_1)\Gamma(-x-\alpha_2)}.$$

Отсюда и из (1.2.5) и (1.3.1) находим:

$$T_n(x) = k_n \frac{\Gamma(x+\beta_1+1+n)\Gamma(x+\beta_2+1+n)}{\Gamma(x+\beta_1+1)\Gamma(x+\beta_2+1)}$$
$$\times {}_3F_2(-n, -x-\alpha_1, -x-\alpha_2; -x-\beta_1-n, -x-\beta_2-n; 1). \tag{2.5.15}$$

Пользуясь формулой (1.3.5), из (2.5.15) получим:

$$T_n(x) = k_n \frac{\Gamma(\alpha_1-\beta_1)\Gamma(\alpha_1-\beta_2)}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1-n)\Gamma(\alpha_1-\beta_2-n)} \times$$

$$
{}_3F_2(-n,-x-\alpha_1,1+\beta_1+\beta_2-\alpha_1-\alpha_2+n;\beta_1-\alpha_1+1,\beta_2-\alpha_1+1;1). \qquad (2.5.16)
$$

Равенство (2.5.16) показывает, что $T_n(x)$ является полиномом степени n, если ни одно из чисел $(1+\beta_1+\beta_2-\alpha_1-\alpha_2+n)_k = a_k$, где $k=1,2,\ldots,n$, не равно нулю. Если же одно из этих чисел, скажем a_k, равно нулю при $k\leqslant n$, то и $a_{k+1}=a_{k+2}=\cdots=a_n=0$, так что при $n>1$ степень полинома $T_n(x)$ меньше n.

Пусть теперь $\overline{k}=1$. Из (2.5.10) мы имеем две возможности:

$$
a) \qquad \frac{\rho(x)}{\rho(x-1)} = q\frac{x+\beta}{x+\alpha} \quad (\varphi(x)=\lambda(x+\alpha));
$$

$$
b) \qquad \frac{\rho(x)}{\rho(x-1)} = \frac{q}{x+\alpha} \quad (\varphi(x)=\lambda(x+\alpha)).
$$

В случае a) находим:

$$
\rho(x) = q^x\frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x+\alpha+1)}. \qquad (2.5.17)
$$

Из (2.5.3) и (2.5.17) мы имеем

$$
T_n(x) = k_n\lambda^n q^{-x}\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+\beta+1)}\Delta^n\left[q^x\frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x+\alpha+1-n)}\right]
$$

$$
= k_n\lambda^n q^{-x}\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+\beta+1)}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p q^{x+n-p}\frac{\Gamma(x+n-p+\beta+1)}{\Gamma(x+\alpha+1-p)}
$$

$$
= k_n\lambda^n q^{n}\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+\beta+1)}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p q^{-p}\times
$$

$$
\frac{\Gamma(-x-\alpha+p)}{\Gamma(x+\alpha+1)\Gamma(-x-\alpha)}\frac{\Gamma(x+n+\beta+1)\Gamma(-x-\beta-n)}{\Gamma(-x-\beta-n+p)}
$$

$$
= k_n\lambda^n q^{n}\frac{\Gamma(x+n+\beta+1)}{\Gamma(x+\beta+1)}\sum_{p=0}^{n}\frac{(-n)_p}{p!}\frac{(-x-\alpha)_p}{(-x-\beta-n)_p}q^{-p}
$$

$$
= k_n\lambda^n q^{n}\frac{\Gamma(x+n+\beta+1)}{\Gamma(x+\beta+1)}{}_2F_1\left(-n,-x-\alpha;-x-\beta-n;\frac{1}{q}\right)
$$

$$
= k_n\lambda^n q^{n}\frac{\Gamma(x+n+\beta+1)}{\Gamma(x+\beta+1)}\frac{\Gamma(-x-n-\beta)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(-x-\beta)\Gamma(\alpha-\beta-n)}
$$

$$
\times{}_2F_1\left(-n,-x-\alpha;\beta-\alpha+1;1-\frac{1}{q}\right)
$$

$$
= k_n(-q\lambda)^n\frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta-n)}{}_2F_1\left(-n,-x-\alpha;\beta-\alpha+1;1-\frac{1}{q}\right)
$$

$$
= k_n(q\lambda)^n\frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)}{}_2F_1\left(-n,-x-\alpha;\beta-\alpha+1;1-\frac{1}{q}\right). \qquad (2.5.18)
$$

Теперь рассмотрим случай b). В этом случае

$$
\rho(x) = q^x\frac{1}{\Gamma(x+\alpha+1)}. \qquad (2.5.19)
$$

Из (2.5.3) и (2.5.19) имеем:

$$
T_n(x) = k_n\lambda^n q^{-x}\Gamma(x+\alpha+1)\Delta^n\left[q^x\frac{1}{\Gamma(x+\alpha-n+1)}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= k_n\lambda^n q^{-x}\Gamma(x+\alpha+1)\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p q^{x+n-p}\frac{1}{\Gamma(x+\alpha-p+1)}\\
&= k_n(q\lambda)^n\Gamma(x+\alpha+1)\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}q^{-p}\frac{\Gamma(p-x-\alpha)}{\Gamma(x+\alpha+1)\Gamma(-x-\alpha)}\\
&= k_n(q\lambda)^n\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{\Gamma(p-x-\alpha)}{\Gamma(-x-\alpha)q^p} = k_n(q\lambda)^n\sum_{p=0}^{n}\frac{(-n)_p}{p!(-q)^p}(-x-\alpha)_p\\
&= \quad k_n(q\lambda)^n{}_2F_0(-n,-x-\alpha;-1/q). \qquad (2.5.20)
\end{aligned}
$$

§ 2.6. Некоторые специальные случаи

А.А. Марков [13] рассмотрел случай $\rho(x) = x$, $\Omega = \{1, q, \dots, q^{N-1}\}$, где $q > 0$ и $q \neq 1$. В этом случае имеет место формула, аналогичная формуле (2.5.3). При этом роль оператора Δf играет оператор $D\,f$, определяемый следующим образом:

$$(D\,f)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}.$$

Более общий оператор

$$(L\,f)(x) = \frac{f(qx+\omega) - f(x)}{(q-1)x+\omega}$$

рассмотрен В. Ханом [14]. Он, в частности, показал, что следующие условия определяют один и тот же класс полиномов:

1) система полиномов $\{(L\,p_n)(x)\}$ является ортогональной одновременно с системой $\{p_n(x)\}$;

2) $y = p_n(x)$ является решением уравнения

$$(a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13})L^2 y + (a_{21}x + a_{22})L\,y + a_{33}y = 0.$$

Дальнейшее развитие результатов А.А. Маркова и В. Хана см. в [15], [16], [17], [18], [19], [20].

Глава 3. Полиномы Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x, N)$

§ 3.1. Определение и нормировка

Пусть N – натуральное число, α, β – произвольные комплексные числа. Положим

$$\rho(x) = \rho(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}, \qquad (3.1.1)$$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x, N) = \frac{k_n}{\rho(x)}\Delta^n\left\{\rho(x)(x-N-\alpha)^{[n]}x^{[n]}\right\}, \qquad (3.1.2)$$

где k_n – фиксированное число. Из результатов §2.5 следует, что равенство (3.1.2) при каждом n определяет полином степени не выше n. Выберем константу k_n в (3.1.2) из условия

$$T_n^{\alpha,\beta}(N-1, N) = \binom{n+\alpha}{n}. \qquad (3.1.3)$$

Тогда из (3.1.1) – (3.1.3) выводим $k_n = 1/\left(n!(N-1)^{[n]}\right)$ и, стало быть,

$$\rho(x)T_n^{\alpha,\beta}(x, N) = \frac{1}{n!(N-1)^{[n]}}\Delta^n\left\{(x-N-\alpha)^{[n]}x^{[n]}\rho(x)\right\}. \qquad (3.1.4)$$

§ 3.2. Связь с гипергеометрической функцией

В §2.5 было получено явное выражение полиномов, определяемых разностной формулой Родрига, через обобщенную гипергеометрическую функцию

$$ {}_3F_2(-n, -x-\alpha_1, 1+\beta_1+\beta_2-\alpha_1-\alpha_2+n; \beta_1-\alpha_1+1, \beta_2-\alpha_1+1; 1), $$

где α_j и β_j определяются из равенства

$$ \frac{\rho(x-1)}{\rho(x)} = \frac{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)}{(x+\beta_1)(x+\beta_2)}. $$

Поскольку в рассматриваемом случае

$$ \frac{\rho(x-1)}{\rho(x)} = \frac{x(x-N-\alpha)}{(x+\beta)(x-N)} $$

в силу (3.1.1), то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -N-\alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = -N$. Сопоставив (2.5.16) с (3.1.4), находим:

$$ T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n} {}_3F_2(-n, -x, \alpha+\beta+1+n; \beta+1, 1-N; 1) $$

$$ = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_k x^{[k]}}{\Gamma(k+\beta+1)k!(N-1)^{[k]}}. \qquad (3.2.1) $$

Заметим, что равенство (3.1.5) определяет полином $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ для произвольных комплексных α и β.

§ 3.3. Ортонормированная последовательность

Будем считать α, $\beta > -1$. В этом случае в §2.5 было показано, что полиномы $T_n(x) = T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$ образуют ортогональную с весом (3.1.1) систему на множестве $\Omega = \{0, 1, \dots, N-1\}$, т.е.

$$ \sum_{x\in\Omega} \rho(x) T_n(x) T_m(x) = g_n \delta_{nm}, \qquad (3.3.1) $$

где $0 \leqslant n, m \leqslant N-1$, $g_n = g_n(\alpha,\beta,N)$. Чтобы найти явное выражение для $g_n(\alpha,\beta,N)$, воспользуемся равенством (3.2.1). Имеем:

$$ g_n = \sum_{x\in\Omega} \rho(x) T_n^2(x) = k_{n,N}^{\alpha,\beta} \sum_{x\in\Omega} \rho(x) x^n T_n(x), \qquad (3.3.2) $$

где

$$ k_{n,N}^{\alpha,\beta} = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_n}{n!(N-1)^{[n]}}. \qquad (3.3.3) $$

Сравнивая (2.5.3) с (3.1.4) и учитывая (2.5.4) и (2.5.9), получаем:

$$ \sum_{x\in\Omega} \rho(x) x^n T_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(N-1)^{[n]}} \sum_{x\in\Omega} \Phi(x+n) \Delta^n x^n $$

$$ = \frac{1}{(N-1)^{[n]}} \sum_{x\in\Omega} \frac{\Gamma(x+n+\beta+1)\Gamma(N+\alpha-x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x-n)} $$

$$= \frac{1}{(N-1)^{[n]}} \sum_{x=0}^{N-n-1} \frac{\Gamma(x+n+\beta+1)\Gamma(N+\alpha-x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x-n)}. \tag{3.3.4}$$

Для вычисления последней суммы воспользуемся разложениями:

$$(1-z)^{-p} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\lambda)z^{\lambda}}{\Gamma(p)\Gamma(\lambda+1)}, \qquad (1-z)^{-q} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q+\mu)z^{\mu}}{\Gamma(q)\Gamma(\mu+1)},$$

$$(1-z)^{-p-q} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+q+\nu)z^{\nu}}{\Gamma(p+q)\Gamma(\nu+1)}.$$

Тогда будем иметь:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\lambda)}{\Gamma(p)\Gamma(\lambda+1)} \frac{\Gamma(q+\mu)}{\Gamma(q)\Gamma(\mu+1)} z^{\lambda+\mu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+q+\nu)}{\Gamma(p+q)\Gamma(\nu+1)} z^{\nu},$$

откуда,

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \frac{\Gamma(p+\lambda)}{\Gamma(p)\Gamma(\lambda+1)} \frac{\Gamma(q+m-\lambda)}{\Gamma(q)\Gamma(m+1-\lambda)} = \frac{\Gamma(p+q+m)}{\Gamma(p+q)\Gamma(m+1)}.$$

Поэтому

$$\sum_{x=0}^{N-n-1} \frac{\Gamma(x+n+\beta+1)\Gamma(N+\alpha-x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x-n)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(N+n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)\Gamma(N-n)}. \tag{3.3.5}$$

Из (3.3.2) – (3.3.5) получаем:

$$g_n = \frac{\Gamma(N-n)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(N+n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(\Gamma(N))^2\Gamma(n+1)}. \tag{3.3.6}$$

Введем весовую функцию

$$\mu(x) = \mu(x;\alpha,\beta,N) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}\rho(x)$$

$$= \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}. \tag{3.3.7}$$

Сравнивая (3.1.1), (3.3.1), (3.3.6) и (3.3.7), получим:

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x) T_n^{\alpha,\beta}(x,N) T_m^{\alpha,\beta}(x,N) = \delta_{nm} h_{n,N}^{\alpha,\beta}, \tag{3.3.8}$$

$$h_{n,N}^{\alpha,\beta} = \frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \tag{3.3.9}$$

При $n=0$ произведение $(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)$ следует заменить на $\Gamma(\alpha+\beta+2)$.

При $0 \leqslant n \leqslant N-1$ положим

$$\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \left\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-1/2} T_n^{\alpha,\beta}(x,N). \tag{3.3.10}$$

Очевидно, если $0 \leqslant n, m \leqslant N-1$, то

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x)\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)\tau_m^{\alpha,\beta}(x,N) = \delta_{nm}. \tag{3.3.11}$$

Другими словами, Полиномы $\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$ образуют ортонормированную с весом $\mu(x)$ систему на $\{0,1,\ldots,N-1\}$.

Введем в рассмотрение суммы Фурье

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,f) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k \tau_k^{\alpha,\beta}(x,N)$$

порядка n функции $f = f(x)$ по системе $\left\{\tau_k^{\alpha,\beta}(x,N)\right\}_{k=0}^{N-1}$, где

$$\hat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\mu(j)\tau_k^{\alpha,\beta}(j,N) \tag{3.3.12}$$

– коэффициенты Фурье для f. Из (3.3.12) и (3.3.9) находим:

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\mu(j) \sum_{k=0}^{n} \tau_k^{\alpha,\beta}(j)\tau_k^{\alpha,\beta}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\mu(j) \sum_{k=0}^{n} \left\{h_{k,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} T_k^{\alpha,\beta}(j,N) T_k^{\alpha,\beta}(x,N). \tag{3.3.13}$$

Из результатов §2.1 следует, что если $P_n = P_n(x)$ – полином степени n, то

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(x, P_n) = P_n(x) \tag{3.3.14}$$

для каждого $n \leqslant N-1$. В частности, применяя (3.3.14) к полиному

$$P_{N-1,l}(x) = \frac{(-1)^{N-1-l}}{l!(N-1-l)!(x-l)} \prod_{j=0}^{N-1}(x-j),$$

из (3.3.13) для целых l и x, $0 \leqslant l,\ x \leqslant N-1$, будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left\{h_{k,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} T_k^{\alpha,\beta}(l,N) T_k^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{\delta_{lx}}{\mu(x)}. \tag{3.3.15}$$

§ 3.4. Рекуррентные соотношения Формула Кристоффеля-Дарбу

Сопоставляя (2.2.10) – (2.2.13) с (3.2.1) и (3.3.8), получаем следующую рекуррентную формулу:

$$xT_n^{\alpha,\beta}(x,N) = A_n T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x,N) + B_n T_n^{\alpha,\beta}(x,N) + C_n T_{n-1}^{\alpha,\beta}(x,N), \tag{3.4.1}$$

где $T_0^{\alpha,\beta}(x,N) = 1$, $T_1^{\alpha,\beta}(x,N) = x(\alpha+\beta+2)/(N-1) - \beta - 1$,

$$A_n = \frac{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(N-n-1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}, \tag{3.4.2}$$

$$C_n = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)(N+n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}, \tag{3.4.3}$$

$$B_n = A_n \frac{n+\beta+1}{n+1} + C_n \frac{n}{n+\beta}. \tag{3.4.4}$$

Поскольку $\Delta a^{[k]} = k a^{[k-1]}$, то из (3.2.1) находим:

$$(n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x,N) + (n+\beta+1)T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1} x T_n^{\alpha,\beta+1}(x-1,N-1). \tag{3.4.5}$$

Из равенства

$$\mu(N-1-x;\beta,\alpha,N) = \mu(x;\alpha,\beta,N), \tag{3.4.6}$$

непосредственно вытекающего из (3.3.7), и соотношения ортогональности (3.3.8) следует, что при $\alpha,\beta > -1$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = (-1)^n T_n^{\beta,\alpha}(N-1-x,N). \tag{3.4.7}$$

Поскольку обе части этого равенства аналитичны относительно α и β, то оно справедливо для произвольных α и β.

Из (3.4.5) и (3.4.7) имеем также равенство

$$(n+\alpha+1)T_n^{\alpha,\beta}(x,N) - (n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1}(N-1-x)T_n^{\alpha+1,\beta}(x,N-1). \tag{3.4.8}$$

Формула Кристоффеля–Дарбу (2.2.18) для полиномов Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x) = T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ принимает следующий вид:

$$D_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T_k^{\alpha,\beta}(x)T_k^{\alpha,\beta}(y)}{h_{k,N}^{\alpha,\beta}}$$

$$= \frac{(N-1)^{[n+1]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}} \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}$$

$$\times \frac{T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)T_n^{\alpha,\beta}(y) - T_n^{\alpha,\beta}(x)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y} \tag{3.4.9}$$

В частности, при $y = N-1$ имеем:

$$D_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,N-1) = \frac{T_n^{\alpha,\beta}(x) - \frac{n+1}{n+\alpha+1}T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)}{N-1-x}$$

$$\times \frac{(N-1)^{[n+1]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}} \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}$$

$$= \frac{(N-2)^{[n]}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)2^{-\alpha-\beta-1}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} T_n^{\alpha+1,\beta}(x,N-1). \tag{3.4.10}$$

Последнее выражение является следствием равенства (3.4.8). Аналогично, полагая в (3.4.9) $y = 0$ и учитывая (3.4.5), получаем:

$$D_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,0) = \frac{(N-2)^{[n]}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)2^{-\alpha-\beta-1}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)} T_n^{\alpha,\beta+1}(x,N-1). \tag{3.4.11}$$

Вернемся к рекуррентной формуле (3.4.1) и придадим ей несколько иной вид. С этой целью преобразуем выражение (3.4.4). Имеем

$$B_n=\frac{(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(N-n-1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}+\frac{n(n+\alpha)(N+n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}=$$

$$=\frac{(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(N-1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}-\frac{n(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}+$$

$$+\frac{n(n+\alpha)(N-1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}+\frac{n(n+\alpha)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}=S_1+S_2,$$

где через S_1 обозначена сумма первого и третьего слагаемых, а через S_2, соответственно, второго и четвертого слагаемых. Отсюда

$$S_1=\frac{(N-1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}+$$

$$+\frac{(N-1)n(n+\alpha)(2n+\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}=$$

$$=\frac{(N-1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}-$$

$$-\frac{(N-1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}$$

$$+\frac{(N-1)[n(n+\alpha)(2n+\alpha+\beta+1)+n(n+\alpha)]}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}=S_{11}+S_{12},$$

где

$$S_{11}=\frac{(N-1)[n(n+\alpha)-(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)]}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)},$$

$$S_{12}=\frac{(N-1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}+$$

$$\frac{(N-1)n(n+\alpha)(2n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}.$$

Далее.

$$S_{11}==\frac{(N-1)[n(n+\alpha)-n(n+\alpha)-n(\beta+1)-(\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)]}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}=$$

$$=-\frac{(N-1)(\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)},$$

$$S_{12}=\frac{(N-1)(2n+\alpha+\beta+1)[(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)+n(n+\alpha)]}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}=$$

$$=\frac{(N-1)[(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)+n(n+\alpha)]}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}.$$

Складывая S_{11} и S_{12}, получим

$$S_1=\frac{(N-1)[(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)+n(n+\alpha)-(\beta+1)]}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}=$$

$$=\frac{(N-1)[n(n+\alpha+\beta)+n+(\beta+1)(n+\alpha+\beta)+n(n+\alpha)]}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}=$$

$$= \frac{(N-1)[2n(n+\alpha+\beta+1)+(\beta+1)(\alpha+\beta)]}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} - \frac{N-1}{2} + \frac{N-1}{2} =$$

$$= \frac{(N-1)[4n(n+\alpha+\beta+1)+2(\beta+1)(\alpha+\beta)-(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)]}{2(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} +$$

$$+\frac{N-1}{2} = \frac{(N-1)(\beta^2-\alpha^2)}{2(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} + \frac{N-1}{2}.$$

Для S_2 имеем

$$S_2 = \frac{n(n+\alpha)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)+n(n+\alpha)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} -$$

$$-\frac{n(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)-n(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} =$$

$$\frac{n(2n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta-1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} +$$

$$\frac{n(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} =$$

$$\frac{n(n+\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} = \frac{(\alpha-\beta)[4n(n+1)+4n(\alpha+\beta)]}{4(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} =$$

$$\frac{(\alpha-\beta)[2n(2n+2)+2n(\alpha+\beta)+2n(\alpha+\beta)]}{4(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)[2n(2n+\alpha+\beta+2)+(\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)-(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+2)]}{4(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{4(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} + \frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2)}{4(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$$

$$= \frac{\alpha-\beta}{4} + \frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2)}{4(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}.$$

Стало быть

$$B_n = S_1 + S_2 = \frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2N)}{4(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} + \frac{\alpha-\beta+2N-2}{4}.$$

С учетом этого равенства из (3.4.1)–(3.4.4) мы выводим следующую рекуррентную формулу: $T_0^{\alpha,\beta}(x,N)=1$, $T_1^{\alpha,\beta}(x,N)=x(\alpha+\beta+2)/(N-1)-\beta-1$,

$$T_n^{\alpha,\beta}(x) = (\kappa_n x - \sigma_n)T_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) - \delta_n T_{n-2}^{\alpha,\beta}(x), \qquad (3.4.12)$$

где

$$\kappa_n = \frac{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{n(n+\alpha+\beta)(N-n)},$$

$$\sigma_n = \kappa_n\left(\frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2N)}{4(2n+\alpha+\beta-2)(2n+\alpha+\beta)} + \frac{\alpha-\beta+2N-2}{4}\right),$$

$$\delta_n = \frac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)(N+n+\alpha+\beta-1)}{n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)(N-n)}.$$

Введем полиномы ($n=0,1,\ldots,N-1$)

$$\hat{T}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)=\frac{2^n(N-1)!}{(2N+\alpha+\beta)^n(N-n-1)!}T_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{2N+\alpha+\beta}{4}(1+t)-\frac{\beta+1}{2},N\right]. \quad (3.4.13)$$

Из (3.4.12) и (3.4.13) мы выводим для полиномов $\hat{T}_n^{\alpha,\beta}(t)=\hat{T}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ следующее рекуррентное соотношение $\hat{T}_0^{\alpha,\beta}(t)=1$, $\hat{T}_1^{\alpha,\beta}(t)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)t+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

$$\hat{T}_n^{\alpha,\beta}(t)=(\alpha_n x-\beta_n)\hat{T}_{n-1}^{\alpha,\beta}(t)-\gamma_n\left[1-\left(\frac{2n+\alpha+\beta-2}{2N+\alpha+\beta}\right)^2\right]\hat{T}_{n-2}^{\alpha,\beta}(t), \quad (3.4.14)$$

где

$$\alpha_n = \frac{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{2n(n+\alpha+\beta)},$$

$$\beta_n = \alpha_n\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta-2)(2n+\alpha+\beta)},$$

$$\gamma_n = \alpha_n\frac{2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)}{(2n+\alpha+\beta-2)(2n+\alpha+\beta-1)}.$$

§ 3.5. Разностные свойства

Непосредственно из (3.2.1) можно получить равенство:

$$\Delta T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{n+\alpha+\beta+1}{N-1}T_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x,N-1). \quad (3.5.1)$$

С другой стороны, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.5.1. *Пусть $\sigma(x)=x(N+\alpha-x)$ и функция $\rho(x)=\rho(x;\alpha,\beta,N)$ определена с помощью равенства (3.1.1). Тогда полином Чебышева $T_n(x)=T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ удовлетворяет следующему разностному уравнению второго порядка:*

$$\Delta[\rho(x)\sigma(x)\Delta T_n(x-1)]+\lambda_n\rho(x)T_n(x)=0, \quad (3.5.2)$$

где $\lambda=n(n+\alpha+\beta+1)$.

Это уравнение может быть записано также в следующих видах:

$$\beta(x)\Delta^2T_n(x-1)+(\beta(x)-\sigma(x))\Delta T_n(x-1)+\lambda_nT_n(x)=0 \quad (3.5.3)$$

и

$$-\lambda_nT_n(x)=\sigma(x)T_n(x-1)-(\beta(x)+\sigma(x))T_n(x)+\beta(x)T_n(x+1), \quad (3.5.4)$$

где $\beta(x)=(N-1-x)(\beta+1+x)$.

Доказательство. Заметим, что функция $\rho(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(\sigma(x)\rho(x))=s(x)\rho(x), \quad (3.5.5)$$

где $s(x)=(\beta+1)(N-1)-(\alpha+\beta+2)x$, стало быть,

$$\Delta[\rho(x)\sigma(x)\Delta T_n(x-1)]=\rho(x)P_n(x), \quad (3.5.6)$$

где $P_n \in \mathcal{P}^n$. Поэтому нам достаточно показать, что $P_n(x) = -\lambda_n T_n(x)$. Покажем сначала, что $P_n(x) = cT_n(x)$.

В самом деле, так как $\Delta f(x)g(x) = f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x)$, то из (3.5.6) имеем:

$$\sum_{x\in\Omega} x^k P_n(x)\rho(x) = \sum_{x\in\Omega} x^k \Delta[\rho(x)\sigma(x)\Delta T_n(x-1)]$$

$$= \sum_{x\in\Omega}\{\Delta[(x-1)^k\rho(x)\sigma(x)\Delta T_{n-1}(x-1)] - \rho(x)\sigma(x)\Delta T_n(x-1)\Delta(x-1)^k\}$$

$$= (x-1)^k\rho(x)\sigma(x)\Delta T_n(x-1)|_{x=0}^{N-1} - \sum_{x\in\Omega}\rho(x)\sigma(x)\Delta(x-1)^k\Delta T_n(x-1)$$

$$= \rho(x)\sigma(x)\Delta x^k T_k(x)|_{x=0}^{N-1} + \sum_{x\in\Omega} T_n(x)\Delta[\rho(x)\sigma(x)\Delta(x-1)^k]$$

$$= \sum_{x\in\Omega} T_n(x)\Delta[\rho(x)\sigma(x)\Delta(x-1)^k]. \tag{3.5.7}$$

Поскольку

$$\Delta[\rho(x)\sigma(x)\Delta(x-1)^k] = \rho(x)Q_{n-1}(x), \quad Q_{n-1}(x) \in \mathcal{P}^{n-1}$$

в силу (3.5.5), то последняя сумма в (3.5.7) обращается в нуль ($T_n(x) = T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ ортогонален к $1, x, \ldots, x^{n-1}$ с весом $\rho(x)$). Таким образом, $P_n(x)$ ортогонален ко всем степеням $1, x, \ldots, x^{n-1}$. Это и означает, что $P_n(x) = cT_n(x)$. Остается еще проверить, что в этом равенстве $c = -\lambda_n$. Но в этом нетрудно убедиться путем сравнения старших коэффициентов полиномов $P_n(x)$ и $T_n(x)$.

Сопоставляя (3.5.1) и (3.5.3), можно получить еще следующее тождество:

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{(\alpha+\beta+2)x - (\beta+1)(N-1)}{n(N-1)} T_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x-1,N-1)$$

$$-\frac{(\beta+1-x)(N-1-x)(n+\alpha+\beta+2)}{(N-1)(N-2)n} T_{n-2}^{\alpha+2,\beta+2}(x-1,N-2). \tag{3.5.8}$$

§ 3.6. О полиномах $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ с произвольными α и β

Рассмотрим функцию

$$f(\alpha,\beta) = f(\alpha,\beta,n,m,N) = \sum_{x=0}^{N-1} \rho(x;\alpha,\beta,N) T_n^{\alpha,\beta}(x,N) T_m^{\alpha,\beta}(x,N).$$

Как видно из (3.1.1) и (3.2.1), $\rho(x;\alpha,\beta,N)$ и $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ при $x \in \Omega$ аналитичны по α и β во всей комплексной плоскости, за исключением точек, в которых $\rho(x;\alpha,\beta,N)$ имеет полюсы. Поэтому функция $f(\alpha,\beta)$ также аналитична по α и β во всей комплексной плоскости с выколотыми полюсами $\rho(x;\alpha,\beta,N)$ при всех $x \in \Omega$. Но $f(\alpha,\beta) = 0$ при $\alpha, \beta > -1$. Поэтому $f(\alpha,\beta) = 0$ для всех α и β, за исключением указанных значений этих параметров. Далее, пользуясь формулой (1.2.3), для $x \in \Omega$ из (3.1.1) имеем:

$$\rho(x;\alpha,\beta,N) = \frac{\gamma(x)}{\sin(\pi\beta)\sin[\pi(\alpha+N-1)]}, \tag{3.6.1}$$

где

$$\gamma(x) = \frac{1}{\Gamma(-\beta-x)\Gamma(-\alpha-N+1+x)\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}. \tag{3.6.2}$$

Из (3.3.1), (3.6.1) и (3.6.2) следует, что если дробные $\alpha, \beta < -N+1$, то, во – первых, $\gamma(x) > 0$, во – вторых, система $\{T_n^{\alpha,\beta}(x,N)\}_{n=0}^{N-1}$ ортогональна с весом $\gamma(x)$, т.е.

$$\sum_{x=0}^{N-1} \gamma(x) T_n^{\alpha,\beta}(x,N) T_m^{\alpha,\beta}(x,N) = \delta_{nm} q_n, \tag{3.6.3}$$

где $q_n = q_n(\alpha,\beta,N)$.

С другой стороны, из (3.2.1) и (3.6.2) следует, что $\gamma(x) = \gamma(x;\alpha,\beta,N)$ и $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ являются целыми функциями относительно α и β. Поэтому равенство (3.6.3) справедливо для всех комплексных α и β, в том числе и для всех их целых значений. Сравнивая (3.3.1), (3.3.6), (3.6.1) и (3.6.3), находим:

$$\begin{gathered} q_n = q_n(\alpha,\beta,N) = \sin(\pi\beta)\sin[\pi(\alpha+N-1)]g_n(\alpha,\beta,N) \\ = (-1)^{N-1}\sin(\pi\beta)\sin(\pi\alpha) \\ \times \frac{\Gamma(N-n)\Gamma(N+n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(\Gamma(N))^2\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \\ = \frac{\Gamma(N-n)(N+n+\alpha+\beta)^{[N]}}{(2n+\alpha+\beta+1)(\Gamma(N))^2 n!\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \\ \times (n+\alpha)^{[n+1]}(n+\beta)^{[n+1]}(-1)^{N-1}\pi^2. \end{gathered} \tag{3.6.4}$$

Если β – такое целое число, что $-n \leqslant \beta \leqslant -1$, то полагая $\nu = -\beta$ из (3.2.1) имеем:

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{\Gamma(n+\beta+1)(-n)_\nu(-x)_\nu}{n!(-1)^n(1-N)_\nu}(n+\alpha+\beta+1)_\nu$$

$$\times \sum_{k=\nu}^{n} \frac{(-n-\beta)_{k+\beta}(-x-\beta)_{k+\beta}(n+\alpha+1)_{k+\beta}}{k!\Gamma(\beta+1++k)(-N+1-\beta)_{k+\beta}} =$$

$$\frac{\Gamma(n+\beta+1)(-n)_\nu(-x)_\nu}{n!(-1)^n(1-N)_\nu}(n+\alpha+\beta+1)_\nu \sum_{j=0}^{n+\beta} \frac{(-n-\beta)_j(-x-\beta)_j(n+\alpha+1)_j}{(j-\beta)!j!(-N+1-\beta)_j}$$

$$= \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{(n!)^2(1-N)_\nu(-1)^\nu}(-n)_\nu(-x)_\nu(n+\alpha+\beta+1)_\nu(n+\beta)!T_{n+\beta}^{\alpha,\nu}(x+\beta,N+\beta).$$

Отсюда

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{(n+\beta)!}{n!}\frac{(n+\alpha)^{[-\beta]}x^{[-\beta]}}{(N-1)^{[-\beta]}}T_{n+\beta}^{\alpha,-\beta}(x+\beta,N+\beta). \tag{3.6.5}$$

а если α и β – целые, $-n \leqslant \beta \leqslant -1$, $-(n+\beta) \leqslant \alpha \leqslant -1$, $N \geqslant 2$, то

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]}(N-x-1)^{[-\alpha]}}{(N-1)^{[-\beta]}(N-1+\beta)^{[-\alpha]}}T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha,-\beta}(x+\beta,N+\alpha+\beta). \tag{3.6.6}$$

§ 3.7. Асимптотические свойства $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ в случае целых α и β

Сравнивая соотношения ортогональностей (1.4.2) для полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(t)$ и (3.3.8) для полиномов Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$, нетрудно показать, что имеет место предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty} T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = P_n^{\alpha,\beta}(t), \tag{3.7.2}$$

где

$$T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = T_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{N-1}{2}(1+t), N\right], \tag{3.7.3}$$

равномерно относительно t, принадлежащим фиксированному компакту $\mathcal{K}$ комплексной плоскости. Поэтому мы можем написать асимптотическую формулу

$$T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = P_n^{\alpha,\beta}(t) + V_{n,N}(t), \tag{3.7.4}$$

для остаточного члена $V_{n,N}(t) = V_{n,N}(t;\alpha,\beta)$ которой при фиксированном n имеет место оценка

$$|V_{n,N}(t)| = o(1), \ \ t \in \mathcal{K}, \ \ N \to \infty.$$

Однако отсюда нельзя извлечь никакой информации о том, каким будет поведение $V_{n,N}(t)$, если вместе с N растет также и n. Этот и ближайшие несколько параграфов посвящены исследованию этого вопроса.

Если числа $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^+$, то

$$\rho(x;\alpha,\beta,N) = \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N+\alpha-x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)} = (x+\beta)^{[\beta]}(N+\alpha-x)^{[\alpha]}$$

представляет собой полином степени $\alpha+\beta$. Этот факт имеет существенное значение при исследовании асимптотических свойств полиномов $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$. Положим

$$\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \tau_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{N-1}{2}(1+t), N\right]. \tag{3.7.5}$$

По (3.3.10) и (3.7.3),

$$\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \left\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right\}^{-1/2} T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t). \tag{3.7.6}$$

Пусть

$$\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) = \left\{h_n^{\alpha,\beta}(t)\right\}^{-1/2} P_n^{\alpha,\beta}(t) \tag{3.7.7}$$

– нормированный полином Якоби. Одним из основных результатов настоящего параграфа является

Теорема 3.7.1. *Пусть α и β – целые неотрицательные числа, $a > 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t), \tag{3.7.8}$$

для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ которой при $1 \leqslant n \leqslant aN^{1/2}$ справедлива оценка

$$|v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)| \leqslant c(\alpha,\beta,a)\frac{n}{\sqrt{N}}\left[(1-t)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2}\left[(1+t)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-\beta-1/2}. \tag{3.7.9}$$

Доказательство. Заметим, что в силу (3.7.6) и (3.7.7),

$$\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(-t) = (-1)^n \tau_{n,N}^{\beta,\alpha}(t), \tag{3.7.10}$$

Аналогичное равенство справедливо и для полиномов Якоби $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ (см. (1.4.7) и (3.7.7)). Поэтому при доказательстве оценки (3.7.9) достаточно ограничиться случаем $0 \leqslant t \leqslant 1$. Положим $\kappa(t) = \kappa(t;\alpha,\beta) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ и оценим следующий интеграл:

$$\int_{-1}^{1}\kappa(t)\{v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\}^2\,dt = \int_{-1}^{1}\kappa(t)\{\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\}^2\,dt + \int_{-1}^{1}\kappa(t)\{\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\}^2\,dt -$$

$$2\int\limits_{-1}^{1} \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\kappa(t)\,dt = I_1 + I_2 - I_3. \tag{3.7.11}$$

Ясно, что $I_1 = 1$, $I_3 = 2k_{n,N}/k_n$, где k_n и $k_{n,N}$ – старшие коэффициенты полиномов $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ и $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ соответственно. Из (1.4.3), (1.4.5), (3.7.7), (3.2.1), (3.3.9) и (3.7.6) имеем:

$$\frac{k_{n,N}}{k_n} = \left(\frac{h_n^{\alpha,\beta}}{h_{n,N}^{\alpha,\beta}}\right)^{1/2} \frac{(N-1)^n}{(N-1)^{[n]}} = \frac{(N-1)^n}{\left[(N-1)^{[n]}(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}\right]^{1/2}}$$

$$= \left(\frac{(N-1)^{2n}(N-1)_n}{(N-1)^2[(N-1)^2-1]\cdots[(N-1)^2-(n-1)^2](N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}\right)^{1/2}$$

$$\geqslant \left(\frac{(N-1)_n}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}\right)^{1/2} = \left(\frac{(N-1)\cdots(N+\alpha+\beta)}{(N+n+\alpha+\beta)\cdots(N+n-1)}\right)^{1/2}$$

$$\geqslant 1 - c(\alpha,\beta)\frac{n}{N}. \tag{3.7.12}$$

Следовательно,

$$I_3 \geqslant 2 - c_1(\alpha,\beta)\frac{n}{N}. \tag{3.7.13}$$

Займемся интегралом I_2. Положим $t_j = -1 + 2j/(N-1)$. Тогда по формуле суммирования Эйлера (1.9.2) для целых $\alpha, \beta \geqslant 0$ имеем:

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} \kappa(t)\tau_n^2(t)\,dt = \frac{2}{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\kappa(t_j)\tau_n^2(t_j) - \frac{1}{N-1}\left[\kappa(1)\tau_n^2(1) + \kappa(-1)\tau_n^2(-1)\right]$$

$$-\sum_{k=1}^{s}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{2}{N-1}\right)^{2k}[d_k^+ - d_k^-], \tag{3.7.14}$$

где s – целая часть числа $n + (\alpha+\beta+1)/2$,

$$d_k^{\pm} = d_k^{\pm}(\alpha,\beta) = \left[\kappa(t)\tau_n^2(t)\right]^{(2k-1)}\Big|_{t=\pm 1}. \tag{3.7.15}$$

При $-1 \leqslant t \leqslant 1$ из (3.3.7) следует, что

$$\frac{2\kappa(t)}{(N-1)\mu[\frac{N-1}{2}(1+t)]} = \frac{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}{(N-1)(N-1)!(N-1)^{\alpha+\beta}}\times$$

$$\frac{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta}{(1-t+\frac{2}{N-1})\cdots(1-t+\frac{2\alpha}{N-1})(1+t+\frac{2}{N-1})\cdots(1+t+\frac{2\beta}{N-1})} < 1 + c_2(\alpha,\beta)/N. \tag{3.7.16}$$

Следовательно,

$$\frac{2}{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\kappa(t_j)\tau_n^2(t_j) = \frac{2}{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\kappa(t_j)\mu(j)}{\mu[\frac{N-1}{2}(1+t_j)]}\tau_n^2(t_j)$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{N}c_2(\alpha,\beta)\right)\sum_{j=0}^{N-1}\mu(j)\left\{\tau_n^{\alpha,\beta}(j,N)\right\}^2 = 1 + \frac{1}{N}c_2(\alpha,\beta). \tag{3.7.17}$$

Сопоставляя (3.7.14) с (3.7.17), замечаем, что

$$I_2 \leqslant 1 + \frac{n}{N} c_3(\alpha, \beta) + \sum_{k=1}^{s} \frac{|B_{2k}|}{(2k)!} \left(\frac{2}{N-1}\right)^{2k} \left(|d_k^+| + |d_k^-|\right).$$

Поэтому с учетом (3.7.11) и (3.7.13) будем иметь:

$$\int_{-1}^{1} \kappa(t)\{v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\}^2\, dt \leqslant c_3(\alpha, \beta)\frac{n}{N} + \sum_{k=1}^{s} \frac{|B_{2k}|}{(2k)!} \left(\frac{2}{N-1}\right)^{2k} \left(|d_k^+| + |d_k^-|\right). \tag{3.7.18}$$

Перейдем к оценке величин $|d_k^+|$ и $|d_k^-|$. Поскольку

$$\kappa(t;\alpha,\beta)\left\{\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right\}^2 = \kappa(-t;\beta,\alpha)\left\{\tau_{n,N}^{\beta,\alpha}(-t)\right\}^2$$

в силу (3.7.10), то из (3.7.15) получаем:

$$d_k^+(\alpha,\beta) = (-1)^{2k-1} d_k^-(\beta,\alpha). \tag{3.7.19}$$

Поэтому достаточно оценить величину $|d_k^-|$. Поскольку для целых $\alpha, \beta \geqslant 0$ функция $\kappa(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ представляет собой полином степени $\alpha+\beta$, то пользуясь формулой Лейбница из (3.7.15) имеем:

$$d_k^- = \sum_{j=\beta}^{\lambda} \binom{2k-1}{j} \kappa^{(j)}(-1)\left\{[\tau_n^{\alpha,\beta}(0,N)]^2\right\}^{(2k-j-1)} \left(\frac{N-1}{2}\right)^{2k-1-j}, \tag{3.7.20}$$

где $\lambda = \min\{\alpha+\beta, 2k-1\}$. Далее

$$\left\{[\tau_n^{\alpha,\beta}(0,N)]^2\right\}^{(m)} = \left\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} \left\{[T_n^{\alpha,\beta}(0,N)]^2\right\}^{(m)}$$

$$= \left\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \left\{T_n^{\alpha,\beta}(0,N)\right\}^{(l)} \left\{T_n^{\alpha,\beta}(0,N)\right\}^{(m-l)}. \tag{3.7.21}$$

С другой стороны, воспользовавшись (3.2.1), получим:

$$\left\{T_n^{\alpha,\beta}(0,N)\right\}^{(m)} = (-1)^n \frac{(n+\beta)!}{n!} \left\{\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{n^{[\nu]}(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{(\nu+\beta)!\nu!} \frac{x^{[\nu]}}{(N-1)^{[\nu]}}\right\}_{x=0}^{(m)}$$

$$= (-1)^n \frac{(n+\beta)!}{n!} \sum_{\nu=m}^{n} (-1)^\nu \frac{n^{[\nu]}(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{(\nu+\beta)!\nu!} \frac{(x^{[\nu]})_{x=0}^{(m)}}{(N-1)^{[\nu]}}. \tag{3.7.22}$$

Так как (см. (1.6.1))

$$\left(x^{[\nu]}\right)^{(m)} = \left(\sum_{j=m}^{\nu} j^{[m]} s(\nu,j) x^{j-m}\right)_{x=0} = s(\nu,m)m!,$$

то из (3.7.22) находим:

$$\left\{T_n^{\alpha,\beta}(0,N)\right\}^{(m)} = (-1)^n \frac{(n+\beta)!}{n!} \sum_{\nu=m}^{n} (-1)^\nu \frac{n^{[\nu]}(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{(\nu+\beta)!\nu!} \frac{s(\nu,m)m!}{(N-1)^{[\nu]}}. \tag{3.7.23}$$

Воспользуемся леммой 1.6.3. Полагая в ней $\gamma = 0$, получим:

$$|s(\nu, m)| \leqslant \frac{\nu! \nu^{\nu-m}}{m!(\nu-m)!}. \tag{3.7.24}$$

Положим

$$\gamma(\alpha, \beta) = \sup_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \frac{n^{[\nu]}(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{n^{2\nu}}, \quad \delta(n, N) = \frac{(N-1)^n}{(N-1)^{[n]}}. \tag{3.7.25}$$

Тогда из (3.7.23) и (3.7.24) имеем:

$$\left|\left\{T_n^{\alpha,\beta}(0, N)\right\}^{(m)}\right|$$

$$\leqslant \gamma(\alpha,\beta)\delta(n,N)\frac{n^{2m}}{(N-1)^m}\frac{(n+\beta)!}{n!}\sum_{\nu=m}^{n}\left(\frac{n^2}{N-1}\right)^{\nu-m}\frac{\nu^{\nu-m}}{(\nu-m)!(\nu+\beta)!} <$$

$$\gamma(\alpha,\beta)\delta(n,N)\frac{n^{2m}}{(N-1)^m}\frac{(n+\beta)!}{n!} \times \sum_{\nu=m}^{n}\left(\frac{n^2}{N-1}\right)^{\nu-m}\frac{\nu^{\nu-m}e^{\nu+\beta+1}}{(\nu-m)!(\nu+\beta+1)^{\nu+\beta}}$$

$$< \gamma(\alpha,\beta)\delta(n,N)\frac{n^{2m}}{(N-1)^m}\frac{(n+\beta)!e^{m+\beta+1}}{n!(m+\beta+1)^{m+\beta}}\sum_{\nu=m}^{n}\left(\frac{en^2}{N-1}\right)^{\nu-m}\frac{1}{(\nu-m)!}$$

$$< \gamma(\alpha,\beta)\delta(n,N)\frac{n^{2m}}{(N-1)^m}\frac{(n+\beta)!e^{m+\beta+1}}{n!(m+\beta+1)^{m+\beta}}\exp\left(\frac{en^2}{N-1}\right). \tag{3.7.26}$$

Сопоставляя (3.7.21) и (3.7.26), будем иметь:

$$|\left\{[\tau_n^{\alpha,\beta}(0,N)]^2\right\}^{(m)}| \leqslant [\gamma(\alpha,\beta)\delta(n,N)]^2\left\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-1}\exp\left(\frac{2en^2}{N-1}\right)$$

$$\times\left[\frac{(n+\beta)!}{n!}\right]^2\left(\frac{n^2}{N-1}\right)^m e^{m+2(\beta+1)}\sum_{l=0}^{m}\frac{\binom{m}{l}}{(l+\beta+1)^{l+\beta}(m-l+\beta+1)^{m-l+\beta}}$$

$$\leqslant [\gamma(\alpha,\beta)\delta(n,N)]^2\exp\left(\frac{2en^2}{N-1}\right)\left\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-1}\left[\frac{(n+\beta)!}{n!}\right]^2$$

$$\times\left(\frac{4en^2}{N-1}\right)^m e^{2(\beta+1)}2^{2\beta}(m+2\beta+2)^{-m-2\beta}. \tag{3.7.27}$$

Если $2 \leqslant n \leqslant aN^{1/2}$, то

$$\delta(n,N) = \frac{(N-1)^n}{(N-1)^{[n]}} = \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{j}{N-1-j}\right)\right)$$

$$\leqslant \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{N-1-j}\right) < \exp\left(\frac{n(n-1)}{2(N-n)}\right) \leqslant c_4(a). \tag{3.7.28}$$

Кроме того, из (3.3.9) вытекает следующая оценка:

$$\left\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} \leqslant c_5(\alpha,\beta,a)n. \tag{3.7.29}$$

Сопоставляя (3.7.27) – (3.7.29), имеем ($c_6 = c_6(\alpha,\beta,a)$):

$$\left|\left\{[\tau_n^{\alpha,\beta}(0,N)]^2\right\}^{(m)}\right| \leqslant \frac{c_6 n^{2\beta+1}}{(m+2\beta+2)^{m+2\beta}}\left(\frac{4en^2}{N-1}\right)^m. \tag{3.7.30}$$

Подставим (3.7.30) в (3.7.20). Получим ($c_j = c_j(\alpha,\beta,a)$):

$$|d_k^-| \leqslant c_7 \sum_{j=\beta}^{\lambda} \binom{2k-1}{j} |\kappa^{(j)}(-1)| \frac{(2e)^{2k-j-1} n^{4k-2j-1+2\beta}}{(2k-j+1+2\beta)^{2k-j-1+2\beta}} \leqslant c_8 \frac{(2e)^{2k}(n^2)^{2k-1} n}{(2k+1)^{2k-1}}. \tag{3.7.31}$$

Из (3.7.18), (3.3.19), (3.7.31) и (1.9.1) при $1 \leqslant n \leqslant aN^{1/2}$ следует, что

$$\int_{-1}^{1} \kappa(t)\{v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\}^2\,dt \leqslant c_9(\alpha,\beta,a)\left(\frac{n}{N}+\frac{n^3}{N^2}\right).$$

Этим установлена оценка (1.11.3) с константой

$$A = c_9(\alpha,\beta,a)\left(\frac{n}{N}+\frac{n^3}{N^2}\right)$$

для полинома $b_n(t) = v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$. Поэтому утверждение теоремы 3.7.1 вытекает из (1.11.5).

Теорема 3.7.1 дает главный член асимптотической формулы для полиномов Чебышева $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ по параметру N^{-1}, но оставляет открытым вопрос о последующих членах асимптотического разложения. Ниже мы получим полное, состоящее из конечного числа членов, асимптотическое разложение по параметру N^{-1} для

$$F_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \frac{(-1)^\alpha (N-1)!}{(N-n-1)!N^{n+\alpha+\beta}}\left[\frac{N}{2}(1-t)\right]_\alpha \left[\frac{N}{2}(1+t)+1\right]_\beta T_n^{\alpha,\beta}\left(\frac{N}{2}(1+t),N\right) \tag{3.7.32}$$

в случае целых $\alpha,\beta \geqslant 0$.

Положим

$$z_{k,j,r}(t) =$$

$$\begin{cases} (-1)^{r-j}2^{2r-k-j}(1+t)^{k-r}(1-t)^{j-r}P_r^{j-r,k-r}(t), & \text{если } j,k \geqslant r;\\ \frac{k!j!}{r!(k+j-r)!}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{k-r}P_j^{r-j,k-r}(t), & \text{если } j<r\leqslant k;\\ \frac{k!j!}{r!(k+j-r)!}\left(\frac{t-1}{2}\right)^{j-r}P_k^{j-r,k-r}(t), & \text{если } k<r\leqslant j;\\ P_j^{r-j,r-k}(t), & \text{если } k,j<r\leqslant j+k;\\ 0, & \text{если } j+k<r, \end{cases}$$

$$\kappa_{k,j,r}(t) = s(n+\beta,k,\beta)s(n+\alpha,j)\sigma(r,n)z_{k,j,r}(t), \tag{3.7.33}$$

где $s(m,j)$ и $\sigma(r,n)$ – числа Стирлинга первого и второго рода соответственно, $s(m,k,\alpha)$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$ – числа из §1.6, $P_m^{\gamma,\nu}(t)$ – полином Якоби. Имеет место

Теорема 3.7.2. *Пусть α и β – целые неотрицательные числа. Тогда*

$$F_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \sum_{r=n}^{2n+\alpha+\beta}\sum_{k=0}^{n+\beta}\sum_{j=0}^{n+\alpha}\frac{\kappa_{k,j,r}(t)}{N^{r+n-k-j+\alpha+\beta}}. \tag{3.7.34}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$h(x)=\binom{x+\beta}{x}\binom{N-1-x+\alpha}{N-1-x},\qquad s(x)=\binom{x+\beta}{\beta+n}\binom{N-1-x+\alpha+n}{\alpha+n}. \tag{3.7.35}$$

Тогда формула (3.1.2) принимает следующий вид:

$$(-1)^n\binom{N-1}{n}h(x)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}\Delta^n s(x). \tag{3.7.36}$$

Заметим, что для целых $\alpha,\beta\geqslant 0$ функция $s(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $2n+\alpha+\beta$. Поэтому законны следующие равенства, вытекающие из (3.7.36):

$$\binom{N-1}{n}h(x)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}s(x+k)$$

$$=\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{s(x+k)}{\cos k\pi}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)}$$

$$=\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}\frac{n!}{2i}\int_\lambda\frac{s(x+z)\,dz}{\sin\pi z\Gamma(n-z+1)\Gamma(z+1)}, \tag{3.7.37}$$

где λ – замкнутый контур, охватывающий точки $z=0,1,\ldots,n$. Так как $\sin\pi z=(-1)^n\pi/(\Gamma(z-n)\Gamma(n-z+1))$, то

$$\binom{N-1}{n}h(x)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=(-1)^n\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}\frac{n!}{2\pi i}\int_\lambda\frac{s(x+z)\Gamma(z-n)\,dz}{\Gamma(z+1)}. \tag{3.7.38}$$

Пользуясь тем, что $\Gamma(z-n)/\Gamma(z+1)=\left(z^{[n-1]}\right)^{-1}$, из (1.6.24) и (3.7.38) можно получить:

$$\binom{N-1}{n}h(x)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}\frac{(-1)^n n!}{2\pi i}\int_\lambda\sum_{r=n}^{\infty}\frac{\sigma(r,n)}{z^{r+1}}s(x+z)dz. \tag{3.7.39}$$

Если в качестве контура λ выбрана окружность достаточно большого радиуса с центром в точке $z=0$, то в (3.7.39) допустимо почленное интегрирование и мы приходим к следующему равенству:

$$\binom{N-1}{n}h(x)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=(-1)^n\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}\sum_{r=n}^{\infty}\frac{n!\sigma(r,n)}{2\pi i}\int_L\frac{s(z)dz}{(z-x)^{r+1}}, \tag{3.7.40}$$

где L охватывает точки $x,x+1,\ldots,x+n$. Далее,

$$\binom{z+\beta}{\beta+n}=\frac{1}{(n+\beta)!}(z+\beta)^{[n+\beta]}=\frac{1}{(n+\beta)!}\sum_{k=0}^{n+\alpha}s(n+\beta,k,\beta)z^k,$$

$$\binom{N-1-z+\alpha+n}{\alpha+n}=\frac{(-1)^{n+\alpha}}{(n+\alpha)!}\sum_{j=0}^{n+\alpha}s(n+\alpha,j)(z-N)^j.$$

в силу (1.6.1) и (1.6.2). Отсюда с учетом (3.7.35) находим:

$$s(z)=\frac{(-1)^{n+\alpha}}{(n+\alpha)!(n+\beta)!}\sum_{k=0}^{n+\beta}\sum_{j=0}^{n+\alpha}s(n+\beta,k,\beta)s(n+\alpha,j)z^k(z-N)^j. \tag{3.7.41}$$

Подставляя (3.7.41) в (3.7.40), получим:

$$\binom{N-1}{n} h(x) T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n} \sum_{r=n}^{2n+\alpha+\beta} \frac{n!}{r!}$$

$$\times \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n+\beta\\ 0\leqslant j\leqslant n+\alpha}} \frac{s(n+\beta,k,\beta)s(n+\alpha,j)\sigma(r,n)}{(n+\beta)!(n+\alpha)!(-1)^\alpha} \frac{d^r}{dx^r}\{x^k(x-N)^j\}.$$

Полагая $x = N(1+t)/2$, $h_N(t) = h(N(1+t)/2)$, находим (см. формулу Родрига (1.4.1)):

$$\binom{N-1}{n} h_N(t) T_n^{\alpha,\beta}[\frac{N}{2}(1+t),N]$$

$$= \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!\beta!} \sum_{r=n}^{2n+\alpha+\beta} 2^r\sigma(r,n) \sum_{(k,j)\in A} (-1)^{r-j} \frac{s(n+\beta,k,\beta)s(n+\alpha,j)}{(N/2)^{r-k-j}}$$

$$\times(1+t)^{k-r}(1-t)^{j-r}P_r^{j-r,k-r}(t), \tag{3.7.42}$$

где $A = \{(k,j)|0\leqslant k\leqslant n+\beta, 0\leqslant j\leqslant n+\alpha, k+j\geqslant r\}$.
С другой стороны, в силу формулы (1.4.10) имеем:

$$(1-t)^{j-r}P_r^{j-r,k-r}(t) = \binom{k}{r-j}\binom{r}{r-j}^{-1}(-2)^{j-r}P_j^{r-j,k-r}(t)$$

$$= \frac{k!j!(-2)^{j-r}}{r!(k+j-r)!}P_j^{r-j,k-r}(t) \quad (j<r). \tag{3.7.43}$$

Кроме того, воспользовавшись равенством (1.4.7) и формулой (1.4.10), находим:

$$(1+t)^{k-r}P_r^{j-r,k-r}(t) = (1+t)^{k-r}P_r^{k-r,j-r}(-t)(-1)^r$$

$$= 2^{k-r}\binom{j}{r-k}\binom{r}{r-k}^{-1}P_r^{r-k,j-r}(-t)(-1)^k = \frac{j!k!2^{k-r}}{r!(k+j-r)!}P_k^{j-r,r-k}(t). \tag{3.7.44}$$

Аналогично этому,

$$(1+t)^{k-r}(1-t)^{j-r}P_r^{j-r,k-r}(t) = (-1)^{r-j}2^{j+k-2r}P_{j+k-r}^{r-j,r-k}(t) \quad (j,k<r). \tag{3.7.45}$$

Наконец, в силу (3.7.35),

$$h_N(t) = h\left(\frac{N}{2}(1+t)\right) = \frac{1}{\alpha!\beta!}\left[\frac{N}{2}(1+t)+1\right]_\beta \left[\frac{N}{2}(1-t)\right]_\alpha$$

Сопоставляя это равенство с (3.7.33), (3.7.42) – (3.7.45), приходим к утверждению теоремы 3.7.2.

Следствие 3.7.1. *Имеет место тождество*

$$T_n^{0,0}\left(\frac{N}{2}(1+t),N\right) = (-1)^n\frac{N^n}{(N-1)^{[n]}}\sum_{r=n}^{2n}\frac{\sigma(r,n)}{N^{r-n}}\sum_{\substack{0\leqslant k,j\leqslant n\\ r\leqslant k+j}}\frac{s(n,k)s(n,j)}{N^{2n-k-j}}P_{j+k-n}^{r-j,r-k}(t).$$

Поскольку $s(n,k,0) = s(n,k)$, то справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из теоремы 3.7.2.

§ 3.8. Асимптотика полиномов $T_n^{0,0}(x,N)$

Результаты предыдущего параграфа остаются в силе и в случае $\alpha=\beta=0$. Здесь для $T_n^{0,0}(x,N)$ мы получим новую асимптотическую формулу с уточненной оценкой остаточного члена.

Положим $T_n(x)=T_n^{0,0}(x,N)\quad(0\leqslant n\leqslant N-1)$,

$$\mathcal{K}_n=\{(k,j,r)\big|0\leqslant k,j\leqslant n, n\leqslant r\leqslant 2n, r\leqslant j+k\},\tag{3.8.1}$$

$$\mathcal{K}_{n,0}=\mathcal{K}_n\setminus\{(n,n,n),(n,n,n+1),(n-1,n,n),(n,n-1,n)\}.\tag{3.8.2}$$

Теорема 3.8.1. *Имеет место следующее тождество:*

$$\frac{(N-1)^{[n]}}{N^n}T_n\left(\frac{N}{2}(1+t)\right)=$$

$$P_n^{0,0}(t+\frac{1}{N})-\sum_{k=2}^{n}\frac{(n+1)_k}{2^k k!N^k}P_{n-k}^{k,k}(t)+\sum_{(k,j,r)\in\mathcal{K}_{n,0}}\frac{\kappa_{k,j,r}(t)}{N^{n+r-j-k}},$$

где

$$\kappa_{k,j,r}(t)=s(n,k)s(n,j)\sigma(r,n)P_{j+k-r}^{r-j,r-k}(t).\tag{3.8.3}$$

Доказательство. Из следствия 3.7.1 имеем:

$$\frac{(N-1)^{[n]}}{N^n}T_n\left(\frac{N}{2}(1+t)\right)=J_n(t)+\sum_{(k,j,r)\in\mathcal{K}_{n,0}}\frac{\kappa_{k,j,r}(t)}{N^{n+r-j-k}},\tag{3.8.4}$$

где

$$J_n(t)=\sum_{(k,j,r)\in\mathcal{K}_n\setminus\mathcal{K}_{n,0}}\frac{\kappa_{k,j,r}(t)}{N^{n+r-j-k}}$$

$$=\sigma(n,n)s^2(n,n)P_n^{0,0}(t)+\frac{\sigma(n+1,n)s^2(n,n)}{N}P_{n-1}^{1,1}(t)$$

$$+\frac{\sigma(n,n)s(n,n-1)}{N}\left[P_{n-1}^{1,0}(t)+P_{n-1}^{0,1}(t)\right].\tag{3.8.5}$$

Поскольку (см. §1.6)

$$\sigma(n,n)=s(n,n)=1,$$

$$\sigma(n+1,n)=\frac{n(n+1)}{2},\quad s(n,n-1)=-\frac{n(n-1)}{2},$$

то из (3.8.5) следует, что

$$J_n(t)=P_n^{0,0}(t)+\frac{n(n+1)}{2N}P_{n-1}^{1,1}(t)-\frac{n(n-1)}{2N}\left[P_{n-1}^{1,0}(t)+P_{n-1}^{0,1}(t)\right].\tag{3.8.6}$$

По (1.4.9),

$$P_{n-1}^{1,0}(t)+P_{n-1}^{0,1}(t)=\frac{n+1}{n}P_{n-1}^{1,1}.\tag{3.8.7}$$

Из (3.8.6) и (3.8.7) получаем:

$$J_n(t)=P_n^{0,0}+\frac{n+1}{2N}P_{n-1}^{1,1}(t).\tag{3.8.8}$$

С другой стороны, по формуле Тейлора,

$$P_n^{0,0}(t+\frac{1}{N}) = P_n^{0,0}(t) + \frac{1}{1!N}\frac{d}{dt}P_n^{0,0}(t) + \cdots + \frac{1}{n!N^n}\frac{d^n}{dt^n}P_n^{0,0}(t), \tag{3.8.9}$$

где (см. (1.4.8))

$$\frac{d^k}{dt^k}P_n^{0,0}(t) = \frac{(n+1)_k}{2^k}P_{n-k}^{k,k}(t). \tag{3.8.10}$$

Из (3.8.8) – (3.8.10) находим:

$$J_n(t) = P_n^{0,0}(t+\frac{1}{N}) - \sum_{k=2}^{n}\frac{(n+1)_k}{2^k k! N^k}P_{n-k}^{k,k}(t). \tag{3.8.11}$$

Сопоставляя (3.8.4) и (3.8.11), приходим к утверждению теоремы 3.8.1.

Теорема 3.8.2. *Пусть $-1 < t < 1$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\frac{(N-1)^{[n]}}{N^n}T_n\left(\frac{N}{2}(1+t)\right) = P_n^{0,0}(t+\frac{1}{N}) + w_{n,N}(t), \tag{3.8.12}$$

для остаточного члена $w_{n,N}(t)$ которой справедлива оценка

$$|w_{n,N}(t)| \leqslant \frac{(6+2\sqrt{2})^2e^{2/3}}{(n+1)^{1/2}}\left(\frac{n}{N}\right)^2(1-t)^{-5/4}\exp\left(\frac{n(6+2\sqrt{2})e^{1/3}}{N(1-t^2)^{1/2}}\right)$$

$$+\frac{n^4e(6+2\sqrt{2})}{N^2(n+1)^{1/2}}(1-t^2)^{-1/4}\lambda^2\exp(\lambda\frac{n^2}{N}\sqrt{e}(2+\sqrt{2})),$$

где

$$\lambda = (1+t)^{-1/2} + (1-t)^{-1/2} + \frac{2(2+\sqrt{2})}{(1-t^2)^{1/2}\ln 2}.$$

Доказательство. Из теоремы 3.8.1 следует справедливость представления (3.8.12), в котором

$$w_{n,N}(t) = w_{n,N,1}(t) + w_{n,N,1}(t), \tag{3.8.13}$$

$$w_{n,N,1}(t) = -\sum_{k=2}^{n}\frac{(n+1)_k}{2^k k! N^k}P_{n-k}^{k,k}(t), \tag{3.8.14}$$

$$w_{n,N,2}(t) = \sum_{(k,j,r)\in\mathcal{K}_{n,0}}\frac{\kappa_{k,j,r}(t)}{N^{n+r-j-k}}. \tag{3.8.15}$$

Оценим $w_{n,N,1}(t)$ и $w_{n,N,2}(t)$. Воспользовавшись леммой 1.4.6, для $-1 < t < 1$ получим:

$$|P_{n-k}^{k,k}(t)| \leqslant (1-t^2)^{-k/2-1/4}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi(n-k+1)}\right)^{1/2}(2+\sqrt{2})^{2k}$$

$$\leqslant 2(1-t^2)^{-k/2-1/4}(n-k+1)^{-1/2}(2+\sqrt{2})^{2k}. \tag{3.8.16}$$

Из (3.8.14), (3.8.16) и оценки

$$[(n+1)(n+1-k)]^{1/2} < e^{k/3} \quad (2 \leqslant k \leqslant n)$$

будем иметь:

$$|w_{n,N,1}(t)| \leqslant \frac{2}{(1-t^2)^{1/4}} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{n(2+\sqrt{2})^2}{N(1-t^2)^{1/2}} \right)^k \frac{1}{(n+1-k)^{1/2}}$$

$$< \frac{2\left(1-t^2\right)^{-1/4}}{(n+1)^{1/2}} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{n(6+2\sqrt{2})e^{1/3}}{N(1-t^2)^{1/2}} \right)^k$$

$$< \frac{(1-t^2)^{-1/4}}{(n+1)^{1/2}} \frac{n^2(6+2\sqrt{2})^2 e^{2/3}}{N^2(1-t^2)} \exp\left(\frac{n(6+2\sqrt{2})e^{1/3}}{N(1-t^2)^{1/2}} \right). \tag{3.8.17}$$

Оценим $|w_{n,N,2}(t)|$. Положим

$$f = \frac{n^2\sqrt{e}(2+\sqrt{2})}{N(1-t)^{1/2}}, g = \frac{n^2\sqrt{e}(2+\sqrt{2})}{N(1+t)^{1/2}}, h = \frac{n^2\sqrt{e}4(2+\sqrt{2})^2}{N(1-t^2)^{1/2}\ln 4}. \tag{3.8.18}$$

Покажем, что

$$\frac{|\kappa_{k,j,r}(t)|}{N^{n+r-j-k}} < \frac{2f^{n-j}g^{n-k}h^{r-n}(1-t^2)^{-1/4}}{\sqrt{n+1}(n-k)!(n-j)!(r-n)!}. \tag{3.8.19}$$

Воспользовавшись леммами 1.6.3 и 1.6.4, для $r \leqslant 2n$ получаем следующее неравенство:

$$|s(n,k)s(n,j)|\sigma(r,n) \leqslant \binom{n}{k}\binom{n}{j} \frac{n^{2n-k-j}r^{2(r-n)}}{(r-n)!(\ln 4)^{r-n}}$$

$$\leqslant \frac{n^{2(n-k)}n^{2(n-j)}(2n)^{2(r-n)}}{(r-n)!(n-j)!(n-k)!(\ln 4)^{r-n}}. \tag{3.8.20}$$

С другой стороны, в силу леммы 1.4.6,

$$\left| P_{j+k-r}^{r-j,r-k}(t) \right| \leqslant \frac{(1-t)^{(j-r)/2}(1+t)^{(k-2)/2} 2(2+\sqrt{2})^{2r-j-k}}{(1-t^2)^{1/4}(k+j-r+1)^{1/2}}. \tag{3.8.21}$$

Далее,

$$\frac{1}{(k+j-r+1)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{n+1}{k+j-r+1} \right)^{1/2} < \frac{e^{\frac{1}{2}(n+r-j-k)}}{\sqrt{n+1}}. \tag{3.8.22}$$

Сопоставляя (3.8.3), (3.8.18), (3.8.20) – (3.8.22), убеждаемся в справедливости оценки (3.8.19).

Учитывая (3.8.18), из (3.8.15) и (3.8.19) находим:

$$|w_{n,N,2}(t)| \leqslant \frac{2(1-t^2)^{-1/4}}{\sqrt{n+1}} \sum_{(k,j,r)\in\mathcal{K}_{n,0}} \frac{f^{n-j}g^{n-k}h^{r-n}}{(n-j)!(n-k)!(r-n)!}$$

$$= \frac{2(1-t^2)^{-1/4}}{\sqrt{n+1}} \left[\sum_{(k,j,r)\in\mathcal{K}_n} \frac{f^{n-j}g^{n-k}h^{r-n}}{(n-j)!(n-k)!(r-n)!} - 1 - g - f - h \right]$$

$$< \frac{2(1-t^2)^{-1/4}}{\sqrt{n+1}} \left[\exp(f+g+h) - 1 - (f+g+h) \right]$$

$$\leqslant \frac{2(1-t^2)^{-1/4}}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{2}(f+g+h)^2 \exp(f+g+h)$$

$$= \frac{2(1-t^2)^{-1/4}n^4}{\sqrt{n+1}N^2} e(2+\sqrt{2})^2\lambda^2 \exp\left(\lambda\frac{n^2}{N}\sqrt{e}(2+\sqrt{2})\right), \tag{3.8.23}$$

где λ определено в теореме 3.8.2. Сопоставляя (3.8.13) – (3.8.15), (3.8.17) и (3.8.23), приходим к утверждению теоремы 3.8.2.

Для некоторых приложений полиномов Чебышева $T_n(x) = T_n^{0,0}(x,N)$ существенно асимптотическое поведение их производных. Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 3.8.1 и равенства (1.4.8).

Следствие 3.8.2. *Имеет место равенство*

$$\frac{(N-1)^{[n]}}{N^n}\frac{d^m}{dt^m}T_n\left(\frac{N}{2}(1+t)\right) = \frac{(n+1)_m}{2^n}P_{n-m}^{m,m}(t+\frac{1}{N})$$

$$-\sum_{k=2}^{n-m}\frac{(n+1)_{k+m}}{N^k 2^{k+m}k!}P_{n-k-m}^{k+m,k+m}(t) + \sum_{(k,j,r)\in\mathcal{K}_{n,0}}\frac{\kappa_{k,j,r}(t)}{N^{n+r-j-k}},$$

где

$$\kappa_{k,j,r}^{(m)}(t) = \sigma(r,n)s(n,k)s(n,j)\frac{(r+1)_m}{2^m}P_{j+k-r-m}^{r-j+m,r-k+m}(t),$$

$$P_{-l}^{\alpha,\beta}(t) = 0 \qquad (l = 1,2,\ldots).$$

Если мы положим

$$f_{n,l}(t) = \sum_{\substack{(k,j,r)\in\mathcal{K}_n\\ k+j-r=n-l}}\kappa_{k,j,r}(t), \tag{3.8.24}$$

то утверждение следствия 3.7.2 принимает более простой вид:

$$\frac{(N-1)^{[n]}}{N^n}\frac{d^m}{dt^m}T_n\left(\frac{N}{2}(1+t)\right) = \frac{(n+1)_m}{2^m}P_{n-m}^{m,m}(t+\frac{1}{N})$$

$$+\sum_{l=2}^{n-m}\frac{f_{n,l}^{(m)}(t)}{N^l} - \sum_{l=2}^{n-m}\frac{(n+1)_{l+m}}{N^l 2^{l+m}l!}P_{n-l-m}^{l+m,l+m}(t). \tag{3.8.25}$$

§ 3.9. Об асимптотике $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ в случае произвольных α и β

Если хотя бы одно из чисел α или β является дробным, то весовая функция

$$\rho_n(t) = \frac{\Gamma\left[\frac{N-1}{2}(1+t)+\beta+1\right]\Gamma\left[\frac{N-1}{2}(1-t)+\alpha+1\right]}{\Gamma\left[\frac{N-1}{2}(1+t)+1\right]\Gamma\left[\frac{N-1}{2}(1-t)+1\right]}$$

имеет особенности вблизи точек 1 и -1. Это обстоятельство существенно затрудняет исследование асимптотических свойств полиномов Чебышева $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ в случае дробных α и/или β. Приведем без доказательства следующий результат из работы автора [21].

Теорема 3.9.1. *Пусть $a > 0$, $0 \leqslant n \leqslant aN^{1/2}$, $0 < \varepsilon < 1$, $\alpha,\beta \geqslant 1/2$. Тогда имеет место следующая асимптотическая формула*

$$T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = P_n^{\alpha,\beta}(t) + V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

для остаточного члена $V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ которой справедлива оценка

$$|V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)| \leqslant c(\alpha,\beta,a,\varepsilon)\frac{n^{3/2}}{N} \qquad (-1+\varepsilon \leqslant t \leqslant 1-\varepsilon).$$

Замечание 3.9.1. Пользуясь равенством (3.5.8), нетрудно показать, что ограничение $\alpha,\beta \geqslant 1/2$ не является существенным и утверждение теоремы 3.9.1 справедливо для произвольных действительных α и β.

Несколько проще задача об асимптотических свойствах полиномов $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ вблизи точек 1 и -1. Здесь мы рассмотрим эту задачу для $n = O(N^{1/2})$ и произвольных α и $\beta > -1$. Ограничение $\alpha, \beta > -1$ не является существенным – оно легко снимается с помощью равенств (3.5.8) и (1.4.53).

Нам понадобится следующая

Лемма 3.9.1. *Пусть $a > 0$, $\quad 1 \leqslant n \leqslant aN^{1/2}$. Тогда*

$$\frac{(N-1)^n}{(N-1)^{[n]}} = 1 + y_{n,N}, \quad 0 \leqslant y_{n,N} \leqslant c(a)\frac{n^2}{N}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\frac{(N-1)^n}{(N-1)^{[n]}} = 1 + \left(1 - \frac{(N-1)^{[n]}}{(N-1)^n}\right)\frac{(N-1)^n}{(N-1)^{[n]}}. \tag{3.9.1}$$

Если $1 \leqslant n \leqslant aN^{1/2}$, то найдется такая постоянная $s = s(a) > 0$, что

$$1 - \frac{(N-1)^{[n]}}{(N-1)^n} = 1 - \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{j}{N-1}\right)\right)$$

$$< 1 - \exp\left(-s\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{N-1}\right) = 1 - \exp\left(\frac{-sn(n-1)}{2(N-1)}\right)$$

$$= s\frac{n(n-1)}{2(N-1)} - \frac{1}{2!}\left(s\frac{n(n-1)}{2(N-1)}\right)^2 + \dots < c_1(a)\frac{n^2}{N}. \tag{3.9.2}$$

Заметим, что

$$\frac{N^n}{(N-1)^{[n]}} = \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{j+1}{N-1-j}\right)\right)$$

$$< \exp\left(\frac{n(n-+1)}{2(N-n)}\right) \leqslant c_2(a) \quad (n \leqslant aN^{1/2}). \tag{3.9.3}$$

Сопоставляя (3.9.1) – (3.9.3), убеждаемся в справедливости леммы 3.9.1.

Перейдем к рассмотрению асимптотики полиномов $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ вблизи точек -1 и 1. Заметим, что

$$T_{n,N}^{\alpha,\beta}(-t) = (-1)^n T_{n,N}^{\beta,\alpha}(t). \tag{3.9.4}$$

Поэтому можно ограничиться исследованием свойств $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ в окрестности одной из указанных точек (в частности, точки -1).

Теорема 3.9.2. *Пусть* $\alpha,\beta>-1$, $a,q>0$, $1\leqslant n\leqslant N-1$, $|1+t|\leqslant qn^{-2}$. *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)=P_n^{\alpha,\beta}(t)+V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

для остаточного члена $V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ *которой при* $1\leqslant n\leqslant a(N-1)^{1/2}$ *справедлива оценка*

$$|V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)|\leqslant c(\alpha,\beta,a,q)\frac{n^{2+\beta}}{N}.$$

Доказательство. По (3.2.1),

$$T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\beta+1)_k(1-N)_k}(-x)_k, \tag{3.9.5}$$

где $x=(N-1)(1-t)/2$. В силу (1.6.1) имеем:

$$(-x)_k=(-1)^kx^{[k]}=\sum_{j=1}^{k}s(k,j)x^j,\quad (-N+1)_k=(-1)^k(N-1)^{[k]}. \tag{3.9.6}$$

Из (3.9.5) и (3.9.6) находим:

$$T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\beta+1)_k(N-1)^{[k]}}\left[\frac{1+t}{2}(N-1)\right]^k+$$

$$(-1)^n\binom{n+\beta}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\beta+1)_k(N-1)^{[k]}}\sum_{j=1}^{k-1}s(k,j)\left[\frac{1+t}{2}(N-1)\right]^j. \tag{3.9.7}$$

Воспользуемся леммой 3.9.1. Как нетрудно видеть, $y_{0,N}=y_{1,N}=0$. Тогда (3.9.7) дает:

$$T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\beta+1)_k}\left(\frac{1+t}{2}\right)^k$$

$$<(-1)^n\binom{n+\beta}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\beta+1)_k}\left(\frac{1+t}{2}\right)^k y_{k,N}$$

$$+(-1)^n\binom{n+\beta}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k(N-1)^k}{k!(\beta+1)_k(N-1)^{[k]}}$$

$$\times\sum_{j=1}^{k-1}s(k,j)\left(\frac{1+t}{2}\right)^j(N-1)^{j-k}==R_1+R_2+R_3. \tag{3.9.8}$$

Поскольку

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}|s(k,j)|=1$$

в силу (1.6.1), то при $|1+t|\leqslant qn^{-2}$, $2\leqslant k\leqslant n\leqslant a(N-1)^{1/2}$ будем иметь:

$$\left|\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k-1}s(k,j)\left(\frac{1+t}{2}\right)^j(N-1)^{j-k}\right|\leqslant\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{|s(k,j)|q^j}{n^{2j}2^j}(N-1)^{j-k}$$

$$\leqslant \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k-1}|s(k,j)|\left(\frac{q}{2}\right)^j\left(\frac{n^2}{N-1}\right)^{k-j}\frac{1}{n^{2k}} \leqslant \frac{n^2}{(N-1)n^{2k}k!}\sum_{j=1}^{k-1}|s(k,j)|\left(\frac{q}{2}\right)^j a^{k-j-1}$$

$$\leqslant \frac{n^2}{(N-1)n^{2k}k!}\sum_{j=1}^{k-1}|s(k,j)|\left(1+\frac{q}{2a}\right)^j a^{k-1} \leqslant \frac{(a+q/2)^{k-1}}{n^{2k}}\frac{n^2}{N-1}.$$

Отсюда и из (3.9.3) и (3.9.8) следует, что

$$|R_3| \leqslant c_1(a)\frac{n^2}{N-1}\binom{n+\beta}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_k}{(\beta+1)_k n^{2k}}\,(a+q/2)^{k-1}. \tag{3.9.9}$$

Далее,

$$(\alpha+1)_k > (\alpha+1)(k-1)! \quad (\alpha>-1),$$

$$\frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_k}{n^{2k}} = \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{n^2}\frac{(n-1)^{[k-1]}(n+\alpha+\beta+2)_{k-1}}{n^{2(k-1)}}$$

$$< \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{n^2}\frac{(n+\alpha+\beta+2)^{[k-1]}(n+\alpha+\beta+2)_{k-1}}{n^{2(k-1)}}$$

$$= \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{n^2}\prod_{j=0}^{k-2}\frac{1}{n^2}[(n+\alpha+\beta+2)^2-j^2]$$

$$< \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{n^2}\left(\frac{n+\alpha+\beta+2}{n}\right)^{2(k-1)}$$

$$< \left(\frac{n+\alpha+\beta+2}{n}\right)^{2k} < \exp\left(\frac{2k(\alpha+\beta+2)}{n}\right), \tag{3.9.10}$$

$$\binom{n+\alpha}{n} \leqslant c_2(\alpha)n^\alpha. \tag{3.9.11}$$

Сопоставляя (3.9.9) – (3.9.11), находим:

$$|R_3| \leqslant c_3(\alpha,\beta,q,a)\frac{n^{\alpha+2}}{N}, \tag{3.9.12}$$

где $|1+t| \leqslant qn^{-2}, \quad 2 \leqslant n \leqslant a(N-1)^{1/2}$.

Аналогично, из (3.9.8), (3.9.10), (3.9.11) и леммы 3.9.1 получаем:

$$|R_2| \leqslant c_4(\alpha,\beta,q,a)\frac{n^{\alpha+2}}{N}, \tag{3.9.13}$$

где $|1+t| \leqslant qn^{-2}, \quad 2 \leqslant n \leqslant a(N-1)^{1/2}$.

С другой стороны, в силу (3.9.8), (1.4.5) и (1.4.7)

$$R_1 = P_n^{\alpha,\beta}(t). \tag{3.9.14}$$

Утверждение теоремы 3.9.2 вытекает из (3.9.8) и (3.9.12) – (3.9.14).

§ 3.10. Оценки для полиномов Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$

В этом пункте будут получены оценка сверху для полиномов $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ при $n=O(N^{1/2})$, $-1\leqslant t\leqslant 1$, и некоторые оценки снизу для $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ при $\sqrt{N}\leqslant n\leqslant N-1$. Они показывают, что при $n^2/N\to\infty$ нормированные модифицированные полиномы Чебышева $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ растут на $[-1,1]$ со скоростью, не уступающей $\exp(cn^2/N)$. Это означает, что ограничение $n=O(N^{1/2})$ является своего рода «водоразделом» для асимптотического поведения полиномов $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ на отрезке $[-1,1]$.

Теорема 3.10.1. *Пусть α, β – произвольные целые числа, $-1\leqslant t\leqslant 1$, $1\leqslant n\leqslant aN^{1/2}$ $(a>0)$. Тогда найдется постоянная $c=c(\alpha,\beta,a)$, для которой*

$$\left|T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right| = \{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}\left|\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right|$$

$$\leqslant \frac{c}{n^{1/2}}\left[(1+t)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-\beta-1/2}\left[(1-t)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2}. \tag{3.10.1}$$

Доказательство. Учитывая равенство (3.9.4), мы можем ограничиться случаем $0\leqslant t\leqslant 1$. Из (1.4.3), (1.4.11) – (1.4.14) и (3.7.7) для полиномов Якоби $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ при $0\leqslant t\leqslant 1$ имеем:

$$\left|\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\right|\leqslant c\left[(1-t)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2}. \tag{3.10.2}$$

С другой стороны, из (3.3.9) при $1\leqslant n\leqslant aN^{1/2}$ имеем:

$$c_1(\alpha,\beta,a)n^{-1}\leqslant h_{n,N}^{\alpha,\beta}\leqslant c_2(\alpha,\beta,a)n^{-1}. \tag{3.10.3}$$

Далее, из (3.10.2) и теоремы 3.7.1 выводим оценку

$$\left|\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right|\leqslant c(\alpha,\beta,a)\left[(1-t)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2}. \tag{3.10.4}$$

Сопоставляя (3.10.3) с (3.10.4), приходим к оценке (3.10.1) при $0\leqslant t\leqslant 1$.

Случай $-1\leqslant t\leqslant 0$ равенством (3.9.4) приводится к рассмотренному. Теорема 3.10.1 доказана.

Теорема 3.10.2. *Пусть α, β – произвольные вещественные числа, $q>0$, $1\leqslant n\leqslant aN^{1/2}$ $(a>0)$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left|T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right|\leqslant c(\alpha,\beta,a,q)n^{\alpha}\quad (|1-t|\leqslant qn^{-2}),$$

$$\left|T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right|\leqslant c(\alpha,\beta,a,q)n^{\beta}\quad (|1+t|\leqslant qn^{-2}).$$

Доказательство этой теоремы при $\alpha,\beta>-1$ непосредственно вытекает из теоремы 3.9.2, леммы 1.4.7 и соотношения симметрии (3.9.4). Случай же α и/или β меньше -1 сводится к случаю $\alpha,\beta>-1$ с помощью равенства 3.5.8.

Теорема 3.10.3. *Пусть j_1,j_2 – фиксированные целые числа, α,β – неотрицательные целые числа, $1\leqslant n\leqslant aN^{1/2}$ $(a>0)$, $-1\leqslant t\leqslant 1$. Тогда при $j_2\leqslant N-1$ имеет место следующая оценка:*

$$\left|T_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{N-1}{2}(1+t)-j_1,N-j_2\right]\right|\leqslant cn^{-1/2}\left[(1-t)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2}\left[(1+t)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-\beta-1/2},$$

где $c = c(\alpha, \beta, j_1, j_2)$.

В самом деле, мы имеем:

$$\frac{N-1}{2}(1+t) - j_1 = \frac{N-j_2-1}{2}(1+y), \qquad (3.10.5)$$

где

$$y = t + \frac{j_2(1+t) - 2j_1}{N-j_2-1}$$

Поскольку j_2 фиксировано, то из условия $n \leqslant aN^{1/2}$ следует, что $n \leqslant 2a(N-j_2)^{1/2}$ для достаточно больших N. Поэтому, если $-1 \leqslant y \leqslant 1$, то из теоремы 3.10.1 и равенства (3.10.5) получаем:

$$\left|T_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{N-1}{2}(1+t) - j_1, N-j_2\right]\right| = \left|T_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{N-j_2-1}{2}(1+y), N-j_2\right]\right|$$

$$\leqslant cn^{-1/2}\left((1-y)^{1/2} + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha-1/2}\left((1+y)^{1/2} + \frac{1}{n}\right)^{-\beta-1/2}$$

$$\leqslant cn^{-1/2}\left((1-t)^{1/2} + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha-1/2}\left((1+t)^{1/2} + \frac{1}{n}\right)^{-\beta-1/2}, \qquad (3.10.6)$$

где $c_k = c_k(\alpha, \beta, a, j_1, j_2)$. Эта оценка для соответствующих значений t совпадает с утверждением теоремы 3.10.3.

Рассмотрим случаи $y \leqslant -1$ или $y \geqslant 1$. Если $y \leqslant -1$, то из (3.10.5) следует, что $|1+y| \leqslant qn^{-2}$ ($q = q(j_1, j_2, a)$). Поэтому из теоремы 3.10.2 выводим оценку:

$$\left|T_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{N-j_2-1}{2}(1+y), N-j_2\right]\right| \leqslant cn^{\beta}, \quad y < -1, \qquad (3.10.7)$$

где $c = c(\alpha, \beta, a, j_1, j_2)$. Поскольку при $y \leqslant -1$ из (3.10.5) следует также, что $|1+t| \leqslant qn^{-2}$, то утверждение теоремы 3.10.3 для таких значений t вытекает из (3.10.7).

Аналогично доказывается утверждение теоремы 3.10.3 и в случае $y \geqslant 1$.

Перейдем к оценкам снизу для $T_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ в случае $\sqrt{N} \leqslant n \leqslant p(N)$, где $p(N) = o(N)$. Рассмотрим выражение

$$a_k(x) = \frac{n^{[k]}x^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_k}{(\beta+1)_k(N-1)^{[k]}k!}(-1)^k$$

$$= \frac{n!\Gamma(k-x)\Gamma(n+k+1+\alpha+\beta)\Gamma(N-k)\Gamma(\beta+1)}{(n-k)!\Gamma(-x)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(N)\Gamma(k+\beta+1)k!}.$$

Пусть $0 < x < 1$. По формуле Стирлинга, при $1 \leqslant k \leqslant n$ имеем:

$$|a_k(x)| \geqslant \frac{(n+k)!(N-k-1)!\Gamma(k-x)}{k!^2(n-k)!(N-1)!}\frac{c_1(\alpha,\beta,x)}{k^{\beta}}$$

$$\geqslant \frac{(n+k)^{n+k+1/2}e^{-n-k}(N-k-1)^{N-k-1/2}e^{k-N+1}}{k^{k+1/2}e^{-k}(n-k)^{n-k+1/2}e^{-n+k}(N-1)^{N-1/2}e^{1-N}}\frac{c_2(\alpha,\beta,x)}{k^{\beta+x+1}}$$

$$\geqslant \frac{c_3(\alpha,\beta,x)}{k^{\beta+x+3/2}}\left(\frac{n+k}{n-k}\right)^n\left(\frac{n^2-k^2}{k(N-k)}\right)^k\left(\frac{N-k}{N}\right)^N\left(\frac{N(n+k)}{(n-k)(N-k)}\right)^{1/2}. \qquad (3.10.8)$$

Положим $k_0 = [n^2/N]$, где $[\gamma]$ – целая часть числа γ. Если $k_0 \geqslant 1$, то

$$\frac{n^2-k_0^2}{k_0(N-k_0)} = 1+\frac{n^2-Nk_0}{k_0(N-k_0)} \geqslant 1, \quad \left(\frac{n^2-k_0^2}{k_0(N-k_0)}\right)^{k_0} \geqslant 1. \tag{3.10.9}$$

Пусть $p(N) = o(N)$, $N = 2,3,\ldots,\quad 0<\sigma<1/4$. Тогда найдется такой номер $N_0 = N_0(p,\sigma)$, что если $N > N_0$, то $p(N_0) \leqslant \sigma N$. Отсюда для $k_0 < n \leqslant p(N),\quad N > N_0$ имеем:

$$\frac{2k_0}{n-k_0} \leqslant \frac{2n^2}{N(n-n^2/N)} = \frac{2n}{N-n} < \frac{2\sigma}{1-\sigma} < 1, \quad \frac{k_0}{N} \leqslant \frac{n^2}{N^2} < \sigma^2 < \frac{1}{16}.$$

Разлагая функцию $\ln(1+z)$ в ряд Тейлора, получаем:

$$\left(\frac{n+k_0}{n-k_0}\right)^n\left(\frac{N-k_0}{N}\right)^N = \exp\left[n\ln\left(1+\frac{2k_0}{n-k_0}\right)+N\ln\left(1-\frac{k_0}{N}\right)\right]$$

$$> \exp\left[(n-k_0)\left(\frac{2k_0}{n-k_0}-\frac{2k_0^2}{(n-k_0)^2}\right)+N\left(-\frac{k_0}{N}-\frac{k_0^2}{2N}-\cdots\right)\right]$$

$$= \exp\left(k_0-\frac{2k_0^2}{n-k_0}-\frac{k_0^2}{2N}-\frac{k_0^3}{3N^2}-\cdots\right)$$

$$= \exp\left(k_0\left(1-\frac{2\sigma}{1-\sigma}-\frac{\sigma^2}{2(1-\sigma^2)}\right)\right) > \exp\left(k_0\left(1-\frac{5\sigma}{2(1-\sigma)}\right)\right). \tag{3.10.10}$$

Из оценок (3.10.8) – (3.10.10) находим:

$$|a_{k_0}(x)| \geqslant \exp\left(k_0\frac{1-4\sigma}{1-\sigma}\right)\frac{c_4(\alpha,\beta,\sigma,x)}{k_0^{\beta+3/2+x}}, \tag{3.10.11}$$

где $0<x<1$, $1\leqslant k_0=[n^2/N]<n\leqslant p(N)$, $p(N)=o(N)$, $N>N_0$, $0<\sigma<1/4$. Из (3.2.1) и (3.10.11) имеем:

$$\binom{n+\beta}{n}^{-1}|T_n^{\alpha,\beta}(x,N)| \geqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k(x)|-1 > \exp\left(\frac{n^2(1-4\sigma)}{n(1-\sigma)}\right)\frac{c_5(\alpha,\beta,\sigma,x)}{[n^2/N]^{\beta+x+3/2}}-1, \tag{3.10.12}$$

где $0<x<1$, $1\leqslant [n^2/N]<n\leqslant p(N)$, $p(N)=o(N)$, $0<x<1$, $0<\sigma<1/4$, $\alpha,\beta>-1$.

Займемся теперь оценкой снизу модуля ортонормированного полинома $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$. Для простоты выкладок, ограничимся случаем $\alpha=\beta=0$. Начнем с оценки снизу величины $\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\}^{-1/2}$. В силу (3.3.9), имеем:

$$\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\}^{-1} = \frac{(N-n)\cdots(N-1)}{N(N+1)\cdots(N+n-1)}\frac{N(2n+1)}{2(N+n)}$$

$$= \frac{N(2n+1)}{2(N+n)}\exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1-\frac{n}{N+k}\right)\right\} = \frac{N(2n+1)}{2(N+n)}\exp\left\{-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{n^j}{j(N+k)^j}\right\}$$

$$= \frac{N(2n+1)}{2(N+n)}\exp\left\{-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{N+k}-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{n^j}{j}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(N+k)^j}\right\}. \tag{3.10.13}$$

Если $j \geqslant 2$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(N+k)^j} < \int\limits_0^{n-1} \frac{dx}{(N+x)^j} + \frac{1}{N^j} < \frac{1}{N^j} + \frac{1}{j-1}\left[\frac{1}{N^{j-1}} - \frac{1}{(N+n)^{j-1}}\right]. \qquad (3.10.14)$$

Из (3.10.13) и (3.10.14) для $n \leqslant N/2$ находим:

$$\left\{h_{n,N}^{0,0}\right\}^{-1} >$$

$$\frac{N(2n+1)}{2(N+n)} \exp\left\{-\frac{n^2}{N} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^j}{j(j-1)N^{j-1}} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^j}{jN^j} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^j}{j(j-1)(N+n))^{j-1}}\right\}$$

$$\geqslant \frac{N(2n+1)}{2(N+n)} \exp\left\{-\frac{n^2}{N} - \frac{n^2}{N}\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{n}{N}\right)^{j-1} \frac{1}{j(j+1)} - 1 + \frac{n^2}{2(N+n)}\right\}$$

$$\geqslant \frac{N(2n+1)}{2e(N+n)} \exp\left\{-\frac{2n^2}{N} + \frac{n^2}{2(N+n)}\right\}. \qquad (3.10.15)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1, \quad \sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^j}{jN^j} < 1 \quad \left(n < \frac{N}{2}\right).$$

Сопоставляя (3.10.12) и (3.10.15) с (3.7.6), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.10.4. *Пусть $p = p(N)$ – целочисленная функция, причем*

$$\sqrt{N} \leqslant p(N) \leqslant N-1, \quad p(N) = o(N), \quad N = 2, 3, \ldots.$$

Тогда существует постоянная $c = c(p)$, для которой

$$\max_{-1 \leqslant t \leqslant -1+\frac{2}{N-1}} |\tau_{n,N}^{0,0}(t)| \geqslant cn^{1/2} \left(\frac{N}{n^2}\right)^2 \exp\left\{\frac{n^2}{4(N+n)} - \frac{n^2}{5N}\right\},$$

$(\sqrt{N} \leqslant n \leqslant p(N),\ N = 2, 3, \ldots)$.

Сопоставляя теоремы 3.7.1 и 3.10.2, можно заметить, что ограничение $n = O(N^{1/2})$ является своего рода «водоразделом» для асимптотического поведения полиномов Чебышева $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ в том смысле, что при $n = O(N^{1/2})$ и целых $\alpha, \beta \geqslant 0$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)| n^{-\alpha-1/2} \asymp 1,$$

а если $n/N^{1/2} \to \infty$, то это не так.

Комментарии к главе 3

Полиномы $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ в иных обозначениях впервые были введены в работе П.Л. Чебышева [12] для произвольных α и β с помощью формулы (3.1.2). Случай $\alpha = \beta = 0$

был рассмотрен им еще раньше в [22]. Связь полиномов $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ с гипергеометрической функцией, выраженная формулой (3.2.1), была доказана в работе Вебер и Эрдейи [20]. Результаты раздела 3.3 получены Чебышевым П.Л. [12]. Метод доказательства рекуррентных соотношений для полиномов $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$, установленных в разделе 3.4 мы мы заимствовали из [23]. Результаты, содержащиеся в разделах 3.7 – 3.10 получены в работах [21], [24] – [34].

Глава 4. Полиномы Мейкснера

§ 4.1. Определение и нормировка

Для целого $n \geqslant 0$ и произвольного комплексного α положим

$$M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x,q) = \frac{k_n}{\rho(x)}\Delta^n\left\{\rho(x)x^{[n]}\right\}, \tag{4.1.1}$$

где k_n – фиксированное число, $q \neq 0$,

$$\rho = \rho(x) = \rho(x,\alpha,q) = q^x\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}. \tag{4.1.2}$$

Из результатов §2.5 следует, что $M_n^\alpha(x)$ представляет собой полином степени n для каждого $n \geqslant 0$. Эти полиномы были введены в работе [35] и называются полиномами Мейкснера. Константу k_n в (4.1.1) будем выбирать из условия

$$M_n^\alpha(0,q) = \binom{n+\alpha}{n}. \tag{4.1.3}$$

Из (4.1.1) – (4.1.3) следует, что $k_n = q^{-n}/n!$. Поэтому

$$M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x,q) = \frac{q^{-n}}{n!\rho(x)}\Delta^n\left\{\rho(x)x^{[n]}\right\}$$

$$= \frac{\Gamma(x+1)q^{-n-x}}{n!\Gamma(x+\alpha+1)}\Delta^n\left\{\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x-n+1)}q^x\right\}. \tag{4.1.4}$$

§ 4.2. Связь с гипергеометрической функцией

Сравнивая (2.5.18) с (4.1.4), получаем равенство

$$M_n^\alpha(x,q) = \binom{n+\alpha}{n}{}_2F_1(-n,-x;\alpha+1;1-\frac{1}{q})$$

$$= \binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x)_k}{(\alpha+1)_k k!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k. \tag{4.2.1}$$

Из (4.2.1) следует, что коэффициент при старшем члене x^n в $M_n^\alpha(x)$ равен

$$k_n^\alpha = \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^n. \tag{4.2.2}$$

Заметим, что равенство (4.2.1) определяет $M_n^\alpha(x,q)$ для произвольного комплексного $q \neq 0$.

§ 4.3. Ортогональность

Пусть $0 < q < 1$, $\alpha > -1$. Докажем, что при выполнении этих условий система полиномов Мейкснера $\{M_n^\alpha(x,q)\}_{n=0}^\infty$ ортогональна на $\Omega = \{0,1,\ldots\}$ с весом $\rho(x)$, определяемым равенством (4.1.2). Для этого достаточно показать, что

$$A_k = \sum_{x\in\Omega}x^kM_n^\alpha(x)\rho(x) = 0, \quad k = 0,\ldots,n-1. \tag{4.3.1}$$

Положим

$$\phi(x) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x-n+1)}. \tag{4.3.2}$$

Тогда выражения

$$\Delta^{n-k}\phi(x+k-1) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{n-k-l}\binom{n-k}{l}q^{x+k-1+l}\frac{\Gamma(x+k+l+\alpha)}{\Gamma(x+k+n+l-n)}$$

при $0 \leqslant k < n$ обращаются в нуль в точках $x = 0$ и $x = \infty$. Из (4.3.1) и (4.1.1) с помощью повторного применения преобразования Абеля, получаем:

$$A_k = k_n \sum_{x\in\Omega} x^k \Delta^n \phi(x) = k_n \left[x^k \Delta^{n-1}\phi(x)|_{x=0}^{\infty} - \sum_{x\in\Omega} \Delta x^k \Delta^{n-1}\phi(x+1)\right]$$

$$= -k_n \sum_{x\in\Omega} \Delta x^k \Delta^{n-1}\phi(x+1) = \ldots = (-1)^n k_n \sum_{x\in\Omega}\phi(x+n)\Delta^n x^k. \tag{4.3.3}$$

С другой стороны, поскольку $\Delta^n x^k = 0$ при $0 \leqslant k < n$, то из (4.3.3) следуют требуемые равенства $A_k = 0$ $(0 \leqslant k < n)$.

Это же рассуждение приводит к следующему равенству:

$$h_n^{\alpha,q} = (1-q)^{\alpha+1}\sum_{x=0}^{\infty}\rho(x)\left\{M_n^\alpha(x)\right\}^2 = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n}\Gamma(\alpha+1). \tag{4.3.4}$$

Действительно, в силу (4.1.4), (4.2.2) и (4.3.3) имеем:

$$\sum_{x=0}^{\infty}\rho(x)\left\{M_n^\alpha(x)\right\}^2 = k_n^\alpha \sum_{x=0}^{\infty}\rho(x)M_n^\alpha(x)x^n = \frac{q^{-n}}{n!}k_n^\alpha\sum_{x\in\Omega}x^n\Delta^n\phi(x) =$$

$$(-1)^n\frac{q^{-n}}{n!}k_n^\alpha\sum_{x\in\Omega}\phi(x+n)\Delta^n x^n = (-1)^n q^{-n}k_n^\alpha\sum_{x\in\Omega}q^{n+x}\frac{\Gamma(x+n+\alpha+1)}{x!}$$

$$= \left(\frac{1}{q}-1\right)^n\frac{1}{n!}\sum_{x=0}^{\infty}q^x\frac{\Gamma(x+n+\alpha+1)}{x!} = \left(\frac{1}{q}-1\right)^n\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+n+\alpha}{x}q^x$$

$$= \left(\frac{1}{q}-1\right)^n\binom{n+\alpha}{n}\Gamma(\alpha+1)(1-q)^{-(n+\alpha+1)} = \binom{n+\alpha}{n}q^{-n}(1-q)^{-\alpha-1}\Gamma(\alpha+1).$$

Пусть

$$\eta = \eta(x) = \eta(x;\alpha,q) = (1-q)^{\alpha+1}\rho(x;\alpha,q) = (1-q)^{\alpha+1}q^x\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+\alpha)}. \tag{4.3.5}$$

Из (4.3.4) следует, что полиномы

$$m_n^\alpha(x) = m_n^\alpha(x,q) = \left\{h_n^{\alpha,q}\right\}^{-1/2} M_n^\alpha(x,q) \tag{4.3.6}$$

образуют ортонормированную в $l_2(\Omega,\eta)$ последовательность.

§ 4.4. Производящая функция

Для достаточно малого по модулю z определим функцию

$$\phi(z,x)=\phi(z,x,\alpha,q)=\sum_{n=0}^{\infty}M_n^\alpha(x)z^n. \tag{4.4.1}$$

Сопоставляя (4.2.1) с (4.4.1), имеем:

$$\phi(z,x)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x)_k}{(\alpha+1)_kk!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-1/q)^k(-x)_k}{(\alpha+1)_kk!}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n}(-n)_kz^n. \tag{4.4.2}$$

Так как

$$\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n}(-n)_kz^n=(-z)^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n}z^n\right)^{(k)}$$

$$=(-z)^k\left[(1-z)^{-\alpha-1}\right]^{(k)}=(-z)^k(1-z)^{-\alpha-1-k}(\alpha+1)_k,$$

то из (4.4.2) находим:

$$\phi(z,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z/q-z}{z-1}\right)^k\frac{x^{[k]}}{k!}\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}$$

$$=\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}\left(1+\frac{z/q-z}{z-1}\right)^x=\left(\frac{1-z/q}{1-z}\right)^x\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}.$$

Итак, функция

$$\phi(z,x)=\left(\frac{1-z/q}{1-z}\right)^x\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} \tag{4.4.3}$$

является производящей для полиномов Мейкснера $M_n^\alpha(x)$. Отметим, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(z^2-(q+1)z+q)\phi_z'(z,x)+[(\alpha+1)z-x(q-1)-q(\alpha+1)]\phi(z,x)=0. \tag{4.4.4}$$

§ 4.5. Рекуррентные формулы. Разностное уравнение. Формула Кристоффеля-Дарбу

Из (4.4.1) и (4.4.4) можно вывести рекуррентную формулу для полиномов Мейкснера $M_n^\alpha(x)=M_n^\alpha(x,q)$:

$$(n+1)qM_{n+1}^\alpha(x)=[n(q+1)+q(\alpha+1)+(q-1)x]M_n^\alpha(x)-(n+\alpha)M_{n-1}^\alpha(x), \tag{4.5.1}$$

где $M_{-1}^\alpha(x)=0$, $M_0^\alpha(x)=1$.

Из (4.2.1) следуют равенства

$$\Delta M_n^\alpha(x)=M_n^\alpha(x+1)-M_n^\alpha(x)=\frac{q-1}{q}M_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{4.5.2}$$

$$M_{n+1}^\alpha(x)-M_n^\alpha(x)=M_{n+1}^{\alpha-1}(x), \tag{4.5.3}$$

$$M_n^{-l}(x) = \frac{(n-l)!}{n!}\left(\frac{1}{q}-1\right)^l (-x)_l M_{n-l}^l(x-l) \quad (l - \text{целое}, 1 \leqslant l \leqslant n). \tag{4.5.4}$$

Если ограничиться только целыми $x \geqslant 0$, то из (4.2.1) получаем следующее соотношение двойственности:

$$\varphi_n(x) = \varphi_x(n), \tag{4.5.5}$$

где

$$\varphi_n(x) = \binom{n+\alpha}{n}^{-1} M_n^\alpha(x). \tag{4.5.6}$$

Из (4.5.1) и (4.5.6) имеем равенство

$$q(n+\alpha+1)\varphi_{n+1}(x) = [n(q+1)+(q-1)x+q(\alpha+1)]\varphi_n(x) - n\varphi_{n-1}(x), \tag{4.5.7}$$

а из (4.5.5) и (4.5.7), в свою очередь, имеем:

$$q(n+\alpha+1)\varphi_x(n+1) = [n(q+1)+(q-1)x+q(\alpha+1)]\varphi_x(n) - n\varphi_x(n-1), \tag{4.5.8}$$

Переставляя в (4.5.8) местами n и x и учитывая (4.5.6), получаем следующее разностное уравнение второго порядка для полиномов Мейкснера:

$$q(x+\alpha+1)M_n^\alpha(x+1) = [x(q+1)+(q-1)n+q(\alpha+1)]M_n^\alpha(x) - xM_n^\alpha(x-1). \tag{4.5.9}$$

Это уравнение может быть переписано также в следующем виде:

$$x\Delta^2 M_n^\alpha(x-1) + [q(\alpha+1) - x(1-q)]\Delta M_n^\alpha(x) + n(1-q)M_n^\alpha(x) = 0. \tag{4.5.10}$$

Из (4.5.2) и (4.5.10) находим:

$$x(q-1)M_{n-2}^{\alpha+2}(x-1) + [q(\alpha+1) - x(1-q)]M_{n-1}^{\alpha+1}(x) - nqM_n^\alpha(x) = 0. \tag{4.5.11}$$

Положим

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,q}(x,y) = \sum_{k=0}^n q^k \frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)} M_k^\alpha(x) M_k^\alpha(y). \tag{4.5.12}$$

Тогда формула Кристоффеля-Дарбу для полиномов Мейкснера принимает следующий вид:

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,q}(x,y) = \frac{(n+1)!q^{n+1}}{\Gamma(n+\alpha+1)(q-1)} \frac{M_{n+1}^\alpha(x)M_n^\alpha(y) - M_n^\alpha(x)M_{n+1}^\alpha(y)}{x-y}. \tag{4.5.13}$$

Чтобы убедиться в справедливости (4.5.13), умножим обе части равенства (4.5.1) на $M_n^\alpha(y)/h_n^{\alpha,q}$ и из полученного равенства вычтем аналогичное равенство, полученное перестановкой в нем x и y местами. В силу (4.3.4),

$$\frac{(n+1)!q^{n+1}}{\Gamma(n+\alpha+1)(q-1)} \frac{M_{n+1}^\alpha(x)M_n^\alpha(y) - M_n^\alpha(x)M_{n+1}^\alpha(y)}{x-y} =$$

$$\frac{n!q^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} M_n^\alpha(x)M_n^\alpha(y) + \frac{n!q^n}{\Gamma(n+\alpha)(q-1)} \frac{M_n^\alpha(x)M_{n-1}^\alpha(y) - M_{n-1}^\alpha(x)M_n^\alpha(y)}{x-y}. \tag{4.5.14}$$

Повторно применяя равенство (4.5.14) для $n, n-1, \ldots, 1$, приходим к равенству (4.5.13).

Полагая в (4.5.13) $y=0$, будем иметь:

$$x\mathcal{K}_n^{\alpha,q}(x,0)=\frac{q^{n+1}}{(1-q)\Gamma(\alpha+1)}\left[(n+\alpha+1)M_n^\alpha(x)-(n+1)M_{n+1}^\alpha(x)\right]. \qquad (4.5.15)$$

Из (4.2.1) имеем:

$$(n+\alpha+1)M_n^\alpha(x)-(n+1)M_{n+1}^\alpha(x)=$$

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)n!}\left[\sum_{k=1}^n\frac{x^{[k]}(n^{[k]}-(n+1)^{[k]})}{k!(\alpha+1)_k}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k-\frac{x^{[n+1]}}{(\alpha+1)_{n+1}}\left(1-\frac{1}{q}\right)^{n+1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{q}-1\right)x\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+2)n!}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(x-1)^{[k-1]}n^{[k-1]}}{(k-1)!(\alpha+2)_{k-1}}\left(1-\frac{1}{q}\right)^{k-1}=$$

$$\left(\frac{1}{q}-1\right)x\binom{n+\alpha+1}{n}\sum_{k=0}^n\frac{(x-1)^{[k]}n^{[k]}}{k!(\alpha+2)_k}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k=\left(\frac{1}{q}-1\right)xM_n^{\alpha+1}(x-1).$$

Отсюда

$$(n+\alpha+1)M_n^\alpha(x)-(n+1)M_{n+1}^\alpha(x)=\frac{1-q}{q}xM_n^{\alpha+1}(x-1). \qquad (4.5.16)$$

Из (4.5.15) и (4.5.16) находим:

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,q}(x,0)=\frac{q^n}{\Gamma(\alpha+1)}M_n^{\alpha+1}(x-1). \qquad (4.5.17)$$

Из (4.5.12) и (4.5.17) имеем:

$$\sum_{k=0}^n q^kM_k^\alpha(x)=q^nM_n^{\alpha+1}(x-1). \qquad (4.5.18)$$

Отсюда, в свою очередь, получаем:

$$M_n^\alpha(x)=M_n^{\alpha+1}(x-1)-\frac{1}{q}M_{n-1}^{\alpha+1}(x-1). \qquad (4.5.19)$$

Далее, из (4.5.15) и (4.5.17) имеем:

$$M_{n-1}^{\alpha+1}(x)=\frac{q}{(x+1)(1-q)}\left[(n+\alpha)M_{n-1}^\alpha(x+1)-nM_n^\alpha(x+1)\right]. \qquad (4.5.20)$$

Из (4.5.3) и (4.5.16) можно вывести также равенство

$$M_{n+1}^{\alpha-1}(x)=\frac{\alpha}{n+1}M_n^\alpha(x)-\frac{(1-q)x}{q(n+1)}M_n^{\alpha+1}(x-1). \qquad (4.5.21)$$

а из (4.3.4), (4.5.5) и ортогональности полиномов Мейкснера $M_n^\alpha(x)$ с весом $\rho(x)$ – равенство

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{q^nn!}{\Gamma(n+\alpha+1)}M_n^\alpha(j)M_n^\alpha(i)=\frac{j!q^{-j}}{\Gamma(j+\alpha+1)}(1-q)^{-\alpha-1}\delta_{ij}. \qquad (4.5.22)$$

§ 4.6. Базисность системы функций Мейкснера в пространстве l_2

Пользуясь обозначениями (4.3.5) и (4.3.6), определим функции Мейкснера $\mu_n^\alpha(x)$:

$$\mu_n^\alpha(x) = \mu_n^\alpha(x,q) = (\eta(x,\alpha,q))^{1/2} m_n^\alpha(x,q). \tag{4.6.1}$$

Покажем, что при $\alpha > -1$, $0 < q < 1$ система $\{\mu_n^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$ является базисом пространства l_2. Для этого достаточно показать, что система функций

$$f_n(x) = [\eta(x,\alpha,q)]^{1/2} x^{[n]} \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{4.6.2}$$

полна в l_2. Предположим, что это не так. Тогда в силу теоремы Хана – Банаха и теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве найдется такая функция $g \in l_2$, что

$$\sum_{x=0}^{\infty} [g(x)]^2 > 0, \tag{4.6.3}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} f_n(x) g(x) = \sum_{x=n}^{\infty} f_n(x) g(x) = 0. \tag{4.6.4}$$

С другой стороны, рассмотрим Z – преобразование

$$Z[(\eta(x,\alpha,q))^{1/2} g(x)] = \sum_{x=0}^{\infty} [\eta(x,\alpha,q)]^{1/2} g(x) z^x = G(z). \tag{4.6.5}$$

Имеем:

$$G^{(n)}(z) = \sum_{x=n}^{\infty} [\eta(x,\alpha,q)]^{1/2} g(x) x^{[n]} z^{x-n} = \sum_{x=n}^{\infty} f_n(x) g(x) z^{x-n} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{4.6.6}$$

Поскольку

$$\eta(x) = \eta(x,\alpha,q) = ((1-q)^{\alpha+1} q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}$$

и $0 < q < 1$, $\alpha > -1$, то радиус сходимости ряда (4.6.5) больше единицы. Поэтому из (4.6.4) и (4.6.6) следует, что $G^{(n)}(1) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, так что функция $G(z)$ тождественна нулю. Поскольку $\eta(x) > 0$, то из (4.6.5) и неравенства $G(z) \equiv 0$ имеем: $g(x) = 0 \quad (x = 0, 1, \ldots)$. Это противоречит (4.6.3), значит, ортонормированная система (4.6.1) является базисом пространства l_2.

§ 4.7. Сверточное свойство

Здесь мы ограничимся случаем $\mu_n(x) = \mu_n^0(x,q)$ и покажем, что дискретная свертка двух функций Мейкснера $\mu_n(x)$ и $\mu_m(x)$ обладает свойством линеаризации:

$$\mu_n * \mu_m = \mu_n * \mu_m(s) = \frac{1}{\sqrt{1-q}} \left[\mu_{n+m}(s) - q^{1/2} \mu_{n+m+1}(s) \right]. \tag{4.7.1}$$

В самом деле, в силу (4.2.1), (4.3.6) и (4.6.1),

$$\mu_n(x) = q^{\frac{n+x}{2}} \sqrt{1-q} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{x}{k} \left(1 - q^{-1}\right)^k. \tag{4.7.2}$$

Выполним Z – преобразование (см. §1.7):

$$Z[\mu_n] = Z[\mu_n](z) = \sqrt{q^n(1-q)}\frac{(1-q^{-1/2}z)^n}{(1-q^{1/2}z)^{n+1}}. \qquad (4.7.3)$$

Так как $Z[\mu_n * \mu_m] = Z[\mu_n]Z[\mu_m]$, то

$$Z[\mu_n * \mu_m] = \sqrt{q^{n+m}}(1-q)\frac{(1-q^{-1/2}z)^{n+m}}{(1-q^{1/2}z)^{n+m+2}}. \qquad (4.7.4)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-q}}\left[\mu_{n+m}(x) - q^{1/2}\mu_{n+m+1}(x)\right]. \qquad (4.7.5)$$

Из (4.7.3) и (4.7.5) имеем:

$$Z[f] = \sqrt{q^{n+m}}(1-q)\frac{(1-q^{-1/2}z)^{n+m}}{(1-q^{1/2}z)^{n+m+2}}. \qquad (4.7.6)$$

Справедливость равенства (4.7.1) следует из (4.7.4) – (4.7.6).

§ 4.8. Полиномы $M_{n,N}^\alpha(x) = M_n^\alpha\left(Nx, e^{-\delta}\right)$

Пусть $N > 0$, $\delta = 1/N$, $q = e^{-\delta}$, $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$. Введем полиномы

$$M_{n,N}^\alpha(x) = M_n^\alpha(Nx, q), \qquad (4.8.1)$$

$$m_{n,N}^\alpha(x) = m_n^\alpha(Nx, q) = \{h_n^{\alpha,q}\}^{-1/2} M_{n,N}^\alpha(x). \qquad (4.8.2)$$

Из (4.3.1), (4.8.1) и (4.8.2) следует, что система $\left\{M_{n,N}^\alpha(x)\right\}_{n=0}^\infty$ ортогональна, а система $\left\{m_{n,N}^\alpha(x)\right\}_{n=0}^\infty$ ортонормирована на Ω_δ с весом

$$\eta_N(x) = \eta_N(x,\alpha) = \eta_N(x,\alpha,e^{-\delta}) = \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}, \qquad (4.8.3)$$

точнее, в силу (4.3.1) – (4.3.6),

$$\sum_{x\in\Omega_\delta} \eta_N(x) M_{n,N}^\alpha(x) M_{k,N}^\alpha(x) = h_n^{\alpha,q}\delta_{nk}, \qquad (4.8.4)$$

$$\sum_{x\in\Omega_\delta} \eta_N(x) m_{n,N}^\alpha(x) m_{k,N}^\alpha(x) = \delta_{nk}, \qquad (4.8.5)$$

Далее, из (4.1.4) и (4.8.1) имеем:

$$M_{n,N}^\alpha(x) = \frac{\Gamma(Nx+1)e^{n\delta+x}}{n!\Gamma(Nx+\alpha+1)}\Delta_\delta^n\left\{\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)e^{-x}}{\Gamma(Nx-n+1)}\right\}. \qquad (4.8.6)$$

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос о поведении полинома $M_{n,N}^\alpha(x)$ при $N \to \infty$, $x \in (0,\infty)$. Сравнивая (1.5.1) с (4.8.6), нетрудно убедиться в том, что при фиксированном n имеется следующая связь полиномов $M_{n,N}^\alpha(x)$ с полиномами Лагерра:

$$\lim_{N\to\infty} M_{n,N}^\alpha(x) = L_n^\alpha(x). \qquad (4.8.7)$$

Аналогичными рассуждениями выводится равенство:

$$\lim_{N\to\infty} m_{n,N}^{\alpha}(x) = \hat{L}_n^{\alpha}(x). \tag{4.8.8}$$

где (см. (1.5.3))

$$\hat{L}_n^{\alpha}(x) = \{h_n^{\alpha}\}^{-1/2} L_n^{\alpha}(x). \tag{4.8.9}$$

Соотношения (4.8.7) и (4.8.8) показывают, что если $\mathcal{K}$ – компакт комплексной плоскости, то при фиксированном n и достаточно малом δ поведение полиномов Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ и $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ на $\mathcal{K}$ близко к поведению соответствующих полиномов Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$ и $\hat{L}_n^{\alpha}(x)$. Возникает задача об исследовании поведения полиномов $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ и $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ при возрастании n вместе с N. При скорости роста $n = O(\ln N)$ $(N \to \infty)$ определенную информацию об асимптотическом поведении полиномов $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ и $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ можно извлечь из сопоставления гипергеометрических рядов, выражающих полиномы Мейкснера и Лагерра (см. §§4.2 и 1.5). Мы же сосредоточимся на таких методах, которые позволяют получить асимптотические формулы для полиномов $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ и $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ при минимальных ограничениях на рост степени n по сравнению с ростом N.

§ 4.9. Асимптотика полиномов $m_{n,N}^{\alpha}(x)$: случай целого α

Рассмотрим такую задачу: насколько быстро может расти степень полинома Мейкснера $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ в зависимости от скорости возрастания величины N (величины, обратной шагу сетки $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$), чтобы при этом асимптотическое поведение $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ существенно не отличалось от асимптотического поведения полиномов Лагерра $\hat{L}_n^{\alpha}(x)$. С этой целью займемся оценкой остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha}(x) = m_{n,N}^{\alpha}(x) - \hat{L}_n^{\alpha}(x)$, где x – произвольное комплексное число. Будет получен в определенном смысле окончательный ответ на поставленную задачу.

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 4.9.1. *Пусть $f = f(x)$ – алгебраический полином, $g(x) = e^{-x} f(x)$, $0 < \delta \leqslant 1$. Тогда*

$$\sum_{j=0}^{\infty} g(j\delta) = \frac{1}{\delta}\int_0^{\infty} g(x)\,dx + \frac{1}{2}g(0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} g^{(2k-1)}(0),$$

где B_{2k} – числа Бернулли.

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_r x^r, \quad \|f\| = |\alpha_0| + \ldots + |\alpha_r|. \tag{4.9.1}$$

Полагая $a = 0$, $b = L\delta$, перепишем формулу суммирования Эйлера (1.9.2) для $g(x) = e^{-x} f(x)$ в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{L} g(j\delta) = \frac{1}{\delta}\int_0^{L\delta} g(x)\,dx + \frac{1}{2}[g(0) + g(L\delta)] + \sum_{k=1}^{s} \frac{\delta^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}[g^{(2k-1)}(L\delta) - g^{(2k-1)}(0)]$$

$$+ \frac{\delta^{2s+2}}{(2s+2)!} B_{2s+2} \sum_{j=0}^{L-1} g^{(2s+2)}(j\delta + \theta\delta) \quad (0 < \theta < 1). \tag{4.9.2}$$

По формуле Лейбница,

$$g^{(l)}(x) = \left(e^{-x} f(x)\right)^{(l)} = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{l-\nu} \binom{l}{\nu} f^{(\nu)}(x). \tag{4.9.3}$$

Из (4.9.1) имеем:

$$f^{(k)}(x)=\alpha_k k!+\alpha_{k+1}(k+1)^{[k]}x+\cdots+\alpha_r r^{[k]}x^{r-k}.$$

Поэтому

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant\|f\|(|x|+1)^{r-k}r^{[k]} \tag{4.9.4}$$

при $k\leqslant r$. Из (4.9.3) и (4.9.4) находим:

$$|g^{(l)}(x)|\leqslant e^{-x}\|f\|\sum_{\nu=0}^{r}\frac{l^{[\nu]}}{\nu!}r^{[\nu]}(|x|+1)^{r-\nu}$$

$$\leqslant r!l^{[r]}\|f\|(|x|+1)^r e^{-x}\sum_{\nu=0}^{r}\frac{1}{\nu!}<r!l^r\|f\|(|x|+1)^r e^{-x+1}.$$

Отсюда и из (1.9.1) для $0<\delta\leqslant 1$ получаем:

$$\left|\frac{\delta^{2s}}{(2s)!}B_{2s}\sum_{j=0}^{L-1}g^{(2s)}(j\delta+\theta\delta)\right|\leqslant\frac{r!(2s)^r\|f\|}{(2\pi)^{2s}}\frac{2e}{1-2^{1-2s}}\sum_{j=0}^{\infty}((j+1)\delta+1)^r e^{-j\delta}$$

$$\leqslant c(r)\|f\|\frac{(2s)^r}{(2\pi)^{2s}}\to 0\quad(s\to\infty), \tag{4.9.5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{2k}\left|\frac{B_{2k}}{(2k)!}g^{(2k-1)}(L\delta)\right|\leqslant r!\|f\|(L\delta+1)^r e^{-L\delta+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)^r\delta^{2k}|B_{2k}|}{(2k)!}$$

$$\leqslant c(r)\|f\|(L\delta+1)^r e^{-L\delta}\to 0\quad(L\to\infty). \tag{4.9.6}$$

Из (4.9.2) и (4.9.5) следует, что

$$\sum_{j=0}^{L}g(j\delta)=\frac{1}{\delta}\int\limits_0^{L\delta}g(x)\,dx+\frac{1}{2}[g(0)+g(L\delta)]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}[g^{(2k-1)}(L\delta)-g^{(2k-1)}(0)]. \tag{4.9.7}$$

Переходя в (4.9.7) к пределу при $L\to\infty$ и учитывая (4.9.6), приходим к утверждению леммы 4.9.1.

Лемма 4.9.2. *Пусть $\alpha\geqslant 0$, $p=q^{-1}-1$, $0\leqslant r$ – целое число. Тогда*

$$\left|\{M_n^\alpha(0,q)\}^{(r)}\right|\leqslant\frac{\Gamma(n+\alpha+1)(np)^r e^{r+\alpha+pne+1}}{(2\pi)^{1/2}n!(r+\alpha+1)^{r+\alpha}}.$$

Доказательство. Полагая $p=q^{-1}-1$, из (4.2.1) имеем:

$$\{M_n^\alpha(0,q)\}^{(r)}=\binom{n+\alpha}{n}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{n^{[\nu]}x^{[\nu]}}{(\alpha+1)_\nu\nu!}(-p)^\nu\right\}^{(r)}_{x=0}$$

$$+\binom{n+\alpha}{n}\sum_{\nu=r}^{n}\frac{n^{[\nu]}\left(x^{[\nu]}\right)^{(r)}_{x=0}}{(\alpha+1)_\nu\nu!}(-p)^\nu. \qquad (4.9.8).$$

В силу (1.6.1),

$$\left(x^{[\nu]}\right)^{(r)}_{x=0}=\left(\sum_{j=r}^{\nu}j^{[r]}s(\nu,j)x^{j-r}\right)_{x=0}=s(\nu,r)r!. \tag{4.9.9}$$

Сопоставляя (4.9.8) и (4.9.9), находим:

$$\{M_n^\alpha(0,q)\}^{(r)} = \binom{n+\alpha}{n}\sum_{\nu=r}^{n}\frac{n^{[\nu]}s(\nu,r)r!}{(\alpha+1)_\nu \nu!}(-p)^\nu.$$

Воспользовавшись оценкой (3.7.4) и формулой Стирлинга, отсюда получим:

$$\begin{aligned}\left|\{M_n^\alpha(0,q)\}^{(r)}\right| &\leqslant \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}(np)^r\sum_{\nu=r}^{n}\frac{\nu^{\nu-r}(np)^{\nu-r}}{\Gamma(\nu+\alpha+1)(\nu-r)!}\\ &\leqslant (np)^r\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(2\pi)^{1/2}n!}\sum_{\nu=r}^{n}\frac{\nu^{\nu-r}(np)^{\nu-r}e^{\nu+\alpha+1}}{(\nu+\alpha+1)^{\nu+\alpha}(\nu-r)!}\\ &\leqslant (np)^r\frac{\Gamma(n+\alpha+1)e^{r+\alpha+1}}{(2\pi)^{1/2}n!(r+\alpha+1)^{r+\alpha}}\sum_{\nu=r}^{n}\frac{(enp)^{\nu-r}}{(\nu-r)!}.\end{aligned}$$

Лемма 4.9.2 доказана.

Лемма 4.9.3. *Пусть $\alpha \geqslant 0$, $p = q^{-1}-1$, $0 \leqslant m$ – произвольное целое число. Тогда*

$$\left|\left\{[M_n^\alpha(x,q)]^2\right\}_{x=0}^{(m)}\right| \leqslant \left[\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\right]^2\frac{4^\alpha(4np)^m}{2\pi}\frac{e^{m+2enp+2(1+\alpha)}}{(m+2\alpha+2)^{m+2\alpha}}.$$

Доказательство. По формуле Лейбница,

$$\left\{[M_n^\alpha(x,q)]^2\right\}_{x=0}^{(m)} = \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\{M_n^\alpha(x,q)\}_{x=0}^{(l)}\{M_n^\alpha(x,q)\}_{x=0}^{(m-l)}.$$

Очевидно, минимум функции

$$\varphi(l) = (l+\alpha+1)^{l+\alpha}(m-l+\alpha+1)^{m-l+\alpha} \quad (0 \leqslant l \leqslant m)$$

равен $\varphi(m/2)$. Поэтому из леммы 4.9.2 следует, что

$$\begin{aligned}\left|\left\{[M_n^\alpha(x,q)]^2\right\}_{x=0}^{(m)}\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}e^{m+2enp+2(1+\alpha)}(np)^m\left[\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\right]^2\\ &\times\sum_{l=0}^{m}\frac{\binom{m}{l}}{(l+\alpha+1)^{l+\alpha}(m-l+\alpha+1)^{m-l+\alpha}}\\ &\leqslant \left[\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\right]^2\frac{4^\alpha(2np)^m}{2\pi}\frac{e^{m+2enp+2(1+\alpha)}}{(m+2\alpha+2)^{m+2\alpha}}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l},\end{aligned} \tag{4.9.10}$$

Поскольку $\sum_{l=0}^m\binom{m}{l} = 2^m$, то утверждение леммы 4.9.3 вытекает из (4.9.10).

Лемма 4.9.4. *В условиях леммы 4.9.3 имеет место оценка*

$$\left|\left\{\left[m_{n,N}^\alpha(x,q)\right]^2\right\}_{x=0}^{(m)}\right| \leqslant \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}q^n\frac{4^\alpha}{2\pi}\frac{e^{m+2enp+2(1+\alpha)}}{(m+2\alpha+2)^{m+2\alpha}}\left(\frac{4np}{\delta}\right)^m.$$

Утверждение леммы 4.9.4 непосредственно вытекает из равенств (4.3.6), (4.8.2) и леммы 4.9.3.

Положим $\kappa(x) = x^\alpha e^{-x}$,

$$d_k = \left\{\kappa(x)[m_n^\alpha(x)]^2\right\}_{x=0}^{(2k-1)}. \tag{4.9.11}$$

Величина d_k играет основную роль при оценке остаточного члена асимптотической формулы для полиномов Мейкснера $m_{n,N}^\alpha(x)$.

Лемма 4.9.5. *Пусть* $0 \leqslant \alpha$ *– целое. Тогда*

$$|d_k| \leqslant \frac{1}{8\pi}\exp[(1+\alpha)(1-\delta) - n\delta + 2enp]\frac{(n+\alpha)!}{n^{\alpha+1}n!}(2k-1)^\alpha A,$$

$$A = \frac{\left(16e^{1+\delta}n\right)^k}{4(2+2\alpha)^{2\alpha}} + \frac{1}{\alpha!}\exp\left(\frac{2k-1}{4n\exp(1+\delta)}\right)\left(\frac{16e^{2(1+\delta)}n^2}{k+2+\alpha}\right)^k.$$

Доказательство. Если $0 \leqslant \alpha$ – целое, то из (4.9.11) имеем:

$$d_k = \sum_{j=\alpha}^{2k-1}\binom{2k-1}{j}\kappa^{(j)}(0)\left\{[m_{n,N}^\alpha(0)]^2\right\}^{(j)}.$$

Отсюда и из леммы 4.9.4 находим ($q = e^{-\delta}$):

$$|d_k| \leqslant \frac{(n+\alpha)!}{2\pi n!}4^\alpha e^{2(1+\alpha)-n\delta+2enp}B, \tag{4.9.12}$$

где

$$B = \sum_{j=\alpha}^{2k-1}\binom{2k-1}{j}\left[\frac{4enp}{\delta}\right]^{2k-1-j}|\kappa^{(j)}(0)|.$$

Далее в силу (1.5.1) и (1.5.10) имеем ($j \geqslant \alpha$):

$$\kappa^{(j)}(0) = \frac{d^j}{dx^j}\left\{x^\alpha e^{-x}\right\}_{x=0} = \frac{d^j}{dx^j}\left\{x^{j+\alpha-j}e^{-x}\right\}_{x=0} =$$

$$x^{j-\alpha}e^x j! L_j^{\alpha-j}(x)|_{x=0} = (-1)^{j-\alpha}e^x\alpha! L_\alpha^{j-\alpha}(x)|_{x=0} = (-1)^{j-\alpha}j^{[\alpha]}.$$

Кроме того, $p/\delta < e^\delta$. Поэтому из (4.9.12) следует неравенство

$$|d_k| \leqslant \frac{(n+\alpha)!}{2\pi n!}4^\alpha e^{2(1+\alpha)-n\delta+2enp}\left(4ne^{1+\delta}\right)^{2k-1-\alpha}S, \tag{4.9.13}$$

где

$$S = \sum_{j=\alpha}^{2k-1}\binom{2k-1}{j}\frac{j^{[\alpha]}\left(4ne^{1+\delta}\right)^{\alpha-j}}{(2k+1+2\alpha-j)^{2k-1+2\alpha-j}}. \tag{4.9.14}$$

Разобьем S две части:

$$S = \sum_{j=\alpha}^{k+\alpha-1} + \sum_{j=k+\alpha}^{2k-1} = S_1 + S_2. \tag{4.9.15}$$

Тогда

$$S_1 \leqslant \sum_{j=\alpha}^{k+\alpha-1}\frac{(2k-1)^{[j]}}{j!\left(4ne^{1+\delta}\right)^{j-\delta}}\left(\frac{k+\alpha}{k+2+\alpha}\right)^\alpha\frac{1}{(k+\alpha+2)^k}$$

$$< \frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{\alpha!(k+\alpha+2)^k}\exp\left(\frac{2k-1}{4n\exp(1+\delta)}\right), \tag{4.9.16}$$

$$S_2 = \sum_{j=k+\alpha}^{2k-1} \binom{2k-1}{j} \frac{j^{[\alpha]} \left(4e^{1+\delta}n\right)^{\alpha-j}}{(2k+1+2\alpha-j)^{2k-1-j+2\alpha}}$$

$$\leqslant \frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{\left(4e^{1+\delta}n\right)^k} \sum_{j=k+\alpha}^{2k-1} \binom{2k-1}{j} \frac{1}{(2k+1+2\alpha-j)^{2\alpha}}$$

$$\leqslant \frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{\left(4e^{1+\delta}n\right)^k (2\alpha+2)^{2\alpha}} \sum_{j=k+\alpha}^{2k-1} \binom{2k-1}{j} \leqslant$$

$$\frac{(2k-1)^{[\alpha]} 2^{2k-2}}{\left(4e^{1+\delta}n\right)^k (2\alpha+2)^{2\alpha}} = \frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{4(2\alpha+2)^{2\alpha}} \left(ne^{1+\delta}\right)^{-k}. \tag{4.9.17}$$

Из (4.9.13) – (4.9.17) находим:

$$|d_k| \leqslant \frac{(n+\alpha)!4^\alpha}{2\pi n!} e^{2(1+\alpha)-n\delta+2enp} \left(4ne^{1+\delta}\right)^{-1-\delta} \left(4ne^{1+\delta}\right)^{2k}$$

$$\times \left[\frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{4(2\alpha+2)^{2\alpha}} \left(ne^{1+\delta}\right)^{-k} + \frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{\alpha!(k+\alpha+2)^k} \exp\left(\frac{2k-1}{4n\exp(1+\delta)}\right)\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{8\pi} e^{(1+\alpha)(1-\delta)-n\delta+2enp} \frac{(n+\alpha)!(2k-1)^\alpha}{n!n^{1+\alpha}}$$

$$\times \left[\frac{16ne^{1+\delta}}{4(2\alpha+2)^{2\alpha}} + \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{16e^{2(1+\delta)}n^2}{k+2+\alpha}\right)^k \exp\left(\frac{2k-1}{4n\exp(1+\delta)}\right)\right].$$

Лемма 4.9.5 доказана.

Теорема 4.9.1. *Пусть $0 \leqslant \alpha$ – целое, $\lambda, \delta > 0$, $N = 1/\delta$, z – произвольное комплексное число. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$m_{n,N}^\alpha(z) = \hat{L}_n^\alpha(z) + v_{n,N}^\alpha(z),$$

для остаточного члена $v_{n,N}^\alpha(z)$ которой при $0 < \delta \leqslant 1$, $0 \leqslant n \leqslant \lambda N$ справедлива оценка

$$|v_{n,N}^\alpha(z)| \leqslant c \left\{ \delta \sum_{k=0}^{n} |\hat{L}_n^\alpha(z)|^2 \right\}^{1/2}, \quad c = c(\alpha, \lambda).$$

Доказательство. Заметим, что $v_{0,N}^\alpha(x) = 0$. Поэтому рассмотрим случай $n \geqslant 1$. Оценим следующий интеграл:

$$\int_0^\infty \kappa(x) \left\{v_{n,N}^\alpha(x)\right\}^2 dx =$$

$$\int_0^\infty \kappa(x) \left\{\hat{L}_n^\alpha(x)\right\}^2 dx + \int_0^\infty \kappa(x) \left\{m_{n,N}^\alpha(x)\right\}^2 dx - 2\int_0^\infty \kappa(x) l_n^\alpha(x) m_{n,N}^\alpha(x) dx$$

$$= J_1 + J_2 - J_3. \tag{4.9.18}$$

Поскольку $\hat{L}_n^\alpha(x)$ – нормированный полином Лагерра, то $J_1 = 1$. Далее, $J_3 = 2k_{n,N}/k_n$, где $k_{n,N}$ и k_n – старшие коэффициенты полиномов Мейкснера $m_{n,N}^\alpha(x)$ и Лагерра $l_n^\alpha(x)$

соответственно. Сравнивая (1.5.3), (1.5.6) с (4.2.1), (4.3.4), (4.3.6) и (4.8.2), находим $(q = e^{-\delta}, p = e^{\delta} - 1)$:

$$\frac{k_{n,N}}{k_n} = \left(\frac{h_n^\alpha}{h_n^{\alpha,q}}\right)^{1/2} (p\delta^{-1})^n = \left[\delta^{-1}\left(e^{\delta/2} - e^{-\delta/2}\right)\right]^n. \tag{4.9.19}$$

Так как

$$\delta^{-1}\left(e^{\delta/2} - e^{-\delta/2}\right) = 1 + \frac{(\delta/2)^2}{3!} + \frac{(\delta/2)^4}{5!} + \cdots > 1,$$

то из (4.9.19) следует, что

$$J_3 = 2\frac{k_{n,N}}{k_n} > 2. \tag{4.9.20}$$

Рассмотрим интеграл J_2. По лемме 4.9.1,

$$J_2 = \int\limits_0^\infty \kappa(x)\left\{m_{n,N}^\alpha(x)\right\}^2 dx = \delta\sum_{j=0}^\infty \kappa(j\delta)\left\{m_{n,N}^\alpha(j\delta)\right\}^2$$

$$-\frac{\delta}{2}\kappa(0)\left\{m_{n,N}^\alpha(0)\right\}^2 + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!}\delta^{2k}d_k, \tag{4.9.21}$$

где d_k число, определенное равенством (4.9.11). Пусть $0 < \delta \leqslant 1$, $0 \leqslant x < \infty$. Из (4.3.5) и (4.8.3) при $q = e^{-\delta}$ имеем:

$$\frac{\delta\kappa(x)}{\eta_N(x)} = \frac{\delta x^\alpha e^{-x}}{\eta_N(x)} = \left(\frac{\delta}{1 - e^{-\delta}}\right)^{\alpha+1} \frac{x^\alpha}{(x+\delta)\cdots(x+\alpha\delta)}$$

$$< \left(\frac{\delta}{1 - e^{-\delta}}\right)^{\alpha+1} < e^{\delta(\alpha+1)} < 1 + \delta(\alpha+1)e^{\delta(\alpha+1)}. \tag{4.9.22}$$

Сравнивая (4.9.22) с (4.8.5), получаем:

$$\delta\sum_{j=0}^\infty \kappa(j\delta)\left\{m_{n,N}^\alpha(j\delta)\right\}^2 < 1 + \delta(\alpha+1)e^{\delta(\alpha+1)},$$

так что в силу (4.9.21),

$$J_2 < 1 + \delta(\alpha+1)e^{\delta(\alpha+1)} + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!}\delta^{2k}d_k. \tag{4.9.23}$$

Сопоставим (4.9.18), (4.9.20) и (4.9.23). Будем иметь:

$$\int\limits_0^\infty \kappa(x)\left\{v_{n,N}^\alpha(x)\right\}^2 dx < \delta(\alpha+1)e^{\delta(\alpha+1)} + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!}\delta^{2k}d_k. \tag{4.9.24}$$

Если теперь $0 < \delta \leqslant 1$ и $n \leqslant \lambda N$ $(\lambda > 0)$, то из леммы 4.9.5 и оценки (1.9.1) имеем:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\delta^{2k}|d_k| \leqslant c(\alpha,\lambda)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^{2k}\left[\left(16e^{1+\delta}n\right)^k + \left(\frac{16e^{2(1+\delta)}en^2}{k+2+\alpha}\right)^k\right]$$

$$= c(\alpha,\lambda)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^\infty \delta^k\left(\frac{16e^{1+\delta}n\delta}{4\pi^2}\right)^k + c(\alpha,\lambda)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{16e^{2(1+\delta)+1}}{4\pi^2(k+2+\alpha)}\delta^2n^2\right)^k$$

$$\leqslant c_1(\alpha,\lambda)\delta^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{16e^{1+\delta}\lambda\delta}{4\pi^2}\right)^{k-1}+c_2(\alpha,\lambda)n\delta^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{16e^{2(1+\delta)+1}\lambda^2}{4\pi^2(k+2+\alpha)}\right)^{k-1}. \qquad (4.9.25)$$

Последний в (4.9.25) ряд сходится. Если δ выбрать настолько малым, что

$$\frac{4e^2\lambda\delta}{\pi^2}\leqslant\frac{1}{2}, \qquad (4.9.26)$$

то предпоследний ряд также сходится. Тогда из (4.9.24) и (6.9.25) заключаем, что

$$\int\limits_0^{\infty}\kappa(x)\left\{v_{n,N}^{\alpha}(x)\right\}^2\,dx\leqslant c(\alpha,\lambda)\delta, \qquad (4.9.27)$$

если только δ удовлетворяет неравенству (4.9.26). Утверждение теоремы 4.9.1, соответствующее случаю $0<\delta\leqslant\pi^2/(8e^2\lambda)$ вытекает из (4.9.27) с учетом результатов §1.11.

Рассмотрим случай $0<\delta_0\leqslant\delta\leqslant 1$, где δ_0 фиксировано. В этом случае мы имеем $n\leqslant\lambda N=\lambda/\delta\leqslant\lambda/\delta_0$. Пусть $n_0=[\lambda/\delta_0]$. Для каждого рассматриваемого δ ($\delta_0\leqslant\delta\leqslant 1$) соответствует не более n_0+1 полиномов Мейкснера $m_{n,N}^{\alpha}(x)$, для которых $n\leqslant\lambda N$. Сравнивая (4.2.1) с (4.3.6) и (4.8.2), нетрудно убедиться в том, что

$$\left\{m_{n,N}^{\alpha}(x)\right\}^2=a_{0,n}(\delta)+a_{1,n}(\delta)x+\cdots+a_{2n,n}(\delta)x^{2n},$$

где $a_{k,n}(\delta)$ непрерывные функции параметра δ на отрезке $[\delta,1]$. Положим

$$\bar a=\bar a(\delta_0)=\max_{0\leqslant n\leqslant n_0}\max_{0\leqslant k\leqslant 2n}\max_{\delta_0\leqslant\delta\leqslant 1}|a_{k,n}(\delta)|,\quad \bar b=\bar b(\delta_0)=\max_{0\leqslant k\leqslant 2n_0}\int\limits_0^{\infty}x^{k+\alpha}e^{-x}dx.$$

Тогда имеем:

$$\int\limits_0^{\infty}x^{\alpha}e^{-x}\left\{m_{n,N}^{\alpha}(x)\right\}^2dx\leqslant(2n_0+1)\bar a\bar b.$$

Отсюда и из результатов §1.11 следует, что

$$\left|m_{n,N}^{\alpha}(z)\right|\leqslant\left\{(2n_0+1)\bar a\bar b\sum_{\nu=0}^{n}\left|\hat L_{\nu}^{\alpha}(z)\right|^2\right\}^{1/2}. \qquad (4.9.28)$$

Так как $(2n_0+1)\bar a\bar b$ зависит только от α, λ и δ_0, то из (4.9.28) находим:

$$|m_{n,N}^{\alpha}(z)|\leqslant c(\alpha,\lambda,\delta_0)\left\{\sum_{\nu=0}^{n}|\hat L_{\nu}^{\alpha}(z)|^2\right\}^{1/2}.$$

Отсюда для $\delta_0\leqslant\delta\leqslant 1$ получаем:

$$\left|v_{n,N}^{\alpha}(z)\right|=\left|m_{n,N}^{\alpha}(z)-\hat L_n^{\alpha}(z)\right|\leqslant\left|m_{n,N}^{\alpha}(z)\right|+\left|\hat L_n^{\alpha}(z)\right|\leqslant c_1(\alpha,\lambda,\delta_0)\left\{\delta\sum_{\nu=0}^{n}\left|\hat L_n^{\alpha}(z)\right|^2\right\}^{1/2}. \qquad (4.9.29)$$

Положим $\delta_0=\pi^2/(8e^4\lambda)$. Тогда для $0<\delta\leqslant\delta_0$ выполнено неравенство (4.9.26) и для таких δ справедливо утверждение теоремы 4.9.1. Если же $\delta_0\leqslant\delta\leqslant 1$, то верна оценка (4.9.29), которая приводит к утверждению теоремы 4.9.1 для оставшихся δ. Тем самым эта теорема полностью доказана.

Отдельного рассмотрения заслуживает частный случай $z = x \in [0,\infty)$.

Теорема 4.9.2. *Пусть* $0 \leqslant \alpha$ *– целое,* $\lambda, \delta > 0$*,* $N = 1/\delta$*,* $x \in [0,\infty)$*. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$m_{n,N}^{\alpha}(x) = \hat{L}_n^{\alpha}(x) + v_{n,N}^{\alpha}(x),$$

для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha}(x)$ *которой при* $0 < \delta \leqslant 1$*,* $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$ *справедлива оценка*

$$\left|v_{n,N}^{\alpha}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda) A_n^{\alpha}(x) \sqrt{\frac{n}{N}} n^{-\alpha/2},$$

где $A_n^{\alpha}(x)$ *определена равенством (1.5.54).*

Доказательство. В силу (1.5.8), формулу Кристоффеля–Дарбу (1.5.56) можно переписать в следующем виде:

$$\mathcal{K}_n^{\alpha}(t,x) = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)(x-t)}\left[L_{n+1}^{\alpha}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(t) - L_{n+1}^{\alpha-1}(x)L_{n+1}^{\alpha}(t)\right]$$

$$= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left\{L_{n+1}^{\alpha}(x)\frac{L_{n+1}^{\alpha-1}(x) - L_{n+1}^{\alpha-1}(t)}{t-x} - L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\frac{L_{n+1}^{\alpha}(x) - L_{n+1}^{\alpha}(t)}{t-x}\right\}.$$

Переходя здесь к пределу при $t \to x$ и используя равенство (1.5.9), будем иметь:

$$\mathcal{K}_n^{\alpha}(x,x) = \sum_{\nu=0}^{n}[\hat{L}_{\nu}^{\alpha}(x)]^2$$

$$= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left\{-L_{n+1}^{\alpha}(x)\left[L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\right]' + L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\left[L_{n+1}^{\alpha}(x)\right]'\right\}$$

$$= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left\{L_{n+1}^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(x) - L_{n+1}^{\alpha-1}(x)L_n^{\alpha+1}(x)\right\}. \tag{4.9.30}$$

Сопоставляя (4.9.30) с теоремой (4.9.1), замечаем:

$$|v_{n,N}^{\alpha}(x)| \leqslant c(\alpha,\lambda)\sqrt{\frac{n}{N}}\binom{n+\alpha}{n}^{-1/2}$$

$$\times\left[\left|L_n^{\alpha}(x)L_{n+1}^{\alpha}(x)\right| + \left|L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\right|\right]^{1/2}. \tag{4.9.31}$$

Оценим здесь полиномы Лагерра с помощью неравенства (1.5.53). Заметим, что $A_n^{\alpha}(x) \asymp A_{n+1}^{\alpha}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равномерно относительно $x \in [0,\infty)$. Поэтому из (4.9.31) имеем:

$$\left(\left|L_n^{\alpha}(x)L_{n+1}^{\alpha}(x)\right|\right)^{1/2} \leqslant c(\alpha)A_n^{\alpha}(x) \quad (0 \leqslant x < \infty). \tag{4.9.32}$$

Из (1.5.54) также следует, что

$$A_n^{\alpha+1}(x)A_{n+1}^{\alpha-1}(x) \leqslant c(\alpha)[A_n^{\alpha}(x)]^2 \quad (x \geqslant 0), \tag{4.9.33}$$

при $\alpha > 0$. Поэтому в этом случае

$$\left(\left|L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\right|\right)^{1/2} \leqslant c(\alpha)A_n^{\alpha}(x) \quad (x \geqslant 0). \tag{4.9.34}$$

Если $\alpha = 0$, то

$$L_{n+1}^{\alpha-1}(x) = L_{n+1}^{-1}(x) = -\frac{x}{n+1}L_n^1(x)$$

в силу (1.5.10). Следовательно,

$$\left(\left|L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\right|\right)^{1/2} = \left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2}\left|L_n^1(x)\right|. \tag{4.9.35}$$

Если $0 \leqslant x \leqslant (12\ln 7)n$, то из (4.9.35) и (1.5.53) при $\alpha = 0$ имеем:

$$\left|L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\right| \leqslant c\left(\frac{x}{n}\right)^{1/2} A_n^1(x) \leqslant cA_n^0(x). \tag{4.9.36}$$

Покажем, что оценка (4.9.36) остается в силе также при $x \geqslant (12\ln 7)n$. Воспользуемся формулой (1.5.1) и интегральной формулой Коши. Тогда при $x > 0$ имеем:

$$\left|L_n^1(x)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{e^{x-t}t^n}{(x-t)^{n+1}}\frac{t}{x}dt\right|, \tag{4.9.37}$$

где γ – замкнутый контур, охватывающий точку $t = x$. Составим контур γ из отрезка $t = 5x/6 + i\tau$ ($\tau_{-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_1$) и дуги окружности $|t| = 7x/6$, где τ_{-1} и τ_1 означают точки пересечения прямой $t = 5x/6 + i\tau$ и окружности $|t| = 7x/6$. Будем иметь:

$$\left|L_n^1(x)\right| \leqslant \frac{7}{12\pi}\int_\gamma \left|e^{x-t}\left(\frac{t}{x-t}\right)^n\right|\frac{|dt|}{|x-t|} \leqslant \frac{1}{6}e^{x/6}7^{n+2} = \frac{49}{6}7^n e^{-x/12}e^{x/4}. \tag{4.9.38}$$

Пусть $x \geqslant (12\ln 7)n$. Тогда

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} 7^n e^{-x/12} = \exp\left[\frac{(12\ln 7)n - x}{12} + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{n+1}\right] \leqslant c. \tag{4.9.39}$$

Из (4.9.38) и (4.9.39) находим:

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2}\left|L_n^1(x)\right| \leqslant ce^{x/4} \leqslant cA_n^0(x) \quad (x \geqslant (12\ln 7)n). \tag{4.9.40}$$

Сравнивая (4.9.35) и (4.9.40), убеждаемся в справедливости оценки (4.9.36). Тогда оценка (4.9.34) верна также при $\alpha = 0$. Утверждение теоремы 4.9.2 вытекает из (4.9.31), (4.9.32) и (4.9.34).

Теорема 4.9.3. *Пусть выполнены условия теоремы 4.9.2. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\left(m_{n,N}^\alpha(x)\right)' = -\sqrt{n}\hat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) + w_{n,N}^\alpha(x),$$

для остаточного члена $w_{n,N}^\alpha(x)$ *которой при* $n \leqslant \lambda N$, $0 < \delta \leqslant 1$ *имеет место оценка*

$$\left|w_{n,N}^\alpha(x)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda)\sqrt{\frac{n}{N}}n^{-\alpha/2}A_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

Доказательство. Пусть

$$m_{n,N}^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k \hat{L}_k^\alpha(x). \tag{4.9.41}$$

Тогда

$$m_{n,N}^\alpha(x) - \hat{L}_n^\alpha(x) = (\beta_n - 1)\hat{L}_n^\alpha(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\hat{L}_k^\alpha(x). \tag{4.9.42}$$

В силу ортонормированности системы $\left\{\hat{L}_k^\alpha(x)\right\}_{k=0}^{n}$ имеем:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}x^\alpha\left[m_{n,N}^\alpha(x)-\hat{L}_n^\alpha(x)\right]^2dx=(\beta_n-1)^2+\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k^2\leqslant\int\limits_0^\infty e^{-x}x^\alpha\left(v_{n,N}^\alpha(x)\right)^2dx, \tag{4.9.43}$$

где $v_{n,N}^\alpha(x)=m_{n,N}^\alpha(x)-\hat{L}_n^\alpha(x)$. Из (4.9.27) и (4.9.43) находим:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k^2\leqslant c(\alpha,\lambda)\delta\quad(1\leqslant n\leqslant\lambda N). \tag{4.9.44}$$

С другой стороны, из (4.9.41) имеем:

$$\left(m_{n,N}^\alpha(x)\right)'=\left(\hat{L}_n^\alpha(x)\right)'+(\beta_n-1)\left(\hat{L}_n^\alpha(x)\right)'+\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k\left(\hat{L}_k^\alpha(x)\right)'. \tag{4.9.45}$$

Так как $\left(\hat{L}_n^\alpha(x)\right)'=-\sqrt{k}\hat{L}_{k-1}^{\alpha+1}(x)$ в силу (1.5.9) и (4.8.11), то из (4.9.45) имеем:

$$\left(m_{n,N}^\alpha(x)\right)'=-\sqrt{n}\hat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)-(\beta_n-1)\sqrt{n}\hat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k\sqrt{k}\hat{L}_{k-1}^{\alpha+1}(x). \tag{4.9.46}$$

Из (4.9.41) и (4.9.19) находим $(n\delta\leqslant\lambda)$:

$$\beta_n-1=\frac{k_{n,N}}{k_n}-1=\left[\frac{e^{\delta/2}-e^{-\delta/2}}{\delta}\right]^n-1<c(\lambda)\delta. \tag{4.9.47}$$

Из (4.9.44) имеем:

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k\sqrt{k}l_{k-1}^{\alpha+1}(x)\right|\leqslant\sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\hat{L}_{k-1}^{\alpha+1}(x)\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda)\sqrt{n\delta}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\left(\hat{L}_k^{\alpha+1}(x)\right)^2\right)^{1/2}. \tag{4.9.48}$$

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 4.9.2, непосредственно вытекает оценка

$$\left(\sum_{k=0}^{n-2}\left(\hat{L}_{k-1}^{\alpha+1}(x)\right)^2\right)^{1/2}\leqslant c(\alpha)n^{-\alpha/2}A_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{4.9.49}$$

Положим

$$w_{n,N}^\alpha(x)=-(\beta_n-1)\sqrt{n}\hat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k\sqrt{k}\hat{L}_{k-1}^{\alpha+1}(x). \tag{4.9.50}$$

Из (1.5.55) следует неравенство

$$|\hat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)|\leqslant c(\alpha)n^{-(\alpha+1)/2}A_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

Тогда из (4.9.47) – (4.9.49) получаем:

$$\left|w_{n,N}^\alpha(x)\right|\leqslant c(\alpha,\lambda)\sqrt{n\delta}n^{-\alpha/2}A_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{4.9.51}$$

Сравнивая (4.9.46) с (4.9.51), приходим к утверждению теоремы 4.9.3.

§ 4.10. Асимптотическое разложение для $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ по параметру N^{-1}

Продолжим изучение случая целого $\alpha \geqslant 0$. В этом параграфе мы приведем полные асимптотические разложения

$$e^{-n\delta}(x+1)_{\alpha}M_n^{\alpha}(x,e^{-\delta}) \quad \text{и} \quad e^{-n\delta}(Nx+1)_{\alpha}m_{n,N}^{\alpha}(x,e^{-\delta})$$

по параметру $\delta = 1/N$.

Теорема 4.10.1. *Пусть $\alpha \in \mathbf{Z}^+$, $a(k) = a(k;n,\alpha) = \min\{k-1, n+\alpha\}$, $n \geqslant 1$. Тогда*

$$e^{-n\delta}(x+1)_{\alpha}M_n^{\alpha}(x,e^{-\delta}) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\sigma(k,n)}{k!}\left[\sum_{j=0}^{a(k)} j!s(n+\alpha,j,\alpha)(-\delta)^{k-j}L_j^{k-j}(\delta x)\right.$$

$$\left. + k!\sum_{j=a(k)+1}^{n+\alpha} s(n+\alpha,j,\alpha)x^{j-k}L_k^{j-k}(\delta x)\right], \tag{4.10.1}$$

где $\sigma(k,n)$ $(0 \leqslant n \leqslant k)$ – числа Стирлинга второго рода, $s(m,j,\alpha)$ $(0 \leqslant j \leqslant m)$ – числа, определенные в §1.5, $L_m^{\gamma}(x)$ – полиномы Лагерра. При этом, если $n+\alpha \leqslant k-1$, то последняя сумма в (4.10.1) считается отсутствующей.

Доказательство. Из (4.1.4) для целого α имеем:

$$n!(x+1)_{\alpha}e^{-n\delta}M_n^{\alpha}(x,e^{-\delta}) = e^{\delta x}\Delta^n\left[e^{-\delta x}(x+\alpha)^{[n+\alpha]}\right]$$

$$= e^{\delta x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!k!}e^{-\delta(x+k)}(x+k+\alpha)^{[n+\alpha]}$$

$$= e^{\delta x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!e^{-\delta(x+k)}(x+k+\alpha)^{[n+\alpha]}}{\cos[(k-n)\pi](n-k)!k!}.$$

Слагаемые в последней сумме представляют собой вычеты в полюсах $z = 0,\ldots,n$ функции

$$f(z) = \frac{\pi e^{-\delta(x+z)}(z+x+\alpha)^{[n+\alpha]}}{\sin[(z-x)\pi]\Gamma(n-z+1)\Gamma(z+1)}.$$

Поэтому по теореме Коши,

$$n!(x+1)_{\alpha}e^{-\delta n}M_n^{\alpha}\left(x,e^{-\delta}\right) = \frac{e^{\delta x}n!}{2i}\int_{\lambda}\frac{e^{-\delta(x+z)}(z+x+\alpha)^{[n+\alpha]}\,dz}{\sin[(z-n)\pi]\Gamma(n-z+1)\Gamma(z+1)},$$

где λ – замкнутый контур, охватывающий точки $z = 0,1,\ldots,n$. Так как в силу (1.6.2)

$$(y+\alpha)^{[n+\alpha]} = \sum_{j=0}^{n+\alpha} s(n+\alpha,j,\alpha)y^j.$$

то из предыдущего равенства при помощи (1.6.24) находим:

$$(x+1)_{\alpha}e^{-\delta n}M_n^{\alpha}\left(x,e^{-\delta}\right) = e^{\delta x}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda}e^{-\delta(x+z)}(z+x+\alpha)^{[n+\alpha]}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\sigma(k,n)}{z^{k+1}}\,dz$$

$$= e^{\delta x}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\sigma(k,n)}{2\pi i}\int_{\lambda}\frac{e^{-\delta(x+z)}}{z^{k+1}}(z+x+\alpha)^{[n+\alpha]}\,dz$$

$$= e^{\delta x} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sigma(k,n)}{k!} \frac{d^k}{dy^k} \left\{ e^{-\delta y} (y+\alpha)^{[n+\alpha]} \right\} |_{y=x}$$

$$= e^{\delta x} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sigma(k,n)}{k!} \sum_{j=0}^{n+\alpha} s(n+\alpha,j,\alpha) \frac{d^k}{dy^k} \left\{ e^{-\delta y} y^j \right\} |_{y=x}.$$

Далее,

$$\frac{d^k}{dy^k} \left\{ e^{-\delta y} y^j \right\} |_{y=x} = \delta^{k-j} \frac{d^k}{dy^k} \left\{ e^{-y} y^j \right\} |_{y=\delta x}$$

$$= \delta^{k-j} k! e^{-y} y^{j-k} L_k^{j-k}(y)|_{y=\delta x} = k! e^{-\delta x} x^{j-k} L_k^{j-k}(\delta x). \tag{4.10.3}$$

Кроме того, в случае $k - j \geqslant 1$ по (1.5.10) имеем:

$$L_k^{j-k}(y) = (-y)^{k-j} \frac{j!}{k!} L_j^{k-j}(y). \tag{4.10.4}$$

Сравнивая (4.10.2) – (4.10.4), приходим к утверждению теоремы 4.10.1.

Случай $\alpha = 0$ достаточно важен. В этом случае утверждение теоремы 4.10.1 принимает такой вид.

Следствие 4.10.1. *Для произвольного комплексного числа x имеет место равенство*

$$e^{-n\delta} M_n^0 \left(x; e^{-\delta}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sigma(k,n)}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} j! s(n,j) (-\delta)^{k-j} L_j^{k-j}(\delta x).$$

В самом деле, $s(n+\alpha, j, \alpha) = s(n,j)$ при $\alpha = 0$. Поэтому наше утверждение вытекает из теоремы 4.10.1.

Поскольку $(q = e^{-\delta})$

$$\left(h_n^{\alpha,q}\right)^{1/2} m_{n,N}^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(Nx, q)$$

в силу (4.3.6) и (4.8.2), то из теоремы 4.10.1 имеем:

$$e^{-n\delta} \left(h_n^{\alpha,q}\right)^{1/2} (Nx+1)_{\alpha} m_{n,N}^{\alpha}(x) =$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sigma(k,n)}{k!} \left[\sum_{j=0}^{a(k)} j! s(n+\alpha,j,\alpha)(-\delta)^{k-j} L_j^{k-j}(x) + k! \sum_{j=a(k)+1}^{n+\alpha} s(n+\alpha,j,\alpha) x^{j-k} L_k^{j-k}(x) \right]. \tag{4.10.5}$$

Положим

$$U_n^{\alpha} = \{(j,k) | n \leqslant k \leqslant j \leqslant n+\alpha\}, \qquad V_n^{\alpha} = \{(j,k) | 0 \leqslant j \leqslant a(k), k \geqslant n\}, \tag{4.10.6}$$

$$\phi_{j,k}(x) = \frac{j!}{k!} \sigma(k,n) s(n+\alpha,j,\alpha)(-1)^{k-j} L_j^{k-j}(x), \tag{4.10.7}$$

$$\psi_{n,N}^{\alpha}(x) = \sum_{(j,k) \in V_n^{\alpha}} \frac{(-1)^{\alpha} \phi_{j,k}(x)}{N^{k-j+\alpha}}, \tag{4.10.8}$$

$$f_{j,k}(x) = \sigma(k,n) s(n+\alpha,j,\alpha) x^{j-k} L_k^{j-k}(x), \tag{4.10.9}$$

$$F_{n,N}^{\alpha}(x) = \sum_{(j,k) \in U_n^{\alpha}} \frac{(-1)^{\alpha} f_{j,k}(x)}{N^{\alpha+k-j}}. \tag{4.10.10}$$

Тогда, сопоставляя (4.3.4) с (4.10.5) – (4.10.10), будем иметь:

$$\left[e^{-n\delta}(n+1)_\alpha\right]^{1/2}(-\delta)^\alpha(Nx+1)_\alpha m^\alpha_{n.N}(x)=F^\alpha_{n,N}(x)+\psi^\alpha_{n,N}(x). \tag{4.10.11}$$

Функции $\phi_{j,k}(x)$ и $f_{j,k}(x)$ не зависят от N. Поэтому (4.10.8) и (4.10.10) показывают, что правая часть равенства (4.10.11) представляет собой асимптотическую формулу по параметру N^{-1} для его левой части при $N\to\infty$. В частности, если в качестве главной части мы примем $F^\alpha_{n,N}(x)$, то при фиксированном n для остатка $\psi^\alpha_{n,N}(x)$ имеем следующую равномерную по x из произвольного фиксированного компакта комплексной плоскости оценку:

$$\psi^\alpha_{n,N}(x)=O\left(N^{-\alpha-1}\right)\quad (N\to\infty).$$

Рассмотрим следующий вопрос: в какой мере равенство (4.10.11) может быть использовано для получения асимптотической по N^{-1} формулы для его левой части в случае роста степени n полинома $m^\alpha_{n,N}(x)$ вместе с N? Рассмотрим функцию $\psi^\alpha_{n,N}(x)$ (см. (4.8.3)). Положим для натурального $l\leqslant n$

$$a_l(k)=\min\{k-l,n+\alpha\},\quad V^\alpha_{n,l}=\{(j,k)|0\leqslant j\leqslant a_l(k),k\geqslant n\}. \tag{4.10.12}$$

Из (4.10.8) имеем:

$$\psi^\alpha_{n,N}(x)={}_l\tilde\psi^\alpha_{n,N}(x)+{}_l\psi^\alpha_{n,N}(x), \tag{4.10.13}$$

где

$${}_l\psi^\alpha_{n,N}(x)=\sum_{(j,k)\in V^\alpha_{n,l}}\frac{(-1)^\alpha\phi_{j,k}(x)}{N^{k-j+\alpha}}\quad\left({}_1\tilde\psi^\alpha_{n,N}(x)=0\right). \tag{4.10.14}$$

Сравнивая (4.10.11) с (4.10.13), находим:

$$\left[e^{-n\delta}(n+1)_\alpha\right]^{1/2}(-\delta)^\alpha(Nx+1)_\alpha m^\alpha_{n.N}(x)=F^\alpha_{n,N}(x)+{}_l\tilde\psi^\alpha_{n,N}(x)+{}_l\psi^\alpha_{n,N}(x), \tag{4.10.15}$$

Заметим, что функция $F^\alpha_{n,N}(x)$ является суммой $(\alpha+1)(\alpha+2)/2$ слагаемых вида $f_{j,k}(x)/N^{\alpha+k-j}$, а функция ${}_l\tilde\psi^\alpha_{n,N}(x)$ – суммой конечного (зависящего от α и l) числа слагаемых вида $\phi_{j,k}(x)/N^{\alpha+k-j}$. Можно ожидать, что если n и N находятся в определенной зависимости $n=n(N)$, то равенство (4.10.15) является асимптотической формулой при $N\to\infty$ для его левой части с остаточным членом ${}_l\psi^\alpha_{n,N}(x)$. При этом наибольший интерес представляет случай $0\leqslant x<\infty$. Здесь мы ограничимся случаем $0\leqslant x\leqslant 1$. Более полное рассмотрение этого вопроса содержится в [33].

Теорема 4.10.2. *Пусть $\alpha\geqslant 0$ и $l\geqslant 1$ – целые числа, $0\leqslant x\leqslant 1$, $2e^{\alpha+2}/(N\ln 2)<1$. Тогда имеет место следующая оценка:*

$$\left|{}_l\psi^\alpha_{n,N}(x)\right|\leqslant\left(\frac{2e^{\alpha+2}}{N\ln 2}\right)^{n+\alpha+l+1}\left(e^{1/2}+2^{-1/2}\right)\frac{\exp\left((n+2\alpha)^2/N\right)}{1-2e^{\alpha+2}/(N\ln 2)}$$

$$+\frac{e^{1/2}+2^{-1/2}}{(\alpha+l)!}\left[\frac{(2n+\alpha+l+1)^2}{N\ln 4}+\frac{(n+2\alpha)^2}{N}\right]^{\alpha+l}\exp\left(\frac{(2n+\alpha+l+1)^2}{N\ln 4}+\frac{(n+2\alpha)^2}{N}\right).$$

Доказательство. Оценим функцию $|\phi_{j,k}(x)|$ при $0\leqslant x\leqslant 1$. Из (4.10.7) и лемм 1.6.3, 1.6.4 и 1.5.2 имеем:

$$|\phi_{j,k}(x)|\leqslant\frac{j!}{k!}\frac{\left(e^{1/2}+2^{-1/2}\right)k^{2(k-n)}}{(k-n)!(\ln 4)^{k-n}}\binom{n+\alpha}{j}(2\alpha+n)^{n+\alpha-j}\binom{k}{j}$$

$$= \frac{k^{2(k-n)}(n+2\alpha)^{2(n+\alpha-j)}\left(e^{1/2}+2^{-1/2}\right)}{(k-j)!(k-n)!(\ln 4)^{k-n}(n+\alpha-j)!}. \tag{4.10.16}$$

Оценим функцию $\left|{}_l\psi_{n,N}^{\alpha}(x)\right|$. Представим ее в следующем виде:

$${}_l\psi_{n,N}^{\alpha}(x) = S_1 + S_2, \tag{4.10.17}$$

где

$$S_1 = \sum_{k=n}^{2n+\alpha+l}\sum_{j=0}^{a_l(k)} \frac{\phi_{j,k}(x)(-1)^{\alpha}}{N^{k-j+\alpha}}, \tag{4.10.18}$$

$$S_2 = {}_l\psi_{n,N}^{\alpha}(x) - S_1. \tag{4.10.19}$$

Рассмотрим сначала $|S_2|$. Так как $k/(k-n) < 2$ при $k > 2n+\alpha+1+l$ и по условию теоремы $4e^{\alpha+2}/(N\ln 4) < 1$, то из (4.10.16), (4.10.18), (4.10.19) и формулы Стирлинга имеем:

$$|S_2| \leqslant \sum_{k=2n+l+\alpha+1}^{\infty}(k-n)^{\alpha+1}\left(\frac{k^2e^2}{N(k-n)^2\ln 4}\right)^{k-n}\sum_{j=0}^{n+\alpha}\left(\frac{n+2\alpha}{N}\right)^{n+\alpha-j}\frac{e^{1/2}+2^{-1/2}}{(n+\alpha-j)!}$$

$$< \frac{\left(e^{1/2}+2^{-1/2}\right)\exp\left((n+2\alpha)^2/N\right)}{1-4e^2/(N\ln 4)}\left(\frac{4e^{\alpha+2}}{N\ln 4}\right)^{n+\alpha+l+1}. \tag{4.10.20}$$

Рассмотрим теперь $|S_1|$. Из (4.10.16) при $k \leqslant 2n+l+\alpha+1$ имеем:

$$\frac{|\phi_{j,k}(x)|}{N^{k-j+\alpha}} \leqslant \frac{p^{k-n}}{(k-n)!^2}\frac{q^{n+\alpha-j}}{(n+\alpha-j)!}\left(e^{1/2}+2^{-1/2}\right), \tag{4.10.21}$$

где

$$p = \frac{(2n+\alpha+l+1)^2}{N\ln 4}, \quad q = \frac{(n+2\alpha)^2}{N}. \tag{4.10.22}$$

Сравнивая (4.10.18), (4.10.19) и (4.10.21), находим:

$$\frac{|S_1|}{e^{1/2}+2^{-1/2}} \leqslant \sum_{k=n}^{2n+\alpha+l}\sum_{j=0}^{a_l(k)}\frac{p^{k-n}q^{n+\alpha-j}}{(k-n)!^2(n+\alpha-j)!}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=n}^{2n+\alpha+l}\sum_{j=0}^{n+\alpha} - \sum_{\substack{k\geqslant n\\ k-l<j\leqslant n+\alpha}}\right)\frac{p^{k-n}q^{n-j+\alpha}}{(k-n)!(n+\alpha-j)!}$$

$$< \exp(p+q) - \sum_{\substack{\nu+\mu\leqslant\alpha+l-1\\ \nu,\mu\geqslant 0}}\frac{p^{\nu}q^{\mu}}{\nu!\mu!} = \exp(p+q) - \sum_{s=0}^{\alpha+l-1}\frac{(p+q)^s}{s!}$$

$$= \sum_{s=\alpha+l}^{\infty}\frac{(p+q)^s}{s!} \leqslant \frac{(p+q)^{\alpha+l}}{(\alpha+l)!}\exp(p+q). \tag{4.10.23}$$

Утверждение теоремы 4.10.2 вытекает из оценок (4.10.20) и (4.10.23).

Следствие 4.10.2. *Пусть* $0 \leqslant \alpha$ *– целое,* $2e^{\alpha+2}/(N\ln 2) < 1$. *Тогда*

$$\left[e^{-n\delta}(n+1)_{\alpha}\right]^{1/2}(-\delta)^{\alpha}(Nx+1)_{\alpha}m_{n.N}^{\alpha}(x)$$

$$= \psi_{n,N}^{\alpha}(x) + \sum_{(j,k)\in U_n^{\alpha}} \frac{(-1)^{j+n}}{(k-n)!} \left(\frac{n^2}{2}\right)^{k-n} \binom{n+\alpha}{j} \left(\frac{j}{2}\right)^{n+\alpha-j} \frac{1+\delta_{k,j}}{N^{k-j+\alpha}} x^{j-k} L_k^{j-k}(x), \tag{4.10.24}$$

где $\delta_{k,j} = \delta_{k,j}(n,\alpha) = o(1)$,

$$\psi_{n,N}^{\alpha}(x) = O\left(\left(\frac{n^2}{N}\right)^{\alpha+1} \exp\left(\frac{(2n+\alpha+2)^2}{N\ln 4} + \frac{(n+2\alpha)^2}{N}\right)\right).$$

Это утверждение вытекает непосредственно из теоремы 4.10.2 при $l = 1$ с учетом асимптотических формул для чисел $s(n,m,\gamma)$ и $\sigma(k,n)$ (см.§1.6) и равенств (4.10.9) – (4.10.11).

§ 4.11. Асимптотика полиномов $m_{n,N}^0(x)$

Отдельного рассмотрения заслуживают полиномы Мейкснера $m_{n,N}^0(x)$. В этом случае U_n^0 (см.(4.10.6)) состоит из одного элемента (n,n), поэтому из (4.10.9) и (4.10.10) следует, что

$$F_{n,N}^0(x) = f_{n,n}(x) = L_n^0(x). \tag{4.11.1}$$

Так как $s(n+\alpha, j, 0) = s(n,j)$, то и из (4.10.7) имеем:

$$\phi_{j,k}(x) = \frac{j!}{k!}\sigma(k,n)s(n,j)(-1)^{k-j}L_j^{k-j}(x). \tag{4.11.2}$$

По (4.11.1) и (4.10.15),

$$e^{-n\delta/2} m_{n,N}^0(x) = L_n^0(x) + {}_l\tilde{\psi}_{n,N}^0(x) + {}_l\psi_{n,N}^0(x). \tag{4.11.3}$$

В частности, замечая, что

$${}_2\tilde{\psi}_{n,N}^0(x) = \frac{1}{N}\left[\frac{s(n,n-1)}{n}L_{n-1}^1(x) + \frac{\sigma(n+1,n)}{n+1}L_n^1(x)\right],$$

и учитывая (1.6.6) и (1.6.23), из (4.11.3) имеем:

$$e^{-n\delta/2} m_{n,N}^0(x) = L_n^0(x) + \frac{1}{N}\left[\frac{n}{2}L_n^1(x) - \frac{n-1}{2}L_{n-1}^1(x)\right] + {}_2\psi_{n,N}^0(x)$$

$$= L_n^0(x) - \frac{n}{2N}\left[L_n^1(x) - L_{n-1}^1(x)\right] - \frac{1}{2N}L_{n-1}^1(x) + {}_2\psi_{n,N}^0(x)$$

$$= \left(1 - \frac{n}{2N}\right)L_n^0(x) - \frac{1}{2N}L_{n-1}^1(x) + {}_2\psi_{n,N}^0(x) \tag{4.11.4}$$

(мы здесь воспользовались равенством (1.5.8)). С другой стороны, в силу формулы Тейлора и равенства (1.5.9) имеем:

$$L_n^0(x+\eta) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}\eta^r L_{n-r}^r(x). \tag{4.11.5}$$

Полагая $\eta = 1/(2N)$, из (4.11.4) и (4.11.5) получаем:

$$m_{n,N}^0(x) = e^{n/(2N)}\left(1 - \frac{n}{2N}\right)L_n^0\left(x + \frac{1}{2N}\right)$$

$$+e^{\frac{n}{2N}}\left[-\frac{n}{(2N)^2}L_{n-1}^1(x)-\left(1-\frac{n}{2N}\right)\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{r!}\left(-\frac{1}{2N}\right)^r L_{n-r}^r(x)+{}_2\psi_{n,N}^0(x)\right]. \qquad (4.11.6)$$

Положим

$$g_n=g_{n,N}=\left(1-\frac{n}{2N}\right)\left(e^{n/(2N)}-1-\frac{n}{2N}\right)-\left(\frac{n}{2N}\right)^2 \qquad (4.11.7)$$

и перепишем (4.11.6) в следующем виде:

$$m_{n,N}^0(x)=L_n^0\left(x+\frac{1}{2N}\right)+X_n(x), \qquad (4.11.8)$$

где

$$X_n(x)=g_nL_n^0\left(x+\frac{1}{2N}\right)+e^{\frac{n}{2N}}\left[{}_2\psi_{n,N}^0(x)-\frac{n}{(2N)^2}L_{n-1}^1(x)\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{n}{2N}\right)\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{r!}\left(-\frac{1}{2N}\right)^r L_{n-r}^r(x)\right]. \qquad (4.11.9)$$

Ниже мы покажем, что при определенных условиях на параметры n,N и x равенство (4.11.8) является асимптотической формулой по N^{-1} $(N\to\infty)$ для полинома $m_{n,N}^0(x)$. Существенной особенностью формулы (4.11.8) является то, что $X_n(x)=O\left(N^{-2}\right)$ для ее остаточного члена, в то время как для остаточного члена ${}_1\psi_{n,N}^0(x)$ формулы (4.12.3) при $l=1$ имеет место оценка ${}_1\psi_{n,N}^0(x)=O\left(N^{-1}\right)$.

Теорема 4.11.1. *Пусть $x>0$, $N>0$,*

$$\frac{e^2}{N\ln 2}\left[1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right]\leqslant\sigma<1.$$

Тогда

$$|X_n(x)|\leqslant$$
$$\frac{cn^3}{N^2n^{1/12}}\left(x^{-5/4}+x^{-3/4}\right)\exp\left\{\frac{x}{2}+\frac{n}{2N}+\frac{(n+1)^{3/2}}{N}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{1/2}\left(2+\frac{2e}{\ln 2}\right)+\frac{\sqrt{2}e^2}{\ln 2}\right]\right\},$$

где $c=c(\sigma)$.

Доказательство. Для оценки $|X_n(x)|$ обратимся к равенству (4.11.9). Оценим $\left|{}_2\psi_{n,N}^0(x)\right|$. С этой целью представим ${}_2\psi_{n,N}^0(x)$ в следующем виде:

$${}_2\psi_{n,N}^0(x)=S_1+S_2+S_3, \qquad (4.11.10)$$

где

$$S_1=\sum_{(j,k)\in\mathcal{K}_1}\frac{\phi_{j,k}(x)}{N^{k-j}},\quad S_2=\sum_{(j,k)\in\mathcal{K}_2}\frac{\phi_{j,k}(x)}{N^{k-j}}, \qquad (4.11.11)$$

$$S_3=\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\phi_{j,n}(x)}{N^{n-j}}, \qquad (4.11.12)$$

$$\mathcal{K}_1=\{(j,n+1)|0\leqslant j\leqslant n-1\}\cup\{(j,k)|0\leqslant j\leqslant n,n+2\leqslant k\leqslant 2n\},$$
$$\mathcal{K}_2=\{(j,k)|0\leqslant j\leqslant n,k\geqslant 2n+1\}.$$

Из равенства (4.10.7) и лемм 1.6.3, 1.6.4 и 1.5.5 при $x>0$ имеем:

$$\frac{|\phi_{j,k}(x)|}{N^{k-j}}\leqslant\kappa^{(1)}n^{5/12}x^{-3/4}e^{x/2}\lambda_{j,k}(x), \qquad (4.11.13)$$

где ($s=\min\{j,k-n-1\}$)

$$\lambda_{j,k}(x)=\left(\frac{2}{x}\right)^{(n-j)/2}\left[1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right]^{k-n-1}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-j}$$

$$\times\left(\frac{(2n+2)!}{(n+j+2-s)!}\right)^{1/2}\frac{k^{2(k-n)}n!n^{n-j}}{(k-n)!(\ln 4)^{k-n)}(n-j)!k!}. \qquad (4.11.14)$$

Если $(j,k)\in\mathcal{K}_1$, то $s\leqslant k-n-1$ и

$$\left(\frac{(2n+2)!}{(n+j+2-s)!}\right)^{1/2}\leqslant\left(\frac{(2n+2)!}{(2n+j+3-k)!}\right)^{1/2}<(2n+2)^{(k-j-1)/2}.$$

Поэтому с помощью формулы Стирлинга для $n!$ и $k!$ из (4.11.4) при ($k\leqslant 2n$) находим:

$$\lambda_{j,k}(x)=\left(\frac{2}{x}\right)^{(n-j)/2}\left[1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right]^{k-n-1}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-j}$$

$$\times(2n+2)^{(k-j-1)/2}\frac{(2n)^{k-n}n^{n-j}\exp(k-n+1/(12n))}{(k-n)!(\ln 4)^{k-n}(n-j)!}$$

$$=\frac{2n\exp(1+1/(2n))}{N(n-j)!\ln 4}\frac{1}{(k-n)!}\left[\frac{2n(n+1)^{1/2}}{x^{1/2}N}\right]^{n-j}$$

$$\times\left[\frac{2^{3/2}en(n+1)^{1/2}}{N\ln 4}\left(1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right)\right]^{k-n-1}.$$

Отсюда

$$\sum_{(j,k)\in\mathcal{K}_1}\lambda_{j,k}(x)\leqslant\frac{(2n)^2(n+1)^{1/2}e^2}{N^2x^{1/2}\ln 4}\left(\frac{\sqrt{2}}{\ln 4}\left(x^{1/2}+\sqrt{2}\right)+1\right)$$

$$\times\exp\left\{\frac{2n(n+1)^{1/2}}{Nx^{1/2}}+\frac{2^{3/2}en(n+1)^{1/2}}{N\ln 4}\left(1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right)\right\}. \qquad (4.11.15)$$

Сравнивая (4.11.11), (4.11.13) и (4.11.15), получаем:

$$|S_1|\leqslant\kappa^{(1)}x^{-5/4}e^{x/2}\frac{n^{5/12}(n+1)^{1/2}(2n)^2}{N^2\ln 4}$$

$$\times\exp\left\{\frac{2n(n+1)^{1/2}}{Nx^{1/2}}+\frac{2^{3/2}en(n+1)^{1/2}}{N\ln 4}\left(1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right)\right\}. \qquad (4.11.16)$$

Если $(j,k)\in\mathcal{K}_2$, то $s=\min\{j,k-n-1\}=j$ и

$$\frac{(2n+2)!}{(n+j+2-s)!}=\frac{(2n+2)!}{(n+2)!}<(2n+2)^n. \qquad (4.11.17)$$

Из (4.11.14), (4.11.17) и формулы Стирлинга при $k\geqslant 2n+1$ имеем:

$$\lambda_{j,k}(x)\leqslant\left(\frac{2}{x}\right)^{(n-j)/2}\left[1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right]^{k-n-1}$$

$$\times\left(\frac{1}{N}\right)^{k-j}\frac{(2n+2)^{n/2}}{(k-n)^{k-n}}\frac{n^{n-j}k^{2(k-n)}e^{2(k-n)}}{(k\ln 4)^{k-n}2^n(n-j)!}$$

$$< \frac{2e^2}{N\ln 4}\left[\frac{\sqrt{2}e^2(n+1)^{1/2}}{N\ln 4}\left(1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right)\right]^n\frac{1}{(n-j)!}$$

$$\times\left[\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\frac{n}{N}\right]^{n-j}\left[\frac{e^2}{N\ln 2}\left(1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right)\right]^{k-2n-1}. \qquad (4.11.18)$$

Сопоставляя (4.11.11), (4.11.13), (4.11.18) с условиями теоремы 4.11.1, находим ($a^n \leqslant \exp(na)$, $a>0$):

$$|S_2| \leqslant \kappa^{(1)}n^{5/12}x^{-3/4}e^{x/2}\frac{2e^2}{N\ln 4}$$

$$\times\left[\frac{\sqrt{2}e^2(n+1)^{1/2}}{N\ln 4}\left(1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right)\right]^n\frac{1}{1-\sigma}\exp\left[\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\frac{n}{N}\right]$$

$$< \frac{\kappa^{(1)}}{1-\sigma}\frac{n^{5/12}}{x^{3/4}}\frac{e^{x/2}2e^2}{N\ln 4}\frac{\sqrt{2}e^2(n+1)^{1/2}}{N\ln 4}\left(1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right)$$

$$\times\exp\left\{\frac{\sqrt{2}e^2(n+1)^{3/2}}{N\ln 4}\left(1+\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right)+\frac{n}{N}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right\}. \qquad (4.11.19)$$

Оценим $|S_3|$. Полагая $k=n$ и учитывая (1.5.28) и (1.5.29), из (4.11.2) и лемм 1.6.3, 1.5.5 имеем:

$$\frac{|\phi_{j,n}(x)|}{N^{n-j}} = \frac{j!}{n!}|s(n,j)|\frac{1}{N^{n-j}}\left|L_j^{n-j}(x)\right|$$

$$= \frac{j!}{n!}|s(n,j)|\frac{1}{N^{n-j}}x^{(j-n)/2-1/4}e^{x/2}\left|u_j(x,n-j)\right|$$

$$\leqslant \frac{j!n!n^{n-j}x^{(j-n)/2-1/4}}{n!j!(n-j)!N^{n-j}}e^{x/2}\max_{x\geqslant 0}|u_{n-1}(x,1)|\,(4n)^{(n-j-1)/2}$$

$$\leqslant \left[\frac{2n^{3/2}}{N}x^{-1/2}\right]^{n-j}\frac{\kappa^{(1)}n^{5/12}}{2n^{1/2}(n-j)!}x^{-1/4}e^{x/2}. \qquad (4.11.20)$$

Из (4.11.12) и (4.11.20) заключаем, что

$$|S_3| < \frac{\kappa^{(1)}}{4}n^{-1/12}x^{-1/4}e^{x/2}\left[\frac{2n^{3/2}}{Nx^{1/2}}\right]^2\exp\left(\frac{2n^{3/2}}{N}x^{-1/2}\right). \qquad (4.11.21)$$

Сопоставляя оценки (4.11.16), (4.11.19) и (4.11.21) с равенством (4.11.10), получаем неравенство

$$\left|{}_2\psi^0_{n,N}(x)\right| \leqslant c_1(\sigma)\frac{n^{3-1/12}}{N^2}\left(x^{-5/4}+x^{-3/4}\right)$$

$$\times\exp\left\{\frac{x}{2}+\frac{(n+1)^{3/2}}{N}\left[x^{-1/2}\left(2+\frac{2e}{\ln 2}\right)+\frac{\sqrt{2}e^2}{\ln 2}\right]\right\}. \qquad (3.11.22)$$

Далее, из (1.5.28) и (1.5.29) и из леммы 1.5.5 при $x>0$ следует:

$$\left|\sum_{r=2}^n\frac{1}{r!N^r}L^r_{n-r}(x)\right| = x^{-1/4}e^{x/2}\left|\sum_{r=2}^n\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{Nx^{1/2}}\right)^r u_{n-r}(x,r)\right|$$

$$\leqslant x^{-1/4}e^{x/2}\sum_{r=2}^n\frac{1}{r!}\left(\frac{x^{-1/2}}{N}\right)^r(4n)^{(r-1)/2}\max_{x\geqslant 0}|u_{n-1}(x,1)|$$

$$\leqslant \kappa^{(1)} n^{5/12} x^{-1/4} e^{x/2} \frac{1}{2} n^{-1/2} \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r!} \left[\frac{2n^{1/2}}{N} x^{-1/2}\right]^r$$

$$< \kappa^{(1)} x^{-1/4} e^{x/2} \frac{1}{4} n^{-1/12} \left[\frac{2n^{1/2}}{Nx^{1/2}}\right]^2 \exp\left[\frac{2n^{1/2}}{Nx^{1/2}}\right]. \tag{4.11.23}$$

Наконец, из (4.11.7), (1.5.28) и (1.5.29) при $x > 0$ имеем:

$$\left|g_n L_n^0\left(x + \frac{1}{2N}\right)\right| \leqslant \left(\frac{n}{2N}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\left|1 - \frac{n}{2N}\right| e^{n/(2N)} + 1\right)$$

$$\times \kappa^{(0)} n^{-1/12} \left(x + \frac{1}{2N}\right)^{-1/4} \exp\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2N}\right)\right), \tag{4.11.24}$$

$$\left|L_{n-1}^1(x)\right| \leqslant \kappa^{(1)} n^{5/12} x^{-5/4} e^{x/2}. \tag{4.11.25}$$

Собирая оценки (4.11.22) – (4.11.25) и сопоставляя их с равенством (4.11.9), убеждаемся в справедливости теоремы 4.11.1.

§ 4.12. Асимптотические свойства $M_{n,N}^\alpha(x)$ для произвольного $\alpha > -1$

Если α – дробное число, то весовая функция

$$\rho(x) = q^x \frac{\Gamma(x + \alpha + 1)}{\Gamma(x + 1)}$$

не является целой. Поэтому асимптотические свойства полиномов Мейкснера $m_{n,N}^\alpha(x)$ в этом случае не могут быть изучены теми методами, которые применялись в §§4.10, 4.11 в случае целого α.

Рассмотрим сначала асимптотическое поведение полиномов Мейкснера $M_{n,N}^\alpha(x)$ при $x = O(1/n), \quad n = O(N)$.

Теорема 4.12.1. *Пусть $\alpha > -1$ – произвольное число, $\lambda, p > 0$, $1 \leqslant n$, $|x| \leqslant p/n$. Тогда имеет место формула*

$$M_{n,N}^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) + w_{n,N}^\alpha(x),$$

для остаточного члена $w_{n,N}^\alpha(x)$ которой при $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$ справедлива оценка

$$|w_{n,N}^\alpha(x)| \leqslant c(\alpha, \lambda, p) \frac{n^{\alpha+1}}{N}.$$

Доказательство. Из равенства (4.2.1), имеем ($\delta = 1/N$):

$$M_{n,N}^\alpha(x) = \binom{n + \alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]} (Nx)^{[k]}}{(\alpha + 1)_k k!} \left(1 - e^\delta\right)^k. \tag{4.12.1}$$

По (1.6.1),

$$(Nx)^{[k]} = \sum_{j=1}^{k} s(k, j) (Nx)^j. \tag{4.12.2}$$

Из (4.12.1) и (4.12.2) имеем:

$$M_{n,N}^\alpha(x) = \binom{n + \alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]} \left[xN\left(1 - e^\delta\right)\right]^k}{(\alpha + 1)_k k!}$$

$$+\binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n^{[k]}\left[N\left(1-e^{\delta}\right)\right]^{k}}{(\alpha+1)_k k!}\sum_{j=1}^{k-1}s(k,j)x^jN^{j-k}=R_1+R_2. \qquad (4.12.3)$$

Сравнивая (4.12.3) с (1.5.6), замечаем, что

$$R_1=L_n^\alpha\left(xN\left(e^{\delta}-1\right)\right). \qquad (4.12.4)$$

Так как (см. (1.6.1))

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}|s(k,j)|=1, \qquad (4.12.5)$$

то при $|x|\leqslant p/n$, $2\leqslant k\leqslant n\leqslant\lambda N$ имеем:

$$\left|\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k-1}s(k,j)x^jN^{j-k}\right|\leqslant\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k-1}|s(k,j)|\left(\frac{p}{n}\right)^jN^{j-k}$$

$$\leqslant\frac{1}{n^kk!}\sum_{j=1}^{k-1}|s(k,j)|p^j\left(\frac{n}{N}\right)^{k-j}\leqslant\frac{n}{Nn^kk!}\sum_{j=1}^{k-1}|s(k,j)|p^j\lambda^{k-j-1}$$

$$\leqslant\frac{n}{Nn^{2k}k!}\sum_{j=1}^{k-1}|s(k,j)|\left(1+\frac{p}{\lambda}\right)^j\lambda^{k-1}\leqslant\frac{n(\lambda+p)^{k-1}}{Nn^{2k}}. \qquad (4.12.6)$$

Кроме того,

$$\left[N\left(e^{\delta}-1\right)\right]^k=\left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^k<e^{k\delta}, \qquad (4.12.7)$$

$$(\alpha+1)_k>(\alpha+1)(k-1)! \quad (\alpha>-1), \qquad (4.12.8)$$

$$\binom{n+\alpha}{n}\leqslant c(\alpha)n^{\alpha}. \qquad (4.12.9)$$

Из (4.12.3), (4.12.6) – (4.12.8), находим:

$$|R_2|\leqslant\frac{n}{N}e^{\delta}\binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n^{[k]}}{(\alpha+1)_kn^k}\left[e^{\delta}(\lambda+p)\right]^{k-1}$$

$$<c(\alpha,\lambda,p)\frac{n^{\alpha+1}}{N}. \qquad (4.12.10)$$

В силу (4.12.3), (4.12.4) и (4.12.10),

$$M_{n,N}^\alpha(x)=L_n^\alpha\left(xN\left(e^{\delta}-1\right)\right)+\bar{w}_{n,N}^\alpha(x); \qquad (4.12.11)$$

здесь

$$\left|\bar{w}_{n,N}^\alpha(x)\right|\leqslant c(\alpha,\lambda,p)\frac{n^{\alpha+1}}{N}.$$

Далее,

$$N\left(e^{\delta}-1\right)=\frac{e^{\delta}-1}{\delta}=1+\delta\varphi(\delta), \quad \varphi(\delta)<e^{\delta}.$$

Отсюда по теореме Лагранжа о среднем из равенства (1.5.9) получаем:

$$L_n^\alpha\left(xN\left(e^{\delta}-1\right)\right)=L_n^\alpha(x+x\delta\varphi(\delta))$$

$$=L_n^\alpha(x)-L_{n-1}^{\alpha+1}(x(1+\theta)\delta\varphi(\delta))x\delta\varphi(\delta), \quad 0<\theta<1. \qquad (4.12.12)$$

Так как

$$\left|L_{n-1}^{\alpha+1}(x(1+\theta)\delta\varphi(\delta))\right| \leqslant c(\alpha,\lambda,p)n^{\alpha+1} \tag{4.12.13}$$

силу (1.5.36) при $|x| \leqslant p/n$ и $n \leqslant \lambda N$, то утверждение теоремы 4.12.1 следует из (4.12.11) – (4.12.13).

Перейдем к исследованию асимптотического поведения полиномов $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ при $\alpha > -1$ и произвольном x. Положим

$$M_{n,N}^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \psi_{k,n}(\delta) L_k^{\alpha}(x), \quad (\delta = 1/N) \tag{4.12.14}$$

где $\psi_{k,n}(\delta) = \psi_{k,n}(\delta, \alpha)$.

Лемма 4.12.1. *Коэффициенты $\psi_{k,n}(\delta)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ представляют собой целые функции переменной δ, причем*

$$\psi_{n,n}(\delta) = \left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^{n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.12.15}$$

$$\psi_{k,n}(0) = 0, \quad k = 0, 1 \ldots, n-1. \tag{4.12.16}$$

Доказательство. Из (4.12.3) и (1.5.6) имеем:

$$M_{n,N}^{\alpha}(x) = L_n^{\alpha}\left(x\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)$$

$$+\delta\binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k \frac{n^{[k]}}{(\alpha+1)_k k!}\left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^{k}\sum_{j=1}^{k-1} s(k,j)x^j\delta^{k-j-1}. \tag{4.12.17}$$

С другой стороны (см. [5], стр.391),

$$x^j = j!\sum_{\nu=0}^{j}\binom{j+\alpha}{j-\nu}(-1)^{\nu}L_{\nu}^{\alpha}(x). \tag{4.12.18}$$

Сравнивая (4.12.17) с (4.12.18), замечаем, что коэффициенты $\psi_{k,n}(\delta)$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций функций вида $\delta^m\left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^{l}$, где m, l – неотрицательные целые числа. Поэтому $\psi_{k,n}(\delta)$ представляют собой целые функции. Равенства (4.12.15) и (4.12.16) также непосредственно вытекают из (4.12.17) и (4.12.18). Лемма 4.12.1 доказана.

Лемма 4.12.2. *Пусть $r = r(\delta) = \left(e^{\delta}-1\right)/\delta$. Тогда для коэффициентов $\psi_{s,n}(\delta)$ $(s = 0, 1, \ldots n, \quad n = 0, 1, \ldots)$ разложения (4.12.14) имеет место равенство*
$\psi'_{s,n}(\delta) =$

$$\frac{1}{r}\sum_{\nu=s}^{n}\left[\nu r'_{n-\nu+1}(\delta) - \left(\nu\left(e^{\delta}+1\right)+\alpha+1\right)r'_{n-\nu}(\delta) + (\nu+\alpha+1)e^{\delta}r'_{n-\nu-1}(\delta)\right]\psi_{s,\nu}(\delta),$$

где $r_{\nu}(\delta) = r(\nu\delta)$ $\quad(\nu = 1, 2, \ldots)$, $r_0(\delta) = 1$, $r_{-1}(\delta) = 0$.

Доказательство. Из (4.4.1) и (4.4.3) имеем:

$$\varphi(\delta) = \varphi(\delta, x, \omega) = (1-\omega)^{-\alpha-1}\left(\frac{1-\omega e^{\delta}}{1-\omega}\right)^{x/\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{n,N}^{\alpha}(x)\omega^n. \tag{4.12.19}$$

Очевидно,
$$\varphi'(\delta)=\varphi(\delta)x\left(\frac{1}{\delta}\ln\frac{1-\omega e^{\delta}}{1-\omega}\right)'. \tag{4.12.20}$$
Поскольку
$$\frac{1}{\delta}\ln\frac{1-\omega e^{\delta}}{1-\omega}=\frac{1}{\delta}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\omega^{\nu}}{\nu}-\sum_{\nu=1}^{\infty}e^{\nu\delta}\frac{\omega^{\nu}}{\nu}\right)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}r_{\nu}(\delta)\omega^{k} \tag{4.12.21}$$
для произвольного δ и достаточно малого по модулю ω, то из (4.12.19), (4.12.20) и (4.12.21) имеем:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}\psi'_{s,n}(\delta)L_s^{\alpha}(x)\right)\omega^{n}=-\sum_{n=0}^{\infty}xM_{n,N}^{\alpha}(x)\omega^{n}\sum_{k=1}^{\infty}r'_k(\delta)\omega^{k}.$$
Умножаем ряды:
$$\sum_{s=0}^{n}\psi'_{s,n}(\delta)L_s^{\alpha}(x)=-\sum_{\nu=0}^{n-1}xM_{\nu,N}^{\alpha}(x)r'_{n-\nu}(\delta).$$
Из рекуррентного соотношения (4.5.1) получаем: $M_{-1,N}^{\alpha}(x)=0$, $M_{0,N}^{\alpha}(x)=1$,
$$xM_{\nu,N}^{\alpha}(x)=\frac{1}{r(\delta)}\left[-(\nu+1)M_{\nu+1,N}^{\alpha}(x)\right.$$
$$\left.+\left(\nu\left(e^{\delta}+1\right)+\alpha+1\right)M_{\nu,N}^{\alpha}(x)-(\nu+\alpha)e^{\delta}M_{\nu-1,N}^{\alpha}(x)\right].$$
Сравнивая эти равенства, имеем:
$$\sum_{s=0}^{n}\psi'_{s,n}(\delta)L_s^{\alpha}(x)=\frac{1}{r(\delta)}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[(\nu+1)M_{\nu+1,N}^{\alpha}(x)-\left(\nu\left(e^{\delta}+1\right)+\alpha+1\right)M_{\nu,N}^{\alpha}(x)\right.$$
$$\left.+(\nu+\alpha)e^{\delta}M_{\nu-1,N}^{\alpha}(x)\right]r'_{n-\nu}(\delta). \tag{4.12.22}$$
Представим каждый из полиномов $M_{\nu+1,N}^{\alpha}(x)$, $M_{\nu,N}(x)$ и $M_{\nu-1,N}^{\alpha}(x)$ по формуле (4.12.14) и подставим в (4.12.22). Сравнивая коэффициенты при $L_s^{\alpha}(x)$ $(0\leqslant s\leqslant n)$ в обоих частях полученного равенства, получим:
$$\psi'_{s,n}(\delta)=\frac{1}{r(\delta)}\sum_{\nu=s-1}^{n-1}\left[(\nu+1)\psi_{s,\nu+1}(\delta)-\left(\nu\left(e^{\delta}+1\right)+\alpha+1\right)\psi_{s,\nu}(\delta)\right.$$
$$\left.+(\nu+\alpha)e^{\delta}\psi_{s,\nu-1}(\delta)\right]r'_{n-\nu}(\delta),$$
где $\psi_{s,s-2}(\delta)=\psi_{s,s-1}(\delta)=0$. Перепишем последнее равенство в виде
$$\psi'_{s,n}(\delta)=\frac{1}{r(\delta)}\sum_{\nu=s-1}^{n-1}(\nu+1)\psi_{s,\nu+1}(\delta)r'_{n-\nu}(\delta)$$
$$+\frac{1}{r(\delta)}\left[-\sum_{\nu=s}^{n-1}\left(\nu(e^{\delta}+1)+\alpha+1\right)\psi_{s,\nu}(\delta)r'_{n-\nu}(\delta)+\sum_{\nu=s+1}^{n-1}e^{\delta}(\nu+\alpha)\psi_{s,\nu-1}(\delta)r'_{n-\nu}(\delta)\right].$$
В первой из этих сумм заменим индекс суммирования ν на $\nu-1$, а в последней – на $\nu+1$. Тогда
$$\psi'_{s,n}(\delta)=\frac{1}{r(\delta)}\left[\sum_{\nu=s}^{n}\nu\psi_{s,\nu}(\delta)r'_{n-\nu+1}(\delta)\right.$$

$$-\sum_{\nu=s}^{n-1}\left(\nu(e^{\delta}+1)+\alpha+1\right)\psi_{s,\nu}(\delta)r'_{n-\nu}(\delta)+\sum_{\nu=s}^{n-1}e^{\delta}(\nu+\alpha+1)\psi_{s,\nu}(\delta)r'_{n-\nu-1}(\delta)\Bigg].$$

Поскольку $r'_0(\delta) = r'_{-1}(\delta) = 0$, то последнее равенство совпадает с утверждением леммы 4.12.2.

Положим

$$f_{\nu}(\delta)=\nu r'_{n-\nu+1}(\delta)-\left(\nu\left(e^{\delta}+1\right)+\alpha+1\right)r'_{n-\nu}(\delta)$$
$$+(\nu+\alpha+1)e^{\delta}r'_{n-\nu-1}(\delta), \tag{4.12.23}$$

в частности, $f_n(\delta) = nr'(\delta)/r(\delta)$. Тогда из леммы 4.12.2 имеем:

$$\psi'_{s,n}(\delta)=\frac{1}{r(\delta)}\sum_{\nu=s}^{n-1}f_{\nu}(\delta)\psi_{s,\nu}(\delta)+n\frac{r'(\delta)}{r(\delta)}\psi_{s,n}(\delta). \tag{4.12.24}$$

Полагая $\psi(\delta) = \psi_{s,n}(\delta)$ и

$$p(\delta)=f_n(\delta)=n\frac{r'(\delta)}{r(\delta)},\quad q(\delta)=\frac{1}{r(\delta)}\sum_{\nu=s}^{n-1}f_{\nu}(\delta)\psi_{s,\nu}(\delta), \tag{4.12.25}$$

перепишем (4.12.24) в виде следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\psi'(\delta)=p(\delta)\psi(\delta)+q(\delta). \tag{1.12.26}$$

Поскольку $\psi_{s,n}(0) = 0$ при $s < n$ по лемме 4.12.1, то решение уравнения (1.12.25) можно записать в виде:

$$\psi(\delta)=e^{\int_0^{\delta}p(t)dt}\int_0^{\delta}q(\tau)e^{-\int_0^{\tau}p(t)dt}d\tau.$$

По (4.12.25),

$$\int_0^{\delta}p(t)dt=n\int_0^{\delta}\frac{r'(t)}{r(t)}dt=n[\ln r(\delta)-\ln r(0)]=n\ln r(\delta).$$

Поэтому

$$\psi(\delta)=r^n(\delta)\int_0^{\delta}q(\tau)r^{-n}(\tau)d\tau. \tag{4.12.27}$$

Для заданной последовательности $a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ положим

$$\Delta a_m=a_{m+1}-a_m,\quad \Delta^2a_m=\Delta\left(\Delta a_m\right),\Delta^3a_m=\Delta\left(\Delta^2a_m\right),\ldots.$$

Тогда мы можем переписать (4.12.23) в следующем виде:

$$f_{\nu}(\delta)=\nu\Delta^2r'_{n-\nu-1}(\delta)-\left[\left(e^t-1\right)\nu-\alpha-1\right]\Delta r'_{n-\nu-1}(\delta)$$
$$+(\alpha+1)(e^t-1)r'_{n-\nu-1}(\delta). \tag{4.12.28}$$

Сопоставляя это равенство с (4.12.25) и (4.12.27), мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 4.12.3. *Пусть $s \leqslant n-1$. Тогда*

$$\psi_{s,n}(\delta)=r^n(\delta)\int\limits_0^{\delta}r^{-n-1}(\tau)\sum_{\nu=s}^{n-1}\psi_{s,\nu}(\tau)\left\{\nu\Delta^2r'_{n-\nu-1}(\tau)\right.$$

$$-\left[(e^\tau-1)\,\nu-\alpha-1\right]\Delta r'_{n-\nu-1}(\tau)+(\alpha+1)\,(e^\tau-1)\,r'_{n-\nu-1}(\tau)\Big\}\,d\tau.$$

Оценим $|f_\nu(\tau)|$ при $0\leqslant\tau\leqslant\delta, n\delta\leqslant\lambda$. Имеем:

$$r_k(\tau)=\frac{e^{k\tau}-1}{k\tau}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(k\tau)^j}{(j+1)!}\quad(k=1,2,\ldots).$$

Отсюда

$$r'_k(\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{k^j j\tau^{j-1}}{(j+1)!}<ke^{k\tau},\tag{4.12.29}$$

$$\Delta r'_{k-1}(\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{k^j-(k-1)^j}{(j+1)!}j\tau^{j-1}<e^{k\tau},\tag{4.12.30}$$

$$\Delta^2 r'_{k-1}(\tau)=\tau\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\Delta^2(k-1)^j}{(j+1)!}j\tau^{j-2}<$$

$$\tau\sum_{j=2}^{\infty}\frac{j^2(j-1)(k+1)^{j-2}}{(j+1)!}\tau^{j-2}<\tau e^{(k+1)\tau}.\tag{4.12.31}$$

Далее заметим, что

$$e^\tau-1<\tau e^\tau.\tag{4.12.32}$$

Из (4.12.28) – (4.12.32) при $0<\tau\leqslant\delta$, $\delta n\leqslant\lambda$, $\nu\leqslant n-1$ находим:

$$|f_\nu(\tau)|\leqslant c(\lambda,\alpha).\tag{4.12.33}$$

Сравнивая оценку (4.12.32) с леммой 4.12.3, получаем:

$$|\psi_{s,n}(\delta)|\leqslant c(\alpha,\lambda)r^n(\delta)\int\limits_0^\delta r^{-n-1}(\tau)\sum_{\nu=s}^{n-1}|\psi_{s,\nu}(\tau)|d\tau\quad(n\delta\leqslant\lambda).$$

Поскольку $r(\tau)\geqslant 1\quad(0\leqslant\tau)$, то

$$|\psi_{s,n}(\delta)|\leqslant c(\alpha,\lambda)r^n(\delta)\int\limits_0^\delta\sum_{\nu=s}^{n-1}|\psi_{s,\nu}(\tau)|d\tau.$$

Положим

$$\bar\psi_{s,\nu}(\delta)=\max_{0\leqslant\tau\leqslant\delta}|\psi_{s,\nu}(\tau)|.$$

Тогда из предыдущего неравенства выводим $(s\leqslant n-1)$:

$$\bar\psi_{s,n}(\delta)\leqslant c(\alpha,\lambda)r^n(\delta)\delta\sum_{\nu=s}^{n-1}\bar\psi_{s,\nu}(\delta).\tag{4.12.34}$$

Далее,

$$r^n(\delta)=\left(\frac{e^\delta-1}{\delta}\right)^n\leqslant e^{n\delta}\leqslant e^\lambda\quad(n\delta\leqslant\lambda)\tag{4.12.35}$$

в силу (4.12.32). Поэтому (4.12.34) можно переписать так:

$$\bar{\psi}_{s,n}(\delta) \leqslant c_1(\alpha,\lambda)\delta \sum_{\nu=s}^{n-1} \bar{\psi}_{s,\nu}(\delta) \quad (s \leqslant n-1). \tag{4.12.36}$$

Лемма 4.12.4. *Если неотрицательные числа $x_s, x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots$ удовлетворяют неравенству*

$$x_n \leqslant g \sum_{\nu=s}^{n-1} x_\nu, \tag{4.12.37}$$

где $g > 0$, то

$$x_n \leqslant g x_s (1+g)^{n-s-1} \tag{4.12.38}$$

при всех $n = s+1, s+2, \ldots$.

Доказательство. Пусть $n = s+1$. Тогда из (4.12.37) имеем: $x_{s+1} \leqslant g x_s$, т.е.(4.12.38) верно при $n = s+1$. Пусть (4.12.38) верно для всех x_n $(s+1 \leqslant n \leqslant k-1)$. Тогда из (4.12.37) и (4.12.38) имеем:

$$x_k \leqslant g x_s + g \sum_{\nu=s+1}^{k-1} x_\nu \leqslant g x_s + g \sum_{\nu=s+1}^{k-1} g x_s (1+g)^{\nu-s-1}$$

$$= g x_s \left(1 + g \sum_{\nu=s+1}^{k-1} (1+g)^{\nu-s-1}\right) = g x_s (1+g)^{k-s-1},$$

т.е. из справедливости оценки (4.12.38) при $s+1 \leqslant n \leqslant k-1$ следует ее справедливость при $n = k$. Лемма 4.12.4 тем самым доказана.

Положим $g = c_1(\alpha,\lambda)\delta$, тогда из леммы 4.12.4 и оценки (4.12.36) вытекает неравенство

$$\bar{\psi}_{s,n}(\delta) \leqslant c_1 \delta \bar{\psi}_{s,s}(\delta)(1+c_1\delta)^{n-s-1} \quad (s \leqslant n-1),$$

где $c_1 = c_1(\alpha,\lambda)$. Поскольку $\psi_{s,s}(\delta)$ возрастает вместе с $\delta \geqslant 0$, то (см. (4.12.34))

$$\psi_{s,n}(\delta) \leqslant \bar{\psi}_{s,n}(\delta) \leqslant c_1 \psi_{s,s}(\delta)(1+c_1\delta)^n \leqslant c_2(\alpha,\lambda)\delta,$$

где $n\delta \leqslant \lambda$, $s \leqslant n-1$. (Мы здесь воспользовались тем, что $\psi_{s,s}(\delta) = r^s(\delta) \leqslant r^n(\delta) < e^\lambda$, $(1+c_1\delta)^n \leqslant e^{c_1\lambda}$.) Этим установлена

Лемма 4.12.5. *Если $0 \leqslant s \leqslant n-1$, $n\delta \leqslant \lambda$, то найдется такая положительная постоянная $c(\alpha,\lambda)$, что*

$$\psi_{s,n}(\delta) \leqslant c(\alpha,\lambda)\delta.$$

Теорема 4.12.2. *Пусть $\delta = 1/N > 0$, $\alpha > -1$, $\lambda > 0$, z – произвольное комплексное число. Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$M_{n,N}^\alpha(z) = \left(\frac{e^\delta - 1}{\delta}\right)^n L_n^\alpha(z) + R_{n,N}^\alpha(z), \qquad m_{n,N}^\alpha(z) = l_n^\alpha(z) + v_{n,N}^\alpha(z),$$

для остаточных членов $R_{n,N}^{\alpha}(z)$ *и* $v_{n,N}^{\alpha}(z)$ *при* $0 \leqslant n \leqslant \lambda N$ *которых справедливы оценки:*

$$\left|R_{n,N}^{\alpha}(z)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda)\delta\sum_{k=0}^{n-1}\left|L_k^{\alpha}(z)\right|, \tag{4.12.39}$$

$$\left|v_{n,N}^{\alpha}(z)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda)\delta n^{-\alpha/2}\sum_{k=0}^{n-1}\left|L_k^{\alpha}(z)\right|. \tag{4.12.40}$$

Доказательство. Перепишем равенство (4.12.14) в следующем виде:

$$M_{n,N}^{\alpha}(z) = \psi_{n,n}(\delta)L_n^{\alpha}(z) + \sum_{k=0}^{n-1}\psi_{k,n}(\delta)L_k^{\alpha}(z) = \left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^n L_n^{\alpha}(z) + R_{n,N}^{\alpha}(z). \tag{4.12.41}$$

По лемме 4.12.5,

$$\left|R_{n,N}^{\alpha}(z)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda)\delta\sum_{k=0}^{n-1}\left|L_k^{\alpha}(z)\right|. \tag{4.12.42}$$

Поскольку $\psi_{n,n}(\delta) = \left(\left(e^{\delta}-1\right)/\delta\right)^n$, то неравенство (4.12.39) вытекает из (4.12.41) и (4.12.42). Чтобы доказать (4.12.40), перепишем (4.12.41) следующем виде:

$$e^{-n\delta/2}M_{n,N}^{\alpha}(z) = \left(\frac{e^{\delta/2}-e^{-\delta/2}}{\delta}\right)^n L_n^{\alpha}(z) + e^{-n\delta/2}R_{n,N}^{\alpha}(z).$$

Умножая это равенство на $(\Gamma(n+\alpha+1)/n!)^{-1/2}$, получаем:

$$m_{n,N}^{\alpha}(z) = \left(\frac{e^{\delta/2}-e^{-\delta/2}}{\delta}\right)^n l_n^{\alpha}(z) + e^{-n\delta/2}\left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} R_{n,N}^{\alpha}(z). \tag{4.12.43}$$

Так как

$$\left(\frac{e^{\delta/2}-e^{-\delta/2}}{\delta}\right)^n - 1 \leqslant n\left(\frac{e^{\delta/2}-e^{-\delta/2}}{\delta}\right)^{n-1}\left(\frac{e^{\delta/2}-e^{-\delta/2}}{\delta}-1\right) \leqslant \frac{n\delta^2}{24}e^{n\delta/2}, \tag{4.12.44}$$

то из (4.12.42) – (4.12.44) следует оценка (4.12.40). Теорема 4.12.2 доказана.

Следствие 4.12.1. *Пусть* $\lambda,\delta > 0$, $N = 1/\delta$, $x \in [0,\infty)$. *Тогда для остаточного члена* $v_{n,N}^{\alpha}(x)$ *асимптотической формулы* $m_{n,N}^{\alpha}(x) = l_n^{\alpha}(x) + v_{n,N}^{\alpha}(x)$ *при* $n\delta \leqslant \lambda$ *имеет место оценка:*

$$\left|v_{n,N}^{\alpha}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda)A_n^{\alpha}(x)\sqrt{\frac{n}{N}}n^{-\alpha/2},$$

где функция $A_n^{\alpha}(x)$ *определена равенством (1.5.54).*

Доказательство. Перепишем неравенство (4.12.40) в следующем виде:

$$\left|v_{n,N}^{\alpha}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda)\delta n^{-\alpha/2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!}\right)^{1/2}\left|l_k^{\alpha}(x)\right|.$$

Поскольку $\Gamma(k+\alpha+1)/k! = O\left(k^{\alpha}\right)$, то по неравенству Коши-Буняковского,

$$\left|v_{n,N}^{\alpha}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda)\left(\delta\sum_{k=0}^{n}\left|l_k^{\alpha}(x)\right|^2\right)^{1/2}. \tag{4.12.45}$$

Из (4.9.30) и (1.5.11) имеем:

$$\sum_{k=0}^{n}|l_k^\alpha(x)|^2=\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\Big\{L_{n+1}^\alpha(x)L_n^\alpha(x)$$

$$-\frac{\alpha}{n+\alpha+1}L_{n+1}^\alpha(x)L_n^{\alpha+1}(x)+\frac{x}{n+\alpha+1}\left(L_n^{\alpha+1}(x)\right)^2\Big\}. \tag{4.12.46}$$

Оценим правую часть равенства (4.12.46) для $x\in[0,\infty)$. Рассуждения, аналогичные применявшимся при доказательстве теоремы 4.9.2, приводят к оценке

$$\sum_{k=0}^{n}|l_k^\alpha(x)|^2\leqslant c(\alpha)n^{-\alpha+1}\left(A_n^\alpha(x)\right)^2 \quad (0\leqslant x<\infty). \tag{4.12.47}$$

Отсюда и из (4.12.45) вытекает утверждение следствия 4.12.1.

Для некоторых приложений важно знать асимптотику разности $M_{n,N}^\alpha(x)-M_{n-1,N}^\alpha(x)$. Из (4.12.14) следует равенство

$$M_{n,N}^\alpha(x)-M_{n-1,N}^\alpha(x)=\psi_{n,n}(\delta)L_n^\alpha(x)-\psi_{n-1,n-1}(\delta)L_{n-1}^\alpha(x)$$

$$+\psi_{n-1,n}(\delta)L_{n-1}^\alpha(x)+\sum_{k=0}^{n-2}\left[\psi_{k,n}(\delta)-\psi_{k,n-1}(\delta)\right]L_k^\alpha(x). \tag{4.12.48}$$

Оценим разность $\psi_{s,n}(\delta)-\psi_{s,n-1}(\delta)$ $(0\leqslant s\leqslant n-2)$. По лемме 4.12.3,

$$\psi_{s,n}(\delta)-\psi_{s,n-1}(\delta)=\int_0^\delta\frac{1}{r(\tau)}\Bigg[\left(\frac{r(\delta)}{r(\tau)}\right)^n\sum_{\nu=s}^{n-1}\psi_{s,\nu}(\tau)\left\{\nu\Delta^2 r'_{n-\nu-1}(\tau)\right.$$

$$\left.-\left(\left(e^\tau-1\right)\nu-\alpha-1\right)\Delta r'_{n-\nu-1}(\tau)+(\alpha+1)\left(e^\tau-1\right)r'_{n-\nu-1}(\tau)\right\}$$

$$-\left(\frac{r(\delta)}{r(\tau)}\right)^{n-1}\sum_{\nu=s}^{n-2}\psi_{s,\nu}(\tau)\left\{\nu\Delta^2 r'_{n-\nu-2}(\tau)-\left(\left(e^\tau-1\right)\nu-\alpha-1\right)\Delta r'_{n-\nu-2}(\tau)\right.$$

$$\left.+(\alpha+1)\left(e^\tau-1\right)r'_{n-\nu-2}(\tau)\right\}\Bigg]d\tau=A_1+A_2+A_3, \tag{4.12.49}$$

где

$$A_1=\int_0^\delta\frac{1}{r(\tau)}\left(\frac{r(\delta)}{r(\tau)}\right)^{n-1}\sum_{\nu=s}^{n-1}\psi_{s,\nu}(\tau)\left\{\nu\Delta^3 r'_{n-\nu-2}(\tau)\right.$$

$$\left.-\left(\left(e^\tau-1\right)\nu-\alpha-1\right)\Delta^2 r'_{n-\nu-2}(\tau)+(\alpha+1)\left(e^\tau-1\right)\Delta r'_{n-\nu-2}(\tau)\right\}d\tau, \tag{4.12.50}$$

$$A_2=\int_0^\delta\frac{r(\delta)-r(\tau)}{r^2(\tau)}\left(\frac{r(\delta)}{r(\tau)}\right)^{n-1}\sum_{\nu=s}^{n-1}\psi_{s,\nu}(\tau)\left\{\nu\Delta^2 r'_{n-\nu-1}(\tau)\right.$$

$$\left.-\left(\left(e^\tau-1\right)\nu-\alpha-1\right)\Delta r'_{n-\nu-1}(\tau)+(\alpha+1)\left(e^\tau-1\right)r'_{n-\nu-1}(\tau)\right\}d\tau, \tag{4.12.51}$$

$$A_3=\int_0^\delta\frac{1}{r(\tau)}\left(\frac{r(\delta)}{r(\tau)}\right)^n\psi_{s,n-1}(\tau)\left\{(n-1)\Delta^2 r'_0(\tau)-\left(\left(e^\tau-1\right)(n-1)-\alpha-1\right)\Delta r'_0(\tau)\right\}d\tau, \tag{4.12.52}$$

Если $n\delta \leqslant \lambda \quad (\lambda > 0)$, то правые части равенств (4.12.50) – (4.12.52) оцениваются с помощью (4.12.29) – (4.12.32), (4.12.35) и неравенств

$$r(\tau) \geqslant 1, \quad \Delta^3 r'_{k-1}(\tau) = \tau^2 \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\Delta^3 (k-1)^j}{(j+1)!} j\tau^{j-3} \leqslant \tau^2 e^{(k+2)\tau},$$

$$\frac{r(\delta) - r(\tau)}{r^2(\tau)} \leqslant r(\delta) - r(\tau) \leqslant r(\delta) - 1 \leqslant \delta e^{\delta}.$$

Отсюда

$$A_i \leqslant c(\alpha, \lambda)\delta^2 \quad (1 \leqslant i \leqslant 3). \tag{4.12.53}$$

Из (4.12.53) и (4.12.49) вытекает следующая

Лемма 4.12.6. *Если $s \leqslant n-2$, $n\delta \leqslant \lambda$, то найдется такая положительная постоянная $c(\alpha, \lambda)$, что*

$$|\psi_{s,n}(\delta) - \psi_{s,n-1}(\delta)| \leqslant c(\alpha, \lambda)\delta^2.$$

Теорема 4.12.3 *Пусть $\delta > 0$, $N = 1/\delta$, $\lambda > 0$, $\alpha > -1$, z – произвольное комплексное число. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$M_{n,N}^{\alpha}(z) - M_{n-1,N}^{\alpha}(z) = \left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^n \left[L_n^{\alpha}(z) - L_{n-1}^{\alpha}(z)\right] + V_{n,N}^{\alpha}(z),$$

для остаточного члена $V_{n,N}^{\alpha}(z)$ которой при $n\delta \leqslant \lambda$ справедлива оценка

$$\left|V_{n,N}^{\alpha}(z)\right| \leqslant c(\alpha, \lambda) \left\{\delta \left|L_{n-1}^{\alpha}(z)\right| + \delta^2 \sum_{k=0}^{n-2} \left|L_k^{\alpha}(z)\right|\right\}. \tag{4.12.54}$$

Доказательство. Из равенства (4.12.48) и лемм 4.12.1 и 4.12.6 получаем:

$$M_{n,N}^{\alpha}(z) - M_{n-1,N}^{\alpha}(z)$$

$$= \left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^n \left[L_n^{\alpha}(z) - L_{n-1}^{\alpha}(z)\right] + \left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^{n-1} \left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta} - 1\right) L_{n-1}^{\alpha}(z)$$
$$+\psi_{n-1,n}(\delta) L_{n-1}^{\alpha}(z) + W_{n,N}^{\alpha}(z), \tag{4.12.55}$$

где (см.(4.12.35))

$$\left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^{n-1} \left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta} - 1\right) < e^{\lambda+\delta}\delta, \quad |\psi_{n-1,n}(\delta)| \leqslant c(\alpha, \lambda)\delta, \tag{4.12.56}$$

$$\left|W_{n,N}^{\alpha}(z)\right| \leqslant c(\alpha, \lambda)\delta^2 \sum_{k=0}^{n-2} \left|L_k^{\alpha}(z)\right|. \tag{4.12.57}$$

Из (4.12.55) – (4.12.57) непосредственно следует (4.12.54). Теорема 4.12.3 доказана.

Теорема 4.12.4. *Пусть $\delta > 0$, $N = 1/\delta$, $\lambda > 0$, $\alpha > -1$, z – произвольное комплексное число. Тогда для остаточных членов $R_{n,N}^{\alpha}(z)$ и $v_{n,N}^{\alpha}(z)$ асимптотических формул*

$$M_{n,N}^{\alpha}(z) = \left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^n L_n^{\alpha}(z) + R_{n,N}^{\alpha}(z), \quad m_{n,N}^{\alpha}(z) = l_n^{\alpha}(z) + v_{n,N}^{\alpha}(z)$$

при $n\delta \leqslant \lambda$ имеют место оценки

$$\left|R_{n,N}^{\alpha}(z)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda)\left\{\delta\left|L_{n-1}^{\alpha+1}(z)\right| + \delta^2\sum_{k=0}^{n-2}\left|L_k^{\alpha+1}(z)\right|\right\}, \tag{4.12.58}$$

$$\left|v_{n,N}^{\alpha}(z)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda)\left\{n\delta^2\left|l_n^{\alpha}(z)\right| + \delta n^{-\alpha/2}\left|L_{n-1}^{\alpha+1}(z)\right| + \delta^2 n^{-\alpha/2}\sum_{k=0}^{n-2}\left|L_k^{\alpha+1}(z)\right|\right\}, \tag{4.12.59}$$

Доказательство. Для произвольного α с помощью равенств (1.5.8), (4.5.3) и теоремы 4.12.3 мы можем написать

$$M_{n,N}^{\alpha}(z) = M_{n,N}^{\alpha+1}(z) - M_{n-1,N}^{\alpha+1}(z) = \left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^n L_n^{\alpha}(z) + V_{n,N}^{\alpha+1}(z), \tag{4.12.60}$$

причем в силу (4.12.54) для $n\delta \leqslant \lambda$ имеем:.

$$\left|V_{n,N}^{\alpha+1}(z)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda)\left\{\delta\left|L_{n-1}^{\alpha+1}(z)\right| + \delta^2\sum_{k=0}^{n-2}\left|L_k^{\alpha+1}(z)\right|\right\}. \tag{4.12.61}$$

Поскольку $R_{n,N}^{\alpha}(z) = V_{n,N}^{\alpha+1}(z)$, то оценка (4.12.58) доказана.

Докажем (4.12.59). Умножим равенство (4.12.60) на $e^{-n\delta/2}(n!/\Gamma(n+\alpha+1))^{1/2}$. Тогда

$$m_{n,N}^{\alpha}(z) = \left(\frac{e^{\delta/2}-e^{-\delta/2}}{\delta}\right)^n l_n^{\alpha}(z) + e^{-n\delta/2}\left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} V_{n,N}^{\alpha+1}(z) = l_n^{\alpha}(z) + v_{n,N}^{\alpha}(z),$$

где

$$v_{n,N}^{\alpha}(z) = \left[\left(\frac{e^{\delta/2}-e^{-\delta/2}}{\delta}\right)^n - 1\right] l_n^{\alpha}(z) + e^{-n\delta/2}\left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} V_{n,N}^{\alpha+1}(z).$$

Поэтому оценка (4.12.59) вытекает из (4.12.60) и (4.12.44). Теорема 4.12.4 доказана.

Рассмотрим теперь разность $m_{n,N}^{\alpha}(z) - m_{n-1,N}^{\alpha}(z)$. Имеем:

$$\begin{gathered} m_{n,N}^{\alpha}(z) - m_{n-1,N}^{\alpha}(z) = \left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} e^{-n\delta/2}\left[M_{n,N}^{\alpha}(z) - M_{n-1,N}^{\alpha}(z)\right] \\ + \left[e^{-\delta/2}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{1/2} - 1\right] m_{n-1,N}^{\alpha}(z). \end{gathered} \tag{4.12.62}$$

Из теорем 4.12.3 и 4.12.4 последовательно получаем:

$$\begin{gathered} \left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} e^{-n\delta/2}\left[M_{n,N}^{\alpha}(z) - M_{n-1,N}^{\alpha}(z)\right] \\ = \left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2}\left(\frac{e^{\delta/2}-e^{-\delta/2}}{\delta}\right)^n\left[L_n^{\alpha}(z) - L_{n-1}^{\alpha}(z)\right] \\ + \left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} e^{-n\delta/2} V_{n,N}^{\alpha}(z) = l_n^{\alpha}(z) - \left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{1/2} l_{n-1}^{\alpha}(z) \\ + \left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2}\left\{\left[\left(\frac{e^{\delta/2}-e^{-\delta/2}}{\delta}\right)^n - 1\right]\left[L_n^{\alpha}(z) - L_{n-1}^{\alpha}(z)\right] + e^{-n\delta/2} V_{n,N}^{\alpha}(z)\right\}, \end{gathered} \tag{4.12.63}$$

$$\left[e^{-\delta/2}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{1/2}-1\right]m_{n-1,N}^{\alpha}(z)=e^{-\delta/2}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{1/2}l_{n-1}^{\alpha}(z)-l_{n-1}^{\alpha}(z)+$$
$$\left[e^{-\delta/2}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{1/2}-1\right]v_{n-1,N}^{\alpha}(z), \tag{4.12.64}$$

где

$$\left|e^{-\delta/2}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{1/2}-1\right|\leqslant c(\alpha,\lambda)n^{-1}\quad (n\delta\leqslant\lambda). \tag{4.12.65}$$

Из соотношений (4.12.62) – (4.12.64) следует асимптотическая формула

$$m_{n,N}^{\alpha}(z)-m_{n-1,N}^{\alpha}(z)=l_{n}^{\alpha}(z)-l_{n-1}^{\alpha}(z)+E_{n,N}^{\alpha}(z), \tag{4.12.66}$$

для остаточного члена

$$E_{n,N}^{\alpha}(z)=\left(e^{-\delta/2}-1\right)l_{n-1}^{\alpha}(z)$$
$$+\left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2}\left\{\left[\left(\frac{e^{\delta/2}-e^{-\delta/2}}{\delta}\right)^{n}-1\right]\left[L_{n}^{\alpha}(z)-L_{n-1}^{\alpha}(z)\right]\right.$$
$$\left.+e^{-n\delta/2}V_{n,N}^{\alpha}(z)\right\}+\left[e^{-\delta/2}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{1/2}-1\right]v_{n-1,N}^{\alpha}(z)$$

которой в силу (12.54), (4.12.59), (4.12.44), (4.12.65) и неравенства $\left|e^{-\delta/2}-1\right|\leqslant\delta e^{\delta/2}/2$ при $n\delta\leqslant\lambda$ справедлива оценка

$$\left|E_{n,N}^{\alpha}(z)\right|\leqslant c(\alpha,\lambda)n^{-\alpha/2}\left\{n\delta^{2}\left|L_{n}^{\alpha}(z)\right|+\delta\left(\left|L_{n-1}^{\alpha}(z)\right|+\left|L_{n-1}^{\alpha+1}(z)\right|\right)\right.$$
$$\left.+\delta^{2}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\left|L_{k}^{\alpha}(z)\right|+\frac{1}{n}\left|L_{k}^{\alpha+1}(z)\right|\right)\right\}. \tag{4.12.67}$$

Приведем некоторые оценки для сумм

$$S_1(x)=\sum_{k=0}^{n-2}\left|L_{k}^{\alpha}(x)\right|,\quad S_2(x)=\sum_{k=0}^{n-2}\left|L_{k}^{\alpha+1}(x)\right|, \tag{4.12.68}$$

в остаточных членах рассмотренных асимптотических формул.

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем оценку

$$|S_1(x)|=\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!}\right)^{1/2}\left|l_{k}^{\alpha}(x)\right|\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!}\right)^{1/2}\left(\mathcal{K}_{n-2}^{\alpha}(x,x)\right)^{1/2}, \tag{4.12.69}$$

где $\mathcal{K}_{m}^{\alpha}(x,y)$ – ядро Кристоффеля–Дарбу для полиномов Лагерра (см. (1.5.56)). При $x\in[0,\infty)$ это ядро можно оценить различными способами – в качестве примера напомним лемму 1.5.6, из которой с помощью (4.12.69) можно получить такую оценку:

$$|S_1(x)|\leqslant c(\alpha)e^{x/2}n^{1/2}\quad (2n+\alpha+1\leqslant x\leqslant 3(2n+\alpha+1)). \tag{4.12.70}$$

Аналогично этому,

$$|S_2(x)|\leqslant c(\alpha)e^{x/2}n^{1/2}\quad (2n+\alpha+2\leqslant x\leqslant 3(2n+\alpha+2)). \tag{4.12.71}$$

С другой стороны, из (4.12.47) и (4.12.69) получаются следующие оценки:

$$|S_1(x)| \leqslant c(\alpha) A_n^\alpha(x) \quad (0 \leqslant x < \infty), \tag{4.12.72}$$

$$|S_2(x)| \leqslant c(\alpha) A_n^{\alpha+1}(x) \quad (0 \leqslant x < \infty). \tag{4.12.73}$$

§ 4.13. Весовая оценка для полиномов Мейкснера $m_{n,N}^\alpha(x)$ и $M_{n,N}^\alpha(x)$

Пусть $0 < \delta \leqslant 1$, $N = 1/\delta$, $\lambda > 0$, $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$, $\alpha > -1$, $0 \leqslant x < \infty$. Из теоремы 4.9.2 и соотношений (1.5.53) и (1.5.3) вытекают оценки:

$$\left| m_{n,N}^\alpha(x) \right| \leqslant c(\alpha, \lambda) n^{-\alpha/2} A_n^\alpha(x), \tag{4.13.1}$$

$$\left| M_{n,N}^\alpha(x) \right| \leqslant c(\alpha, \lambda) A_n^\alpha(x). \tag{4.13.2}$$

Замечание. Можно показать, что условие $n \leqslant \lambda N$ существенно в том смысле, что

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \frac{m_{n,N}^\alpha(x)}{n^{-\alpha/2} A_n^\alpha(x)} \to \infty \tag{4.13.3}$$

при $n/N \to \infty$.

Отметим следующие полезные оценки. Пусть $0 < \delta \leqslant 1$, $N = 1/\delta$, $\lambda > 0$, $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$, $\alpha > -1$, $s \geqslant 0$, $0 \leqslant x < \infty$. Тогда

$$\left| m_{n,N}^\alpha(x \pm s\delta) \right| \leqslant c(\alpha, \lambda, s) n^{-\alpha/2} A_n^\alpha(x), \tag{4.13.4}$$

$$\left| M_{n,N}^\alpha(x \pm s\delta) \right| \leqslant c(\alpha, \lambda, s) A_n^\alpha(x), \tag{4.13.5}$$

$$\left| \left(m_{n,N}^\alpha(x \pm s\delta) \right)' \right| \leqslant c(\alpha, \lambda, s) n^{-\alpha/2} A_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{4.13.6}$$

$$\left| \left(M_{n,N}^\alpha(x \pm s\delta) \right)' \right| \leqslant c(\alpha, \lambda, s) A_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{4.13.7}$$

Для $x \geqslant s\delta$ оценки (4.13.4) и (4.13.5) вытекают из (4.13.1) и (4.13.2), так как $A_n^\alpha(x \pm s\delta) \leqslant c(\alpha, \lambda, s) A_n^\alpha(x)$ при фиксированном s, $\delta = O(1/n)$ и $x - s\delta \geqslant 0$.

Если же $0 \leqslant x \leqslant s\delta$, то оценки (4.13.4) и (4.13.5) вытекают из теоремы 4.12.1 и соотношений (1.5.55) и (4.8.2). Оценки (4.13.6) и (4.13.7) справедливы при тех же ограничениях на параметры n, N, x, что и в (4.13.4), (4.13.5). Для целых α они вытекают из теоремы 4.9.3 и неравенства (1.5.53). Для произвольного $\alpha > -1$ они легко могут быть выведены из леммы 4.12.5.

Теорема 4.13.1. *Пусть $\alpha > -1$, $\delta, \lambda > 0$, $n \leqslant \lambda N$, $s = s(n, \alpha) = 4n + 2\alpha + 2$. Тогда найдется такая постоянная $c = c(\alpha, \lambda)$, что*

$$e^{-x/2} \left| m_{n+1,N}^\alpha(x) - m_{n-1,N}^\alpha(x) \right|$$
$$\leqslant c \begin{cases} s^{\alpha/2-1}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1/s; \\ x^{-\alpha/2+1/4} s^{-3/4}, & \text{если } 1/s \leqslant x \leqslant s/2; \\ x^{-\alpha/2} s^{-3/4} (s^{1/3} + |x - s|)^{1/4}, & \text{если } s/2 \leqslant x \leqslant 3s/2; \\ e^{-x/4}, & \text{если } 3s/2 < x. \end{cases} \tag{4.13.8}$$

Доказательство. В случае $x > 3s/2$ оценка (4.13.8) следует из (4.13.1). Пусть $0 \leqslant x \leqslant s/2$. Тогда по (4.5.3), (4.5.21) и (4.12.58) имеем:

$$m_{n+1,N}^\alpha(x) - m_{n-1,N}^\alpha(x) = (m_{n+1,N}^\alpha(x) - m_{n,N}^\alpha(x)) + (m_{n,N}^\alpha(x) - m_{n-1,N}^\alpha(x))$$

$$= \left(\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+2)}\right)^{1/2} e^{-(n+1)\delta/2} M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x) + \left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} e^{-n\delta/2} M_{n,N}^{\alpha-1}(x)$$
$$+ \left[e^{-\delta/2}\left(\frac{n+1}{n+\alpha+1}\right)^{1/2} - 1\right] m_{n,N}^{\alpha}(x) + \left[e^{-\delta/2}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{1/2} - 1\right] m_{n-1,N}^{\alpha}(x).$$

В силу (4.5.21),

$$m_{n+1,N}^{\alpha}(x) - m_{n-1,N}^{\alpha}(x) = \left(\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+2)}\right)^{1/2} e^{-(n+1)\delta/2}$$
$$\times \left[\frac{\alpha}{n+1} M_{n,N}^{\alpha}(x) - (e^{\delta}-1)N\frac{x}{n+1} M_{n,N}^{\alpha+1}(x)(x-\delta)\right]$$
$$+ \left(\frac{e^{-n\delta} n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} \left[\frac{\alpha}{n} M_{n-1,N}^{\alpha}(x) - (e^{\delta}-1)N\frac{x}{n} M_{n-1,N}^{\alpha+1}(x)(x-\delta)\right]$$
$$+ \left[e^{-\delta/2}\left(\frac{n+1}{n+\alpha+1}\right)^{1/2} - 1\right] m_{n,N}^{\alpha}(x) + \left[e^{-\delta/2}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{1/2} - 1\right] m_{n-1,N}^{\alpha}(x). \quad (4.13.9)$$

Сравнивая (1.5.4), (4.13.1), (4.13.4), (4.13.5) с (4.13.9), приходим к оценке (4.13.8) при $0 \leqslant x \leqslant s/2$. Оценка (4.13.8) при $s/2 \leqslant x \leqslant 3s/2$ вытекает из асимптотической формулы (4.12.66) и неравенств (1.5.63), (4.12.63), (4.12.65), (4.12.67).

§ 4.14. О квадратурных формулах

1. Во многих вопросах приложений встречаются интегральные уравнения вида

$$\int_0^t k(t-\tau)v(\tau)\,d\tau = u(t), \quad (4.14.1)$$

где функции $v(t)$ и $u(t)$ интерпретируются как входной и выходной соответственно сигналы, $k(t)$ – импульсная функция. Требуется по заданным $u(t)$ и $k(t)$ найти $v(t)$. Заменой $t-\tau \to \tau$ легко убедиться в симметричности (1.14.1) относительно $k(t)$ и $v(t)$. Поэтому мы можем рассмотреть одновременно еще одну задачу: требуется определить импульсную функцию $k(t)$ так, чтобы рассматриваемая система отвечала на заданный входной сигнал $v(t)$ выходным сигналом $u(t)$. Эта задача относится к классу так называемых некорректных задач, для решения которых часто применяют метод регуляризации [36]. При решении уравнения (4.14.1) часто отдают предпочтение и другому методу [37], [38], [39], [17], основанному на разложении функций $k(t)$, $v(t)$ и $u(t)$ в ряд по полиномам Лагерра $L_n^0(x)$. Причина успешного применения рядов Фурье-Лагерра для решения уравнения (4.14.1) заключается в сверточном свойстве полиномов Лагерра $L_n(x) = L_n^0(x)$ [1]:

$$\int_0^t L_n(t-\tau)L_m(\tau)d\tau = L_{n+m}(t) - L_{n+m+1}(t). \quad (4.14.2)$$

Это свойство позволяет перейти от уравнения (4.14.1) к следующей бесконечной треугольной системе уравнений:

$$\hat{k}_0\hat{v}_0 = \hat{u}_0, \quad (4.14.3)$$

$$\hat{k}_0\hat{v}_n + \sum_{l=0}^{n-1}\hat{v}_l\left(\hat{k}_{n-l} - \hat{k}_{n-l-1}\right) = \hat{u}_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.14.4}$$

относительно неизвестных коэффициентов Фурье-Лагерра $\hat{v}_l$ функции $v = v(t)$; здесь $\hat{u}_n$ и $\hat{k}_n$ – коэффициенты Фурье-Лагерра функции $u(t)$ и $k(t)$:

$$\hat{u}_n = \int_0^\infty e^{-\tau}L_n(\tau)u(\tau)d\tau, \quad \hat{k}_n = \int_0^\infty e^{-\tau}L_n(\tau)k(\tau)d\tau. \tag{4.14.5}$$

Из (4.14.3) и (4.14.4) коэффициенты $\hat{v}_n$ могут быть найдены рекуррентным способом. Таким образом, мы приходим к необходимости вычисления интеграла вида

$$I = \int_0^\infty e^{-x}f(x)dx. \tag{4.14.6}$$

В зависимости от характера информации о функции $f(x)$ для приближенного вычисления интеграла (4.14.6) могут быть использованы различные квадратурные формулы. Мы рассмотрим случай, когда значения функции $f(x)$ заданы в узлах равномерной сетки $\Omega = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, т.е. рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)dx = \sum_{j=0}^\infty \gamma_j f(j\delta) + R(f), \tag{4.14.7}$$

где $\gamma_j \quad (0 \leqslant j < \infty)$ – веса, $R(f)$ – остаточный член. Хорошо известно [40], [41], что важными параметрами квадратурной формулы являются ее точность (т.е. $R(f) = 0$ для алгебраических полиномов достаточно высокой степени) и неотрицательность начальных весов $\gamma_j \quad (0 \leqslant j < c/\delta, \quad c > 0)$, несущих основную «нагрузку». Покажем, что для построения подобных квадратурных формул могут быть использованы полиномы Мейкснера, и дадим некоторые оценки для весов γ_j и остаточного члена $R(f)$.

2. **Построение** квадратурной формулы. Пусть для функции f, заданной на полуоси $[0, \infty)$ существуют моменты

$$c_k = \sum_{j=0}^\infty e^{-j\delta}(j\delta)^k f(j\delta) \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Пусть $m_{k,N}(x) = m^0_{k,N}(x)$, $\eta_N(x) = \eta_N(x, 0)$. Рассмотрим сумму

$$S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f, x) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^\infty \eta_N(j\delta)m_{k,N}(j\delta)f(j\delta)\right) m_{k,N}(x)$$

$$= \left(1 - e^{-\delta}\right)\sum_{j=0}^\infty e^{-j\delta}f(j\delta)\sum_{k=0}^n m_{k,N}(j\delta)m_{k,N}(x), \tag{4.14.8}$$

где $\{m^0_{k,N}(x)\}_{k=0}^\infty$ – последовательность полиномов Мейкснера (образующих ортонормированную систему на $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$ с весом $\eta_N(x) = \left(1 - e^{-\delta}\right)e^{-x}$ (см. §4.8)). Заметим, что $S_{n,N}(f)$ представляет собой частичную сумму порядка n ряда Фурье по полиномам Мейкснера $m_{k,N}(x)$. Поэтому

$$S_{n,N}(P_n) = P_n \tag{4.14.9}$$

для любого алгебраического полинома $P_n(x)$ степени $\leqslant n$. Если интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x}f(x)dx$ существует, то мы можем рассмотреть следующую квадратурную формулу (см. (4.14.8)):

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}f(x)dx = \int\limits_0^\infty e^{-x}S_{n,N}(f,x)dx + R_{n,N}(f) = \sum_{j=0}^\infty \gamma_j f(j\delta) + R_{n,N}(f), \tag{4.14.10}$$

где

$$\gamma_j = \gamma_j(n,N) = \left(1-e^{-\delta}\right)e^{-j\delta}\sum_{k=0}^n m_{k,N}(j\delta)\int\limits_0^\infty e^{-x}m_{k,N}(x)dx$$

$$= \left(1-e^{-\delta}\right)e^{-j\delta}\sum_{k=0}^n e^{-k\delta}M_k^0\left(j,e^{-\delta}\right)\int\limits_0^\infty e^{-x}M_k^0\left(Nx,e^{-\delta}\right)dx \tag{4.14.11}$$

– веса

$$R_{n,N}(f) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\left(f(x)-S_{n,N}(f,x)\right)dx \tag{4.14.12}$$

– остаточный член.

3. **Алгоритм** для вычисления весов γ_j. Начнем с вычисления интеграла

$$J_{k,N}^\alpha = \int\limits_0^\infty \rho\left(Nx;\alpha,q^\delta\right)M_k^\alpha\left(Nx,q^\delta\right)dx. \tag{4.14.13}$$

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 4.14.1. *Пусть* $\alpha>-1$. *Тогда*

$$J_{0,N}^\alpha = \frac{1}{\ln(1/q)}, \quad J_{k,N}^\alpha = \int\limits_{-1}^0 (x+\alpha+1)\rho\left(x;\alpha,q^\delta\right)M_{k-1}^{\alpha+1}\left(x,q^\delta\right)dx.$$

Доказательство. Приведем разностное уравнение (4.5.9) к виду

$$\Delta\left[x\rho(x;\alpha,q)\Delta M_k^\alpha(x-1;q)\right] + k(1-q)\rho(x;\alpha,q)M_k^\alpha(x,q) = 0. \tag{4.14.15}$$

Так как

$$\rho(x+1;\alpha,q) = \frac{q(x+\alpha+1)}{x+1}\rho(x;\alpha,q), \tag{4.14.16}$$

то из (4.5.2), (4.14.13) – (4.14.16) имеем:

$$J_{k,N}^\alpha = \delta\int\limits_0^\infty \rho\left(x;\alpha,q^\delta\right)M_k^\alpha\left(x,q^\delta\right)dx$$

$$= \frac{\delta}{k}q^{-\delta}\int\limits_0^\infty \Delta\left[\rho\left(x;\alpha,q^\delta\right)xM_{k-1}^{\alpha+1}\left(x-1,q^\delta\right)\right]dx$$

$$= \frac{\delta}{k} q^{-\delta} \int_0^\infty \rho\left(x+1; \alpha, q^\delta\right)(x+1) M_{k-1}^{\alpha+1}\left(x, q^\delta\right) dx$$

$$-\frac{\delta}{k} q^{-\delta} \int_0^\infty \rho\left(x; \alpha, q^\delta\right) x M_{k-1}^{\alpha+1}\left(x-1, q^\delta\right) dx$$

$$= -\frac{\delta}{k} q^{-\delta} \int_{-1}^0 \rho\left(x+1; \alpha, q^\delta\right)(x+1) M_{k-1}^{\alpha+1}\left(x, q^\delta\right) dx$$

$$= -\frac{\delta}{k} \int_{-1}^0 \rho\left(x; \alpha, q^\delta\right)(x+\alpha+1) M_{k-1}^{\alpha+1}\left(x, q^\delta\right) dx.$$

Лемма 4.14.1 доказана.

Положим

$$V_{i,N} = \frac{(-1)^i}{i!} \int_{-1}^0 (x+1) x^{[i]} e^{-x\delta} dx. \tag{4.14.17}$$

Используя (4.2.1) и лемму 4.14.1, будем иметь:

$$J_{k,N} = J_{k,N}^0 = -\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k-1)^{[i]} V_i}{(i+1)!} \left(e^\delta - 1\right)^i \quad (k \geqslant 1). \tag{4.14.18}$$

Поскольку

$$e^{-x\delta}(x+1) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(x+1)x^\nu}{\nu!} (-\delta)^\nu,$$

то

$$\int_{-1}^0 x^m (x+1) e^{-x\delta} dx = \sum_{\nu=0}^\infty (-\delta)^\nu \frac{1}{\nu!} \left[\frac{(-1)^{\nu+m+1}}{\nu+m+2} + \frac{(-1)^{\nu+m}}{\nu+m+1}\right]$$

$$= (-1)^m \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\delta^\nu}{\nu!(\nu+m+1)(\nu+m+2)}. \tag{4.14.19}$$

Очевидно,

$$x^{[i]} = \sum_{m=0}^i s(i,m) x^m, \tag{4.14.20}$$

где $s(i,m) \quad (0 \leqslant m \leqslant i)$ – числа Стирлинга первого рода. Нетрудно заметить, что $sign\, s(i,m) = (-1)^{i+m}$. Поэтому из (4.14.17), (4.14.19) и (4.14.20) получаем:

$$V_{i,N} = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\delta^\nu}{\nu! i!} \sum_{m=0}^i \frac{|s(i,m)|}{(\nu+m+1)(\nu+m+2)}. \tag{4.14.21}$$

Полагая

$$\lambda(i,m) = \frac{1}{i!} s(i,m) \quad (m = 0, 1, \ldots, i), \tag{4.14.22}$$

перепишем (4.14.21) в следующем виде:

$$V_{i,N} = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\delta^\nu}{\nu!} \sum_{m=0}^i \frac{|\lambda(i,m)|}{(\nu+m+1)(\nu+m+2)}. \tag{4.14.23}$$

Здесь числа $\lambda(i,m)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\lambda(i,m)=\frac{1}{i}[\lambda(i-1,m-1)-(i-1)\lambda(i-1,m)], \tag{4.14.24}$$

причем $\lambda(0,0)=\lambda(1,1)=1$, $\lambda(i,0)=0$ $(i\geqslant 1)$, $\lambda(i,i+1)=0$. Сравнивая (4.14.11) с (4.14.13), будем иметь:

$$\gamma_j=e^{-j\delta}\left(1-e^{-\delta}\right)\sum_{k=0}^{n}e^{-k\delta}M_k^0\left(j,e^{-\delta}\right)J_{k,N}. \tag{4.14.25}$$

Для вычисления $J_{k,N}$ при $k\geqslant 1$ может быть использовано равенство (4.14.18), а для вычисления $V_{i,N}$ (см. (4.14.28)) – равенство (4.14.23) и рекуррентную формулу (4.14.24). Заметим, что $J_{k,N}$ не зависит от j, а $V_{i,N}$ не зависит от k. Наконец, $J_{0,N}=1$ в силу леммы 4.14.1.

4. **Неравенства** для весов γ_j. Предварительно установим следующее утверждение:

Лемма 4.14.2. *Пусть $\sigma>0$, $1\leqslant k\leqslant\sigma N$. Тогда*

$$0<-J_{k,N}<\frac{1}{4N}\left[1+\exp\left(\sigma e^{\delta}\right)\right].$$

Доказательство. Из (4.14.31) и (4.14.20) имеем:

$$0<V_{i,N}<\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\delta^{\nu}}{i!\nu!}\sum_{m=0}^{i}|s(i,m)|, \tag{4.14.26}$$

$$\frac{1}{i!}\sum_{m=0}^{i}|s(i,m)|=1. \tag{4.14.27}$$

Сравнивая (4.14.26) с (4.14.27), получаем:

$$0<V_{i,N}<\frac{1}{2}e^{\delta}\quad(i=0,1,\ldots). \tag{4.14.28}$$

В силу (4.14.18) и (4.14.28),

$$0<-NJ_{k,N}<\frac{1}{2}e^{\delta}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-1)^{[i]}}{(i+1)!}\left(e^{\delta}-1\right)^{i}=\frac{1}{2}e^{\delta}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-1)^{[i]}}{(i+1)!}\delta^{i}e^{i\delta}<\frac{1}{2}e^{\delta}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\sigma^{i}e^{i\delta}}{(i+1)!}$$

$$<\frac{e^{\delta}}{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\exp\left(\sigma e^{\delta}\right)-1\right)\right]=\frac{e^{\delta}}{4}\left[1+\exp\left(\sigma e^{\delta}\right)\right].$$

Лемма 4.14.2 доказана.

Положим

$$\lambda_j=\sum_{k=1}^{n}e^{-k\delta}M_k^0\left(j,e^{-\delta}\right)J_{k,N}. \tag{4.14.29}$$

Тогда по (4.14.25),

$$\gamma_j=e^{-j\delta}\left(1-e^{-\delta}\right)\left(1+\lambda_j\right). \tag{4.14.30}$$

Лемма 4.14.3. *Если $1\leqslant n\leqslant\sigma N$, $\sigma>0$, то $|\lambda_j|\leqslant\xi_j$, где*

$$\xi_j=\frac{1}{4N}\frac{1+\exp\left(\sigma e^{\delta}\right)}{1-e^{-\delta}}\left(1-e^{-\sigma}\right)^{1/2}e^{(j+1)\delta/2}.$$

Доказательство. Из леммы 4.14.2 и равенства (4.14.29), полагая $M_k(j) = M_k^0\left(j, e^{-\delta}\right)$, будем иметь:

$$|\lambda_j| \leqslant \frac{e^\delta}{4N}\left(1+\exp\left(\sigma e^\delta\right)\right)\sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta}|M_k(j)|$$

$$\leqslant \frac{e^\delta}{4N}\left(1+\exp\left(\sigma e^\delta\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta}M_k^2(j)\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta}\right)^{1/2}. \qquad (4.14.31)$$

Воспользуемся равенством (4.5.8):

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta}M_k^2(j) < \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\delta}M_k^2(j) = \frac{e^{j\delta}}{1-e^{-\delta}}, \qquad (4.14.32)$$

откуда при $1 \leqslant n \leqslant \sigma N$ получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta} = e^{-\delta}\left(1-e^{-n\delta}\right)/\left(1-e^{-\delta}\right) \leqslant e^{-\delta}\frac{1-e^{-\sigma}}{1-e^{-\delta}}. \qquad (4.14.33)$$

Сопоставляя (4.14.31) – (4.14.33), убеждаемся в справедливости леммы 4.14.3.

Из равенства (4.14.30) и леммы 4.14.3 следует

Теорема 4.14.1. Пусть $0 \leqslant n \leqslant \sigma N$, $\sigma > 0$. Тогда

$$e^{-j\delta}\left(1-e^{-\delta}\right)(1-\xi_j) \leqslant \gamma_j \leqslant e^{-j\delta}\left(1-e^{-\delta}\right)(1+\xi_j).$$

Замечание. Из теоремы 4.14.1 можно вывести условия на параметры σ, δ и j, которые влекут неотрицательность соответствующих весов γ_j.

5. Об оценке остаточного члена. Из (4.14.9) и (4.14.12) следует, что

$$R_{n,N}(f) = R_{n,N}(f-p_n) =$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\left[f(x)-p_n(x)\right]dx - \int_0^\infty e^{-x}S_{n,N}(f-p_n,x)\,dx, \qquad (4.14.34)$$

где $p_n = p_n(x)$ – произвольный алгебраический полином степени $\leqslant n$. В силу (4.14.8),

$$\int_0^\infty e^{-x}S_{n,N}(f-p_n,x)\,dx = \left(1-e^{-\delta}\right)\sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\delta}(f(j\delta)-p_n(j\delta))$$

$$+\left(1-e^{-\delta}\right)\sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\delta}(f(j\delta)-p_n(j\delta))\int_0^\infty e^{-x}\sum_{k=1}^{n} m_{k,N}(j\delta)m_{k,N}(x)\,dx. \qquad (4.14.35)$$

Отсюда и из (3.14.34), (4.14.13) и (4.14.29) находим:

$$R_{n,N}(f) = \int_0^\infty e^{-x}\left[f(x)-p_n(x)\right]dx - \left(1-e^{-\delta}\right)\sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\delta}(f(j\delta)-p_n(j\delta))$$

$$-\left(1-e^{-\delta}\right)\sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\delta}(f(j\delta)-p_n(j\delta))\lambda_j. \qquad (4.14.36)$$

Сопоставляя это с леммой 4.14.3, мы получаем следующую оценку $(0 \leqslant n \leqslant \sigma N)$:

$$|R_{n,N}(f)| \leqslant \left| \int\limits_0^\infty e^{-x} \left[f(x) - p_n(x)\right] \, dx - \left(1 - e^{-\delta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\delta} (f(j\delta) - p_n(j\delta)) \right|$$

$$+ \frac{e^{\delta/2}}{4N} \left(1 + \exp\left(\sigma e^{\delta}\right)\right) \left(1 - e^{-\sigma}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\delta/2} |f(j\delta) - p_n(j\delta))|. \tag{4.14.37}$$

Пользуясь ортонормированностью полиномов Лагерра $L_k(x) = L_k^0(x)$, мы можем представить величину λ_j (см. (4.14.29)) в следующем виде:

$$\lambda_j = \int\limits_0^\infty e^{-x} \sum_{k=1}^{n} \left[m_{k,N}(j\delta) m_{k,N}(x) - L_k(j\delta) L_k(x)\right] \, dx. \tag{4.14.38}$$

Это представление дает другой метод оценки $|\lambda_j|$, использующий формулу Кристоффеля-Дарбу для полиномов Мейкснера и Лагерра с одной стороны и асимптотику полиномов Мейкснера (см. §4.9) с другой. На подробностях мы здесь не останавливаемся.

6. **О другом** подходе к приближенному вычислению коэффициентов Фурье-Лагерра. Вернемся к вопросу о приближенном вычислении интеграла

$$\hat{f}_n = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x) L_n(x) \, dx, \tag{4.14.39}$$

где $L_n(x) = L_n^0(x)$ – полином Лагерра степени n. На практике часто используют квадратурную формулу прямоугольников

$$\hat{f}_n = \mathcal{L}_{n,d}(f) + A_{n,d}(f), \tag{4.14.40}$$

где

$$\mathcal{L}_{n,d}(f) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{d} e^{-(j+\frac{1}{2})/N} f\left(\frac{j+1/2}{N}\right) L_n\left(\frac{j+1/2}{N}\right), \tag{4.14.41}$$

$A_{n,d}(f) = A_{n,d}(f,N)$ – остаточный член. Для вычисления значений

$$L_n\left(\frac{j+1/2}{N}\right) \quad (j = 0, \dots, d)$$

чаще всего пользуются рекуррентной формулой

$$nL_n(x) = (2n - 1 - x)L_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x), \tag{4.14.42}$$

где $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1-x$. Тогда потребуется $O(nd)$ операций для вычисления $\mathcal{L}_{n,d}(f)$ по формуле (4.14.41). Более того, если d заранее не задано, то $\mathcal{L}_{n,d}(f)$ вычисляют для нескольких последовательных значений пар $(N,d) = (N_1,d_1),\dots,(N_k,d_k)$, выбирая N_k и d_k по заданной точности ε из условия

$$\left|\mathcal{L}_{n,d_{k-1}}(f) - \mathcal{L}_{n,d_k}(f)\right| < \varepsilon.$$

В этом случае на приближенное вычисление интеграла (4.14.39) тратится $O(n(d_1+d_2+\cdots+d_k))$ операций. Вообще говоря, последовательность пар $(N_1,d_1),\ldots,(N_k,d_k)$ зависит от n. Поэтому для каждого $n=2,3,\ldots$ приходится вычислять $L_n(x)$ по формуле (4.14.42) на новых сетках

$$U_{\nu,n}=\{(j+1/2)/N_\nu\}_{j=0}^{d_\nu},$$

где $N_\nu=N_\nu(n)$, $d_\nu=d_\nu(n)$, $\nu=1,\ldots,k(n)$, не обращая внимания на то, что значения полиномов $L_2(x),\ldots,L_s(x)$ при $s\leqslant n-1$ уже были найдены на сетках $U_{\nu,s}$ $(\nu=0,\ldots,k(s))$. Общее число операций, необходимых для вычисления интегралов $\hat f_0,\hat f_1,\ldots,\hat f_n$, равно

$$O\left(\sum_{s=0}^{n}s\sum_{\nu=1}^{k(s)}d_\nu(s)\right). \tag{4.14.43}$$

Приведем значительно более экономный способ приближенного вычисления интеграла (4.14.39), использующий ту же информацию $\{f((j+1/2)/N)\}_{j=0}^{d}$, что и формула (4.14.41). Этот способ основывается на использовании в (4.14.41) полинома Мейкснера $m_{n,N}(x)=m_{n,N}^0(x)$ (см.§4.8) вместо $L_n(x)$. Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}f(x)L_n(x)\,dx=\hat l_n(f)+\hat A_{n,N}(f), \tag{4.14.44}$$

где

$$\hat l_n(f)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{d}e^{-(j+\frac12)/N}f\left(\frac{j+1/2}{N}\right)m_{n,N}\left(\frac{j}{N}\right). \tag{4.14.45}$$

Для вычисления $m_{n,N}\left(\frac{j}{N}\right)$ можно воспользоваться разностным уравнением $(\delta=1/N)$

$$\begin{gathered} e^{-\delta}(Nx+1)m_{n,N}(x+\delta)\\ =\left[Nx\left(1+e^{-\delta}\right)+n\left(e^{-\delta}-1\right)+e^{-\delta}\right]m_{n,N}(x)-Nxm_{n,N}(x-\delta), \end{gathered} \tag{4.14.46}$$

вытекающим из (4.5.7) и (4.8.2). Тогда для вычисления $\hat l_n(f)$ по формуле (4.14.44) потребуется $O(L)$ операций, так что вместо (4.14.43) потребуется

$$O\left(\sum_{s=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{k(s)}d_\nu(s)\right)$$

операций для приближенного вычисления всех коэффициентов $\hat f_0,\ldots,\hat f_n$.

С другой стороны, известно, что если $f(x)$ достаточно гладкая финитная функция, то при фиксированном n для остатка квадратурной формулы (4.14.40) имеет место оценка

$$A_{n,N}(f)=O\left(N^{-2}\right)\quad(N\to\infty).$$

Покажем, что формула (4.14.44) обладает аналогичным свойством. С этой целью представим остаточный член формулы (4.14.44) в следующем виде:

$$\hat A_{n,N}(f)=A_{n,N}(f)+r_{n,N}(f), \tag{4.14.47}$$

где

$$r_{n,N}(f)=\delta\sum_{j=0}^{d}e^{-(j+1/2)\delta}f\left(\delta\left(j+\frac12\right)\right)\left[L_n\left(\delta\left(j+\frac12\right)\right)-m_{n,N}(j\delta)\right] \tag{4.14.48}$$

в силу (4.14.40) и (4.14.44). Воспользуемся асимптотической формулой (4.11.8). Тогда из (4.14.48) находим, что

$$r_{n,N}(f) = -\delta \sum_{j=0}^{d} e^{-(j+1/2)\delta} f\left(\delta\left(j+\frac{1}{2}\right)\right) X_n(j\delta), \tag{4.14.49}$$

где, в соответствии с (4.11.9),

$$X_n(x) = \left[(1-\frac{n}{2}\delta)\left(e^{n\delta/2}-1-\frac{n}{2}\delta\right)-\left(\frac{n}{2}\delta\right)^2\right] L_n\left(x+\frac{\delta}{2}\right)$$

$$+e^{n\delta/2}\left[{}_2\psi_{n,N}^0(x) - n\frac{\delta^2}{4}L_{n-1}^1(x) - \left(1-\frac{n}{2}\delta\right)\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{r!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^r L_{n-r}^r(x)\right], \tag{4.14.50}$$

(${}_2\psi_{n,N}^0(x)$ определена в § 4.10). По лемме 1.5.2 при $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем:

$$\left|\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{r!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^r L_{n-r}^r(x)\right| \leqslant \left(e^{1/2}+2^{-1/2}\right)\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{r!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^r \binom{n}{n-r}$$

$$< \frac{1}{4}\left(e^{1/2}+2^{-1/2}\right)\left(\delta\frac{n}{2}\right)^2 \exp\left(n\delta/2\right). \tag{4.14.51}$$

Аналогично этому,

$$\left|L_n\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right| \leqslant 3\exp\left(\frac{n}{2}\delta\right) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{4.14.52}$$

в силу (4.12.5). Пусть $n = O\left(N^{1/2}\right)$. Тогда из теоремы 4.10.2 вытекает оценка

$$|{}_2\psi_{n,N}^0(x)| = O\left(\frac{n^4}{N^2}\right) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{4.14.53}$$

Сравнивая (4.14.50) – (4.14.53), находим:

$$|X_n(x)| = O\left(\frac{n^4}{N^2}\right) \tag{4.14.54}$$

равномерно относительно $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1 \leqslant n \leqslant cN^{1/2}$.

С другой стороны, из теоремы 4.12.1 при $n = O\left(N^{2/3}\right)$ получаем:

$$|X_n(x)| \leqslant \frac{c(\sigma)n^{3-1/12}}{N^2}x^{-3/4}\left(1+x^{-1/2}\right) \quad (x \geqslant \sigma > 0). \tag{4.14.55}$$

Из (4.14.47), (4.14.49), (4.14.54) и (4.14.55) для финитной достаточно гладкой функции $f(x)$ и фиксированного n будем иметь:

$$\hat{A}_{n,N}(f) = O\left(N^{-2}\right) \quad (N \to \infty).$$

§ 4.15. О решении дискретных сверток

Наряду с интегральным уравнением (4.14.1) в приложениях часто встречается уравнение

$$y(s) = \sum_{j=0}^{s} x(j)g(s-j) \quad (s = 0, 1, \ldots), \tag{4.15.1}$$

в котором $x = x(j)$ и $y = y(j) \quad (j = 0, 1 \ldots)$ трактуются, соответственно, как входной и выходной сигналы и считаются известными, а $g = g(j) \quad (j = 0, 1, \ldots)$ есть неизвестная функция, подбираемая такой, чтобы на данное воздействие $x = x(j)$ система реагировала сигналом $y = y(j)$. Уравнение (4.15.1) возникает и в результате дискретизации уравнения (4.14.1). Непосредственное нахождение неизвестной дискретной функции $g = g(j)$ из уравнения (4.15.1) по разным причинам может оказаться неэффективным. С другой стороны, в работах [39], [42] и [43] (см. также цитированную там литературу) было показано, что если дискретные функции $x = x(j)$, $y = y(j)$, $g = g(j)$ будут представлены в виде рядов по функциям Мейкснера (см. §4.6) подставлены в уравнение (4.15.1), то для нахождения с заданной точностью функции $g = g(j)$ в виде частичной суммы Фурье по функциям Мейкснера, то потребуется значительно меньшее количество операций. Кроме того, если сигналы $x = x(j)$ и $y = y(j)$ содержат ошибки измерений (шумы), то в результате приближенного представления этих сигналов в виде частных сумм Фурье будет достигнут эффект предварительного сглаживания указанных ошибок. В этом параграфе мы даем строгое обоснование метода решения уравнения (4.15.1), основанного на разложении функций $x = x(j)$, $y = y(j)$ и $g = g(j)$ в ряды Фурье по функциям Мейкснера.

Предположим, что дискретные функции $x = x(j)$, $y = y(j)$ и $g = g(j)$ являются элементами пространства l_2. Тогда, пользуясь базисностью системы функций Мейкснера $\{\mu_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в l_2, мы можем представить $x = x(j)$, $y = y(j)$ и $g = g(j)$ в виде рядов по этой системе, т.е.

$$\left.\begin{aligned} x(j) &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k)\mu_k(j), \\ y(j) &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{y}(k)\mu_k(j), \\ g(j) &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}(k)\mu_k(j). \end{aligned}\right\} \tag{4.15.2}$$

Из (4.15.1) и (4.15.2) имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{y}(k)\mu_k(s) &= \sum_{l=0}^{s}\sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}(n)\mu_n(l) \sum_{m=0}^{\infty} \hat{g}(m)\mu_m(s-l) \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \hat{x}(n)\hat{y}(m) \sum_{l=0}^{s} \mu_n(l)\mu_m(s-l). \end{aligned} \tag{4.15.3}$$

Поскольку $\mu_n(j) = \mu_j(n)$ в силу (4.7.2), то

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{x}(n)\mu_n(l)| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}^2(n)\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_l^2(n)\right)^{1/2} < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\hat{g}(m)\mu_m(s-l)| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}^2(n)\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mu_{s-l}^2(m)\right)^{1/2} < \infty.$$

Поэтому преобразования в (4.15.3) законны. Из (4.7.1) и (4.15.3) находим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{y}(k)\mu_k(s)$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \hat{x}(n)\hat{g}(m)(1-q)^{-1/2}\left[\mu_{n+m}(s) - q^{1/2}\mu_{n+m+1}(s)\right]. \tag{4.15.4}$$

Полагая $\hat{x}(-1) = 0$, из (4.15.4) получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{y}(k)\mu_k(s)$$

$$= (1-q)^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k(s)\sum_{l=0}^{k}\hat{g}(l)\left[\hat{x}(k-l) - q^{1/2}\hat{x}(k-l-1)\right].$$

В силу базисности системы $\{\mu_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в l_2 отсюда следует, что

$$\hat{y}(k) = (1-q)^{-1/2}\sum_{l=0}^{k}\hat{g}(l)\left[\hat{x}(k-l) - q^{1/2}\hat{x}(k-l-1)\right] (k = 0, 1, \ldots).$$

Поскольку $\hat{x}(-1) = 0$, то мы можем переписать эти равенства в виде следующей системы:

$$\hat{y}(0) = (1-q)^{-1/2}\hat{g}(0)\hat{x}(0),$$

$$\hat{y}(k) = (1-q)^{-1/2}\left\{\hat{g}(k)\hat{x}(0) + \sum_{l=0}^{k}\hat{g}(l)\left[\hat{x}(k-l) - q^{1/2}\hat{x}(k-l-1)\right]\right\},$$

где k=0,1,.... Отсюда неизвестные коэффициенты $\hat{g}(l)$ $(l = 0, 1, \ldots)$ могут быть найдены рекуррентным способом. Предположим, что найдены коэффициенты $\hat{g}(l)$ $(l = 0, 1, \ldots, n)$. Тогда для уравнения (4.15.1) вместо точного решения $g = g(j)$ мы получим приближенное

$$S_n(g) = S_n(j, g) = \sum_{l=0}^{n}\hat{g}(l)\mu_l(j),$$

представляющее собой частичную сумму порядка n ряда Фурье функции $g = g(j)$ по функциям Мейкснера $\mu_l(j)$. Анализ погрешности $R_n(g) = R_n(g, j) = g(j) - S_n(j, g)$ может быть произведен известными методами, с помощью которых детально исследована задача о приближении функции $f = f(x)$ на $[0, \infty)$ суммами Фурье по полиномам Лагерра (см. [2], [9], [10], [11], [37], [44] и цитированную там литературу). Не останавливаясь на подробностях, отметим лишь, что этот анализ непосредственно приводит к задаче об асимптотических свойствах полиномов Мейкснера, рассмотренных в §§4.9–4.13.

§ 4.16. О дальнейших приложениях

Полиномы Мейкснера $M_{n,N}(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ можно применять в качестве ортогонального базиса при сглаживании наблюдений, оценивании неизвестного распределения дискретных случайных величин (§1.12) и в других задачах. Остановимся на следующей задаче, связанной со сглаживанием результатов наблюдений.

Пусть $\delta > 0$, $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, $N = 1/\delta$, $\alpha \geqslant 0$, $\mathcal{P}^n$ – пространство алгебраических полиномов $p_n = p_n(x)$ степени $\leqslant n$,

$$\|p_n\|_{2,\delta} = \left(\sum_{t\in\Omega_\delta}\eta_N(t,\alpha)p_n^2(t)\right)^{1/2}, \tag{4.16.1}$$

где весовая функция $\eta_N(t,\alpha)$ определена равенством (4.8.3). Поскольку $\eta_N(t,\alpha) \asymp \delta t^\alpha e^{-t}$ $(t \geqslant \delta)$ и $\eta_N(0,\alpha) \asymp \delta^{\alpha+1}$ в силу (4.8.3), то норма $\|p_n\|_{2,\delta}$ эквивалентна следующей:

$$\|p_n\|_{2,\delta}^* = \left(\delta^{\alpha+1}p_n^2(0) + \delta \sum_{t\in\Omega_\delta} t^\alpha e^{-t} p_n^2(t)\right)^{1/2}. \tag{4.16.2}$$

Предположим, что известна оценка сверху для нормы $\|p_n\|_{2,\delta}$ или $\|p_n\|_{2,\delta}^*$. Что можно сказать о величине $|p_n(x)|$ при $x \in [0,\infty)$? Такая задача возникает, например, в следующей ситуации: полином $q_n(x)$ степени n задан в виде

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{q}_{n,k} m_{k,N}^\alpha(x), \tag{4.16.3}$$

где $m_{k,N}^\alpha(x)$ $(k=0,\ldots,n)$ – нормированные полиномы Мейкснера. Если число n велико, то вместо $q_n(x)$ мы можем взять

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \hat{q}_{n,k} m_{k,N}^\alpha(x), \tag{4.16.4}$$

где m существенно меньше, чем n $(m \ll n)$. Тогда величина

$$\left(\sum_{k=m+1}^{n} \hat{q}_{n,k}^2\right)^{1/2}$$

определяет погрешность (в смысле метода наименьших квадратов) замены полинома $q_n(x)$ его приближенным значением $S_m(x)$. По равенству Парсеваля,

$$\left(\sum_{k=m+1}^{n} \hat{q}_{n,k}^2\right)^{1/2} = \|q_n - S_m\|_{2,\delta} = \left(\sum_{t\in\Omega_\delta} \eta_N(t,\alpha)[q_n(t)-S_m(t)]^2\right)^{1/2}. \tag{4.16.5}$$

Как оценить погрешность $|p_n(x)| = |q_n(x) - S_m(x)|$ в точке $x \in [0,\infty)$, если нам известна оценка сверху для погрешности $\|p_n\|_{2,\delta}$? Используя весовую оценку для полиномов Мейкснера, установленную в §4.13, можно доказать, что если $0 \leqslant \alpha$ и $n \leqslant \lambda N$ $(\lambda > 0)$, то найдется постоянная $c = c(\alpha,\lambda)$, что

$$|p_n(x)| \leqslant c\|p_n\|_{2,\delta} n^{(1-\alpha)/2} A_n^\alpha(x) \quad (0 \leqslant x < \infty); \tag{4.16.6}$$

$A_n^\alpha(x)$ определена равенствами (1.5.54). Ниже мы ограничимся рассмотрением целого $\alpha \geqslant 0$.

Теорема 4.16.1. *Пусть* $0 \leqslant \alpha$ *– целое,* $\lambda > 0$. *Тогда найдется такая постоянная* $c = c(\alpha,\lambda)$, *что для произвольного полинома* $p_n \in \mathcal{P}^n$ *степени* $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$ *при* $0 < \delta \leqslant 1$ *имеет место оценка (4.16.6).*

Доказательство. Пусть $p_n \in \mathcal{P}^n$. Тогда

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k m_{k,N}^\alpha(x). \tag{4.16.7}$$

По неравенству Коши-Буняковского,

$$|p_n(x)| \leqslant \left[\sum_{k=0}^{n} \beta_k^2 \sum_{k=0}^{n} \left(m_{k,N}^\alpha(x)\right)^2\right]^{1/2}. \tag{4.16.8}$$

С другой стороны, в силу ортонормированности системы $\{m_{k,N}^{\alpha}(x)\}_{k=0}^{n}$ и равенства (4.16.7) имеем:

$$\sum_{t\in\Omega_\delta}\eta_N(t)p_n^2(t)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k^2. \tag{4.16.9}$$

Сопоставляя (4.16.8) и (4.16.9) с (4.16.1), получаем:

$$|p_n(x)|\leqslant\|p_n\|_{2,\delta}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(m_{k,N}^{\alpha}(x)\right)^2\right]^{1/2}. \tag{4.16.10}$$

Оценим последнюю сумму. Из (4.5.13), (4.8.1) и (4.8.2) имеем $(q=e^{-\delta})$:

$$\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,y)=\sum_{k=0}^{n}m_{k,N}^{\alpha}(x)m_{k,N}^{\alpha}(y)\frac{(n+1)!e^{-n\delta}}{\Gamma(n+\alpha+1)\delta(e^{\delta}-1)}$$

$$\times\frac{M_{n,N}^{\alpha}(x)M_{n+1,N}^{\alpha}(y)-M_{n+1,N}^{\alpha}(x)M_{n,N}^{\alpha}(y)}{x-y}. \tag{4.16.11}$$

В силу (4.5.19),

$$M_{n,N}^{\alpha}(t)=e^{-\delta}M_{n+1,N}^{\alpha}(t)-e^{-\delta}M_{n+1,N}^{\alpha-1}(t+\delta). \tag{4.16.12}$$

С помощью (4.16.12) перепишем (4.16.11) в таком виде:

$$\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,y)=$$

$$\frac{(n+1)!e^{-(n+1)\delta}}{\Gamma(n+\alpha+1)\delta(e^{\delta}-1)(x-y)}\left[M_{n+1,N}^{\alpha}(x)M_{n+1,N}^{\alpha-1}(y+\delta)-M_{n+1,N}^{\alpha}(y)M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x+\delta)\right]$$

$$=\frac{(n+1)!e^{-(n+1)\delta}}{\Gamma(n+\alpha+1)\delta(e^{\delta}-1)}\left[M_{n+1,N}^{\alpha}(x)\frac{M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x+\delta)-M_{n+1,N}^{\alpha}(y+\delta)}{y-x}\right.$$

$$\left.-M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x+\delta)\frac{M_{n+1,N}^{\alpha}(x)-M_{n+1,N}^{\alpha}(y)}{y-x}\right].$$

Переходим здесь к пределу при $y\to x$:

$$\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,x)=\sum_{k=0}^{n}\left(m_{k,N}^{\alpha}(x)\right)^2=$$

$$\frac{(n+1)!e^{-(n+1)\delta}}{\Gamma(n+\alpha+1)\delta(e^{\delta}-1)}\left[M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x+\delta)\left(M_{n+1,N}^{\alpha}(x)\right)'-M_{n+1,N}^{\alpha}(x)\left(M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x+\delta)\right)'\right]. \tag{4.16.13}$$

Рассмотрим два случая: $\alpha\geqslant1$ и $\alpha=0$. В случае $\alpha\geqslant1$ в силу (4.11.3) и (4.11.4) имеем:

$$\left|M_{n+1,N}^{\alpha}(x)\left(M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x+\delta)\right)'\right|\leqslant c(\alpha,\lambda)A_{n+1}^{\alpha}(x)A_n^{\alpha}(x)\leqslant c_1(\alpha,\lambda)\left(A_n^{\alpha}(x)\right)^2. \tag{4.16.14}$$

Аналогично,

$$\left|M_{n+1,N}^{\alpha-1}(x+\delta)\left(M_{n+1,N}^{\alpha}(x)\right)'\right|\leqslant c(\alpha,\lambda)A_{n+1}^{\alpha-1}(x)A_n^{\alpha+1}(x)\leqslant c_1(\alpha,\lambda)\left(A_n^{\alpha}(x)\right)^2, \tag{4.16.15}$$

Из (4.16.13) – (4.16.15) при $\alpha\geqslant1$ находим:

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\left(m_{k,N}^{\alpha}(x)\right)^2\right]^{1/2}\leqslant c(\alpha,\lambda)\sqrt{n}n^{-\alpha/2}A_n^{\alpha}(x). \tag{4.16.16}$$

Рассмотрим случай $\alpha = 0$. Тогда

$$M^{\alpha-1}_{n+1,N}(z) = M^{-1}_{n+1,N}(z) = \frac{-1}{n+1}(e^\delta - 1)NzM^1_{n+1,N}(z-\delta)$$

в силу (4.5.4). Поэтому

$$M^{\alpha-1}_{n+1,N}(x+\delta) = -\frac{x+\delta}{n+1}(e^\delta - 1)NM^1_{n,N}(x),$$

$$\left(M^{\alpha-1}_{n+1,N}(x+\delta)\right)' = \frac{-(e^\delta-1)}{n+1}NM^1_{n,N}(x) - \frac{x+\delta}{n+1}(e^\delta-1)N\left(M^1_{n,N}(x)\right)'.$$

Следовательно,

$$\left|M^0_{n+1,N}(x)\left(M^{-1}_{n+1,N}(x+\delta)\right)'\right| \leqslant \frac{N(e^\delta-1)}{n+1}\left|M^0_{n+1,N}(x)M^1_{n,N}(x)\right|$$

$$+\frac{x+\delta}{n+1}(e^\delta-1)N\left|M^0_{n+1,N}(x)\left(M^1_{n,N}(x)\right)'\right|$$

$$\leqslant \frac{c(\lambda)}{n}A^1_n(x)A^0_{n+1}(x) + c(\lambda)\frac{x+\delta}{n+1}A^0_{n+1}(x)A^2_{n-1}(x). \tag{4.16.17}$$

$$\left|M^{-1}_{n+1,N}(x+\delta)\left(M^0_{n+1,N}(x)\right)'\right|$$

$$= \frac{x+\delta}{n+1}(e^\delta-1)N\left|M^1_{n,N}(x)\left(M^0_{n+1,N}(x)\right)'\right| \leqslant c(\lambda)\frac{x+\delta}{n+1}\left(A^1_n(x)\right)^2. \tag{4.16.18}$$

Пусть $0 \leqslant x \leqslant 2n$. Тогда из (1.5.54) следует, что

$$\frac{1}{n+1}A^1_{n+1}(x) \leqslant cA^0_n(x), \quad \frac{x}{n+1}A^2_{n-1}(x) \leqslant cA^0_n(x), \quad \frac{x}{n+1}\left(A^1_n(x)\right)^2 \leqslant c\left(A^0_n(x)\right)^2.$$

Отсюда и из (4.16.17) и (4.16.18) получаем неравенства

$$\left|M^0_{n+1,N}(x)\left(M^{-1}_{n+1,N}(x+\delta)\right)'\right| \leqslant c(\lambda)\left[A^0_n(x)\right]^2, \tag{4.16.19}$$

$$\left|M^{-1}_{n+1,N}(x+\delta)\left(M^0_{n+1,N}(x)\right)'\right| \leqslant c(\lambda)\left[A^0_n(x)\right]^2, \tag{4.16.20}$$

Перейдем к случаю $x \geqslant 2n$. В силу (4.5.20),

$$M^{-1}_{n+1,N}(x+\delta) = -\frac{x+\delta}{n+1}(e^\delta-1)NM^1_{n,N}(x)$$

$$= \frac{(x+\delta)(e^\delta-1)N}{(n+1)(x+\delta)(e^\delta-1)N}\left[(n+1)M^0_{n,N}(x+\delta) - (n+1)M^0_{n+1,N}(x+\delta)\right]$$

$$= M^0_{n,N}(x+\delta) - M^0_{n+1,N}(x+\delta).$$

Поэтому при $x \geqslant 2n$ имеем:

$$\left|M^0_{n+1,N}(x)\left(M^{-1}_{n+1,N}(x+\delta)\right)'\right| \leqslant$$

$$\left|M^0_{n+1,N}(x)\left(M^0_{n,N}(x+\delta)\right)'\right| + \left|M^0_{n+1,N}(x)\left(M^0_{n+1,N}(x+\delta)\right)'\right| \leqslant$$

$$c(\lambda)A_{n+1}^0(x)A_{n-1}^1(x)+c(\lambda)A_{n+1}^0(x)A_n^0(x)\leqslant c_1(\lambda)\left(A_n^0(x)\right)^2. \qquad (4.16.21)$$

Аналогично этому,

$$\left|M_{n+1,N}^{-1}(x+\delta)\left(M_{n+1,N}^0(x)\right)'\right|\leqslant c(\lambda)\left(A_n^0(x)\right)^2. \qquad (4.16.22)$$

Из (4.16.19) – (4.16.22) и (4.16.13) получаем:

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\left(m_{k,N}^0(x)\right)^2\right]^{1/2}\leqslant c(\lambda)\sqrt{n}A_n^0(x). \qquad (4.16.23)$$

Сопоставляя (4.16.16) и (4.16.23) с (4.16.10), приходим к оценке для произвольного целого $\alpha\geqslant 0$. Теорема 4.16.1 доказана.

Комментарии к главе 4

Полиномы $M_n^\alpha(x,q)$ в иных обозначениях впервые были введены в работе Мейкснера [35] для произвольного α с помощью метода производящих функций. Связь полиномов $M_n^\alpha(x,q)$ с гипергеометрической функцией, выраженная формулой (4.2.1), была доказана в работе Вебер и Эрдейи [20]. Метод доказательства рекуррентных соотношений для полиномов $M_n^\alpha(x,q)$, установленных в разделе 3.4 мы заимствовали из [20], [14]. Результаты, содержащиеся в разделах 4.9 – 4.11 получены в работах [29], [33], [45], [46]. Теорема 4.12.2 аннонсирована в работе [47]. Метод доказательства теоремы 4.12.2, приведенное в в разделе 4.12 также принадлежит автору работы [47] Джамалову М.-А.Ш. Остальные результаты раздела 4.12 приводятся здесь впервые. Результаты, полученные в разделе 4.13 являются новыми и приводятся здесь впервые, за исключением случая целого α, который был рассмотрен впервые в работе [46]. Содержание разделов 4.14 – 4.16 мы заимствовали из работ автора [33], [48].

Глава 5. Смешанные ряды по полиномам Якоби

В настоящей главе мы рассмотрим смешанные ряды по полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ и, в частности, смешанные ряды по ультрасферическим полиномам $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$. Отдельного рассмотрения заслуживают также смешанные ряды по полиномам Лежандра и Чебышева.

§ 5.1. Сводка формул и дальнейшие свойства полиномов Якоби

Для удобства силок мы соберем здесь наиболее часто используемые в дальнейшем свойства полиномов Якоби и дакажем некоторые вспомогательные результаты. Полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ мы будем определять как раньше с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{\kappa(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\kappa(x)\sigma^n(x)\right\}, \tag{5.1.1}$$

где α, β – произвольные действительные числа, $\kappa(x) = \kappa(x;\alpha,\beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\sigma(x) = 1-x^2$. Если $\alpha,\beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортонормированную ситему с весом $\kappa(x)$, т.е.

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)\kappa(x)dx = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm}, \tag{5.1.2}$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \tag{5.1.3}$$

и имеет место

формула Кристоффеля-Дарбу

$$K_n^{\alpha,\beta}(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{P_k^{\alpha,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta}(y)}{h_k^{\alpha,\beta}} =$$

$$\frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2}\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(y)-P_n^{\alpha,\beta}(x)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y} \tag{5.1.4}$$

В частности, при $y=1$ имеем:

$$K_n^{\alpha,\beta}(x,1) = 2^{-\alpha-\beta-1}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}P_n^{\alpha+1,\beta}(x). \tag{5.1.5}$$

Ниже нам понадобятся следующие свойства полиномов Якоби [2]:

производные

$$\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \tag{5.1.6}$$

$$\frac{d^r}{dx^r}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r}P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x), \tag{5.1.7}$$

$$\frac{d^r}{dx^r}P_{n+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta)^{[r]}}{2^r}P_n^{\alpha,\beta}(x), \tag{5.1.8}$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1)\dots(a+\nu-1)$, $a^{[0]} = 1$, $a^{[\nu]} = a(a-1)\dots(a-\nu+1)$;

частные значения

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad P_n^{\alpha,\beta}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}; \tag{5.1.9}$$

симметрия

$$P_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(x); \tag{5.1.10}$$

весовая оценка $(1 \leqslant x \leqslant 1)$

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta)\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}, \tag{5.1.11}$$

где здесь и всюду в дальнейшем через $c(\alpha), c(\alpha,\beta), c(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)$ означают положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах;

равенства

$$\binom{n}{l}P_n^{-l,\beta}(x) = \binom{n+\beta}{l}\left(\frac{x-1}{2}\right)^l P_{n-l}^{l,\beta}(x), \quad 1 \leqslant l \leqslant n, \tag{5.1.12}$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\alpha+1)_k}\left(\frac{1-t}{2}\right)^k, \tag{5.1.13}$$

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}}\frac{d^m}{dx^m}\left\{(1-x)^{m+\alpha}(1+x)^{m+\beta}P_{n-m}^{m+\alpha,m+\beta}(x)\right\}, \tag{5.1.14}$$

$$\frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)(1-x^2)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) = AP_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) + BP_n^{\alpha,\beta}(x) + CP_{n+1}^{\alpha,\beta}(x), \tag{5.1.15}$$

где

$$A = \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad B = (\alpha-\beta)\frac{2n(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+1)},$$

$$C = -\frac{2n(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+1)},$$

$$(1-x)P_n^{\alpha+1,\beta}(x) = \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}\left[(n+\alpha+1)P_n^{\alpha,\beta}(x) - (n+1)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)\right], \tag{5.1.16}$$

$$(1+x)P_n^{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}\left[(n+\beta+1)P_n^{\alpha,\beta}(x) + (n+1)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)\right]. \tag{5.1.17}$$

Приступим теперь к доказательству некоторых вспомогательных утверждений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 5.1.1. *Пусть $\alpha,\beta > -1$, k, r–целые, $r \geqslant 1$, $k \geqslant 2r$. Тогда*

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x) = \sum_{l=0}^{2r} a_l^{\alpha,\beta} P_{k+r-l}^{\alpha,\beta}(x),$$

где

$$a_l^{\alpha,\beta} = a_l^{\alpha,\beta}(k,r) =$$

$$\frac{(k+\alpha+\beta)^{[r]}}{2^{2r}(k-l+1)_r}\frac{1}{h_{k+r-l}^{\alpha,\beta}}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha+r}(1+t)^{\beta+r}P_{k-l}^{\alpha+r,\beta+r}(t)P_k^{\alpha,\beta}(t)dt. \tag{5.1.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку при $\alpha,\beta > -1$ система полиномов Якоби $\{P_\nu^{\alpha,\beta}(x)\}$ ортогональна, то мы можем записать

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x) = \sum_{l=0}^{k+r} a_l^{\alpha,\beta} P_{k+r-l}^{\alpha,\beta}(x),$$

где

$$a_l^{\alpha,\beta} = a_l^{\alpha,\beta}(k,r) =$$

$$\frac{1}{h_{k+r-l}^{\alpha,\beta}} \int\limits_{-1}^{1} (1-t)^{\alpha+r}(1+t)^{\beta+r} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) P_{k+r-l}^{\alpha,\beta}(t)dt. \tag{5.1.19}$$

Воспользуемся формулой (5.1.15), тогда

$$\kappa(x)P_{k+r-l}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^r}{2^r(k+r-l)_r}\frac{d^r}{dx^r}\left\{(1-x)^{r+\alpha}(1+x)^{r+\beta}P_{k-l}^{r+\alpha,r+\beta}(x)\right\}, \tag{5.1.20}$$

Из (5.1.19), путем интегрирования по частям с учетом (5.1.8) и (5.1.20) приходим к равенству (5.1.18) при $l \leqslant 2r$. Если же $l > 2r$, то $a_l^{\alpha,\beta} = 0$. Лемма 5.1.1 доказана.

Лемма 5.1.2. *Для чисел* $a_l^{\alpha,\beta} = a_l^{\alpha,\beta}(k,r)$, *определенных равенством (5.1.18) имеет место оценка*

$$|a_l^{\alpha,\beta}(k,r)| \leqslant c(\alpha,\beta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы имеем

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha+r}(1+t)^{\beta+r}P_{k-l}^{\alpha+r,\beta+r}(t)P_k^{\alpha,\beta}(t)dt\right| \leqslant$$

$$\left(\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha+r}(1+t)^{\beta+r}(P_{k-l}^{\alpha+r,\beta+r}(t))^2dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha+r}(1+t)^{\beta+r}(P_k^{\alpha,\beta}(t))^2dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\left(h_{k-l}^{\alpha+r,\beta+r}\right)^{1/2}\left(h_k^{\alpha,\beta}\right)^{1/2}. \tag{5.1.21}$$

Из (5.1.18) и (5.1.21) мы находим

$$|a_l^{\alpha,\beta}(k,r)| \leqslant \frac{(k+\alpha+\beta)^{[r]}}{(k-l+1)_r}\frac{(h_{k-l}^{\alpha+r,\beta+r}h_k^{\alpha,\beta})^{1/2}}{h_{k+r-l}^{\alpha,\beta}}. \tag{5.1.22}$$

Далее, из (5.1.3) следует, что

$$h_n^{\alpha,\beta} \asymp \frac{1}{n}, \tag{5.1.23}$$

т.е. найдутся такие положительные числа $c_1 = c_1(\alpha,\beta), c_2 = c_2(\alpha,\beta)$, что $c_1/n \leqslant h_n^{\alpha,\beta} \leqslant c_2/n, \quad n = 1,2,\ldots$ Сопоставляя (5.1.22) и (5.1.23), приходим к утверждению леммы 5.1.2.

Для ультрасферических полиномов лемма 5.1.1 принимает следующий вид

Лемма 5.1.3. *Пусть* $\alpha > -1$, k, r *– целые,* $r \geqslant 1$, $k \geqslant r+1$. *Тогда*

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^{r}\lambda_j^{\alpha}P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x),$$

где

$$\lambda_j^{\alpha} = \lambda_j^{\alpha}(r,k) = \frac{(-1)^j(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!}. \tag{5.1.24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что $\alpha - r > -1$, тогда, полагая $a = \alpha - r$, мы можем воспользоваться известной [49] формулой

$$\frac{P_n^{a,a}(x)}{P_n^{a,a}(1)} = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n!(\alpha+1)_{n-2j}(n+2a+1)_{n-2j}(1/2)_j(a-\alpha)_j}{(n-2j)!(2j)!(a+1)_{n-2j}(n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}}$$

$$\times \frac{1}{(n-2j+a+1)_j(n-2j+\alpha+3/2)_j} \frac{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(x)}{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(1)}, \qquad (5.1.25)$$

где $[b]$ – целая часть числа b. Поскольку при $j \geqslant r+1$ выполняется равенство $(a-\alpha)_j = (-r)_j = 0$, то из (5.1.25) мы имеем

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x),$$

где с учетом (5.1.9)

$$\lambda_j^\alpha = \frac{P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(1)}{P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(1)} \frac{(k+r)!(\alpha+1)_{k+r-2j}(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}}{(k+r-2j)!(2j)!(\alpha-r+1)_{k+r-2j}} \times$$

$$\frac{(1/2)_j(-r)_j}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k-2j+\alpha+1)_j(k+r-2j+\alpha+3/2)_j} =$$

$$\frac{(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j(-r)_j}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!} \frac{(\alpha-r+1)_{k+r}}{(\alpha-r+1)_{k+r-2j}(k-2j+\alpha+1)_j} =$$

$$\frac{(-1)^j(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!}.$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы 5.1.3 в случае $\alpha > r-1$. Но поскольку $P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)$, λ_j^α и $P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x)$ представляют собой аналитические функции относительно α, то утверждение леммы 5.1.3 вытекает из уже доказанного случая.

§ 5.2. Немного о рядах Фурье-Якоби

Здесь мы рассмотрим некоторые вопросы сходимости рядов Фурье-Якоби, акцентируя при этом внимание на тех из них, которые касаются недостатков сумм Фурье-Якоби, если рассматривать их в качестве аппарата приближения дифференцируемых и аналитических функций. Детальный анализ причин этих недостатков приведет нас в дальнейшем введению смешанных рядов по полиномам Якоби.

2.1. Суммы Фурье-Якоби. Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\kappa(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $p \geqslant 1$. Обозначим через $\mathcal{L}_p^{\alpha,\beta}$ пространство измеримых функций $f = f(x)$, определенных на $[-1,1]$, для которых

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p^{\alpha,\beta}} = \left(\int_{-1}^{1} \kappa(x)|f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \qquad (5.2.1)$$

Если $f \in \mathcal{L}_p^{\alpha,\beta}$, то мы можем определить коэффициенты Фурье-Якоби функции f

$$f_k^{\alpha,\beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}} \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta f(x) P_k^{\alpha,\beta}(x)dx \qquad (5.2.2)$$

и рассмотреть ее ряд Фурье по полиномам Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x). \tag{5.2.3}$$

Тогда

$$S_n^{\alpha,\beta}(f) = S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x) \tag{5.2.4}$$

представляет собой частичную сумму порядка n ряда Фурье-Якоби (5.2.3). Мы будем называть ее просто суммой Фурье-Якоби. Сопоставляя (5.1.4), (5.2.2) и (5.2.4), мы можем записать сумму Фурье-Якоби также в следующем виде

$$S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \int_{-1}^{1} f(t) K_n^{\alpha,\beta}(x,t)\kappa(t)dt. \tag{5.2.5}$$

Будем рассматривать $S_n^{\alpha,\beta}(f) = S_n^{\alpha,\beta}(f,x)$ как аппарат приближения непрерывных функций, определенных на $[-1,1]$. Через $C[-1,1]$ обозначим линейное нормированное пространство всех непрерывных функций, заданных на $[-1,1]$, для которых норма определяется следующим образом $\|f\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$. В теоретических и прикладных задачах возникает вопрос о том, можно ли использовать суммы Фурье-Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ для приближенного представления исходной функции f. Если это возможно, то следующий вопрос состоит в том, насколько точно $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ приближает f. Если речь идет о метрике пространства $C[-1,1]$, то требуется найти условия на функцию $f \in C[-1,1]$, которые гарантируют сходимость в $C[-1,1]$ частичных сумм $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ к f при $n \to \infty$. Если такие условия найдены, то возникает вопрос о скорости стремления к нулю нормы $\|f - S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{C[-1,1]}$ при $n \to \infty$. Аналогичные задачи возникают также для функций $f \in \mathcal{L}_p^{\alpha,\beta}$. В этом случае требуется исследовать поведение разности $\|f - S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{\mathcal{L}_p^{\alpha,\beta}}$. Часто возникает также вопрос об исследовании поведения величины $|f(x) - S_n^{\alpha,\beta}(f,x)|$ при фиксированном $x \in [-1,1]$ и $n \to \infty$. Достаточно часто приходится рассматривать задачи, в которых наряду с функцией $f(x)$ требуется приближенно представлять ее производные $f'(x)$, $f''(x)$, ... В связи с этим возникает вопрос о приближении производной $f^{(\nu)}(x)$ посредством ν–той производной от частичной суммы Фурье-Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f,x)$, другими словами требуется исследовать поведение разности

$$\left| f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} S_n^{\alpha,\beta}(f,x) \right| \tag{5.2.6}$$

при $n \to \infty$. Это – задача об одновременном приближении функции f и ее нескольких производных посредством сумм Фурье-Якоби. На некоторых из приведенных выше задач мы здесь остановимся более подробно.

2.2. Функция Лебега сумм Фурье-Якоби. Неравенство Лебега. Пусть $f \in C[-1,1]$, $\mathcal{P}_n$–пространство алгебраических полиномов степени n,

$$E_n(f) = \min_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_{C[-1,1]} \tag{5.2.6}$$

– наилучшее приближение функции f алгебраическими полиномами степени n, $p_n(f) = p_n(f,x)$ – полином наилучшего приближения степени n, т.е. $\|f - p_n(f)\| = E_n(f)$. Нетрудно заметить, что $S_n^{\alpha,\beta}(p_n(f),x) = p_n(f,x)$, поэтому

$$f(x) - S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = f(x) - p_n(f,x) + S_n^{\alpha,\beta}(p_n(f) - f, x). \tag{5.2.7}$$

Из (5.2.6) и (5.2.7) находим

$$|f(x) - S_n^{\alpha,\beta}(f,x)| \leqslant |f(x) - p_n(f,x)| + |S_n^{\alpha,\beta}(p_n(f) - f, x)|. \tag{5.2.8}$$

С другой стороны из (5.2.5) имеем

$$S_n^{\alpha,\beta}(p_n(f) - f, x) = \int\limits_{-1}^{1} (p_n(f,t) - f(t)) K_n^{\alpha,\beta}(x,t)\kappa(t)dt$$

и, стало быть,

$$|S_n^{\alpha,\beta}(p_n(f) - f, x)| \leqslant E_n(f) L_n^{\alpha,\beta}(x), \tag{5.1.9}$$

где

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) = \int\limits_{-1}^{1} |K_n^{\alpha,\beta}(x,t)|\kappa(t)dt. \tag{5.2.10}$$

Сопоставляя (5.2.8) – (5.2.10), получаем

$$|f(x) - S_n^{\alpha,\beta}(f,x)| \leqslant [1 + L_n^{\alpha,\beta}(x)]E_n(f). \tag{5.2.11}$$

Функция $L_n^{\alpha,\beta}(x)$ называется функцией Лебега, а оценка (1.2.11) неравенством Лебега для сумм Фурье-Якоби. Неравенство Лебега сводит вопрос о величине отклонения сумм Фурье-Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f,x)$ от функции $f(x)$ к оценке функции Лебега $L_n^{\alpha,\beta}(x)$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. По поводу исторической справки о поведении функции Лебега $L_n^{\alpha,\beta}(x)$ и константы Лебега

$$L_n^{\alpha,\beta} = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} L_n^{\alpha,\beta}(x) \tag{5.2.12}$$

при $n \to \infty$ мы можем обратиться к [2] и цитированной там литературе. Из рассуждений, проведенных в [2] (параграф 9.3) следует, что при $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < 1$ порядок роста $L_n^{\alpha,\beta}(x)$ при $n \to \infty$ не превосходит $\ln(n+1)$, другими словами,

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,\varepsilon)\ln(n+1), \quad x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon],$$

кроме того при $s = \max\{\alpha,\beta\} > -1/2$ имеет место оценка

$$L_n^{\alpha,\beta} \geqslant c(\alpha,\beta) n^{s+1/2}. \tag{5.2.13}$$

В работе [50] при $\alpha,\beta > -1/2$, $x \in [-1,1]$ установлено неравенство

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta)\left\{\ln(n+1) + \frac{n^{\alpha+1/2}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+1/2}+1} + \frac{n^{\beta+1/2}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+1/2}+1}\right\},$$

из которого в сочетании с (5.2.13) вытекает следующая оценка

$$L_n^{\alpha,\beta} \asymp n^{s+1/2}. \tag{5.2.14}$$

Из (5.2.11) и (5.2.14) мы выводим

$$\|f - S_n^{\alpha,\beta}(f)\| \leqslant c(\alpha,\beta) n^{s+1/2} E_n(f), \tag{5.2.15}$$

где $s = \max\{\alpha,\beta\} > -1/2$. При $s > -1/2$ множитель $n^{s+1/2}$ неограниченно растет вместе с n. Возникает вопрос о существовании такой функции $f \in C[-1,1]$, для которой оценка (5.2.15) не улучшаема в том смысле, что для бесконечной последовательности номеров $n_1 < n_2 < \ldots$ имеет место неравенство

$$\frac{\|f - S_{n_k}^{\alpha,\beta}(f)\|}{E_{n_k}(f)} \geqslant c(\alpha,\beta) n_k^{s+1/2}. \tag{5.2.16}$$

Пусть $W^r H^\mu$ – класс r–раз непрерывно-дифференцируемых на $[-1,1]$ функций f, для которых при $x, t \in [-1,1]$ выполняется неравенство $|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(t)| \leqslant c(r,\mu)|x-t|^\mu$. В работе [51] построен пример функции $f(x)$, принадлежащей классу $W^r H^\mu$ ($r = 0, 1, \ldots, 0 < \mu < 1$), для которой

$$|f(1) - S_{n_k}^{\alpha,\alpha}(f,1)| \geqslant c(\alpha,r,\mu) n_k^{\alpha+1/2-r-\mu} (\alpha > -1/2, n_k \to \infty).$$

Этот пример в случае $\alpha = \beta$ дает утвердительный ответ на поставленный вопрос о существовании функции f, для которой справедливо неравенство (5.2.16). Это означает, что сумма Фурье-Якоби $S_n^{\alpha,\alpha}(f,x)$ приближает функцию $f \in W^r H^\mu$ в $n^{s+1/2}$ раз хуже по порядку, чем полином наилучшего приближения функции f. Причем, как показывает этот пример, искомая функция f может иметь произвольно высокую конечную гладкость. В случае ультрасферических полиномов $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ мы можем привести совсем простой пример аналитической функции f, для которой снова получим положительный ответ на указанный вопрос. В самом деле, рассмотрим известное разложение (см. [2], стр. 94) производящей функции для ультрасферических полиномов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)} P_n^{\alpha,\alpha}(x) z^n = (1 - 2xz + z^2)^{-\alpha-1/2}. \tag{5.2.17}$$

Функция

$$f(x) = f_z(x) = (1 - 2xz + z^2)^{-\alpha-1/2} = (2z)^{-\alpha-1/2} \left(\frac{1+z^2}{2z} - x \right)^{-\alpha-1/2} \tag{5.2.18}$$

при $0 < z < 1$ аналитична на всей плоскости, разрезанной вдоль положительной полуоси с началом в точке $x = (1+z^2)/(2z) = a > 1$. Известно (см. [52], стр. 476), что

$$E_n[(a-x)^{-\alpha-1/2}] \asymp \frac{n^{\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha+1/2)(\sqrt{a^2-1})^{\alpha+3/2}(a+\sqrt{a^2-1})^n} \asymp n^{\alpha+1/2} z^n.$$

Отсюда находим

$$E_n(f) \asymp n^{\alpha+1/2} z^n. \tag{5.2.19}$$

С другой стороны, так как в силу (5.1.9) $P_n^{\alpha,\alpha}(1) \asymp n^\alpha$ ($\alpha > -1$), то, пользуясь формулой Стирлинга, находим, что при $x = 1$ общий член a_n ряда (5.2.17) имеет порядок $a_n \asymp n^{2\alpha+1} z^n$, следовательно,

$$|f(1) - S_n^{\alpha,\alpha}(f,1)| \asymp n^{2\alpha+1} z^n. \tag{5.2.20}$$

Сопоставляя (5.2.19) и (5.2.20), получаем

$$\frac{\|f - S_n^{\alpha,\alpha}(f)\|}{E_n(f)} \geqslant c(\alpha) n^{\alpha+1/2} \quad (\alpha > -1/2). \tag{5.2.21}$$

Отсюда следует, что для аналитической функции $f = f(x)$, определенной равенством (5.2.18) неравенство (5.2.16) выполняется для всех $n_k = k$ ($k = 1, 2, \ldots$). В работе [33] показано, что существуют функции f со сколь угодно быстро убывающими наилучшими приближениями $E_n(f)$, для которых, тем не менее

$$\frac{\|f - S_n^{\alpha,\alpha}(f)\|}{E_n(f)} \asymp n^{\alpha+1/2} \qquad (\alpha > -1/2)$$

для бесконечного множества номеров n. А именно, обозначим через H – класс последовательностей $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ таких, что $\varepsilon_n \downarrow 0$. Пусть $\varepsilon \in H$, $\delta_0 = \varepsilon_0$, $\delta_k = \varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2k+1}$, $(k = 1, 2, \ldots)$,

$$f(x) = f_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k x^{2k}. \tag{5.2.22}$$

В [33] доказано, что если $\alpha > -1/2$ и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(n+2\nu-1)!\Gamma(\nu+1/2)}{(2\nu)!(n+\nu)!} \varepsilon_{n+2\nu} = O\left(\frac{\varepsilon_n}{n}\right),$$

то существуют такие положительные числа $c_1(\alpha)$ и $c_2(\alpha)$, что для всех нечетных n

$$c_1(\alpha) n^{\alpha+1/2} \leqslant \frac{\|f - S_n^{\alpha,\alpha}(f)\|}{E_n(f)} \leqslant c_2(\alpha) n^{\alpha+1/2}. \tag{5.1.23}$$

Приведенные выше примеры функций (5.2.18) и (5.2.22), для которых имеют место соответствующие оценки (5.2.21) и (5.2.23), показывают, что суммы Фурье-Якоби $S_n^{\alpha,\alpha}(f,x)$ при $\alpha > -1/2$ плохо приближают не только функции $f \in C[-1,1]$, обладающие конечной гладкостью (пример В.М.Бадкова из пространства $W^r H^\mu$), но также аналитические и целые функции (за исключением алгебраических полиномов). Итак, суммы Фурье-Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f,x)$, вообще говоря, не дают хорошего приближения для $f \in C[-1,1]$ и, следовательно, не всегда могут быть использованы как аппарат приближения функции $f \in C[-1,1]$, даже если f обладает высокой гладкостью на $[-1,1]$: может случится, что $S_n^{\alpha,\beta}(f,x)$ приближает f в $n^{s+1/2}$ раз хуже (по порядку), чем полином наилучшего приближения $p_n(f)$. Этот отрицательный факт является следствием того, что константа Лебега $L_n^{\alpha,\beta}$ для сумм Фурье-Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f,x)$ при $s > -1/2$ имеет согласно (5.2.14) порядок роста, равный $n^{s+1/2}$ $(n \to \infty)$. Наиболее ярко выраженный недостаток сумм Фурье-Якоби, который также является следствием неограниченного роста констант Лебега $L_n^{\alpha,\beta} \asymp n^{s+1/2}$, заключается в том, что $S_n^{\alpha,\beta}(f,x)$ не возможно использовать для одновременного приближения функции $f(x)$ посредством $S_n^{\alpha,\beta}(f,x)$, а ее производной $f^{(r)}(x)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ посредством $\left(S_n^{\alpha,\beta}(f,x)\right)^{(r)}$. В самом деле, известно, что

$$(S_n^{\alpha,\beta}(f,x))^{(r)} = S_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(f^{(r)},x) = \sum_{k=0}^{n-r} f_{r,k}^{\alpha+r,\beta+r} P_k^{\alpha+r,\beta+r}(x), \tag{5.1.23}$$

где $S_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(f^{(r)},x)$ – частичная сумма порядка $n-r$ ряда Фурье Функции $f^{(r)}(x)$ по полиномам Якоби $P_k^{\alpha+r,\beta+r}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. С другой стороны, как было показано выше, уже при $s + r > -1/2$ приближение функции $g \in C[-1,1]$, доставляемое операторами $S_m^{\alpha+r,\beta+r} = S_m^{\alpha+r,\beta+r}(g)$, вообще говоря, $m^{s+r+1/2}$ раз хуже по порядку (при $m \to \infty$), чем наилучшее приближение $E_m(g)$ функции g на $[-1,1]$ алгебраическими полиномами степени m . Следует особо отметить, что этот существенный недостаток присущ, в частности, суммам Фурье-Якоби $S_n^{\alpha,\alpha}(f,x)$ с произвольным $\alpha > -1$, включая суммы Фурье-Чебышева $S_n^{-1/2,-1/2}(f,x)$ по полиномам Чебышева первого рода

$T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Мы продемонстрируем это на простом примере. Рассмотрим известное разложение экспоненты

$$e^x = I_0(1) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(1) T_k(x), \quad x \in [-1, 1],$$

где

$$I_k(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a/2)^{k+2\nu}}{(k+\nu)!\nu!}$$

функция Бесселя мнимого аргумента порядка k. Пусть

$$S_n(f, x) = I_0(1) + 2\sum_{k=1}^{n} I_k(1) T_k(x)$$

частичная сумма указанного разложения порядка n. Тогда нетрудно заметить, что

$$|e^x - S_n(f, x)| \leqslant \frac{c}{2^n n!}, \quad x \in [-1, 1].$$

Теперь рассмотрим вопрос о том, насколько хорошо будет приближать производные функции e^x посредством соответствующих производных частичной суммы $S_n(f, x)$. С этой целью продифференцируем обе части расмматриваемого разложения:

$$(e^x)^{(\nu)} = 2\sum_{k=\nu}^{\infty} I_k(1) \left(T_k(x)\right)^{(\nu)}, \quad x \in [-1, 1].$$

Если теперь мы воспользуемся равенством

$$(T_k(x))^{(\nu)} = \frac{(2^k k!)^2 (k)_\nu}{(2k)! 2^\nu} P_{k-\nu}^{\nu-1/2, \nu-1/2}(x),$$

где $P_{k-\nu}^{\nu-1/2,\nu-1/2}(x)$ – полином Якоби порядка $k - \nu$, $(k)_\nu = k(k+1)\cdots(k+\nu-1)$ – то мы получим

$$(e^x)^{(\nu)} = \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k P_{k-\nu}^{\nu-1/2,\nu-1/2}(x), \quad x \in [-1, 1],$$

где

$$a_k \asymp \frac{k^{\nu+1/2}}{2^k k!}.$$

Таким образом мы замечаем, что

$$(S_n(f, x))^{(\nu)} = \sum_{k=\nu}^{n} a_k P_{k-\nu}^{\nu-1/2,\nu-1/2}(x)$$

и

$$(e^x)^{(\nu)} - (S_n(f, x))^{(\nu)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k P_{k-\nu}^{\nu-1/2,\nu-1/2}(x), \quad x \in [-1, 1].$$

В частности, подставляя здесь $x = 1$, получим

$$|\,(e^x)^{(\nu)} - (S_n(f, x))^{(\nu)}\,|_{x=1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k P_{k-\nu}^{\nu-1/2,\nu-1/2}(1),$$

а так как

$$P_{k-\nu}^{\nu-1/2,\nu-1/2}(1) \asymp k^{\nu-1/2}, \quad a_k \asymp \frac{k^{\nu+1/2}}{2^k k!},$$

то мы находим

$$|\,(e^x)^{(\nu)} - (S_n(f,x))^{(\nu)}\,|_{x=1} \asymp \frac{n^\nu}{2^n (n-\nu)!}.$$

С другой стороны, поскольку $(e^x)^{(\nu)} = e^x$, то имеем

$$|\,(e^x)^{(\nu)} - S_{n-\nu}(f,x)| \leqslant \frac{c(\nu)}{2^n (n-\nu)!}, \quad x \in [-1,1].$$

Сопоставляя полученные оценки, мы замечаем, что производная $(S_n(f,x))^{(\nu)}$ приближает $(e^x)^{(\nu)}$ на $[-1,1]$ n^ν - раз хуже по порядку, чем некоторый полином $S_{n-\nu}(f,x)$ той же степени, что и $(S_n(f,x))^{(\nu)}$. Таким образом, частичные суммы рядов Фурье по ортогональным полиномам, вообще говоря, не могут быть рассмотрены как хороший аппарат приближения в задаче одновременного приближения функции и ее производных. Основной причиной такого поведения производных сумм Фурье-Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f,x)$ служит тот факт, что ортонормированные полиномы Якоби $\{h_k^{\alpha+r,\beta+r}\}^{-1/2}P_k^{\alpha+r,\beta+r}(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$, фигурирующие в равенстве (5.1.23) вблизи точек -1 и 1 имеют порядок роста при $k \to \infty$, равный $k^{s+r+1/2}$ и, вследствие этого, константа Лебега $L_m^{\alpha+r,\alpha+r}$ при $m \to \infty$ растет по порядку $m^{s+r+1/2}$. Это побудило конструировать новые ряды по полиномам Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$, общий член которых получается путем умножения k-того коэффициента $f_{r,k}$ Фурье-Якоби r-той производной $f^{(r)}(x)$ функции $f(x)$ на полином Якоби вида $P_k^{\alpha-r,\beta-r}(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$, который с точки зрения теории равномерного приближения функций на $[-1,1]$ обладает значительно лучшими (по сравнению с полиномами $P_k^{\alpha+r,\beta+r}(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$) асимптотическими свойствами вблизи точек -1, 1. Мы перейдем теперь к построению этих новых рядов, которым мы дали название «смешанные ряды».

§ 5.3. Смешанные ряды по полиномам Якоби

Здесь мы введем смешанные ряды, ассоциированные с полиномами Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ с параметрами α,β, удовлетворяющими условию $-1 < \alpha,\beta < 1$. Отдельного рассмотрения заслуживают смешанные ряды, ассоциированные с ультрасферическими полиномами $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$ и, особенно, смешанные ряды по полиномам Лежандра $P_n^{0,0}(x)$. Предложенные в настоящем разделе ряды, содержащие полиномы $P_k^{\alpha-r,\beta-r}(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$ обладают столь же простой конструкцией, что и ряды Фурье по ортогональным полиномам $P_k^{\alpha,\beta}(x)$, но существенно отличающиеся от них лучшими аппроксимативными свойствами. Интересно отметить, что частичная сумма $\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha\beta}(f,x)$ построенного ряда отличается от суммы Фурье $S_n^{\alpha,\beta}(f,x)$ присутствием лишь $2r$ новых слагаемых вида $a_k P_k^{\alpha,\beta}(x)$, $k = n+1,\ldots,n+2r$ и тем не менее операторы $\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f,x)$ обладают значительно лучшими чем $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ аппроксимативными свойствами для гладких и аналитических функций, заданных на $[-1,1]$. Конструкция предлагаемых здесь рядов основывается н разложении r–той производной $f^{(r)}$ функции f в ряд по полиномам Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$ и последующем r–кратном интегрировании этого разложения.

Пусть $r \geqslant 1$, функция $f = f(x)$ непрерывно дифференцируема $r-1$ раз на $[-1,1]$, $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta |f^{(r)}(x)| dx < \infty. \tag{5.3.1}$$

Тогда мы можем определить коэффициенты

$$f_{r,k}^{\alpha,\beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}} \int\limits_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f^{(r)}(x) P_n^{\alpha,\beta}(x) dx \tag{5.3.2}$$

и ряд Фурье-Якоби

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha,\beta} P_n^{\alpha,\beta}(x) \tag{5.3.3}$$

для функции $g(x) = f^{(r)}(x)$. Далее, запишем формулу Тейлора

$$f(x) = Q_{r-1}(f,x) + \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt, \tag{5.3.4}$$

где

$$Q_{r-1}(f,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(r)}(-1)}{\nu!} (1+x)^\nu$$

полином Тейлора и выполним формальную подстановку в (5.3.4) вместо $f^{(r)}(t)$ ряда Фурье-Якоби (5.3.3). Если эта операция законна, то мы придем к следующему равенству

$$f(x) = Q_{r-1}(f,x) + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha,\beta} \int\limits_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t) dt. \tag{5.3.5}$$

Пусть $\lambda = \alpha + \beta$. Тогда, если $(k+\lambda)^{[r]} \neq 0$, то мы можем воспользоваться равенством (5.1.8) и записать

$$P_k^{\alpha,\beta}(t) = \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t). \tag{5.3.6}$$

Заметим, что если $\lambda \notin \{-1,0,1\}$, то при $-1 < \alpha, \beta < 1$ равенство (5.3.6) справедливо для всех $k = 0,1,\ldots$. Если же $\lambda \in \{-1,0,1\}$, то $(k+\lambda)^{[r]} \neq 0$ при $k \geqslant r - \lambda$ и для таких k мы также можем воспользоваться равенством (5.3.6), каковы бы ни были параметры α и β. Поэтому мы рассмотрим два случая: $\lambda \notin \{-1,0,1\}$ и $\lambda \in \{-1,0,1\}$.

Случай $\lambda \notin \{-1,0,1\}$. В этом случае из (5.3.5) и (5.3.6) имеем

$$f(x) = Q_{r-1}(f,x) + \frac{2^r}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}} \int\limits_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) dt. \tag{5.3.7}$$

С другой стороны, в силу формулы Тейлора (5.3.4)

$$\frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) dt =$$

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(1+x)^\nu}{\nu!} \left\{ P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) \right\}_{t=-1}^{(\nu)}. \tag{5.3.8}$$

Далее, в силу (5.1.7)

$$\left\{ P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) \right\}^{(\nu)} = \frac{(k+\alpha+\beta-r+1)_\nu}{2^\nu} P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}(t), \tag{5.3.9}$$

а из (5.1.4)

$$P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}(-1)=(-1)^{k+r-\nu}\binom{k+\beta}{k+r-\nu}=\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!}. \qquad (5.3.10)$$

Из (5.3.9) и (5.3.10) имеем

$$\left\{P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\right\}_{t=-1}^{(\nu)}=\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+\beta+1)(k+\alpha+\beta-r+1)_\nu}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!2^\nu}. \qquad (5.3.11)$$

Сопоставляя (5.3.7), (5.3.8) и (5.3.11), получаем

$$f(x)=Q_{r-1}(f,x)+A_{r-1}^{\alpha,\beta}(f,x)+\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(x), \qquad (5.3.12)$$

где

$$A_{r-1}^{\alpha,\beta}(f,x)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^r f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(1+x)^\nu}{\nu!}\left\{P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\right\}_{t=-1}^{(\nu)}=$$

$$-\sum_{\nu=0}^{r-1}\left[\frac{(-2)^{r-\nu}}{\Gamma(\beta-r+\nu+1)\nu!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k f_{r,k}^{\alpha,\beta}\Gamma(k+\beta+1)}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}(k+r-\nu)!}\right](1+x)^\nu, \qquad (5.3.13)$$

$$\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^r f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x). \qquad (5.3.14)$$

Заметим, что

$$p_{r-1}^{\alpha,\beta}(x)=p^{\alpha,\beta}(f,x)=Q_{r-1}(x)+A_{r-1}^{\alpha,\beta}(f,x) \qquad (5.3.15)$$

представляет собой алгебраический полином степени $r-1$ и, с учетом этого обозначения, равенство (5.3.12) приобретает следующий вид

$$f(x)=p_{r-1}^{\alpha,\beta}(f,x)+\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(x)=p_{r-1}^{\alpha,\beta}(f,x)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^r f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x). \qquad (5.3.16)$$

Правую часть равенства (5.3.16), а также ряд (5.3.14), фигурирующие в этом равенстве мы будем называть смешанными рядами по полиномам Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$. Они содержат коэффициенты $f_{r,k}^{\alpha,\beta}$ $(k=0,1,\dots)$ r–той производной функции $f(x)$ по полиномам Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$, умноженные на полиномы Якоби $P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)$. В этом состоит принципиальное отличие смешанных рядов от рядов Фурье по полиномам Якоби. Перейдем к рассмотрению достаточных условий на функцию $f(x)$, обеспечивающих сходимость смешанных рядов $\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x)$ и справедливость равенства (5.3.16). Для $\alpha,\beta>-1$, $p\geqslant 1$ через $W^r_{\mathcal{L}_p^{\alpha,\beta}}$ мы обозначим множество функций $f=f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1,1]$ и $f^{(r)}\in\mathcal{L}_p^{\alpha,\beta}$.

Теорема 5.3.1. *Пусть $-1<\alpha,\beta<1$, $\lambda\notin\{-1,0,1\}$, $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$. Тогда смешанный ряд $\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x)$, определенный равенством (5.3.14), сходится равномерно относительно $x\in[-1,1]$.*

Доказательство. Пусть сначала $0\leqslant x\leqslant 1$. Воспользуемся весовой оценкой (5.1.11), тогда имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{2^r f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)\right|=2^r\sum_{k=n+1}^{\infty}\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{1/2}|f_{r,k}^{\alpha,\beta}|\frac{\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1/2}}{(k+\lambda)^{[r]}}|P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)|\leqslant$$

$$2^r\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h_k^{\alpha,\beta}(f_{r,k}^{\alpha,\beta})^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1}}{\left((k+\lambda)^{[r]}\right)^2}(P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x))^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$c(\alpha,\beta,r)\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-2r-2\min\{0,r-\alpha-1/2\}}\right)^{1/2}\leqslant c(\alpha,\beta,r)\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}q_n, \quad (5.3.18)$$

где $q_n = q_n(r,\alpha)\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда следует, что остаточный член

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^r f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)$$

смешанного ряда $\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x)$ сходится к нулю равномерно относительно $0\leqslant x\leqslant 1$. Тем самым утверждение теоремы 5.3.1, относящееся к случаю $0\leqslant x\leqslant 1$ доказано. Если же $-1\leqslant x\leqslant 0$, то в силу симметрии (5.1.10) имеем

$$g_{r,k}^{\beta,\alpha}P_{k+r}^{\beta-r,\alpha-r}(x) = f_{r,k}^{\alpha,\beta}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(-x), \quad (5.3.19)$$

где $g(x) = (-1)^r f(-x)$. Из того, что $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$ следует, что $g\in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$. Поэтому из уже доказанной части теоремы следует, что ряд $\mathcal{F}_r^{\beta,\alpha}(g,x)$ сходится равномерно относительно $0\leqslant x\leqslant 1$. Это, в силу (1.3.19), равносильно равномерной сходимости ряда $\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x)$ при $-1\leqslant x\leqslant 0$. Теорема 5.3.1 доказана полностью. Теперь рассмотрим вопрос о справедливости равенства (5.3.15).

Теорема 5.3.2. *Пусть $-1<\alpha,\beta<1$, $\lambda\notin\{-1,0,1\}$, $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$. Тогда имеет место равенство*

$$f(x) = p_{r-1}^{\alpha,\beta}(x) + \mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x),$$

где $p_{r-1}^{\alpha,\beta}(x)$–полином степени $r-1$, определенный равенством (5.3.15).

Доказательство. Если $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$, то в метрике пространства $\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}$ имеет место равенство

$$f^{(r)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha,\beta}P_k^{\alpha,\beta}, \quad (5.3.20)$$

где $P_k^{\alpha,\beta} = P_k^{\alpha,\beta}(x)$ $(k=0,1,\ldots)$. Пусть

$$S_{r,n}^{\alpha,\beta}(f) = S_{r,n}^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_{r,k}^{\alpha,\beta}P_k^{\alpha,\beta}$$

частичная сумма порядка n ряда (5.3.20). Мы имеем

$$\left|\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt - \int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}S_{r,n}^{\alpha,\beta}(f,t)dt\right|\leqslant\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}|f^{(r)}(t)-S_{r,n}^{\alpha,\beta}(f,t)|dt\leqslant$$

$$2^{r-1}\int_{-1}^{1}|f^{(r)}(t)-S_{r,n}^{\alpha,\beta}(f,t)|dt = 2^{r-1}\int_{-1}^{1}(1-t)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+t)^{-\frac{\beta}{2}}(1-t)^{\frac{\alpha}{2}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}}|f^{(r)}(t)-S_{r,n}^{\alpha,\beta}(f,t)|dt$$

$$\leqslant 2^{r-1}\left(\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}(f^{(r)}(t)-S^{\alpha,\beta}_{r,n}(f,t))^2dt\right)^{1/2}$$

$$\leqslant c(\alpha,\beta,r)\|f^{(r)}-S^{\alpha,\beta}_{r,n}\|_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}. \qquad (5.3.21)$$

Поскольку $f^{(r)}\in\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}$, то

$$\|f^{(r)}-S^{\alpha,\beta}_{r,n}\|_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}\to 0 \quad (n\to\infty). \qquad (5.3.22)$$

Сопоставляя (5.3.21) и (5.3.22), замечаем, что если $-1<\alpha,\beta<1$, $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$, то для любого $x\in[-1,1]$ имеет место равенство

$$\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt=\sum_{k=0}^{\infty}f^{\alpha,\beta}_{r,k}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{\alpha,\beta}(t)dt. \qquad (5.3.23)$$

Из (5.3.4) и (5.3.23) вытекает справедливость равенства (5.3.5) для $-1<\alpha,\beta<1$, $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$ и любого $x\in[-1,1]$. Убедимся теперь в законности рассуждений, которые привели к равенству (5.3.12), исходя из (5.3.5). В самом деле, из сходимости ряда (5.3.5) в силу (5.3.6) следует сходимость ряда (5.3.7). С другой стороны, из теоремы 5.3.1 следует, что ряд $\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x)$, составленный из членов вида

$$\frac{2^r f^{\alpha,\beta}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)$$

сходится для любого $x\in[-1,1]$. Но тогда в силу (5.3.8) сходится также первый из рядов (5.3.13), определяющий $A^{\alpha,\beta}_{r-1}(f,x)$. Кроме того, при $-1<\alpha,\beta<1$, $0\leqslant\nu\leqslant r-1$ ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k f^{\alpha,\beta}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}}\frac{\Gamma(k+\beta+1)}{(k+r-\nu)!}$$

абсолютно сходится. В самом деле,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k f^{\alpha,\beta}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}}\frac{\Gamma(k+\beta+1)}{(k+r-\nu)!}\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{1/2}|f^{\alpha,\beta}_{r,k}|\frac{\Gamma(k+\beta+1)\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1/2}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}(k+r-\nu)!}\leqslant$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}h_k^{\alpha,\beta}(f^{\alpha,\beta}_{r,k})^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(k+\beta+1)\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1/2}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}(k+r-\nu)!}\right)^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(k+\beta+1)\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1/2}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}(k+r-\nu)!}\right)^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(k+\beta+1)\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1/2}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}(k+r-\nu)^{[r-\nu]}k!}\right)^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$c(\alpha,\beta,r)\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{-4(r-\nu)+2\beta+1}\right)^{1/2}\leqslant c(\alpha,\beta,r)\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}.$$

Отсюда следует, что переход от первого из равенств (5.3.13), определяющих $A_{r-1}^{\alpha,\beta}(f,x)$, ко второму является законным. Итак мы доказали, что равенство (5.3.12) или, что то же самое, равенство (5.3.16) имеет место, если $-1<\alpha,\beta<1$, $\lambda\notin\{-1,0,1\}$, $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$. Теорема 5.3.2 доказана.

Случай $\lambda\in\{-1,0,1\}$. При построении смешанных рядов $\lambda\in\{-1,0,1\}$ возникает неудобство, связанное с тем, что формула (5.3.6) теряет смысл, если $(k+\lambda)^{[r]}=0$. Однако, есди $k+\lambda\geqslant r$, то $(k+\lambda)^{[r]}>0$ и мы можем рассмотреть следующий смешанный ряд

$$\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x)=\sum_{k=r-\lambda}^{\infty}\frac{2^r f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x). \tag{5.3.24}$$

Если $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$, то из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 5.3.1 следует, что ряд (5.3.29) сходится равномерно относительно $-1\leqslant x\leqslant 1$. С другой стороны, из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 5.3.2 следует, что равенство (5.3.5) имеет место для любых α и β, для которых $-1<\alpha,\beta<1$, в том числе и при $\lambda\in\{-1,0,1\}$. Перепишем (5.3.5) в следующем виде

$$f(x)=Q_{r-1}(f,x)+B_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(f,x)+G_r^{\alpha,\beta}(f,x), \tag{5.3.25}$$

где

$$G_r^{\alpha,\beta}(f,x)=\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=r-\lambda}^{\infty}f_{r,k}^{\alpha,\beta}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{\alpha,\beta}(t)dt, \tag{5.3.26}$$

а

$$B_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(f,x)=\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{r-\lambda-1}f_{r,k}^{\alpha,\beta}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{\alpha,\beta}(t)dt. \tag{5.3.27}$$

представляет собой алгебраический полином степени $2r-1-\lambda$, в частности, $B_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(f,x)=0$, если $r=\lambda-1$. Воспользуемся равенствами (5.3.6), (5.3.8) и (5.3.11) при $k\geqslant r-\lambda$. Тогда из (5.3.26) мы получим

$$G_r^{\alpha,\beta}(f,x)=E_{r-1}^{\alpha,\beta}(f,x)+\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x), \tag{5.3.28}$$

где

$$E_{r-1}^{\alpha,\beta}(f,x)=-\sum_{\nu=0}^{r-1}\left[\frac{(-2)^{r-\nu}}{\Gamma(\beta-r+\nu+1)}\sum_{k=r-\lambda}^{\infty}\frac{(-1)^k f_{r,k}^{\alpha,\beta}\Gamma(k+\beta+\nu)}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}(k+r-\nu)!}\right](1+x)^{\nu}. \tag{5.3.29}$$

Из (5.3.25)–(5.3.29) имеем

$$f(x)=p_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(f,x)+\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x), \tag{5.3.30}$$

где $\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x)$ – смешанный ряд, определенный равенством (5.3.24), а

$$p_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(f,x)=Q_{r-1}(f,x)+B_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(f,x)+E_{r-1}^{\alpha,\beta}(f,x) \tag{5.3.31}$$

алгебраический полином степени $2r-1-\lambda$.

Случай $\alpha=\beta=0$: *смешанные ряды, ассоциированные с полиномами Лежандра.*

В случае $\alpha=\beta=0$ мы рассмотрим следующий смешанный ряд

$$\mathcal{F}_r(f,x)=\mathcal{F}_r^{0,0}(f,x)=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{2^r f_{r,k}^{0,0}}{k^{[r]}}P_{k+r}^{-r,-r}(x). \tag{5.3.32}$$

Поскольку в силу (5.1.12)

$$P_{k+r}^{-r,-r}(x)=\frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^{2r}}P_{k-r}^{r,r}, \tag{5.3,33}$$

то (5.3.32) можно переписать еще так

$$\mathcal{F}_r(f,x)=\frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{f_{r,k}^{0,0}}{k^{[r]}}P_{k-r}^{r,r}(x). \tag{5.3.34}$$

Если $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^{0,0}}$, то рассуждения, аналогичные проведенным выше, приводят к следующему равенству

$$f(x)=p_{2r-1}(x)+\mathcal{F}_r(f,x), \tag{5.3.35}$$

где $p_{2r-1}(x)$–некоторый Полином степени $2r-1$. Из (5.3.34) и (5.3.35) следует, что

$$p_{2r-1}^{(\nu)}(\pm1)=f^{(\nu)}(\pm1),\quad \nu=0,1,\ldots,r-1.$$

Единственный полином, обладающий этим свойством имеет вид

$$p_{2r-1}(x)=p_{2r-1}(f,x)=$$

$$\frac{(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{1}{\nu!}\left[\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu}}\sum_{s=0}^{r-1-\nu}\frac{(r)_s(1+x)^s}{2^s s!}+\frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu}}\sum_{s=0}^{r-1-\nu}\frac{(r)_s(1-x)^s}{2^s s!}\right], \tag{5.3.36}$$

поэтому (5.3.35) мы можем переписать также в следующем виде

$$f(x)=\frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{f_{r,k}^{0,0}}{k^{[r]}}P_{k-r}^{r,r}(x)+$$

$$\frac{(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{1}{\nu!}\left[\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu}}\sum_{s=0}^{r-1-\nu}\frac{(r)_s(1+x)^s}{2^s s!}+\frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu}}\sum_{s=0}^{r-1-\nu}\frac{(r)_s(1-x)^s}{2^s s!}\right]. \tag{5.3.37}$$

§ 5.4. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f)$

В предыдущем разделе для произвольных α и β таких, что $-1<\alpha,\beta<1$ были построены смешанные ряды $\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f,x)$ и для $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$ было доказано, что

$$f(x)=p^{\alpha,\beta}(f,x)+\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(x)=p^{\alpha,\beta}(f,x)+\sum_{k=\bar r}^{\infty}\frac{2^r f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x). \tag{5.4.1}$$

где $\lambda=\alpha+\beta$,

$$\bar r=\begin{cases} r-\lambda, & \lambda\in\{-1,0,1\},\\ 0, & \lambda\notin\{-1,0,1\},\end{cases} \tag{5.4.2}$$

$p^{\alpha,\beta}(f,x)$ – некоторый полином степени не выше, чем $2r$, причем

$$\deg p^{\alpha,\beta}(f,x) = \begin{cases} 2r-1-\lambda, & \lambda \in \{-1,0,1\}, \\ r-1, & \lambda \notin \{-1,0,1\}, \end{cases}.$$

Через $\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(f,x)$ мы обозначим частичные суммы правой части равенства (5.4.1) следующего вида

$$\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(f,x) = p^{\alpha,\beta}(f,x) + \sum_{k=\bar{r}}^{n+r} \frac{2^r f^{\alpha,\beta}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r]}} P^{\alpha-r,\beta-r}_{k+r}(x). \tag{5.4.3}$$

Это алгебраический полином степени $n+2r$. Будем рассматривать $\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(f)$ как аппарат приближения дифференцируемых и аналитических функций. Мы заметим, что в силу (5.4.1) и (5.4.3) разность $R^{\alpha,\beta}_{r,n}(f,x) = f(x) - \mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(f,x)$ можмо выразить следующим образом

$$R^{\alpha,\beta}_{r,n}(f,x) = f(x) - \mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(f,x) = \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^r f^{\alpha,\beta}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r]}} P^{\alpha-r,\beta-r}_{k+r}(x). \tag{5.4.4}$$

Отсюда, в силу (5.1.7) и очевидного равенства $f^{(r)}(x) = (f^{(\nu)}(x))^{(r-\nu)}$ следует, что

$$f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu}\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(f,x) =$$

$$R^{\alpha,\beta}_{r-\nu,n+\nu}(f^{(\nu)},x) = \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^{r-\nu} f^{\alpha,\beta}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}} P^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}_{k+r-\nu}(x). \tag{5.4.5}$$

Установим теперь связь между полиномом $\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(f,x)$ и частичной суммой Фурье-Якоби $S^{\alpha,\beta}_n(f,x)$ (см. (5.2.4)). С этой целью рассмотрим сумму

$$\mathcal{F}^{\alpha,\beta}_{r,n}(f,x) = \sum_{k=\bar{r}}^{n+r} \frac{2^r f^{\alpha,\beta}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r]}} P^{\alpha-r,\beta-r}_{k+r}(x), \tag{5.4.6}$$

которую представим следующим образом

$$\mathcal{F}^{\alpha,\beta}_{r,n}(f,x) = \mathcal{F}^{\alpha,\beta}_{r,n-2r}(f,x) + I^{\alpha,\beta}_{r,n}(f,x), \tag{5.4.7}$$

где

$$I^{\alpha,\beta}_{r,n}(f,x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{2^r f^{\alpha}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r]}} P^{\alpha-r,\beta-r}_{k+r}(x). \tag{5.4.8}$$

Пусть $n \geqslant 2r$, тогда, пользуясь леммой 5.1.1, мы можем записать

$$I^{\alpha}_{r,n}(f,x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{2^r f^{\alpha,\beta}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r]}} \sum_{j=0}^{2r} a^{\alpha,\beta}_j P^{\alpha,\beta}_{k+r-j}(x) = \varphi^{\alpha,\beta}_{r,n}(x) + \psi^{\alpha,\beta}_{r,n}(x), \tag{5.4.9}$$

где

$$\varphi^{\alpha,\beta}_{r,n}(x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{2^r f^{\alpha,\beta}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r]}} \sum_{j=k+r-n}^{2r} a^{\alpha,\beta}_j P^{\alpha,\beta}_{k+r-j}(x), \tag{5.4.10}$$

$$\psi^{\alpha,\beta}_{r,n}(x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{2^r f^{\alpha,\beta}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r]}} \sum_{j=0}^{k+r-n-1} a^{\alpha,\beta}_j P^{\alpha,\beta}_{k+r-j}(x), \tag{5.4.11}$$

Сопоставляя (5.4.3), (5.4.6) – (5.4.11), имеем

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f,x)=p^{\alpha,\beta}(x)+\mathcal{F}_{r,n-2r}^{\alpha,\beta}(f,x)+\varphi_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)+\psi_{r,n}^{\alpha,\beta}(x), \tag{5.4.12}$$

а отсюда и из (5.4.4) выводим

$$f(x)=p^{\alpha,\beta}(x)+\mathcal{F}_{r,n-2r}^{\alpha,\beta}(f,x)+\varphi_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)+\psi_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)+R_{r,n}^{\alpha,\beta}(f,x), \tag{5.4.13}$$

где в силу (5.4.6) $p^{\alpha,\beta}(x)+\mathcal{F}_{r,n-2r}^{\alpha,\beta}(f,x)+\varphi_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n\geqslant 2r$ и, следовательно, допускает представление

$$p^{\alpha,\beta}(x)+\mathcal{F}_{r,n-2r}^{\alpha,\beta}(f,x)+\varphi_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)=\sum_{l=0}^{n}v_l\hat{P}_l^{\alpha,\beta}(x), \tag{5.4.14}$$

где $\hat{P}_l^{\alpha,\beta}(x)=\{h_l^{\alpha,\beta}\}^{-1/2}P_l^{\alpha,\beta}(x)$ $(l=0,1,\ldots)$–нормированные полиномы Якоби. С другой стороны, из (5.4.11) следует, что $\psi_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ vможет быть записано в виде

$$\psi_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)=\sum_{l=n+1}^{n+2r}q_l\hat{P}_l^{\alpha,\beta}(x). \tag{5.4.15}$$

Далее, из леммы 5.1.1 и равенства (5.4.4) имеем

$$R_{r,n}^{\alpha,\beta}(f,x)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}b_\nu\hat{P}_\nu^{\alpha,\beta}(x), \tag{5.4.16}$$

где

$$b_\nu=\{h_\nu^{\alpha,\beta}\}^{1/2}\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{2r}\frac{2^rf_{r,\nu+j-r}^{\alpha,\beta}a_j^{\alpha,\beta}(\nu+j-r,r)}{(\nu+j-r+\lambda)^{[r]}}, & \text{при } n+2r+1\leqslant\nu,\\ \sum\limits_{j=2r+1+n-\nu}^{2r}\frac{2^rf_{r,\nu+j-r}^{\alpha,\beta}a_j^{\alpha,\beta}(\nu+j-r,r)}{(\nu+j-r+\lambda)^{[r]}}, & \text{при } n+1\leqslant\nu\leqslant n+2r.\end{cases} \tag{5.4.17}$$

Если $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$, то ряд (5.4.4) сходится равномерно на $[-1,1]$, тогда ряд (5.4.16) также сходится равномерно относительно $x\in[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$. В самом деле, частичная сумма

$$\sum_{\nu=n+1}^{m}b_\nu\hat{P}_\nu^{\alpha,\beta}(x)$$

ряда (5.4.16) отличается от частичной суммы

$$\sum_{k=n+r+1}^{m-r}\frac{2^rf_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+2\alpha)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)$$

ряда (5.4.4) наличием слагаемого

$$u_m(x)=\sum_{\substack{m-r+1\leqslant k\leqslant m+r\\ k+r-m\leqslant j\leqslant 2r}}\frac{2^rf_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}}a_j^{\alpha,\beta}(k,r)P_{k+r-j}^{\alpha,\beta}(x),$$

которое в силу леммы 5.1.2 и весовой оценки (5.1.11) при $r\geqslant 1$, $m\to\infty$ сходится к нулю равномерно относительно $x\in[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$. Равенство (5.4.13) с учетом (5.4.14) – (5.4.16) принимает следующий вид

$$f(x)=\sum_{l=0}^{n}v_l\hat{P}_l^{\alpha,\beta}(x)+\sum_{l=n+1}^{n+2r}q_l\hat{P}_l^{\alpha,\beta}(x)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}b_\nu\hat{P}_\nu^{\alpha,\beta}(x), \tag{5.4.18}$$

причем ряд, фигурирующий в правой части равенства (5.4.18) сходится равномерно относительно $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Из (5.4.18) и (5.4.14) следует, что частичная сумма Фурье-Якоби (5.2.4) для функции $f \in W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}}$ может быть записана следующим образом

$$S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{l=0}^{n} v_l \hat{P}_l^{\alpha,\beta}(x) = p^{\alpha,\beta}(x) + \mathcal{F}^{\alpha,\beta}_{r,n-2r}(f,x) + \varphi^{\alpha,\beta}_{r,n}(x). \tag{5.4.19}$$

Сопоставляя (5.4.12) и (5.4.19), мы приходим к следующему равенству

$$\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(f,x) = S_n^{\alpha,\beta}(f,x) + \psi^{\alpha,\beta}_{r,n}(x). \tag{5.4.20}$$

Другое важное свойство операторов $\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(f)$ заключается в том, что если f представляет собой алгебраический полином степени $n+2r$, то $\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(f,x)$ совпадает с $f(x)$ тождественно. В самом деле, если $f(x) = p_{n+2r}(x)$ – алгебраический полином степени не выше $n+2r$, то, как следует из определения коэффициентов $f^{\alpha,\beta}_{r,k}$, при $k \geqslant n+r+1$ $f^{\alpha,\beta}_{r,k} = 0$ (так как $(p_{n+2r}(x))^{(r)}$ – полином степени не выше $n+r$). Поэтому из раваенства (5.4.4), которое справедливо для произвольного полинома, мы замечаем, что $R^{\alpha,\beta}_{r,n}(p_{n+2r},x) = 0$, или, что то же самое,

$$p_{n+2r}(x) = p^{\alpha,\beta}(p_{n+2r},x) + \sum_{k=\bar{r}}^{n+r} \frac{2^r (p_{n+2r})^{\alpha,\beta}_{r,k}}{(k+\lambda)^{[r]}} P^{\alpha-r,\beta-r}_{k+r}(x) = \mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r}(p_{n+2r},x). \tag{5.4.21}$$

§ 5.5. Операторы $\mathcal{Y}^{\alpha}_{n+2r}(f)$: случай $\alpha = \beta$

Мы здесь отдельно рассмотрим случай ультрасферических полиномов $P_k^{\alpha,\alpha}(x)$. Результаты предыдущего раздела переносятся на этот случай автоматически, однако, благодаря лемме 1.1.3, случай $\alpha = \beta$ может быть рассмотрен более детально. Мы введем следующие обозначения:

$W^r_{\mathcal{L}_2^\alpha} = W^r_{\mathcal{L}_2^{\alpha,\alpha}}$, $p^\alpha(x) = p^{\alpha,\alpha}(x)$, $\mathcal{F}^\alpha_r(f,x) = \mathcal{F}^{\alpha,\alpha}_r(f,x)$, $f^\alpha_{r,k} = f^{\alpha,\alpha}_{r,k}$. В разделе 1.4 для любого $-1 < \alpha < 1$ были построены смешанные ряды $\mathcal{F}^\alpha_r(f,x)$ и для $f \in W^r_{\mathcal{L}_2^\alpha}$ было доказано, что

$$f(x) = p^\alpha(x) + \mathcal{F}^\alpha_r(f,x) = p^\alpha(x) + \sum_{k=\bar{r}}^{\infty} \frac{2^r f^\alpha_{r,k}}{(k+2\alpha)^{[r]}} P^{\alpha-r,\alpha-r}_{k+r}(x), \tag{5.5.1}$$

где

$$\bar{r} = \begin{cases} r+1, & \alpha = -\frac{1}{2}, \\ r, & \alpha = 0, \\ r-1, & \alpha = \frac{1}{2}, \\ 0, & \alpha \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}, \end{cases} \tag{5.5.2}$$

$p^\alpha(x)$ – некоторый полином степени не выше, чем $2r$, причем

$$\deg p^\alpha(x) = \begin{cases} 2r, & \alpha = -\frac{1}{2}, \\ 2r-1, & \alpha = 0, \\ 2r-2, & \alpha = \frac{1}{2}, \\ r-1, & \text{при } \alpha \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}. \end{cases}$$

Через $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f)=\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f,x)$ мы обозначим частичные суммы правой части равенства (5.5.1) следующего вида

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f,x)=p^\alpha(x)+\sum_{k=\overline{r}}^{n+r}\frac{2^rf_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x), \tag{5.5.3}$$

а соответствующий остаточный член обозначим через $R_{r,n}^\alpha(f,x)$, т.е.

$$R_{r,n}^\alpha(f,x)=\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2^rf_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x). \tag{5.5.4}$$

Положим далее

$$\mathcal{F}_{r,n}^\alpha(f,x)=\mathcal{F}_r^\alpha(f,x)-R_{r,n}^\alpha(f,x)=\sum_{k=\overline{r}}^{n+r}\frac{2^rf_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x). \tag{5.5.5}$$

Из (5.5.3) – (5.5.5) следует, что

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f,x)=p^\alpha(x)+\mathcal{F}_{r,n}^\alpha(f,x). \tag{5.5.6}$$

Если $f\in W^r_{\mathcal{L}_2^\alpha}$, то из (5.5.1), (5.5.3) и (5.5.4) имеем

$$f(x)=\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f,x)+R_{r,n}^\alpha(f,x). \tag{5.5.7}$$

Будем рассматривать оператор $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f)=\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f,x)$ как оппарат приближения дифференцируемых и аналитических функций. Прежде всего установим связь полинома $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f,x)$ с суммой Фурье

$$S_n^\alpha(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f_k^\alpha P_k^{\alpha,\alpha}(x) \tag{5.5.8}$$

по ультрасферическим полиномам $P_k^{\alpha,\alpha}(x)$, где коэффициенты $f_k^\alpha=f_k^{\alpha,\alpha}$ определены равенством (5.2.2). С этой целью перепишем сумму $\mathcal{F}_{r,n}^\alpha(f,x)$, определенную равенством (5.5.5) следующим образом

$$\mathcal{F}_{r,n}^\alpha(f,x)=\mathcal{F}_{r,n-2r}^\alpha(f,x)+I_{r,n}^\alpha(f,x), \tag{5.5.9}$$

где

$$I_{r,n}^\alpha(f,x)=\sum_{k=n-r+1}^{n+r}\frac{2^rf_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x). \tag{5.5.10}$$

Пусть $n\geqslant 2r$, тогда, пользуясь леммой 5.1.3, можем записать

$$I_{r,n}^\alpha(f,x)=\sum_{k=n-r+1}^{n+r}\frac{2^rf_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}}\sum_{j=0}^{r}\lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x)=\varphi_{r,n}^\alpha(x)+\psi_{r,n}^\alpha(x), \tag{5.5.11}$$

где

$$\varphi_{r,n}^\alpha(x)=\sum_{k=n-r+1}^{n+r}\frac{2^rf_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}}\sum_{j=[\frac{k+r-n}{2}]}^{r}\lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x), \tag{5.5.12}$$

$$\psi_{r,n}^\alpha(x)=\sum_{k=n-r+1}^{n+r}\frac{2^rf_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}}\sum_{j=0}^{[\frac{k+r-n-1}{2}]}\lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x), \tag{5.5.13}$$

$[a]$–целая часть числа a. Сопоставаляя (5.5.6), (5.5.9) – (5.5.13), имеем

$$\mathcal{Y}^{\alpha}_{n+2r}(f,x) = p(x) + \mathcal{F}^{\alpha}_{r,n-2r}(f,x) + \varphi^{\alpha}_{r,n}(x) + \psi^{\alpha}_{r,n}(x), \tag{5.5.14}$$

а отсюда и из (5.5.7) выводим

$$f(x) = p(x) + \mathcal{F}^{\alpha}_{r,n-2r}(f,x) + \varphi^{\alpha}_{r,n}(x) + \psi^{\alpha}_{r,n}(x) + R^{\alpha}_{r,n}(f,x), \tag{5.5.15}$$

где в силу (5.5.5) и (5.5.12) $p(x) + \mathcal{F}^{\alpha}_{r,n-2r}(f,x) + \varphi^{\alpha}_{r,n}(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n \geqslant 2r$ и, следовательно, допускает представление

$$p(x) + \mathcal{F}^{\alpha}_{r,n-2r}(f,x) + \varphi^{\alpha}_{r,n}(x) = \sum_{l=0}^{n} v_l P_l^{\alpha,\alpha}(x), \tag{5.5.16}$$

а из (5.5.13) следует, что $\psi^{\alpha}_{r,n}(x)$ может быть записано в виде

$$\psi^{\alpha}_{r,n}(x) = \sum_{l=n+1}^{n+2r} q_l P_l^{\alpha,\alpha}(x). \tag{5.5.17}$$

Далее, из леммы 1.1.3 и равенства (5.5.4) имеем

$$R^{\alpha}_{r,n}(f,x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu P_\nu^{\alpha,\alpha}(x), \tag{5.5.18}$$

где

$$a_\nu = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{r} \frac{2^r f^{\alpha}_{r,\nu+2j-r} \lambda_j^{\alpha}(\nu+2j-r,r)}{(\nu+2j-r+2\alpha)^{[r]}}, & \text{при } n+2r+1 \leqslant \nu, \\ \sum\limits_{j=[r+1-\frac{\nu-n}{2}]}^{r} \frac{2^r f^{\alpha}_{r,\nu+2j-r} \lambda_j^{\alpha}(\nu+2j-r,r)}{(\nu+2j-r+2\alpha)^{[r]}}, & \text{при } n+1 \leqslant \nu \leqslant n+2r. \end{cases} \tag{5.5.19}$$

Если $f \in W^r_{\mathcal{L}^{\alpha}_2}$, то ряд (5.5.4) сходится равномерно на $[-1,1]$, тогда ряд (5.5.18) также сходится равномерно относительно $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. В самом деле, частичная сумма

$$\sum_{\nu=n+1}^{m} a_\nu P_\nu^{\alpha,\alpha}(x)$$

ряда (5.5.18) отличается от частичной суммы

$$\sum_{k=n+r+1}^{m-r} \frac{2^r f^{\alpha}_{r,k}}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)$$

ряда (5.5.4) наличием слагаемого

$$u_m(x) = \sum_{\substack{m-r+1 \leqslant k \leqslant m+r \\ \frac{k+r-m}{2} \leqslant j \leqslant r}} \frac{2^r f^{\alpha}_{r,k}}{(k+2\alpha)^{[r]}} \lambda_j^{\alpha}(k,r) P^{\alpha,\alpha}_{k+r-2j}(x),$$

которое $r \geqslant 1$, $m \to \infty$ сходится к нулю равномерно относительно $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Равенство (5.5.15) с учетом (5.5.16) – (5.5.18) принимает следующий вид

$$f(x) = \sum_{l=0}^{n} v_l P_l^{\alpha,\alpha}(x) + \sum_{l=n+1}^{n+2r} q_l P_l^{\alpha,\alpha}(x) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu P_\nu^{\alpha,\alpha}(x), \tag{5.5.20}$$

причем ряд, фигурирующий в правой части равенства (5.5.20) сходится равномерно относительно $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Из (5.5.20) и (5.5.16) следует, что частичная сумма (5.5.8) может быть записана следующим образом

$$S_n^\alpha(f,x) = \sum_{l=0}^{n} v_l P_l^{\alpha,\alpha}(x) = p(x) + \mathcal{F}_{r,n-2r}^\alpha(f,x) + \varphi_{r,n}^\alpha(x). \tag{5.5.21}$$

Сопоставляя (5.5.14) и (5.5.21), мы приходим к следующему равенству

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f,x) = S_n^\alpha(f,x) + \psi_{r,n}^\alpha(x). \tag{5.5.22}$$

Другое важное свойство операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f)$ выражается равенством

$$f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu}\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f,x) = R_{r-\nu,n+\nu}(f^{(\nu)},x) = \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^{r-\nu} f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r-\nu]}} P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu,\alpha-r+\nu}(x), \tag{5.5.23}$$

которое непосредственно следует из (5.5.7), (5.5.4), (5.1.6) и очевидного равенства $f^{(r)}(x) = (f^{(\nu)}(x))^{(r-\nu)}$.

§ 5.6. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f)$ и классы $W^m_{\mathcal{L}_2^{\alpha+m-r,\beta+m-r}}$

Здесь мы рассмотрим задачу о приближении полиномами $\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f,x)$ функций $f \in W^m_{\mathcal{L}_2^{\alpha+m-r,\beta+m-r}}$, где $m \geqslant r$. При этом нам понадобятся некоторые обозначения: $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p^{0,0}$, $W^rH^\mu_{\mathcal{L}_p}(B)$ – подкласс функций $f = f(x)$ из $W^r_{\mathcal{L}_p}$, для которых $\omega(f^{(r)},\delta)_{\mathcal{L}_p} \leqslant B\delta^\mu$, $0 < \mu \leqslant 1$, где

$$\omega(g,\delta)_{\mathcal{L}_p} = \sup_{0<h\leqslant\delta}\left(\int_{-1}^{1-h} |g(x+h)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

модуль непрерывности функции $g = g(x) \in \mathcal{L}_p$, $E_n(f)_{\mathcal{L}_p^{s,q}}$ – наилучшее приближение функции $f \in \mathcal{L}_p^{s,q}$ алгебраическими полиномами степени n, $E_n(f)_{C[-1,1]}$ – наилучшее приближение $f \in C[-1,1]$ алгебраическими полиномами степени n. Имеет место следующая

Теорема 5.6.1. *Пусть $-1 < \alpha,\beta \leqslant 1/2$, $m \geqslant r \geqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, $f \in W^m_{\mathcal{L}_2^{\alpha+m-r,\beta+m-r}}$. Тогда имеет место оценка*

$$\left|f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu}\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f,x)\right| \leqslant$$

$$c(\alpha,\beta,r,m)\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\alpha-\frac12}\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\beta-\frac12}\times$$

$$\frac{E_{n+2r-m}(f^{(m)})_{\mathcal{L}_2^{\alpha+m-r,\beta+m-r}}}{n^{m-\nu-1/2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (5.1.14) и (5.3.2) имеем $(k \geqslant m-r)$

$$f_{r,k}^{\alpha,\beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}}\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta f^{(r)}(x)P_k^{\alpha,\beta}(x)dx =$$

$$\frac{(-1)^{m-r}}{h_k^{\alpha,\beta}2^{m-r}k^{[m-r]}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d^{m-r}}{dx^{m-r}}\left\{(1-x)^{\alpha+m-r}(1+x)^{\beta+m-r}P_{k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}(x)\right\}f^{(r)}(x)dx=$$

$$\frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}2^{m-r}k^{[m-r]}}\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+m-r}(1+x)^{\beta+m-r}P_{k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}(x)f^{(m)}(x)dx=$$

$$\frac{h_{k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}}{h_k^{\alpha,\beta}2^{m-r}k^{[m-r]}}. \tag{5.6.1}$$

Подставим это значение $f_{r,k}^{\alpha,\beta}$ в (5.4.5), тогда

$$f^{(\nu)}(x)-\frac{d^\nu}{dx^\nu}\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f,x)=$$

$$\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2^{2r-m-\nu}h_{k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}k^{[m-r]}h_k^{\alpha,\beta}}P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}(x)=$$

$$\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2^{2r-m-\nu}\left\{h_{k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}\right\}^{\frac12}f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}k^{[m-r]}}\times$$

$$\frac{\left\{h_{k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}\right\}^{\frac12}}{h_k^{\alpha,\beta}}P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}(x). \tag{5.6.2}$$

Из (5.1.23) и (5.1.11) вытекает оценка

$$\frac{\left\{h_{k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}\right\}^{\frac12}}{h_k^{\alpha,\beta}}|P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}(x)|\leqslant c(\alpha,\beta,r,m)\times$$

$$\left(\sqrt{1-x}+\frac1n\right)^{r-\nu-\alpha-\frac12}\left(\sqrt{1+x}+\frac1n\right)^{r-\nu-\beta-\frac12}\qquad -1\leqslant x\leqslant 1. \tag{5.6.3}$$

С другой стороны, если $f\in W^m_{\mathcal{L}_2^{\alpha+m-r,\beta+m-r}}$, то

$$\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2^{2r-m-\nu}\left\{h_{k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}\right\}^{\frac12}|f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}|}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}k^{[m-r]}}\leqslant$$

$$c(r,m)\left(\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{1}{\left((k+\lambda)^{[r-\nu]}k^{[m-r]}\right)^2}\right)^{\frac12}\times$$

$$\left(\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\left(f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}\right)^2h_{k-m+r}^{\alpha+m-r,\beta+m-r}\right)^{\frac12}\leqslant$$

$$c(\alpha,\beta,r,m)\frac{E_{n+2r-m}(f^{(m)})_{\mathcal{L}_2^{\alpha+m-r,\beta+m-r}}}{n^{m-\nu-1/2}}. \tag{5.6.4}$$

Утверждение теоремы 1.6.1 вытекает из (5.6.2)–(5.6.4).

Следствие 5.6.1. *Пусть $r \geqslant 1$, $0 < \mu \leqslant 1$. Тогда*

$$\sup_{f \in W^r H^\mu_{\mathcal{L}_2}(1)} \|f - \mathcal{Y}^0_{n+2r}(f)\|_{C[-1,1]} \asymp \sup_{f \in W^r H^\mu_{\mathcal{L}_2}(1)} E_{n+2r}(f)_{C[-1,1]} \asymp \frac{1}{(n+1)^{r+\mu-1/2}},$$

где $a_n \asymp b_n$ $(n = 0, 1 \ldots)$ означает, что найдутся положительные постоянные c_1 и c_2, для которых $c_1 a_n \leqslant b_n \leqslant c_2 a_n$ $(n = 0, 1 \ldots)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 5.6.1 следует, что

$$\sup_{f \in W^r H^\mu_{\mathcal{L}_2}(1)} E_{n+2r}(f)_{C[-1,1]} \leqslant \sup_{f \in W^r H^\mu_{\mathcal{L}_2}(1)} \|f - \mathcal{Y}^0_{n+2r}(f)\|_{C[-1,1]} \leqslant$$

$$\frac{c(r,\mu)}{(n+1)^{r-1/2}} \sup_{f \in W^r H^\mu_{\mathcal{L}_2}(1)} E_{n+r}(f^{(r)})_{\mathcal{L}_2} \tag{5.6.5}$$

Далее, в силу теоремы Джексона

$$\sup_{f \in W^r H^\mu_{\mathcal{L}_2}(1)} E_{n+r}(f^{(r)})_{\mathcal{L}_2} \leqslant c(r,\mu)(n+1)^{-\mu}. \tag{5.6.6}$$

С другой стороны, рассмотрим функцию $f_{r,\mu} = f_{r,\mu}(x) = A_{r,\mu} x^{r-1}|x|^{\mu+1/2}$, где константа $A_{r,\mu} > 0$ выбрана так, что $f_{r,\mu} \in W^r H^\mu_{\mathcal{L}_2}(1)$. Известно (см. [52], п. 7.2.2), что

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{r+\mu-1/2} E_{n+2r}(f_{r,\mu})_{C[-1,1]} > 0, \quad -\frac{1}{2} < \mu < \frac{3}{2},$$

поэтому

$$\sup_{f \in W^r H^\mu_{\mathcal{L}_2}(1)} E_{n+2r}(f)_{C[-1,1]} \geqslant \frac{c(r,\mu)}{(n+1)^{r+\mu-1/2}}. \tag{5.6.7}$$

Сопоставляя (5.6.5)–(5.6.7), приходим к утверждению следствия 5.6.1.

§ 5.7. Операторы $\mathcal{Y}^\alpha_{n+2r}(f)$ и классы $S^r H^\mu_\Delta$

Этот параграф посвящается исследованию аппроксимативных свойств операторов $\mathcal{Y}^\alpha_{n+2r}(f)$ на классах $S^r H^\mu_\Delta$, состоящих из функций переменной гладкости на $[-1,1]$. Точнее, пусть

$$x^\gamma_+ = \begin{cases} x^\gamma, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0, \end{cases}$$

где γ– произвольное действительное число, $1 \leqslant r$–целое, $0 < \mu \leqslant 1$, $-1 < a < 1$. Через $S^r H^\mu_{a+}$ мы обозначим линейное пространство функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на [-1,1] r-1 раз, для которых на $[-1,a) \cup (a,1]$ существует производная $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющая условиям: для произвольного положительного ε $(a + \varepsilon < 1)$ $f^{(r)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a+\varepsilon, 1]$ и для почти всех $x \in [-1,a) \cup (a,1]$

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant c(x-a)^{\mu-1}_+, \quad |f^{(r+1)}(x)| \leqslant c(x-a)^{\mu-2}_+. \tag{5.7.1}$$

Аналогично определяется класс $S^r H^\mu_{a-}$, состоящий из функций $g(x)$, для которых почти всюду на $x \in [-1,a) \cup (a,1]$

$$|g^{(r)}(x)| \leqslant c(a-x)^{\mu-1}_+, \quad |g^{(r+1)}(x)| \leqslant c(a-x)^{\mu-2}_+.$$

Через $S^r H^\mu_a$ обозначим линейную оболочку пространств $S^r H^\mu_{a-}$ и $S^r H^\mu_{a+}$, т.е.

$$S^r H^\mu_a = S^r H^\mu_{a-} + S^r H^\mu_{a+}.$$

Пусть $-1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_l < 1$, $\Delta = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$. Через $S^r H^\mu_\Delta$ мы обозначим линейную оболочку, натянутую на все пространства $S^r H^\mu_{a_i}$ при $i = 1, 2, \ldots, l$, т.е.

$$S^r H^\mu_\Delta = S^r H^\mu_{a_1} + \cdots + S^r H^\mu_{a_l}.$$

Если B положительное число, то через $S^r H^\mu_\Delta(B)$ мы обозначим подмножество таких функций $f \in S^r H^\mu_\Delta$, что

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant B \sum_{i=1}^{l} |x - a_i|^{\mu-1}, \tag{5.7.2}$$

$$|f^{(r+1)}(x)| \leqslant B \sum_{i=1}^{l} |x - a_i|^{\mu-2}. \tag{5.7.3}$$

для почти всех $x \in [-1, 1] \setminus \Delta$.

Лемма 5.7.1. *Пусть $r \geqslant 1$, $0 < \mu \leqslant 1$, $\Delta = \{a_1, \ldots, a_l\} \subset (-1, 1)$, $f \in S^r H^\mu_\Delta(B)$,*

$$\lambda_k(\mu) = \begin{cases} 1, & 0 < \mu < 1, \\ \ln(k+1), & \mu = 1 \end{cases}.$$

Тогда при $-1 < \alpha \leqslant 1/2$ имеет место оценка

$$\left|f^\alpha_{r,k}\right| \leqslant c(B, \mu, \Delta, \alpha)\lambda_k(\mu)(k+1)^{1/2-\mu}.$$

Доказательство. Не теряя в общности, мы можем считать, что $\Delta = \{a\}$, $f \in S^r H^\mu_{a+} \cap S^r H^\mu_\Delta(B)$, где $-1 < a < 1$. Тогда из (5.3.2) и (5.7.1) имеем ($k \geqslant 1$)

$$f^\alpha_{r,k} = \frac{1}{h^\alpha_k} \int_a^{a+1/k} f^{(r)}(t) P^{\alpha,\alpha}_k(t)(1-t^2)^\alpha dt + \frac{1}{h^\alpha_k} \int_{a+1/k}^{1} f^{(r)}(t) P^{\alpha,\alpha}_k(t)(1-t^2)^\alpha dt = A_1 + A_2. \tag{5.7.4}$$

Для $f \in S^r H^\mu_{a+} \cap S^r H^\mu_\Delta(B)$ при $a < t \leqslant 1$ следует $|f^{(r)}(t)| \leqslant B(t-a)^{\mu-1}$, поэтому с учетом весовой оценки (6.6) имеем

$$|A_1| \leqslant c(B, a, \alpha)\sqrt{k+1} \int_a^{a+\frac{1}{k}} (t-a)^{\mu-1} dt \leqslant c(B, \mu, a)(k+1)^{\frac{1}{2}-\mu}. \tag{5.7.5}$$

Что касается интеграла A_2, то, используя формулу (5.1.14) и применяя метод интегрирования по частям, имеем

$$A_2 = f^{(r)}(a + \frac{1}{k}) \frac{(1-(a+1/k)^2)^{\alpha+1}}{2kh^\alpha_k} P^{\alpha+1,\alpha+1}_{k-1}(a + \frac{1}{k}) +$$
$$\frac{1}{2kh^\alpha_k} \int_{a+1/k}^{1} f^{(r+1)}(t) \left(1-t^2\right)^{\alpha+1} P^{\alpha+1,\alpha+1}_{k-1}(t) dt = A'_2 + A"_2. \tag{5.7.6}$$

Поскольку $f \in S^r H^\mu_{a+} \cap S^r H^\mu_\Delta(B)$, то

$$\left|f^{(r)}(a + \frac{1}{k})\right| \leqslant Bk^{1-\mu}, \quad |f^{(r+1)}(t)| \leqslant B(t-a)^{\mu-2} \tag{5.7.7}$$

для почти всех $t \in (a, 1)$, а в силу весовой оценки (5.1.11)

$$\sqrt{k+1}(1-t^2)^{\alpha+1}\left|P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha+1}(t)\right| \leqslant c(\alpha). \tag{5.7.8}$$

Из (5.7.6)–(5.7.8) мы выводим

$$|A_2'| \leqslant c(B,\mu,a,\alpha)\lambda_k(\mu)(k+1)^{1/2-\mu}. \tag{5.7.9}$$

Далее, из (5.7.6) – (5.7.8) имеем $(0<\mu\leqslant 1)$

$$|A"_2| \leqslant \frac{c(B,\alpha)}{\sqrt{k+1}}\int\limits_{a+\frac{1}{k}}^{1}(t-a)^{\mu-2}dt = \frac{c(B,\alpha)}{\sqrt{k+1}}\begin{cases}\ln((1-a)k), & \mu=1,\\ \frac{1}{1-\mu}\left[k^{1-\mu}-(1-a)^{\mu-1}\right], & 0<\mu<1.\end{cases} \tag{5.7.10}$$

Сопоставляя(5.7.4)-(5.7.6), (5.7.9), (5.7.10), убеждаемся в справедливости утверждения леммы 5.7.1.

Лемма 5.7.2. *Пусть m,l,r,n–целые, $r\geqslant 1$, $m\geqslant 0$, $m+1\leqslant l\leqslant n$, $\alpha>-1$. Тогда*

$$(x-t)\sum_{k=l}^{n}(2k+2\alpha+1)P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t) =$$
$$(n+\alpha+1)\left[P_{n+r+1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{n-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)-P_{n+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{n-m+1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)\right]-$$

$$(l+\alpha)\left[P_{l+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{l-m-1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)-P_{l+r-1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{l-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)\right]+$$
$$\sum_{k=l}^{n}\frac{1}{k+\alpha+1}\left[(\alpha-r)^2P_{k+r+1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)-(\alpha+m)^2P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m+1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся известной [2] рекуррентной формулой $P_{-1}^{\alpha,\beta}(x)=0$, $P_0^{\alpha,\beta}(x)=1, P_1^{\alpha,\beta}(x)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)x+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

$$2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_n^{\alpha,\beta}(x)=$$
$$(2n+\alpha+\beta-1)\{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x+\alpha^2-\beta^2\}P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)-$$
$$2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x),\ n=2,3,4,\ldots,$$

которую в случае $\alpha=\beta$ перепишем в следующем виде

$$2n(n+2\alpha)P_n^{\alpha,\alpha}(x)=(2n+2\alpha-1)(2n+2\alpha)xP_{n-1}^{\alpha,\alpha}(x)-2(n+\alpha-1)(n+\alpha)P_{n-2}^{\alpha,\alpha}(x)$$

или

$$(n+\alpha)^2P_n^{\alpha,\alpha}(x)+(n-1+\alpha)(n+\alpha)P_{n-2}^{\alpha,\alpha}(x)=(2n+2\alpha-1)(n+\alpha)xP_{n-1}^{\alpha,\alpha}(x)+\alpha^2P_n^{\alpha,\alpha}(x)$$

и отсюда

$$(n+\alpha)P_n^{\alpha,\alpha}(x)+(n-1+\alpha)P_{n-2}^{\alpha,\alpha}(x)=(2n+2\alpha-1)xP_{n-1}^{\alpha,\alpha}(x)+\frac{\alpha^2}{n+\alpha}P_n^{\alpha,\alpha}(x). \tag{5.7.11}$$

Заменим здесь n на $k+r$, а α на $\alpha-r$, тогда

$$(k+\alpha)P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)+(k-1+\alpha)P_{k+r-2}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)=$$
$$(2k+2\alpha-1)xP_{k+r-1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)+\frac{(\alpha-r)^2}{k+\alpha}P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x). \tag{5.7.12}$$

Если в (5.7.11) заменим n на $k-m$, а α на $\alpha+m$, то получим

$$(k+\alpha)P_{k-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)+(k-1+\alpha)P_{k-m-2}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)=\\ (2k+2\alpha-1)tP_{k-m-1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)+\frac{(\alpha+m)^2}{k+\alpha}P_{k-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t). \qquad (5.7.13)$$

Из равенства (5.7.12), умноженного на $P_{k-m-1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)$ вычтем равенство (5.7.13), умноженное на $P_{k+r-1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)$, тода

$$(k+\alpha)\left[P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m-1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)-P_{k+r-1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)\right]-\\ (k-1+\alpha)\left[P_{k+r-1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m-2}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)-P_{k+r-2}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m-1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)\right]=$$

$$(2k+2\alpha-1)P_{k+r-1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m-1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)+\\ \frac{1}{k+\alpha}\left[(\alpha-r)^2P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m-1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)-(\alpha+m)^2P_{k+r-1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)\right]. \qquad (5.7.14)$$

Просуммируя правые и левые части равенств, полученных из (5.7.14) при $k=l+1,l+2,\ldots,n+1$, убеждаемся в справедливости утверждения леммы 5.7.2. Положим

$$\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha+m}(x,t)=\left(1-t^2\right)^{\alpha+m}\sum_{l=n+r+1}^{k}(2l+2\alpha+1)P_{l+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{l-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t). \qquad (5.7.15)$$

Нам понадобятся некоторые оценки для $|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha}(x,t)|$ и $|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha+1}(x,t)|$.

Лемма 5.7.3. *Пусть* $-1<a<1$, $\varepsilon>0$, $a+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1$, $-1<\alpha\leqslant 1/2$, $r\geqslant 1$. *Тогда*

$$\left|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha}(x,t)\right|\leqslant\frac{c(\alpha,r,a)}{\varepsilon}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac12}\qquad\left(a\leqslant t\leqslant a+\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad (5.7.16)$$

$$\left|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha+1}(x,t)\right|\leqslant\frac{c(\alpha,r,a)}{\varepsilon}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac12}\qquad\left(a\leqslant t\leqslant a+\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad (5.7.17)$$

$$\int_a^1\left|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha+1}(x,t)\right|dt\leqslant c(\alpha,r)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac12}\ln(k+1). \qquad (5.7.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся леммой 1.7.2, тогда

$$\left|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha+m}(x,t)\right|\leqslant A_1+A_2+A_3, \qquad (5.7.19)$$

где

$$A_1=\frac{(k+\alpha+1)\left(1-t^2\right)^{\alpha+m}}{|x-t|}\left|P_{k+r+1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)-P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-m+1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)\right|,$$

$$A_2=\frac{(n+r+\alpha+1)}{|x-t|}\left(1-t^2\right)^{\alpha+m}\left|P_{n+2r+1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{n+r-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)-P_{n+2r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{n+r-m+1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)\right|,$$

$$A_3=\left(1-t^2\right)^{\alpha+m}|x-t|^{-1}\times$$

$$\left|\sum_{l=n+r+1}^{k}\frac{1}{l+\alpha+1}\left[(\alpha-r)^2P_{l+r+1}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{l-m}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)-(\alpha+m)^2P_{l+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{l-m+1}^{\alpha+m,\alpha+m}(t)\right]\right|.$$

Неравенства (5.7.16) и (5.7.17) вытекают непосредственно из (5.7.19) с учетом весовой оценки (5.1.11). Чтобы доказать (5.7.18) мы представим интеграл в правой части этого неравенства в следующем виде

$$\int\limits_a^1=\int\limits_a^{x-\frac1k}+\int\limits_{x-\frac1k}^{x+\frac1k}+\int\limits_{x+\frac1k}^{1}=B_1+B_2+B_3. \tag{5.7.20}$$

При оценке B_2 воспользуемся равенством (5.7.15) и весовой оценкой (5.1.11), тогда

$$B_2=\int\limits_{x-\frac1k}^{x+\frac1k}\left|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha+1}(x,t)\right|dt\leqslant$$

$$\sum_{l=n+m+1}^{k}(2l+1+\alpha)\left|P_{l+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)\right|\int\limits_{x-\frac1k}^{x+\frac1k}\left|P_{l-1}^{\alpha+1,\alpha+1}(t)\right|(1-t^2)^{\alpha+1}dt\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac1n\right)^{r-\alpha-\frac12}\sum_{l=n+r+1}^{k}\int\limits_{x-\frac1k}^{x+\frac1k}dt\leqslant c(\alpha,r)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac1n\right)^{r-\alpha-\frac12}. \tag{5.7.21}$$

При оценке B_1 и B_3 воспользуемся весовой оценками (6.6) и (5.7.19). Это дает ($i\in\{1,3\}$)

$$B_i\leqslant c(\alpha,r)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac1n\right)^{r-\alpha-\frac12}\ln(k+1). \tag{5.7.22}$$

Сопоставляя (5.7.20)–(5.7.22), приходим к оценке (5.7.18). Лемма 5.7.3 доказана. Перейдем к вопросу о приближении функций $f\in S^rH_\Delta^\mu(B)$ посредством сумм Фурье S_n^α и операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f)$. Прежде всего заметим, что если $f\in S^rH_\Delta^\mu(B)$ и $-1<\alpha\leqslant1/2$, то смешанный ряд $\mathcal{F}_r^\alpha(f)$ сходится абсолютно равномерно относительно $x\in[-1,1]$. В самом деле, из леммы 5.7.1 и весовой оценки (5.1.11) имеем

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{2^r|f_{r,k}^\alpha|}{(k+2\alpha)^{[r]}}\left|P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)\right|\leqslant c(B,\Delta,\alpha,\mu)\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{\lambda_k(\mu)}{k^{r+\mu}}\leqslant c(B,\Delta,\alpha,\mu).$$

Из равномерной сходимости ряда $\mathcal{F}_r^\alpha(f)$ следует, как это было показано при доказательстве теоремы 5.3.2, справедливость равенств (5.3.16), (5.3.30) и, как следствие, имеет место равенство (5.4.20) . Теперь может быть доказана следующая

Теорема 5.7.1. *Пусть $r\geqslant1$, $0<\mu\leqslant1$, $\Delta=\{a_1,\dots,a_l\}\subset(-1,1)$, $f\in S^rH_\Delta^\mu(1)$. Тогда при $-1<\alpha\leqslant1/2$, $n\geqslant r+1$, $x\in[-1,1]$*

$$|f(x)-S_n^\alpha(f,x)|\leqslant$$
$$\frac{c(r,\mu,\alpha,\Delta)}{n^{r+\mu}}\lambda_n(\mu)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac1n\right)^{-\alpha-1/2}\left[1+n\left(\sqrt{1-x^2}+\frac1n\right)^r\right], \tag{5.7.23}$$

$$|f(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f,x)|\leqslant\frac{c(r,\mu,\alpha,\Delta)}{n^{r-1+\mu}}\lambda_n(\mu)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac1n\right)^{r-\alpha-1/2}. \tag{5.7.24}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что оценки вида (5.7.23) и (5.7.24) справедливы для функции $f \in S^r H^\mu_\Delta(1) \cap S^r H^\mu_{a+}$, где $-1 < a < 1$, $\Delta = \{a\}$. Для такой функции f в силу (5.4.20) и (5.4.4) имеем

$$f(x) - S_n^\alpha(f, x) = \psi_{r,n}^\alpha(x) + \mathcal{R}_{r,n}^\alpha(x), \tag{5.7.25}$$

$$f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) = \mathcal{R}_{r,n}^\alpha(x). \tag{5.7.26}$$

Оценим $\mathcal{R}_{r,n}\alpha(x)$. В силу леммы 5.7.1 и весовой оценки (5.1.11) имеем

$$|\mathcal{R}_{r,n}\alpha(x)| \leqslant c(r, \mu, \alpha, a) \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\lambda_k(\mu)}{k^{r+\mu}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{k}\right)^{r-\alpha-1/2},$$

отсюда

$$|\mathcal{R}_{r,n}(x)| \leqslant \frac{c(r, \mu, \alpha, a)}{n^{r+\mu-1}} \lambda_n(\mu) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-1/2}. \tag{5.7.27}$$

Оценка (5.7.24) вытекает из (5.7.26) и (5.7.27). Далее, из равенства (5.4.11), оценки (5.1.11), лемм 5.7.1 и 5.1.2 ($\lambda_j^\alpha(r, k) = a_{2j}^{\alpha,\alpha}(r, k)$) имеем

$$|\psi_{r,n}^\alpha(x)| \leqslant \frac{c(r, \mu, \alpha, a)}{n^{r+\mu}} \lambda_n(\mu) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha-1/2}. \tag{5.7.28}$$

Из (5.7.26)–(5.7.28) выводим оценку (5.7.25). Теорема 5.7.1 доказана. Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

Следствие 5.7.1. *Пусть $r \geqslant 1$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \alpha \leqslant 1/2$, $\Delta = \{a_1, \ldots, a_l\} \subset (-1, 1)$. Тогда при $n \geqslant r + 1$ имеет место оценка*

$$\sup_{f \in S^r H^\mu_\Delta(1)} \|f - S_n^\alpha(f)\|_{C[-1,1]} \leqslant c(r, \mu, \Delta) \sup_{f \in S^r H^\mu_\Delta(1)} E_n(f)_{C[-1,1]},$$

В самом деле, при $0 < \mu < 1$ функция

$$f_{r,\mu}(x) = \frac{1}{r!}(x - a_1)^{r-1}|x - a_1|^\mu,$$

очевидно, принадлежит классу $S^r H^\mu_\Delta(1)$, стало быть,

$$\sup_{f \in S^r H^\mu_\Delta(1)} E_n(f) \geqslant E_n(f_{r,\mu})_{C[-1,1]}.$$

С другой стороны, хорошо известно ([53], п. 7.2.2, стр. 431), что

$$\lim_{n\to\infty} n^{r-1+\mu} E_n(f_{r,\mu})_{C[-1,1]} > 0.$$

Сопоставляя эти оценки с (5.7.23), убеждаемся в справедливости утверждения следствия 5.7.1.

Теорема 5.7.2. *Пусть $r \geqslant 1$, $0 < \mu \leqslant 1$, $\varepsilon > 0$, $\Delta = \{a_1, \ldots, a_l\} \subset (-1, 1)$, $\Delta_\varepsilon = \cup_{j=1}^l (a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon)$, $\hat{\Delta}_\varepsilon = [-1, 1] \setminus \Delta_\varepsilon$, $x \in \hat{\Delta}_\varepsilon$, $f \in S^r H^\mu_\Delta(1)$. Тогда при $-1 < \alpha \leqslant 1/2$, $n \geqslant r + 1$ имеют место следующие оценки*

$$|f(x) - S_n^\alpha(f, x)| \leqslant c(r, \mu, \alpha, \Delta) \frac{\lambda_n(\mu)}{n^{r+\mu}} \times$$

$$\left[1 + \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{\ln n}{\lambda_n(\mu)}(\varepsilon n)^{\mu-1} + \frac{1}{n\delta\lambda_n(\mu)}\right)\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^r\right]\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}, \tag{5.7.29}$$

$$|f(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha}(f,x)|\leqslant c(r,\mu,\alpha,\Delta)\frac{\lambda_n(\mu)}{n^{r+\mu}}\times$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\left(1+\frac{\ln n}{\lambda_n(\mu)}(\varepsilon n)^{\mu-1}+\frac{1}{n\delta\lambda_n(\mu)}\right)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}, \quad (5.7.30)$$

где $\delta=\min\{\frac{1}{n},\frac{\varepsilon}{2}\}$. *Доказательство.* Оценим $\mathcal{R}_{r,n}^{\alpha}(x)$ при $x\in\hat{\Delta}_{\varepsilon}$. При этом, не ограничивая в общности, мы можем считать, что $\Delta=\{a\}$, $(-1<a<1)$, $a+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1$ и $f\in S^rH_{\Delta}^{\mu}(1)\cap S^rH_{a+}^{\mu}$. Равенство (5.5.4) перепишем так

$$\mathcal{R}_{r,n}^{\alpha}(x)=\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2^rP_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)}{(k+2\alpha)^{[r]}}\frac{1}{h_k^{\alpha}}\int_a^1 f^{(r)}(t)(1-t^2)^{\alpha}P_k^{\alpha,\alpha}(t)dt=Z_1+Z_2, \quad (5.7.31)$$

где

$$Z_1=\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2^rP_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)}{(k+2\alpha)^{[r]}}\frac{1}{h_k^{\alpha}}\int_a^{a+\delta} f^{(r)}(t)(1-t^2)^{\alpha}P_k^{\alpha,\alpha}(t)dt, \quad (5.7.32)$$

$$Z_2=\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2^rP_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)}{(k+2\alpha)^{[r]}}\frac{1}{h_k^{\alpha}}\int_{a+\delta}^{1} f^{(r)}(t)(1-t^2)^{\alpha}P_k^{\alpha,\alpha}(t)dt. \quad (5.7.33)$$

Оценим Z_1. Из леммы 5.7.3 нетрудно заметить, что при $-1<\alpha\leqslant 1/2$ и $k\to\infty$

$$\frac{1}{(k+2\alpha)^{[r]}}\left|\int_a^{\delta} f^{(r)}(t)\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha}(x,t)dt\right|\leqslant\frac{c(r,\alpha,a)}{(k+2\alpha)^{[r]}}\int_a^{a+1/n}|f^{(r)}(t)|dt\to 0,$$

поэтому к сумме (5.7.32) мы можем применить преобразование Абеля:

$$Z_1=\sum_{k=n+r+1}^{\infty}b_k(\alpha,r)\int_a^{a+\delta} f^{(r)}(t)\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha}(x,t)dt, \quad (5.7.34)$$

где в силу (5.2.3)

$$b_k(\alpha,r)=\frac{2^r/h_k^{\alpha}}{(k+2\alpha)^{[r]}(2k+2\alpha+1)}-\frac{2^r/h_{k+1}^{\alpha}}{(k+1+2\alpha)^{[r]}(2k+2\alpha+3)}=$$
$$\frac{k!\Gamma(k+2\alpha+1)2^{r+2\alpha+1}}{\Gamma^2(k+\alpha+1)(k+2\alpha)^{[r]}}-\frac{(k+1)!\Gamma(k+2\alpha+2)2^{r+2\alpha+1}}{\Gamma^2(k+\alpha+2)(k+1+2\alpha)^{[r]}}=$$
$$\frac{k!\Gamma(k+2\alpha+1)2^{r+2\alpha+1}}{\Gamma^2(k+\alpha+1)(k+2\alpha)^{[r-1]}}\left[\frac{1}{k+2\alpha-r+1}-\frac{k+1}{(k+\alpha+1)^2}\right]=$$
$$\frac{k!\Gamma(k+2\alpha+1)}{\Gamma^2(k+\alpha+1)}\frac{r(k+1)+\alpha^2}{(k+\alpha+1)^2(k+1+2\alpha-r)}\frac{2^{r+2\alpha+1}}{(k+2\alpha)^{[r-1]}}\leqslant\frac{c(\alpha,r)}{k^{r+1}}. \quad (5.7.35)$$

Из (5.7.1), леммы 5.7.3 (оценка (5.7.16)) и неравенства (5.7.35) выводим ($f\in S^rH_{\Delta}(1)^{\mu}\cap S^rH_{a+}^{\mu}$)

$$|Z_1|\leqslant\frac{c(\alpha,r,a)}{\varepsilon}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=n+r+1}^{\infty}k^{-r-1}\int_a^{a+\delta}|f^{(r)}(t)|dt\leqslant$$

$$\frac{c(\alpha,r,a)}{\varepsilon}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=n+r+1}^{\infty}k^{-r-1}\int_a^{a+\delta}(t-a)^{\mu-1}dt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha,r,a)}{\varepsilon n^{r+\mu}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}. \tag{5.7.36}$$

Оценим Z_2. Используя метод интегрирования по частям и формулу (5.1.14) из (5.7.33) находим

$$Z_2 = Z_{21} + Z_{22}, \tag{5.7.37}$$

где

$$Z_{21} = f^{(r)}(a+\delta)\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2^{r-1}\left(1-(a+\delta)^2\right)^{\alpha+1}}{k(k+2\alpha)^{[r]}h_k^\alpha}P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha+1}(a+\delta),$$

$$Z_{22} = \int\limits_{a+\delta}^{1} f^{(r+1)}(t)\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2^{r-1}\left(1-t^2\right)^{\alpha+1}}{k(k+2\alpha)^{[r]}h_k^\alpha}P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha+1}(t)dt.$$

Используя преобразование Абеля, мы можем записать эти равенства следующим образом

$$Z_{21} = f^{(r)}(a+\delta)\sum_{k=n+r+1}^{\infty}v_k(\alpha,r)\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha+1}(x,a+\delta), \tag{5.7.38}$$

$$Z_{22} = \int\limits_{a+\delta}^{1} f^{(r+1)}(t)\sum_{k=n+r+1}^{\infty}v_k(\alpha,r)\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha+1}(x,t)dt, \tag{5.7.39}$$

$$v_k(\alpha,r) = \frac{2^{r-1}/h_k^\alpha}{k(k+2\alpha)^{[r]}(2k+2\alpha+1)} - \frac{2^{r-1}/h_{k+1}^\alpha}{(k+1)(k+1+2\alpha)^{[r]}(2k+2\alpha+3)} =$$
$$\frac{(k-1)!\Gamma(k+2\alpha+1)2^{r+2\alpha}}{\Gamma^2(k+\alpha+1)(k+2\alpha)^{[r]}} - \frac{k!\Gamma(k+2\alpha+2)2^{r+2\alpha}}{\Gamma^2(k+\alpha+2)(k+1+2\alpha)^{[r]}} =$$
$$\frac{(k-1)!\Gamma(k+2\alpha+1)2^{r+2\alpha}}{\Gamma^2(k+\alpha+1)(k+2\alpha)^{[r-1]}}\left[\frac{1}{k+2\alpha-r+1} - \frac{k}{(k+\alpha+1)^2}\right] \leqslant \frac{c(\alpha,r)}{k^{r+2}}. \tag{5.7.40}$$

Из леммы 5.7.3 (оценка (5.7.17)) и неравенства (5.7.40) имеем

$$|Z_{21}| \leqslant \frac{c(r,\mu,a,\alpha)\delta^{\mu-1}}{n^{r+1}\varepsilon}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{c(r,\mu,a,\alpha)}{n^{r+\mu}n\delta\varepsilon}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}. \tag{5.7.41}$$

Что касается интеграла Z_{22}, то из (5.7.39) и (5.7.40) имеем

$$|Z_{22}| \leqslant c(r,\alpha)\int\limits_{a+\delta}^{1}|f^{(r+1)}(t)|\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\left|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha+1}(x,t)\right|}{k^{r+2}}dt. \tag{5.7.42}$$

Последный интеграл мы представим в виде

$$\int\limits_{a+\delta}^{1} = \int\limits_{a+\delta}^{a+\frac{\varepsilon}{2}} + \int\limits_{a+\frac{\varepsilon}{2}}^{1} = Z'_{22} + Z"_{22}. \tag{5.7.43}$$

При оценивании Z'_{22} мы можем считать, что $\delta = 1/n$ (иначе $Z'_{22} = 0$). В силу леммы 1.7.3 (оценки (5.7.17) и (5.7.18))

$$Z'_{22} \leqslant c(r,a,\alpha)\frac{1}{\varepsilon}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+2}}\int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{a+\frac{\varepsilon}{2}}(t-a)^{\mu-2}dt \leqslant$$

$$c(r,a,\alpha)\frac{1}{\varepsilon}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}\frac{\lambda_n(\mu)}{n^{r+2}}, \tag{5.7.44}$$

$$|Z"_{22}|\leqslant c(r,\alpha)\int\limits_{a+\frac{\varepsilon}{2}}^{1}(t-a)^{\mu-2}\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\left|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha+1}(x,t)\right|}{k^{r+2}}dt\leqslant$$

$$c(r,\alpha)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\mu-2}\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+2}}\int\limits_{a+\frac{\varepsilon}{2}}^{1}\left|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r,\alpha+1}(x,t)\right|dt\leqslant$$

$$c(r,\alpha)\varepsilon^{\mu-2}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\ln(k+1)}{n^{r+2}}\leqslant$$

$$c(r,\alpha)\varepsilon^{\mu-2}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}\frac{\ln(n+1)}{n^{r+2}}. \tag{5.7.45}$$

Сопоставляя (5.7.42)–(5.7.45), имеем

$$|Z_{22}|\leqslant\frac{c(r,\alpha,a)}{n^{r+2}}\frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda_n(\mu)+\frac{\ln n}{(n\varepsilon)^{1-\mu}}\right)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}. \tag{5.7.46}$$

Из (5.7.37), (5.7.41) и (5.7.46) выводим

$$|Z_2|\leqslant\frac{c(r,\alpha,a,\mu)}{n^{r+2}}\frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda_n(\mu)+\frac{1}{n\delta}+\frac{\ln n}{(n\varepsilon)^{1-\mu}}\right)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}. \tag{5.7.47}$$

Утверждение теоремы 5.7.2 вытекает из (5.7.25), (5.7.26), (5.7.28), (5.7.31), (5.7.36) и (5.7.47).

Теорема 1.7.3. *Пусть $r\geqslant 1$, $0\leqslant\nu\leqslant r-1$, $0<\mu\leqslant 1$, $0<\varepsilon<1$, $\Delta=\{a_1,\dots,a_l\}\subset(-1,1)$, $\Delta_\varepsilon=\cup_{j=1}^{l}(a_j-\varepsilon,a_j+\varepsilon)$, $\hat{\Delta}_\varepsilon=[-1,1]\setminus\Delta_\varepsilon$, $f\in S^rH_\Delta^\mu(1)$. Тогда при $n\geqslant r+1$ имеют место следующие оценки*

$$|f^{(\nu)}(x)-\frac{d^\nu}{dx^\nu}\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha}(f,x)|\leqslant\frac{c(r,\mu,\alpha,\Delta)}{n^{r-\nu-1+\mu}}\lambda_n(\mu)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\alpha-\frac{1}{2}}\ (-1\leqslant x\leqslant 1),$$

$$|f^{(\nu)}(x)-\frac{d^\nu}{dx^\nu}\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha}(f,x)|\leqslant\frac{c(r,\mu,\alpha,\Delta,\varepsilon)}{n^{r-\nu+\mu}}\lambda_n(\mu)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\alpha-\frac{1}{2}}\ (x\in\hat{\Delta}_\varepsilon).$$

Утверждение этой теоремы непосредственно вытекает из равенства (5.5.23) и оценок (5.7.24) и (5.7.30), примененных к функции $f^{(\nu)}(x)$ (вместо $f(x)$)

§ 5.8. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha}(f)$ и классы $A_q(B)$

Пусть $0<q<1$, $\mathcal{E}_q$ – эллипс с фокусами в точках -1 и 1, сумма полуосей которого равна $1/q$. Через $A_q(B)$ мы обозначим класс функций $f=f(z)$, принимающих действительные значения на $[-1,1]$, аналитических внутри эллипса $\mathcal{E}_q$ и ограниченных там по модулю числом B. Хорошо известно [52], п. 3.7.3, что если $f\in A_q(B)$, то для коэффициентов Фурье-Чебышева этой функции

$$a_k(f)=\{h_k^{-1/2,-1/2}\}^{-1/2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)P_k^{-1/2,-1/2}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{5.8.1}$$

имеет место оценка

$$|a_k(f)| \leqslant \sqrt{2\pi} B q^k, \tag{5.8.2}$$

и как следствие

$$E_n(f)_{C[-1,1]} \leqslant \frac{2B}{1-q} q^{n+1}, \tag{5.8.3}$$

Как это показано в [54], стр. 272, эта оценка на всем классе $A_q(B)$ не улучшаема по порядку. В настоящем пункте мы покажем (теорема 6.1), что среди алгебраических полиномов степени $n+2r$ $\mathcal{Y}^{\alpha}_{n+2r}(f)$ доставляют приближение наилучшего порядка на классе $A_q(B)$. Более того, если $f \in A_q(B)$, $0 \leqslant \nu r - 1$, то

$$\left| f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} \mathcal{Y}^{\alpha}_{n+2r}(f, x) \right| \leqslant c(\alpha, r, q, B) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\nu-\alpha-\frac{1}{2}} \frac{q^n}{n^{r-\nu-1}}.$$

Предварительно рассмотрим некоторые вспомогательное утверждения.

Лемма 5.8.1 *Пусть* $k = n + 2j$, $j = 0, 1, \ldots$. *Тогда*

$$\{h_{k+1}^{-\frac{1}{2}}\}^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-1}^{1} P_k^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t) P_n^{\alpha,\alpha}(t)(1-t^2)^{\alpha} dt =$$

$$2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(n+k+2)(1/2)_j(1/2-\alpha)_j h_n^{\alpha}}{(n+2\alpha+1)_n (3/2)_n (n+3/2)_j (n+\alpha+3/2)_j (2j)!},$$

Доказательство. Полагая $a = 1/2$, воспользуемся равенством (5.1.25), тогда

$$\frac{P_k^{1/2,1/2}(t)}{P_k^{1/2,1/2}(1)} =$$

$$\sum_{\nu=0}^{[k/2]} \frac{k!(\alpha+1)_{k-2\nu}(k+2)_{k-2\nu}(1/2)_\nu(1/2-\alpha)_\nu P_{k-2\nu}^{\alpha,\alpha}(t)/P_{k-2\nu}^{\alpha,\alpha}(1)}{(k-2\nu)!(2\nu)!(3/2)_{k-2\nu}(k-2\nu+2\alpha+1)_{k-2\nu}(k-2\nu+3/2)_\nu(k-2\nu+\alpha+3/2)_\nu}.$$

Отсюда находим $(k = n + 2j)$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_k^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t) P_n^{\alpha,\alpha}(t)(1-t^2)^{\alpha} dt =$$

$$\frac{P_k^{1/2,1/2}(1)}{P_n^{\alpha,\alpha}(1)} \frac{k!(\alpha+1)_n(k+2)_n(1/2)_j(1/2-\alpha)_j \int_{-1}^{1} \left\{P_n^{\alpha,\alpha}(t)\right\}^2 (1-t^2)^{\alpha} dt}{n!(2j)!(3/2)_n(n+2\alpha+1)_n(n+3/2)_j(n+\alpha+3/2)_j},$$

откуда, в силу (5.1.2) и (5.1.9) получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} P_k^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t) P_n^{\alpha,\alpha}(t)(1-t^2)^{\alpha} dt = \frac{\Gamma(k+3/2)(k+2)_n(1/2)_j(1/2-\alpha)_j h_n^{\alpha}}{\Gamma(3/2)(2j)!(3/2)_n(n+2\alpha+1)_n(n+3/2)_j(n+\alpha+3/2)_j}. \tag{5.8.4}$$

Далее, из (5.2.3) имеем

$$\{h_{k+1}^{-\frac{1}{2}}\}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+3/2)}. \tag{5.8.5}$$

Замечая, что $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, $(k+2)_n = \Gamma(n+k+2)/\Gamma(k+2)$, из (5.8.4) и (5.8.5) убеждаемся в справедливости утверждения леммы 5.8.1.

Лемма 5.8.2 *Если $f \in A_q(B)$, то*

$$f_{1,n}^{\alpha} = \frac{1}{h_n^{\alpha}} \int\limits_{-1}^{1} f'(t) P_n^{\alpha,\alpha}(t)(1-t^2)^{\alpha} dt =$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+2j+1}(f) \frac{(n+2j+1)\Gamma(2n+2j+2)(1/2)_j(1/2-\alpha)_j}{(n+2\alpha+1)_n(3/2)_n(n+3/2)_j(n+\alpha+3/2)_j(2j)!}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f \in A_q(B)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \{h_k^{-1/2,-1/2}\}^{-1/2} P_k^{-1/2,-1/2}(x)$$

и в силу равенства (5.1.6)

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \{h_k^{-1/2,-1/2}\}^{-1/2} \frac{k}{2} P_{k-1}^{1/2,1/2}(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(f) \frac{k+1}{2} \{h_{k+1}^{-1/2,-1/2}\}^{-1/2} P_k^{1/2,1/2}(x).$$

Отсюда и из симметрии (5.1.10)

$$f_{1,n}^{\alpha} = \frac{1}{h_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(f) \frac{k+1}{2} \{h_{k+1}^{-1/2,-1/2}\}^{-1/2} \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha} P_k^{1/2,1/2}(t) P_n^{\alpha,\alpha}(t) dt =$$

$$\frac{1}{h_n^{\alpha}} \sum_{k=n+2j, j \geqslant 0} a_{k+1}(f) \frac{k+1}{2} \{h_{k+1}^{-1/2,-1/2}\}^{-1/2} \int\limits_{-1}^{1} P_k^{1/2,1/2}(t) P_n^{\alpha,\alpha}(t) dt. \qquad (5.8.6)$$

Теперь воспользуемся леммой 5.8.1, тогда из (5.8.6) имеем

$$f_{1,n}^{\alpha} = \frac{1}{h_n^{\alpha}} \int\limits_{-1}^{1} f'(t) P_n^{\alpha,\alpha}(t)(1-t^2)^{\alpha} dt =$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+2j+1}(f) \frac{(n+2j+1)\Gamma(2n+2j+2)(1/2)_j(1/2-\alpha)_j}{(n+2\alpha+1)_n(3/2)_n(n+3/2)_j(n+\alpha+3/2)_j(2j)!}.$$

Лемма 5.8.2 доказана.

Теорема 5.8.1 *Пусть $r \geqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, $n \geqslant 2r$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, $-1 < \alpha \leqslant 1/2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда*

$$\left| f^{(\nu)}(x) - \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha}(f,x) \right| \leqslant c(r,\alpha,q) B \frac{q^n}{n^{r-\nu-1}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (5.5.23) с учетом (5.1.11) имеем

$$\left| f^{(\nu)}(x) - \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha}(f,x) \right| \leqslant c(r,\alpha) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{|f_{r,k}^{\alpha}|}{k^{[r-\nu]}} k^{-1/2}. \qquad (5.8.7)$$

где в силу леммы 1.8.2

$$f_{r,k}^{\alpha} = f_{1,k}^{(r-1)\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+2j+1}(f^{r-1})(k+2j+1)\times$$

$$\frac{\Gamma(2k+2j+2)(1/2)_j(1/2-\alpha)_j}{(k+2\alpha+1)_k(3/2)_k(k+3/2)_j(k+\alpha+3/2)_j(2j)!} \tag{5.8.8}$$

Далее имеем

$$(1/2)_j^2 = \frac{1}{\pi}(\Gamma(j+\frac{1}{2}))^2, (2j)! = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2j}\Gamma(j+1)\Gamma(j+\frac{1}{2}),$$

$$\Gamma(2k+2j+2) = \Gamma(2k+2)(2k+2)_{2j},$$

$$2^{2j}(k+\frac{3}{2})_j^2 = [(2k+3)(2k+5)\dots(2k+2j+1)]^2,$$

$$\frac{(2k+2)_{2j}}{2^{2j}(k+\frac{3}{2})_j^2} = \frac{(2k+2)...(2k+2j)}{(2k+3)\dots(2k+2j+1)} < 1,$$

$$\frac{(1/2-\alpha)_j(k+1)_k}{(1/2)_j(k+2\alpha+1)_k}\frac{(k+3/2)_j}{(k+\alpha+3/2)_j} =$$

$$\frac{\Gamma(1/2-\alpha+j)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-\alpha)\Gamma(1/2+j)}\frac{\Gamma(2k+1)\Gamma(k+2\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2k+2\alpha+1)}\frac{\Gamma(k+3/2+j)\Gamma(k+\alpha+3/2)}{\Gamma(k+3/2)\Gamma(k+\alpha+3/2+j)}$$

$$\leqslant c(\alpha)(j+1)^{-\alpha}k^{\alpha}(k+j)^{-\alpha} = c(\alpha)\left(\frac{k}{(1+j)(k+j)}\right)^{\alpha}.$$

Поэтому

$$\frac{\Gamma(2k+2j+2)(1/2)_j(1/2-\alpha)_j}{(k+2\alpha+1)_k(3/2)_k(k+3/2)_j(k+\alpha+3/2)_j(2j)!} =$$

$$\frac{\Gamma(2k+2j+2)(1/2)_j^2}{(k+1)_k(3/2)_k(k+3/2)_j^2(2j)!}\frac{(1/2-\alpha)_j(k+1)_k(k+3/2)_j}{(1/2)_j(k+2\alpha+1)_k(k+\alpha+3/2)_j} \leqslant$$

$$\frac{\Gamma(2k+2)\Gamma(k+1)(2k+2)_{2j}(\Gamma(j+1/2))^2\Gamma(3/2)c(\alpha)}{\Gamma(2k+1)\Gamma(k+3/2)(k+3/2)_j^2 2^{2j}\Gamma(j+1)\Gamma(j+1/2)\sqrt{\pi}}\left(\frac{k}{(j+1)(k+j)}\right)^{\alpha} =$$

$$c(\alpha)\frac{(2k+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3/2)}\frac{(2k+2)_{2j}}{2^{2j}(k+3/2)_j^2}\frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+1)}\left(\frac{k}{(j+1)(k+j)}\right)^{\alpha}$$

$$\leqslant c(\alpha)\left(\frac{k}{j+1}\right)^{1/2}\left(\frac{k}{(j+1)(k+j)}\right)^{\alpha}. \tag{5.8.9}$$

Из (5.8.8) и (5.8.9) имеем

$$|f_{r,k}^{\alpha}| \leqslant c(\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} a_{k+2j+1}(f^{r-1})(k+2j+1)\left(\frac{k}{j+1}\right)^{1/2}\left(\frac{k}{(j+1)(k+j)}\right)^{\alpha}.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (5.8.2) (для $f^{(r-1)}$), находим

$$|f_{r,k}^{\alpha}| \leqslant c(\alpha)B\sum_{j=0}^{\infty} q^{k+2j+1}(k+2j+1)\left(\frac{k}{j+1}\right)^{1/2}\left(\frac{k}{(j+1)(k+j)}\right)^{\alpha} \leqslant c(\alpha,q)Bk^{3/2}q^k. \tag{5.8.10}$$

Сопоставляя (5.8.7) и (5.8.10), приходим к утверждению теоремы 5.8.1.

§ 5.9. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}^0_{n+2r}(f)$

В данном разделе мы остановимся на аппроксимативных свойствах операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}^{\alpha}_{n+2r}(f)$ при $\alpha = 0$. В этом случае полином $(\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x))^{(\nu)}$ интерполирует функцию $f^{(\nu)}(x)$ в точках -1 и 1 при всех $\nu = 0,1,\ldots,r-1$, а в правых частях оценок для отклонения $\left|f^{(\nu)}(x) - (\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x))^{(\nu)}\right|$ вместо множителей типа $\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\alpha-\frac12}$ вазникают более точные множители типа $(1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}-\frac14}$. При $\alpha=0$ равенство (5.5.3) в силу (5.3.33) и (5.3.36) принимает следующий вид

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x) = D_{2r-1}(f,x) + \mathcal{F}_{r,n}(x), \tag{5.9.1}$$

где

$$\mathcal{F}_{r,n}(x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=r}^{n+r}\frac{f_{r,k}}{k^{[r]}}P^{r,r}_{k-r}(x),$$

$f_{r,k} = f^{0,0}_{r,k}$,

$$D_{2r-1}(f,x) =$$
$$\frac{(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{1}{\nu!}\left[\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu}}\sum_{s=0}^{r-1-\nu}\frac{(r)_s(1+x)^s}{2^s s!} + \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu}}\sum_{s=0}^{r-1-\nu}\frac{(r)_s(1-x)^s}{2^s s!}\right].$$

Заметим, что $D_{2r-1}(f,x)$ – представляет собой алгебраический полином степени $2r-1$, удовлетворяющий условиям

$$D^{(\nu)}_{2r-1}(\pm1) = f^{(\nu)}(\pm1), \quad \nu = 0,1,\ldots,r-1, \tag{5.9.2}$$

Сопоставляя (5.3.37) и (5.9.1) и учитывая (5.1.14), мы имеем

$$f^{(\nu)}(x) - (\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x))^{(\nu)} = \frac{(-1)^{r-\nu}(1-x^2)^{r-\nu}}{2^{r-\nu}}\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{f_{r,k}}{k^{[r-\nu]}}P^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu}(x). \tag{5.9.3}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$(\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x))^{(\nu)} = \mathcal{Y}_{n+\nu+2(r-\nu)}(f^{(\nu)},x). \tag{5.9.4}$$

Пользуясь равенством (5.9.3) и весовой оценкой (5.1.11), почти дословно повторяя рассуждения, проведенные нами для $\alpha > -1$, мы можем убедиться в справедливости следующих утверждений.

Теорема 5.9.1. *Пусть $m \geqslant r \geqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, $f \in W^m_{\mathcal{L}^{m-r}_2}$. Тогда имеет место оценка*

$$\left|f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu}\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)\right| \leqslant c(m)(1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}-\frac14}\frac{E_{n+2r-m}(f^{(m)})_{\mathcal{L}^{m-r}_2}}{n^{m-\nu-1/2}}.$$

Теорема 5.9.2 *Пусть $r \geqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, $n \geqslant 2r$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда*

$$\left|f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu}\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)\right| \leqslant c(r,q)B\frac{q^n}{n^{r-\nu-1}}(1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}-\frac14}.$$

Ниже мы продолджим исследование аппроксимативных свойств смешанных рядов по полиномам Лежандра. Нам понадобятся некоторые обозначения. Через W^r мы обозначим класс r–раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $[-1,1]$, для которых r–я производная $f^{(r)}(x)$ удовлетворяет неравенству $\|f^{(r)}\| \leqslant 1$.

Методы, применявшиеся при исследовании аппроксимативных свойств смешанных рядов по ультрасферическим полиномам на классах $W^rH^\mu_{L_2}$, $S^rH^\mu_\Delta(B)$, $A_q(B)$ не позволяют достичь окончательных результатов при решении задачи об оценке отклонения операторов $\mathcal{Y}_{n+2r} = \mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ от функций $f \in W^r$. Один из подходов к решению этой задачи связан с использованием известного в теории приближений результата А.С. Теляковского [37] и И.Е. Гопенгауза [55], а именно, если $f \in W^r$, то найдется последовательность алгебраических полиномов $\{p_n(x)\}_{n=2r-1}^\infty$ таких, что $\deg p_n(x) = n$ и положительная постоянная $c = c(r)$, для которой справедливы следующие неравенства

$$|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)| \leqslant c(1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}} n^{\nu-r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right), \quad x\in[-1,1], \quad 0\leqslant \nu \leqslant r, \tag{5.9.5}$$

где

$$\omega(g,\delta) = \sup_{x,t\in[-1,1],|x-t|\leqslant\delta} |g(x)-g(t)|$$

–модуль непрерывности функции $g \in C[-1,1]$. При $\nu = 0$ это неравенство мы можем записать в следующем виде

$$(1-x^2)^{\frac{-r}{2}}|f(x)-p_n(x)| \leqslant cn^{-r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right), \quad x\in[-1,1]. \tag{5.9.6}$$

Отсюда следует, что если $f \in W^r$, то мы можем определить следующую величину

$$E_n^r(f) = \inf_{p_n}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left(1-x^2\right)^{\frac{-r}{2}}|f(x)-p_n(x)|, \tag{5.9.7}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $p_n(x)$ степени n, для которых $f^{(\nu)}(\pm1) = p_n^{(\nu)}(\pm1)$ при $\nu = 0,1,\ldots,r-1$. Из (5.9.6) следует, что

$$E_n^r(f) \leqslant cn^{-r}\omega(f^{(r)}, \frac{1}{n}), \tag{5.9.8}$$

если только $f \in W^r$. Среди полиномов $p_n(x)$ степени $n \geqslant 2r-1$, удовлетворяющих условиям $f^{(\nu)}(\pm1) = p_n^{(\nu)}(\pm1)$ при $\nu = 0,1,\ldots,r-1$, через $p_n^r(f) = p_n^r(f,x)$–мы обозначим тот, для которого

$$E_n^r(f) = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left(1-x^2\right)^{\frac{-r}{2}}|f(x)-p_n^r(f,x)|. \tag{5.9.9}$$

§ 5.10. Приближение функций $f \in W^r$ посредством $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$

Для произвольного алгебраического полинома $p_m(x)$ степни $m \leqslant n+2r$ имеет место равенство

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(p_m, x) = p_m(x). \tag{5.10.1}$$

В частности, если $f \in W^r$, то для полинома $p_{n+2r}^r(f) = p_{n+2r}^r(f,x)$, удовлетворяющего условию (5.9.9) мы можем записать

$$f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f,x) = f(x) - p_{n+2r}^r(f,x) + \mathcal{Y}_{n+2r}(p_{n+2r}^r(f) - f, x). \tag{5.10.2}$$

Сопоставляя (5.9.1), (5.9.2) и (5.10.2), мы можем записать

$$f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f,x) = f(x) - p_{n+2r}^r(f,x) + Z(x), \tag{5.10.3}$$

где
$$Z(x)=\frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=r}^{n+r}\frac{(p^r_{n+2r}(f)-f)_{r,k}}{k^{[r]}}P^{r,r}_{k-r}(x), \tag{5.10.4}$$

$$(p^r_{n+2r}(f)-f)_{r,k}=\frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(p^r_{n+2r}(f,t)-f(t)\right)^{(r)}P_k(t)dt. \tag{5.10.5}$$

Далее, поскольку $(p^r_{n+2r}(f,t)-f(t))^{(\nu)}_{t=\pm1}=0$ при $\nu=0,1,\ldots,r-1$, то, применяя метод интегрирования по частям и формулу (5.1.7), из (5.10.5) находим

$$(p^r_{n+2r}(f)-f)_{r,k}=(-1)^r\frac{2k+1}{2}\frac{(k+1)_r}{2^r}\int\limits_{-1}^{1}\left(p^r_{n+2r}(f,t)-f(t)\right)P^{r,r}_{k-r}(t)dt. \tag{5.10.6}$$

Из (5.10.4) и (5.10.6) имеем

$$Z(x)=(1-x^2)^r\int\limits_{-1}^{1}\left(p^r_{n+2r}(f,t)-f(t)\right)dt\sum_{k=r}^{n+r}\frac{(k+1)_r(2k+1)}{2^{2r+1}k^{[r]}}P^{r,r}_{k-r}(t)P^{r,r}_{k-r}(x). \tag{5.10.7}$$

Обратившись первому из равенств (5.1.4), нетрудно заметить, что

$$\sum_{k=r}^{n+r}\frac{(k+1)_r(2k+1)}{2^{2r+1}k^{[r]}}P^{r,r}_{k-r}(t)P^{r,r}_{k-r}(x)=K^{r,r}_n(x,t),$$

поэтому (5.10.7) можем переписать в следующем виде

$$Z(x)=(1-x^2)^r\int\limits_{-1}^{1}\left(p^r_{n+2r}(f,t)-f(t)\right)K^{r,r}_n(x,t)dt. \tag{5.10.8}$$

Из (5.9.7) и (5.10.8) мы можем вывести оценку

$$|Z(x)|\leqslant(1-x^2)^r l^r_n(x)E^r_n(f), \tag{5.10.9}$$

где

$$l^r_n(x)=\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{r}{2}}|K^{r,r}_n(x,t)|dt. \tag{5.10.10}$$

Сопоставим (5.10.9) с (5.10.3), тогда заметим

$$|f(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)|\leqslant|f(x)-p^r_{n+2r}(f,x)|+(1-x^2)^r l^r_n(x)E^r_n(f). \tag{5.10.11}$$

Отсюда, с учетом (5.10.7), мы приходим к следующей оценке

$$|f(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)|\leqslant(1-x^2)^{\frac{r}{2}-\frac14}\left((1-x^2)^{\frac14}+(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac14}l^r_n(x)\right)E^r_n(f). \tag{5.10.12}$$

В связи с оценкой (5.10.12) возникает вопрос об оценке величины $l^r_n(x)$ при $x\in(-1,1)$.

Лемма 5.10.1. *Для $x\in(-1,1)$ имеет место следующая оценка*

$$l^r_n(x)\leqslant c(r)\left(1-x^2\right)^{\frac{-r}{2}}\left[\ln\left(n\sqrt{1-x^2}+1\right)+\left(1-x^2\right)^{\frac{-1}{4}}\right].$$

Доказательство. В силу (4.10) и симметрии (5.1.10) имеем $l_n^r(-x) = l_n^r(x)$, поэтому достаточно рассмотреть случай $0 \leqslant x \leqslant 1$. Интеграл (5.10.10), определяющий функцию $l_n^r(x)$ разобьем на два по схеме: $\int_{-1}^{1} = \int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{1}$. Во втором интеграле сделаем замену переменной $t = \cos\theta$, после чего разобьем его на три интеграла $\int_0^{2\pi/3} = \int_0^{\varphi-\frac{1}{n}} + \int_{\varphi-\frac{1}{n}}^{\varphi+\frac{1}{n}} + \int_{\varphi+\frac{1}{n}}^{2\pi/3}$. где $\varphi = \arccos x > 1/n$. Таким образом

$$l_n^r(x) = \sum_{k=1}^{4} J_k, \tag{5.10.13}$$

где

$$J_1 = \int_{-1}^{-1/2} |K_n^{r,r}(x,t)| \left(1-t^2\right)^{r/2} dt,$$

$$J_2 = \int_{\varphi+\frac{1}{n}}^{2\pi/3} |K_n^{r,r}(x,\cos\theta)| \,(\sin\theta)^{r+1}\, d\theta,$$

$$J_3 = \int_{\varphi-\frac{1}{n}}^{\varphi+\frac{1}{n}} |K_n^{r,r}(x,\cos\theta)| \,(\sin\theta)^{r+1}\, d\theta,$$

$$J_4 = \int_{0}^{\varphi-\frac{1}{n}} |K_n^{r,r}(x,\cos\theta)| \,(\sin\theta)^{r+1}\, d\theta,$$

причем, если окажется, что $\varphi \leqslant 1/n$, то $J_4 = 0$, а вместо $\varphi - 1/n$ в J_3 следует взять 0. Перейдем к оценкам величин J_k, для чего предварительно заметим, что

$$\lambda_n = \lambda_n(\alpha,\beta) = \frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2}\,\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \asymp n, \tag{5.10.14}$$

$$h_k^{\alpha,\beta} \asymp 1/k. \tag{5.10.15}$$

Чтобы оценить J_1 обратимся к формуле Кристоффеля-Дарбу (5.1.4), тогда

$$J_1 \leqslant 2\lambda_n(r,r)\,|P_n^{r,r}(x)| \int_{-1}^{-1/2} \left|P_{n+1}^{r,r}(t)\right| \left(1-t^2\right)^{r/2} dt + 2\lambda_n(r,r)\left|P_{n+1}^{r,r}(x)\right| \int_{-1}^{-1/2} |P_n^{r,r}(t)| \left(1-t^2\right)^{r}$$

Отсюда, имея ввиду (5.1.24), (5.1.10) и (5.10.14) выводим оценку

$$J_1 \leqslant c(r)\sqrt{n}\left\{|P_n^{r,r}(x)| + \left|P_{n+1}^{r,r}(x)\right|\right\} \leqslant c(r)(1-x^2)^{-r/2-1/4}. \tag{5.10.16}$$

Оценим J_3 при $\varphi > 1/n$. Благодаря первой из формул (5.1.4), соотношению (5.10.15) и весовой оценке (5.1.11) имеем

$$J_3 \leqslant \int_{\varphi-\frac{1}{n}}^{\varphi+\frac{1}{n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{h_k^{r,r}} |P_k^{r,r}(\cos\theta)P_k^{r,r}(\cos\varphi)| \,(\sin\theta)^{r+1}\, d\theta \leqslant$$

$$c(r)\left[1 + \sum_{k=1}^{n} k\varphi^{-r-1/2}k^{-1/2}\int_{\varphi-\frac{1}{n}}^{\varphi+\frac{1}{n}} \theta^{-r-1/2}k^{-1/2}\theta^{r+1}d\theta\right] \leqslant$$

$$c(r)\left[1 + n\varphi^{-r-1/2}\int_{\varphi-\frac{1}{n}}^{\varphi+\frac{1}{n}} \theta^{1/2}d\theta\right] \leqslant c(r)\varphi^{-r-1/2}(\varphi+1/n)^{1/2} \leqslant c(r)\varphi^{-r} \leqslant c(r)(1-x^2)^{-r/2}. \tag{5.10.17}$$

Если же $\varphi \leqslant 1/n$, то

$$J_3 \leqslant c(r)\left[1+\sum_{k=1}^{n} kk^r \int_0^{\frac{2}{n}} \theta^{-r-1/2}k^{-1/2}\theta^{r+1}d\theta\right] \leqslant$$

$$c(r)\left[1+\sum_{k=1}^{n} k^{r+1/2} \int_0^{\frac{2}{n}} \theta^{1/2}d\theta\right] \leqslant c(r)n^{r+3/2}(2/n)^{3/2} \leqslant c(r)n^r \leqslant c(r)(1-x^2)^{-r/2}. \tag{5.10.18}$$

Для оценки J_2 преобразуем числитель в правой части формулы (5.1.4) для $\alpha=\beta=r$ с помощью (5.1.16) и (5.1.17) следующим образом

$$P_{n+1}^{r,r}(x)P_n^{r,r}(t)-P_{n+1}^{r,r}(t)P_n^{r,r}(x)=$$

$$\left(1+\frac{r}{n+1}\right)\left[(1-x)P_n^{r+1,r}(x)P_n^{r,r}(t)-(1-t)P_n^{r+1,r}(t)P_n^{r,r}(x)\right].$$

Тогда ($\lambda_n=\lambda_n(r,r)$)

$$J_2=\lambda_n\left(1+\frac{r}{n+1}\right)\int\limits_{\varphi+\frac{1}{n}}^{2\pi/3}\frac{\left|(1-x)P_n^{r+1,r}(x)P_n^{r,r}(\cos\theta)-(1-\cos\theta)P_n^{r+1,r}(\cos\theta)P_n^{r,r}(x)\right|}{\cos\varphi-\cos\theta}(\sin\theta)^{r+1}$$

Так как $(\sin\theta)^{r+1}\asymp\theta^{r+1}$, $\cos\varphi-\cos\theta\asymp\theta^2-\varphi^2$ ($\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}],\theta\in[0,\frac{2\pi}{3}]$), то

$$J_2\leqslant c(r)n(1-x)|P_n^{r+1,r}(x)|\int\limits_{\varphi+\frac{1}{n}}^{2\pi/3}|P_n^{r,r}(\cos\theta)|\frac{\theta^{r+1}}{\theta^2-\varphi^2}d\theta+$$

$$c(r)n|P_n^{r,r}(x)|\int\limits_{\varphi+\frac{1}{n}}^{2\pi/3}\left|P_n^{r+1,r}(\cos\theta)\right|\frac{\theta^{r+3}}{\theta^2-\varphi^2}d\theta.$$

Поскольку $\theta^2-\varphi^2\geqslant\theta(\theta-\varphi)$, то в силу весовой оценки для полиномов Якоби

$$J_2\leqslant c(r)\sqrt{n}(1-x)|P_n^{r+1,r}(x)|\int\limits_{\varphi+\frac{1}{n}}^{2\pi/3}\frac{\theta^{-1/2}}{\theta-\varphi}d\theta+c(r)\sqrt{n}|P_n^{r,r}(x)|\int\limits_{\varphi+\frac{1}{n}}^{2\pi/3}\frac{\theta^{1/2}}{\theta-\varphi}d\theta.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой [50]

$$\int\limits_{\varphi+\frac{1}{n}}^{2\pi/3}\frac{\theta^{\alpha-1/2}}{\theta-\varphi}d\theta\leqslant c(\alpha)\begin{cases}\varphi^{\alpha-\frac{1}{2}}[\ln(n\varphi+1)+1], & -\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2},\\ \varphi^{\alpha-\frac{1}{2}}\ln(n\varphi+1)+1, & \frac{1}{2}<\alpha,\end{cases}$$

находим

$$J_2\leqslant c(r)\sqrt{n}\left[\varphi^{3/2}|P_n^{r+1,r}(x)|+\varphi^{1/2}|P_n^{r,r}(x)|\right]\ln(n\varphi+1)+$$

$$c(r)\sqrt{n}\left[\varphi^{3/2}|P_n^{r+1,r}(x)|+|P_n^{r,r}(x)|\right]$$

$$\leqslant c(r)\left[\varphi^{-r}\ln(n\varphi+1)+\varphi^{-r}+\varphi^{-r-1/2}\right]\leqslant c(r)\varphi^{-r-1/2}\left\{\varphi^{1/2}\ln(n\varphi+1)+1\right\}\leqslant$$

$$c(r)(1-x^2)^{-r/2-1/4}\left\{(1-x^2)^{1/4}\ln[(1-x^2)^{1/2}+1]+1\right\}. \tag{5.10.19}$$

Оценим J_4. Поскольку $J_4 = 0$ при $\varphi \leqslant 1/n$, то мы можем считать, что $\varphi > 1/n$. По аналогии с первым из неравенств (5.10.19) имеем

$$J_4 \leqslant c(r)\sqrt{n}(1-x)|P_n^{r+1,r}(x)| \int\limits_0^{\varphi-\frac{1}{n}} \frac{\theta^{1/2}}{\varphi^2-\theta^2}d\theta + c(r)\sqrt{n}|P_n^{r,r}(x)| \int\limits_0^{\varphi-\frac{1}{n}} \frac{\theta^{3/2}}{\varphi^2-\theta^2}d\theta \leqslant$$

Но при $\sigma > 0$

$$\int\limits_0^{\varphi-\frac{1}{n}} \frac{\theta^{\sigma}}{\varphi^2-\theta^2}d\theta \leqslant \varphi^{\sigma} \int\limits_0^{\varphi-\frac{1}{n}} \frac{d\theta}{\varphi^2-\theta^2}d\theta = \frac{1}{2}\varphi^{\sigma-1}\ln(2n\varphi-1) \leqslant \varphi^{\sigma-1}\ln(n\varphi+1),$$

поэтому

$$J_4 \leqslant c(r)\sqrt{n}\left[\varphi^{3/2}|P_n^{r+1,r}(x)| + \varphi^{1/2}|P_n^{r,r}(x)|\right]\ln(n\varphi+1) \leqslant c(r)\left[\varphi^{-r}+\varphi^{-r}\right]\ln(n\varphi+1) \leqslant$$

$$c(r)\varphi^{-r}\ln(n\varphi+1) \leqslant c(r)(1-x^2)^{-r/2}\ln(n\sqrt{1-x^2}+1). \tag{5.10.20}$$

Сопоставляя (5.10.13), (5.10.16) – (5.10.20), убеждаемся в справедливости леммы 5.10.1.

Из оценки (5.10.12) и леммы 5.10.1 непосредственно следует, что

$$\frac{|f(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)|}{(1-x^2)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}} \leqslant c(r)\left[(1-x^2)^{1/4}\ln(n\sqrt{1-x^2}+1)+1\right]E_n^r(f). \tag{5.10.21}$$

Сопоставляя оценки (5.10.21) и (5.9.8), ми приходим к следующему результату.

Теорема 5.10.1 *Пусть $f \in W^r$, $n \geqslant 2r$. Тогда имеет место следующая оценка*

$$\frac{|f(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)|}{(1-x^2)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}} \leqslant \frac{c(r)}{n^r}\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)\left[(1-x^2)^{1/4}\ln(n\sqrt{1-x^2}+1)+1\right]. \tag{5.10.21}$$

Следствие 5.10.1 *Если $n \geqslant 2r$,то*

$$\sup_{f\in W^r}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\frac{|f(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)|}{(1-x^2)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}} \leqslant c(r)\frac{\ln n}{n^r}. \tag{5.10.22}$$

Следствие 5.10.2 *Если $n \geqslant 2r$,то*

$$\sup_{f\in W^r}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\frac{|f^{(\nu)}(x)-\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)|}{(1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}}} \leqslant c(r)\frac{\ln n}{n^{r-\nu}}. \tag{5.10.23}$$

Утверждение следствия 5.10.2 вытекает из теоремы 5.10.1, примененной к функции $f \in W^{r-\nu}$ и равенства (5.9.4).

Ниже мы приведем доказательство оценок (5.10.22) и (5.10.23), не опирающееся на неравенство (5.9.5) и покажем, что эта оценка не улучшаема. Тем самым мы получим аналог известного результата Колмогорова о приближении классов $\tilde{W}^r$, состоящих из $r-$ раз непрерывно дифференцируемых 2π–периодических функций суммами Фурье по тригонометрической системе. Нам понадобится ряд вспомогательных результатов. Положим

$$\mathcal{K}_{r,m}(x,t) = \sum_{k=r}^{m}(2k+1)P_{k-r}^{r,r}(x)P_k(t). \tag{5.10.24}$$

Лемма 5.10.2. *Имеет место равенство*

$$(x-t)\mathcal{K}_{r,m}(x,t) = (m+1)\left[P^{r,r}_{m-r+1}(x)P_m(t) - P^{r,r}_{m-r}(x)P_{m+1}(t)\right]$$

$$+\sum_{k=r}^{m}\frac{r^2}{k+1}P^{r,r}_{m-r+1}(x)P_m(t) - rP_{r-1}(t).$$

Доказательство. Воспользуемся рекуррентной формулой для полиномов Якоби, которую в случае $\alpha=\beta$ перепишем в следующем виде

$$2n(n+2\alpha)P_n^{\alpha,\alpha}(x) = (2n+2\alpha-1)(2n+2\alpha)xP^{\alpha,\alpha}_{n-1}(x) - 2(n+\alpha-1)(n+\alpha)P^{\alpha,\alpha}_{n-2}(x)$$

или

$$(n+\alpha)^2P_n^{\alpha,\alpha}(x) + (n-1+\alpha)(n+\alpha)P^{\alpha,\alpha}_{n-2}(x) = (2n+2\alpha-1)(n+\alpha)xP^{\alpha,\alpha}_{n-1}(x) + \alpha^2P_n^{\alpha,\alpha}(x)$$

и отсюда

$$(n+\alpha)P_n^{\alpha,\alpha}(x) + (n-1+\alpha)P^{\alpha,\alpha}_{n-2}(x) = (2n+2\alpha-1)xP^{\alpha,\alpha}_{n-1}(x) + \frac{\alpha^2}{n+\alpha}P_n^{\alpha,\alpha}(x). \quad (5.10.25)$$

Если $\alpha=0$, $x=t$, $n=k+1$, то (5.10.25) принимает вид

$$(k+1)P_{k+1}(t) + kP_{k-1}(t) = (2k+1)tP_k(t). \quad (5.10.26)$$

Кроме того, если в (5.10.25) мы положим $n=k-r+1$, $\alpha=r$, то получим

$$(k+1)P^{r,r}_{k-r+1}(x) + kP^{r,r}_{k-r-1}(x) = (2k+1)xP^{r,r}_{k-r}(x) + \frac{r^2}{k+1}P^{r,r}_{k-r+1}(x). \quad (5.10.27)$$

Из (5.10.26) и (5.10.27) находим

$$(k+1)\left[P^{r,r}_{k-r+1}(x)P_k(t) - P^{r,r}_{k-r}(x)P_{k+1}(t)\right] - k\left[P^{r,r}_{k-r}(x)P_{k-1}(t) - P^{r,r}_{k-r-1}(x)P_k(t)\right]$$

$$= (x-t)(2k+1)P^{r,r}_{k-r}(x)P_k(t) + \frac{r^2}{k+1}P^{r,r}_{k-r+1}(x)P_k(t). \quad (5.10.28)$$

Просуммируя правые и левые части равенств, полученных из (5.10.28) при $k=r,r+1,\dots,m$, убеждаемся в справедливости утверждения леммы 5.10.2.

Лемма 5.10.3. *Имеет место равенство*

$$(x-t)\mathcal{K}_{r,m}(x,t) = -rP_{r-1}(t) - \frac{(m+1)^2(1-x)}{m-r+1}P^{r+1,r}_{m-r}(x)P_m(t) + (m+1)(1-t)P^{r,r}_{m-r}(x)P^{1,0}_m(t)$$

$$\frac{(m+1)r}{m-r+1}P^{r,r}_{m-r}(x)P_m(t) + \sum_{k=r}^{m}\frac{r^2}{k+1}P^{r,r}_{k-r+1}(x)P_k(t).$$

Доказательство. В силу (5.1.16) и (5.1.10) имеем

$$P^{r,r}_{m-r+1}(x) = \frac{m+1}{m-r+1}P^{r,r}_{m-r}(x) - \frac{m+1}{m-r+1}(1-x)P^{r+1,r}_{m-r}(x),$$

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) - (1-t)P^{1,0}_m(t).$$

Поэтому

$$P^{r,r}_{m-r+1}(x)P_m(t) - P^{r,r}_{m-r}(x)P_{m+1}(t) =$$

$$\frac{r}{m-r+1}P_{m-r}^{r,r}(x)P_m(t)-\frac{m+1}{m-r+1}(1-x)P_{m-r}^{r+1,r}(x)P_m(t)+(1-t)P_{m-r}^{r,r}(x)P_m^{1,0}(t). \tag{5.10.29}$$

Сопоставляя равенство (5.10.29) с леммой 5.10.2, приходим к утверждению леммы 5.10.3.

Лемма 5.10.4. *Справедливо нераваенство*

$$(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|\sum_{k=r}^{m}\frac{r^2}{k+1}P_{k-r+1}^{r,r}(x)P_k(t)\right|\leqslant c(r).$$

Доказательство. Из весовой оценки (2.11) следует, что

$$(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}|P_{k-r+1}^{r,r}(x)|\leqslant c(r)k^{-1/2} \tag{5.10.32}$$

и, с другой стороны, $|P_k(t)|\leqslant 1$ при $-1\leqslant t\leqslant 1$. Утверждение леммы 5.10.4 непосредственно вытекает из этих двух оценок.

Лемма 5.10.5. *Пусть* $0<\varepsilon<\delta<1$, $-1+\delta\leqslant x\leqslant 1$. *Тогда*

$$(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\int\limits_{-1}^{-1+\varepsilon}|\mathcal{K}_{r,m}(x,t)|dt\leqslant\frac{c(r)}{\delta-\varepsilon}.$$

Доказательство. Обратимся к леммам 5.10.3 и 5.10.4, тогда

$$(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\int\limits_{-1}^{-1+\varepsilon}|\mathcal{K}_{r,m}(x,t)|dt\leqslant Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+Z_5, \tag{5.10.33}$$

где в силу (5.1.11) и (5.1.24)

$$Z_1=r(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\int\limits_{-1}^{-1+\varepsilon}\frac{|P_{r-1}(t)|}{x-t}dt\leqslant\frac{c(r)}{\delta-\varepsilon}, \tag{5.10.34}$$

$$Z_2\leqslant\frac{(m+1)^2(1-x)}{m-r+1}|P_{m-r}^{r+1,r}(x)|(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\int\limits_{-1}^{-1+\varepsilon}\frac{|P_m(t)|}{x-t}dt\leqslant\frac{c(r)}{\delta-\varepsilon}, \tag{5.10.35}$$

$$Z_3\leqslant(m+1)|P_{m-r}^{r,r}(x)|(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\int\limits_{-1}^{-1+\varepsilon}\frac{(1-t)|P_m^{1,0}(t)|}{x-t}dt\leqslant\frac{c(r)}{\delta-\varepsilon}, \tag{5.10.36}$$

$$Z_4\leqslant\frac{r(m+1)}{m-r+1}|P_{m-r}^{r,r}(x)|(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\int\limits_{-1}^{-1+\varepsilon}\frac{|P_m(t)|}{x-t}dt\leqslant\frac{c(r)}{\delta-\varepsilon}, \tag{5.10.37}$$

$$Z_5\leqslant\int\limits_{-1}^{-1+\varepsilon}\frac{r^2}{x-t}\sum_{k=r}^{m}\frac{(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{k+1}|P_{k-r+1}^{r,r}(x)P_k(t)|dt\leqslant\frac{c(r)}{\delta-\varepsilon}. \tag{5.10.38}$$

Утверждение леммы 5.10.5 непосретственно вытекает из (5.10.33)–(5.10.38).

Лемма 5.10.6. *Пусть* $-1\leqslant x\leqslant 1$. *Тогда*

$$l_{r,m}(x)=(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\int\limits_{-1}^{1}|\mathcal{K}_{r,m}(x,t)|dt\leqslant c(r)\ln(m+1).$$

Доказательство. В силу симметрии (5.1.10)

$$\int_{-1}^{1} |\mathcal{K}_{r,m}(x,t)|dt = \int_{-1}^{1} |\mathcal{K}_{r,m}(-x,t)|dt,$$

поэтому мы можем ограничиться рассмотрением случая $0 \leqslant x \leqslant 1$. Разобьем интеграл $\int_{-1}^{1}$ на два по схеме $\int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{1}$. Во втором интеграле произведем замену переменной $t = \cos\theta$, после чего разобьем его на три интеграла

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} = \int_0^{\varphi-\frac{1}{m}} + \int_{\varphi-\frac{1}{m}}^{\varphi+\frac{1}{m}} + \int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}},$$

где $\varphi = \arccos x$. Таким образом

$$l_{r,m}(x) = \sum_{k=1}^{4} X_k, \tag{5.10.39}$$

где

$$X_1 = (1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int_{-1}^{-1/2} |\mathcal{K}_{r,m}(x,t)|dt,$$

$$X_2 = (\sin\varphi)^{r+1/2} \int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}} |\mathcal{K}_{r,m}(x,\cos\theta)|d\theta,$$

$$X_3 = (\sin\varphi)^{r+1/2} \int_{\varphi-\frac{1}{m}}^{\varphi+\frac{1}{m}} |\mathcal{K}_{r,m}(x,\cos\theta)|d\theta,$$

$$X_4 = (\sin\varphi)^{r+1/2} \int_{0}^{\varphi-\frac{1}{m}} |\mathcal{K}_{r,m}(x,\cos\theta)|d\theta,$$

причем, если $\varphi \leqslant 1/m$, то $X_4 = 0$, а вместо $\varphi - 1/m$ в X_3 следует взять 0. Оценим X_k при $1 \leqslant k \leqslant 4$. Для X_1 в силу леммы 5.10.5 мы имеем оценку

$$X_1 \leqslant c(r). \tag{5.10.40}$$

Оценим X_3. Имеем

$$X_3 \leqslant (\sin\varphi)^{r+1/2} \int_{\varphi-\frac{1}{m}}^{\varphi+\frac{1}{m}} \sum_{k=r}^{m} (2k+1)|P_{k-r}^{r,r}(\cos\varphi)P_k(\cos\theta)| \sin\theta d\theta \leqslant$$

$$c(r)\sum_{k=r}^{m}(2k+1)(\sin\varphi)^{r+1/2}|P_{k-r}^{r,r}(\cos\varphi)| \int_{\varphi-\frac{1}{m}}^{\varphi+\frac{1}{m}} |P_k(\cos\theta)|\sin\theta d\theta$$

$$\leqslant c(r)\sum_{k=r}^{m}(2k+1)k^{-1/2}k^{-1/2} \int_{\varphi-\frac{1}{m}}^{\varphi+\frac{1}{m}} d\theta \leqslant c(r). \tag{5.10.41}$$

Оценим X_2. Воспользовавшись леммой 5.10.3, имеем

$$X_2 \leqslant X_2^1 + X_2^2 + X_2^3 + X_2^4 + X_2^5, \tag{5.10.42}$$

где

$$X_2^1 = r(\sin\varphi)^{r+1/2} \int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|P_{r-1}(\cos\theta)|\sin\theta d\theta}{\cos\varphi - \cos\theta}, \tag{5.10.43}$$

$$X_2^2 = \frac{(m+1)^2}{m-r+1}(\sin\varphi)^{r+5/2}|P_{m-r}^{r+1,r}(\cos\varphi)| \int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|P_m(\cos\theta)|\sin\theta d\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}, \tag{5.10.44}$$

$$X_2^3 = 2(m+1)(\sin\varphi)^{r+1/2}|P_{m-r}^{r,r}(\cos\varphi)| \int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|P_m^{1,0}(\cos\theta)|\sin^3\theta d\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}, \tag{5.10.45}$$

$$X_2^4 = \frac{r(m+1)}{m-r+1}(\sin\varphi)^{r+5/2}|P_{m-r}^{r,r}(\cos\varphi)| \int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|P_m(\cos\theta)|\sin\theta d\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}, \tag{5.10.46}$$

$$X_2^5 = \int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{r^2\sin\theta}{x-\cos\theta}\left|\sum_{k=r}^{m}\frac{(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{k+1}P_{k-r+1}^{r,r}(x)P_k(\cos\theta)\right|d\theta. \tag{5.10.47}$$

Заметим далее, что

$$\cos\varphi-\cos\theta \asymp \theta^2-\varphi^2 > \theta(\theta-\varphi) \quad \left(\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad \theta\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\right) \tag{5.10.48}$$

и в силу (5.1.11)

$$(\sin\theta)^{\alpha+1/2}|P_m^{\alpha,\beta}(\cos\theta)| \leqslant c(\alpha,\beta)m^{-1/2} \quad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}\right). \tag{5.10.49}$$

Из (5.10.43) – (5.10.49) имеем

$$X_2^1 \leqslant c(r)\varphi^{r+1/2}\int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{-1/2}}{\theta-\varphi}d\theta, \tag{5.10.50}$$

$$X_2^2 \leqslant c(r)\varphi^{2}\int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{-1/2}}{\theta-\varphi}d\theta, \tag{5.10.51}$$

$$X_2^3 \leqslant c(r)\int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{1/2}}{\theta-\varphi}d\theta, \tag{5.10.52}$$

$$X_2^4 \leqslant c(r)\frac{1}{m}\int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{-1/2}}{\theta-\varphi}d\theta. \tag{5.10.53}$$

Далее

$$\int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{-\frac{1}{2}}}{\theta-\varphi}d\theta < \int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{(\varphi+\frac{1}{m})^{-\frac{1}{2}}}{\theta-\varphi}d\theta =$$

$$\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}\ln(\theta-\varphi)\Big|_{\varphi+\frac{1}{m}}^{2\pi/3} = (\varphi+\frac{1}{m})^{-\frac{1}{2}}\ln\left[(\frac{2\pi}{3}-\varphi)m\right], \tag{5.10.54}$$

$$\int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{1/2}}{\theta-\varphi}d\theta < \int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\varphi^{1/2}}{\theta-\varphi}d\theta + \int_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{(\theta-\varphi)^{1/2}}{\theta-\varphi}d\theta =$$

$$2(\theta-\varphi)^{1/2}\Big|_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}} + \varphi^{1/2}\ln(\theta-\varphi)\Big|_{\varphi+\frac{1}{m}}^{\frac{2\pi}{3}} < 2(2\pi/3)^{1/2} + \varphi^{1/2}\ln\left[(2\pi/3-\varphi)m\right]. \tag{5.10.55}$$

Сопоставляя (5.10.50)–(5.10.56), находим

$$X_2^1+X_2^2+X_2^3+X_2^4 \leqslant c(r)[1+\varphi^{1/2}\ln(m+1)]. \tag{5.10.56}$$

Оценим X_2^5, для чего воспользуемся леммой 5.10.4. В силу (5.10.47) это дает ($x=\cos\varphi$)

$$X_2^5=(1-x^2)^{r/2+1/4}\int\limits_{-1/2}^{\cos(\varphi+\frac{1}{m})}\left|\sum_{k=r}^{m}\frac{r^2}{k+1}P_{k-r+1}^{r,r}(x)P_k(t)\right|\frac{dt}{x-t}\leqslant$$

$$c(r)\int\limits_{-1/2}^{\cos(\varphi+\frac{1}{m})}\frac{dt}{x-t}=c(r)\ln\frac{x+1/2}{x-\cos(\varphi+\frac{1}{m})}=c(r)\ln\frac{x+1/2}{\cos\varphi-\cos(\varphi+\frac{1}{m})}=$$

$$c(r)\ln\frac{x+1/2}{2\sin(\varphi+\frac{1}{2m})\sin\frac{1}{2m}}\leqslant c(r)\ln\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2m}}\leqslant c(r)\ln(m+1). \tag{5.10.57}$$

Из (5.10.42), (5.10.56) и (5.10.57) находим

$$X_2\leqslant c(r)\leqslant\ln(m+1). \tag{5.10.58}$$

Оценим X_4 при $\varphi\geqslant 1/m$ (если $\varphi<1/m$, то $X_4=0$). По аналогии с (5.10.42) имеем

$$X_4\leqslant X_4^1+X_4^2+X_4^3+X_4^4+X_4^5, \tag{5.10.60}$$

где X_4^i определяется совершенно аналогично равенствам (5.10.43) – (5.10.47), с той лишь разницей, что вместо интегралов типа $\int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3}$ берутся итегралы вида $\int_0^{\varphi-1/m}$. Применяя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве оценок для X_2^i, из (5.10.60) выводим оценку

$$X_4\leqslant c(r)\ln(m+1). \tag{5.10.60}$$

Собирая оценки (5.10.60),(5.10.41),(5.10.58) – (5.10.60) и сопоставляя их с равенством (5.10.39), убеждаемся в справедливости утверждения леммы 5.10.6.

Теорема 5.10.2. *Пусть $r\geqslant 11$, $n\geqslant 2r$. Тогда имеет место соотношение*

$$R_{r,n}(W^r)=\sup_{f\in W^r}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\frac{|f(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)|}{(1-x^2)^{r/2-1/4}}\asymp\frac{\ln n}{n^r},$$

другими словами найдутся две такие положительные постоянные $c_1(r)$ и $c_2(r)$, что

$$c_1(r)\frac{\ln n}{n^r}\leqslant R_{r,n}(W^r)\leqslant c_2(r)\frac{\ln n}{n^r}\quad(n=2r,2r+1,\ldots). \tag{5.10.61}$$

Доказательство. Верхняя из оценок (5.10.61) вытекает из следствия 5.10.1 теоремы 5.10.1. Однако мы здесь приведем новое доказательство, не опирающееся на неравенство (5.9.5). Если $f\in W^r$, то справедливо равенство (5.9.3), из которого имеем

$$R_{r,n}(f,x)=\frac{(-1)^r(1-x^2)^{r/2-1/4}}{2^{r+1}}\int_{-1}^{1}f^{(r)}(t)Q_{r,n}(x,t)dt, \tag{5.10.62}$$

где

$$Q_{r,n}(x,t)=(1-x^2)^{r/2+1/4}\sum_{n+r+1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^{[r]}}P_{k-r}^{r,r}(x)P_k(t). \tag{5.10.63}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$R_{r,n}(W^r)\geqslant\sup_{f\in W^r}|R_{r,n}(f,x)|=\frac{(1-x^2)^{r/2-1/4}}{2^{r+1}}\int_{-1}^{1}|Q_{r,n}(x,t)|dt. \tag{5.10.64}$$

Заметим, что для частичных сумм

$$Q_{r,n,m}(x,t) = (1-x^2)^{r/2+1/4} \sum_{n+r+1}^{m} \frac{2k+1}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) P_k(t)$$

ряда (5.10.63) функция

$$G_x(t) = (1-x^2)^{r/2+1/4} \sum_{n+r+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{[r]}} |P_{k-r}^{r,r}(x) P_k(t)|$$

является мажорантой. Но при каждом $x \in [-1,1]$ функция $G_x(t)$ интегрируема на $(-1,1)$. В самом деле, в силу неравенства Бесселя и весовой оценки (5.1.11)

$$\int\limits_{-1}^{1} G_x^2(t)dt \leqslant \sum_{n+r+1}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{(k^{[r]})^2} (1-x^2)^{r+1/2} (P_{k-r}^{r,r}(x))^2 \leqslant c(r) \sum_{k=n+r+1}^{\infty} k^{-2r} < \infty.$$

Следовательно, в правой части (5.10.62) можно осуществить почленное интегрирование, которое в силу (5.9.3) показывает справедливость этого равенства. В правой части равенства (5.10.63) произведем преобразование Абеля, тогда

$$Q_{r,n}(x,t) = -(1-x^2)^{r/2+1/4} \frac{\mathcal{K}_{r,n+r}(x,t)}{(n+r+1)^{[r]}} + (1-x^2)^{r/2+1/4} \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^{[r]}} - \frac{1}{(m+1)^{[r]}} \right] \mathcal{K}_m(x,t),$$

где функция $\mathcal{K}_m(x,t)$ определена с помощью равенства (5.10.24). Но, поскольку

$$\frac{1}{m^{[r]}} - \frac{1}{(m+1)^{[r]}} = \frac{r}{(m+1)m^{[r]}},$$

то предыдущее равенство принимает вид

$$Q_{r,n}(x,t) = -(1-x^2)^{r/2+1/4} \frac{\mathcal{K}_{r,n+r}(x,t)}{(n+r+1)^{[r]}} + (1-x^2)^{r/2+1/4} \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \frac{r}{(m+1)m^{[r]}} \mathcal{K}_m(x,t). \tag{5.10.65}$$

Если $f \in W^r$, то $|f^{(r)}| \leqslant 1$, поэтому из (5.10.62) имеем

$$|R_{r,n}(f,x)| \leqslant \frac{(-1)^r (1-x^2)^{r/2-1/4}}{2^{r+1}} \int_{-1}^{1} |Q_{r,n}(x,t)|dt, \tag{5.10.66}$$

а из (5.10.65) следует, что

$$\int_{-1}^{1} |Q_{r,n}(x,t)|dt \leqslant (1-x^2)^{r/2+1/4} \frac{\int_{-1}^{1} |\mathcal{K}_{r,n+r}(x,t)|dt}{(n+r+1)^{[r]}} +$$

$$(1-x^2)^{r/2+1/4} \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \frac{r}{(m+1)m^{[r]}} \int_{-1}^{1} |\mathcal{K}_m(x,t)|dt. \tag{5.10.67}$$

Из (5.10.67), воспользовавшись леммой 5.10.6, находим

$$\int_{-1}^{1} |Q_{r,n}(x,t)|dt \leqslant c(r) \left[\frac{\ln(n+1)}{n^r} + \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \frac{\ln(m+1)}{m^{r+1}} \right] \leqslant c(r) \frac{\ln(n+1)}{n^r}.$$

Сопоставляя эту оценку с (5.10.66), убеждаемся в справедливости верхней оценки (5.10.61).

Перейдем к доказательству нижней из оценок (5.10.61). Пусть $0<\varepsilon<\delta<1$, $-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$. Снова рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^{1}|Q_{r,n}(x,t)|dt=\int_{-1}^{-1+\varepsilon}+\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}+\int_{1-\varepsilon}^{1}. \tag{5.10.68}$$

Из (4.68) имеем

$$\int_{-1}^{1}|Q_{r,n}(x,t)|dt>\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}|Q_{r,n}(x,t)|dt=E. \tag{5.10.69}$$

Займемся интегралом E. Имеем

$$E=(1-x^2)^{r/2+1/4}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left|\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^{[r]}}P_{k-r}^{r,r}(x)P_k(t)\right|. \tag{5.10.70}$$

Положим $x=\cos\varphi$, $t=\cos\theta$ и воспользуемся асимптотической формулой (2.14) и равенством

$$\frac{2k+1}{\sqrt{k(k-r)}k^{[r]}}=\frac{2}{(k+1)^{[r]}}+O((k+1)^{-r-1}),$$

тогда

$$E>c_1(r,\varepsilon,\delta)\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi-\varphi_\varepsilon}\left|\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\cos\left[(k+1/2)\varphi-(r+1/2)\frac{\pi}{2}\right]\cos\left[(k+1/2)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(k+1)^{[r]}}\right|d\theta$$

$$-c(r,\varepsilon,\delta)\sum_{k=n+r+1}^{\infty}k^{-r-1}, \tag{5.10.71}$$

где $\varphi_\varepsilon=\arccos(1-\varepsilon)$. Так как

$$\cos\left[(k+\frac{1}{2})\varphi-(r+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right]\cos\left[(k+\frac{1}{2})\theta-\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\left[(k+\frac{1}{2})(\varphi+\theta)-\frac{(r+1)\pi}{2}\right]+\cos\left[(k+\frac{1}{2})(\varphi-\theta)-\frac{r\pi}{2}\right]\right),$$

то из (5.10.71) имеем

$$E\geqslant c_1(r,\varepsilon,\delta)\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi-\varphi_\varepsilon}\left|\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\cos\left[(k+\frac{1}{2})(\varphi+\theta)-\frac{(r+1)\pi}{2}\right]}{(k+1)^{[r]}}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\cos\left[(k+\frac{1}{2})(\varphi-\theta)-\frac{r\pi}{2}\right]}{(k+1)^{[r]}}\right|d\theta-\frac{c_2(r,\varepsilon,\delta)}{n^r}. \tag{5.10.72}$$

В случае четного r (5.10.72) принимает вид

$$E\geqslant c_1(r,\varepsilon,\delta)\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi-\varphi_\varepsilon}\left|\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\frac{\varphi+\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}}+\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi-\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}}\right|d\theta-\frac{c_2(r,\varepsilon,\delta)}{n^r}, \tag{5.10.73}$$

а если r нечетно, то

$$E \geqslant c_1(r,\varepsilon,\delta)\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi-\varphi_\varepsilon}\left|\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi+\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}}+\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\frac{\varphi-\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}}\right|d\theta-\frac{c_2(r,\varepsilon,\delta)}{n^r}. \tag{5.10.74}$$

Оценим снизу интегралы, фигурирующие (5.10.73) и (5.10.74). Для этого представим их по схеме $\int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi-\varphi_\varepsilon}=\int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi-\varphi_\varepsilon}$. Для определенности мы предположим, что $0\leqslant x\leqslant\delta$ и в этом случае рассмотрим интеграл

$$A=\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2}\left|\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi+\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}}+\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\frac{\varphi-\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}}\right|d\theta. \tag{5.10.75}$$

Положим

$$U_l(\eta)=\sum_{j=0}^{l}\cos(2j+1)\eta,\quad V_l(\eta)=\sum_{j=0}^{l}\sin(2j+1)\eta, \tag{5.10.76}$$

$$\bar U_m(\eta)=\sum_{l=0}^{m}U_l,\quad \bar V_m(\eta)=\sum_{l=0}^{m}V_l(\eta). \tag{5.10.77}$$

Тогда из (5.10.74), применяя дважды преобразование Абеля , имеем

$$\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\eta}{(k+1)^{[r]}}=-\frac{V_{n+r}(\eta)}{(n+r+1)^{[r]}}-\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+2)^{[r]}}-\frac{1}{(k+1)^{[r]}}\right)V_k(\eta)=$$
$$-\frac{V_{n+r}(\eta)}{(n+r+1)^{[r]}}+\left(\frac{1}{(n+r+3)^{[r]}}-\frac{1}{(n+r+2)^{[r]}}\right)\bar V_{n+r}(\eta)+$$
$$\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+3)^{[r]}}-\frac{2}{(k+2)^{[r]}}+\frac{1}{(k+1)^{[r]}}\right)\bar V_k(\eta), \tag{5.10.78}$$

$$\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\eta}{(k+1)^{[r]}}=-\frac{U_{n+r}(\eta)}{(n+r+1)^{[r]}}-\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+2)^{[r]}}-\frac{1}{(k+1)^{[r]}}\right)U_k(\eta)=$$
$$-\frac{U_{n+r}(\eta)}{(n+r+1)^{[r]}}+\left(\frac{1}{(n+r+3)^{[r]}}-\frac{1}{(n+r+2)^{[r]}}\right)\bar U_{n+r}(\eta)+$$
$$\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+3)^{[r]}}-\frac{2}{(k+2)^{[r]}}+\frac{1}{(k+1)^{[r]}}\right)\bar U_k(\eta), \tag{5.10.79}$$

Далее, нетрудно показать, что

$$U_l(\eta)=\frac{\sin(2l+1)\eta}{2\sin\eta},\quad \bar U_m(\eta)=\frac{\sin((m+1)\eta)\sin((m+2)\eta)}{2\sin^2\eta}, \tag{5.10.80}$$

$$V_l(\eta)=\frac{\sin^2(l+1)\eta}{\sin\eta},\quad \bar V_m(\eta)=\sum_{l=0}^{m}\frac{\sin^2(l+1)\eta}{\sin\eta} \tag{5.10.81}$$

Отсюда, в свою очередь, заметим, что

$$\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2}\left|U_{n+r}\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)\right|d\theta=\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(n+r+1)(\varphi-\theta)}{2\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\right|d\theta=\int\limits_{\varphi_\varepsilon-\varphi}^{\pi/2-\varphi}\left|\frac{\sin(n+r+1)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right|d\theta>$$

$$\int\limits_{\varphi_\varepsilon-\varphi_\delta}^{0}\left|\frac{\sin(n+r+1)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right|d\theta=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_\varepsilon-\varphi_\delta}^{\varphi_\delta-\varphi_\varepsilon}\left|\frac{\sin(n+r+1)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right|d\theta=$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+r+1)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right|d\theta-\int\limits_{\varphi_\delta-\varphi_\varepsilon}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+r+1)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right|d\theta\geqslant\frac{1}{\pi}\ln(n+1)+c(\varepsilon,\delta),\quad(5.10.82)$$

$$\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2}\left|\bar{U}_m\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)\right|d\theta=\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2}\left|\frac{\sin((m+1)\frac{\varphi-\theta}{2})\sin((m+2)\frac{\varphi-\theta}{2})}{2\sin^2\frac{\varphi-\theta}{2}}\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2}\left(\frac{\sin((m+1)\frac{\varphi-\theta}{2})}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)^2d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2}\left(\frac{\sin((m+2)\frac{\varphi-\theta}{2})}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)^2d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant m+2,\quad(5.10.83)$$

$$\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2}V_l\left(\frac{\varphi+\theta}{2}\right)d\theta=\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2}\frac{\sin^2(l+1)\frac{\varphi+\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}d\theta=\int\limits_{\varphi_\varepsilon+\varphi}^{\pi/2+\varphi}\frac{\sin^2(l+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta=\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi}\frac{\sin^2(l+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$<\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta<\frac{\pi}{\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}}\leqslant c(\varepsilon),\quad(5.10.84)$$

$$\int\limits_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2}\bar{V}_m\left(\frac{\varphi+\theta}{2}\right)d\theta\leqslant(m+1)\frac{\pi}{\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}}.\quad(5.10.85)$$

Сопоставляя (5.10.75), (5.10.78), (5.10.79), (5.10.82)–(5.10.85), находим

$$A\geqslant\frac{\ln(n+1)}{\pi(n+r+1)^{[r]}}-\frac{c(\varepsilon,\delta)}{n^r}.\quad(5.10.86)$$

Если мы теперь сравним (5.10.74), (5.10.75) и (5.10.86), то для нечетного r получаем оценку

$$E\geqslant c(r,\varepsilon,\delta)\frac{\ln(n+1)}{n^r}.\quad(5.10.87)$$

Совершенно аналогично из (5.10.73) выводится оценка (5.10.87) для четного r. Нижняя из оценок (5.10.61) вытекает из (5.10.64),

Глава 6. Смешанные ряды по полиномам Лагерра

Конструкция смешанных рядов по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$ во многом сходна с конструкцией смешанных рядов для полиномов Якоби. Мы здесь также обратим особое внимание на случай $\alpha=0$. В этом случае смешанный ряд по полиномам Лагерра смотрится особенно элегантно. Мы также каснемся некоторых вопросов, связанных с аппроксимативными свойствами смешанных рядов по полиномам Лагерра.

§ 6.1. Сводка формул и дальнейшие свойства полиномов Лагерра

Для удобства ссылок мы соберем здесь ряд свойств полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ и докажем некоторые вспомогательные результаты. Мы определим их, как и раньше, с помощью формулы Родрига

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha}), \tag{6.1.1}$$

где α – произвольное действительное число. Если $\alpha > -1$, то полиномы Лагерра образуют ортогональную систему на $[0,\infty)$ с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, т.е.

$$\int\limits_0^\infty \rho(x) L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \delta_{nm} h_n^\alpha, \tag{6.1.2}$$

где

$$h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1). \tag{6.1.3}$$

Следующие свойства полиномов Лагерра хорошо известны [2]: *явное выражение*

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^\nu}{\nu!}, \tag{6.1.4}$$

в частности,

$$L_n^\alpha(0) = \binom{n+\alpha}{n}; \tag{6.1.5}$$

производная

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \tag{6.1.6}$$

и, как следствие,

$$\frac{d^r}{dx^r} L_{k+r}^{\alpha-r}(x) = (-1)^r L_k^\alpha(x); \tag{6.1.7}$$

рекуррентная формула

$$n L_n^\alpha(x) = (-x+2n+\alpha-1) L_{n-1}^\alpha(x) - (n+\alpha-1) L_{n-2}^\alpha(x), \tag{6.1.8}$$

где $L_{-1}^\alpha(x) = 0$, $L_0^\alpha(x) = 1$, $L_1^\alpha(x) = -x+\alpha+1$ и (как следствие) *формула Кристоффеля-Дарбу*

$$\Gamma(\alpha+1)\mathcal{K}_n^\alpha(x,y) = \sum_{\nu=0}^n \left\{\binom{\nu+\alpha}{\nu}\right\}^{-1} L_\nu^\alpha(x) L_\nu^\alpha(y) =$$

$$(n+1)\left\{\binom{n+\alpha}{n}\right\}^{-1} \frac{L_n^\alpha(x) L_{n+1}^\alpha(y) - L_n^\alpha(y) L_{n+1}^\alpha(x)}{x-y}, \tag{6.1.9}$$

в частности,

$$x \sum_{\nu=0}^n L_\nu^\alpha(x) = (n+\alpha+1) L_n^\alpha(x) - (n+1) L_{n+1}^\alpha(x); \tag{6.1.10}$$

равенства

$$L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = L_n^\alpha(x), \quad \sum_{k=0}^n L_k^\alpha = L_n^{\alpha+1}(x), \tag{6.1.11}$$

$$(n+\alpha) L_n^{\alpha-1}(x) = \alpha L_n^\alpha(x) - x L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{6.1.12}$$

$$L_k^{-l}(x) = \frac{(-x)^l}{k^{[l]}} L_{k-l}^l(x), \tag{6.1.13}$$

$$L_n^a(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(a-\alpha)_\nu}{\nu!} L_{n-\nu}^\alpha(x) \tag{6.1.14}$$

весовая оценка

$$|L_n^\alpha(x)| \leqslant c(\alpha) A_n^\alpha(x), \quad \alpha > -1, \tag{6.1.15}$$

где $(s = s(n,\alpha) = 4n + 2\alpha + 2)$

$$A_n^\alpha(x) = \begin{cases} e^{x/2} s^\alpha, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1/s, \\ e^{x/2} s^{\alpha/2-1/4} x^{-\alpha/2-1/4}, & \text{если } 1/s < x \leqslant s/2, \\ e^{x/2} \left[s \left(s^{1/3} + |x-s| \right) \right]^{-1/4}, & \text{если } s/2 < x \leqslant 3s/2, \\ e^{x/4}, & \text{если } 3s/2 < x. \end{cases} \tag{6.1.16}$$

Для нормированных полиномов Лагерра

$$\hat{L}_n^\alpha(x) = \left\{ \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1) \right\}^{-1/2} L_n^\alpha(x) \tag{6.1.17}$$

имеет место следующая оценка

$$e^{-\frac{x}{2}} \left| \hat{L}_{n+1}^\alpha(x) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(x) \right| \leqslant$$

$$c(\alpha) \begin{cases} s^{\alpha/2-1}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1/s, \\ s^{-3/4} x^{-\alpha/2+1/4}, & \text{если } 1/s < x \leqslant s/2, \\ x^{-\alpha/2} s^{-3/4} \left(s^{1/3} + |x-s| \right)^{1/4}, & \text{если } s/2 < x \leqslant 3s/2, \\ e^{-x/4}, & \text{если } 3s/2 < x. \end{cases} \tag{6.1.18}$$

§ 6.2. Немного о рядах Фурье-Лагерра

2.1. Суммы Фурье-Лагерра. Пусть $\alpha > -1$, $\rho = \rho(x,\alpha) = x^\alpha e^{-x}$, $p > 1$, $\mathcal{L}_{p,\rho}$ – пространство измеримых функций, определенных на полуоси $[0,\infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\rho}} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \rho(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть $f \in \mathcal{L}_{p,\rho}$. Тогда для f мы можем определить коэффициенты Фурье-Лагерра

$$f_k^\alpha = \frac{1}{h_k^\alpha} \int_0^\infty \rho(t) f(t) L_k^\alpha(t) dt \tag{6.2.1}$$

и ряд Фурье-Лагерра

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha L_k^\alpha(x). \tag{6.2.2}$$

Пусть

$$S_n^\alpha(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^\alpha L_k^\alpha(x) \tag{6.2.3}$$

частичная сумма ряда (6.2.2) порядка n. Будем рассматривать $S_n^\alpha(f) = S_n^\alpha(f,x)$ как аппарат приближения непрерывных функций $f = f(x)$, принадлежащих классу $\mathcal{L}_{p,\rho}$. Обозначим через $C_0(0,\infty)$ пространство непрерывных функций, заданных на $[0,\infty)$ и таких, что

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}|f(x)| = 0. \tag{6.2.4}$$

Ясно, что $C_0(0,\infty) \subset \mathcal{L}_{p,\rho}$ для произвольного $1 < p < 2$. Поэтому, если $f \in C_0(0,\infty)$, то мы можем рассмотреть ряд Фурье-Лагерра (6.2.2) и частичную сумму (6.2.3). Положим

$$\|f\|_{C_0(0,\infty)} = \sup_{0\leqslant x<\infty} e^{-x/2}|f(x)|. \tag{6.2.5}$$

Обозначим через $p_n(f) = p_n(f,x)$ алгебраический полином степени n наилучшего приближения к функции $f = f(x)$ в метрике (6.2.5), $E_n(f) = \|f - p_n(f)\|_{C_0(0,\infty)}$. Тогда

$$f(x) - S_n^\alpha(f,x) = f(x) - p_n(f,x) + S_n^\alpha(p_n(f) - f, x).$$

Отсюда

$$e^{-x/2}|f(x) - S_n^\alpha(f,x)| \leqslant e^{-x/2}|f(x) - p_n(f,x)| +$$
$$e^{-x/2}|S_n^\alpha(p_n(f) - f, x)| \leqslant E_n(f)(1 + \lambda_n^\alpha(x)), \tag{6.2.6}$$

где

$$\lambda_n^\alpha(x) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-(x+t)/2}\left|\sum_{k=0}^n \frac{L_k^\alpha(x)L_k^\alpha(t)}{h_k^\alpha}\right| dt \tag{6.2.7}$$

функция Лебега для сумм Фурье-Лагерра $S_n^\alpha(f) = S_n^\alpha(f,x)$, в частности, если $x = 0$, то в силу (6.1.11)

$$\lambda_n^\alpha(0) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t/2}|L_n^{\alpha+1}(t)|dt. \tag{6.2.8}$$

Поведение этой величины при $n \to \infty$ играет решающую роль в задаче об аппроксимативных свойствах сумм Фурье-Лагерра $S_n^\alpha(f,x)$ в точке $x = 0$. Мы раассмотрим этот вопрос при $\alpha > -1/2$.

2.2. О росте констант Лебега $\lambda_n^\alpha(0)$. Имеет место следующая

Лемма 6.2.1. *Пусть $\alpha > -1/2$, тогда*

$$\lambda_n^\alpha(0) \asymp n^{\alpha+1/2} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

другими словами, найдутся два таких положительных числа $c_1(\alpha)$ и $c_2(\alpha)$, что

$$c_1(\alpha) \leqslant \lambda_n^\alpha(0) n^{-\alpha-1/2} \leqslant c_2(\alpha). \tag{6.2.9}$$

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости верхней оценки (6.2.9). С этой целью обратимся к неравенству (6.1.15). Тогда из (6.2.8) имеем

$$\lambda_n^\alpha(0) \leqslant c(\alpha) \int_0^\infty t^\alpha e^{-t/2} A_n^{\alpha+1}(t)dt. \tag{6.2.10}$$

Разобьем интеграл (6.2.10) на части по следующей схеме

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t/2} A_n^{\alpha+1}(t)dt = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5, \tag{6.2.11}$$

где в силу (6.1.16)

$$\sigma_1 = \int\limits_0^{1/s} t^\alpha e^{-t/2} A_n^{\alpha+1}(t)dt \leqslant c(\alpha), \tag{6.2.12}$$

$$\sigma_2 = \int\limits_{1/s}^{s/2} t^\alpha e^{-t/2} A_n^{\alpha+1}(t)dt \leqslant c(\alpha)s^{\alpha+1/2}, \tag{6.2.13}$$

$$\sigma_3 = \int\limits_{s/2}^{s-s^{1/3}} t^\alpha e^{-t/2} A_n^{\alpha+1}(t)dt \leqslant c(\alpha)s^{\alpha+1/2}, \tag{6.2.14}$$

$$\sigma_4 = \int\limits_{s-s^{1/3}}^{s+s^{1/3}} t^\alpha e^{-t/2} A_n^{\alpha+1}(t)dt \leqslant c(\alpha)s^{\alpha}, \tag{6.2.15}$$

$$\sigma_5 = \int\limits_{s+s^{1/3}}^{3s/2} t^\alpha e^{-t/2} A_n^{\alpha+1}(t)dt \leqslant c(\alpha)s^{\alpha+1/2}, \tag{6.2.16}$$

$$\sigma_6 = \int\limits_{3s/2}^{\infty} t^\alpha e^{-t/2} A_n^{\alpha+1}(t)dt \leqslant c(\alpha)s^{\alpha}e^{-\frac{1}{4}s}, \tag{6.2.17}$$

Сопоставляя (6.2.11)-(6.2.17) с (6.2.10), приходим приходим к верхней оценке (6.2.9). Чтобы доказать нижнюю оценку (6.2.9) воспользуемся следующей асимптотической формулой для полиномов Лагерра

$$e^{-\frac{t}{2}} L_n^{\alpha+1}(t) = (-1)^n (\pi \sin\varphi)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{4}} \times$$
$$\left\{ \sin\left[\left(n + \frac{\alpha+2}{2}\right)(\sin 2\varphi - 2\varphi) + \frac{3\pi}{4}\right] + (nx)^{-\frac{1}{2}} O(1) \right\}, \tag{6.2.18}$$

где $t = (4n+2\alpha+4)(\cos\varphi)^2$, $0 < \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon n^{-\frac{1}{2}}$. Поскольку для $s_1 = 4n + 2\alpha + 4$

$$\lambda_n^\alpha(0) = \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t/2} |L_n^{\alpha+1}(t)| dt > \int\limits_{s_1 \cos^2(\frac{\pi}{2} - \varepsilon n^{-\frac{1}{2}})}^{s_1 \cos^2(\varepsilon)} t^\alpha e^{-t/2} |L_n^{\alpha+1}(t)| dt, \tag{6.2.19}$$

то подставляя в (6.2.19) вместо $e^{-t/2} L_n^{\alpha+1}(t)$ свое значение из (6.2.18), убеждаемся в справедливости нижней оценки (6.2.9). Лемма 6.2.1 доказана. Сопоставляя лемму 2.2.1 с оценкой (6.2.6), мы имеем $\alpha > -1/2$

$$|f(0) - S_n^\alpha(f,0)| \leqslant c(\alpha) n^{\alpha+1/2} E_n(f). \tag{6.2.20}$$

Если $\alpha > -1/2$, то множитель $n^{\alpha+1/2}$ в правой части (6.2.20) неограниченно растет вместе с n. Возникает вопрос о точности по порядку при $n \to \infty$ этого множителя в неравенстве (6.2.20). Другими словами, возникает вопрос о существовании такой функции $f \in C_0(0,\infty)$, для которой оценка не улучшаема в том смысле, что для бесконечной последовательности номеров $n_1 < n_2 < \ldots$ имеет место противоположное неравенство

$$\frac{|f(0) - S_{n_k}^\alpha(f,0)|}{E_{n_k}(f)} \geqslant c(\alpha) n_k^{\alpha+1/2}. \tag{6.2.21}$$

Ниже мы получим утвердительный ответ на поставленный вопрос при $-1 < \alpha < 1/2$. Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 6.2.2. *Пусть* $\alpha > -1$,

$$f^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{L}_{4k}^\alpha(x) - \hat{L}_{4k+2}^\alpha(x)}{2^k}, \tag{6.2.22}$$

где $\hat{L}_n^\alpha(x)$ *– нормированный полином Лагерра, определенный равенством (6.1.17). Тогда*

$$E_n(f^\alpha) \leqslant c(\alpha) 2^{-n} \left(n^{\frac{\alpha}{2}-1} + n^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \right). \tag{6.2.23}$$

Доказательство. Положим

$$p_{4n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\hat{L}_{4k}^\alpha(x) - \hat{L}_{4k+2}^\alpha(x)}{2^k},$$

тогда

$$e^{-\frac{x}{2}} |f^\alpha(x) - p_{4n+2}(x)| = e^{-\frac{x}{2}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\hat{L}_{4k}^\alpha(x) - \hat{L}_{4k+2}^\alpha(x)}{2^k} \right| \leqslant$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}} |\hat{L}_{4k}^\alpha(x) - \hat{L}_{4k+2}^\alpha(x)|}{2^k}. \tag{6.2.24}$$

Воспользуемся оценкой (6.1.18), тогда при $x \geqslant 0$

$$e^{-\frac{x}{2}} |\hat{L}_{4k}^\alpha(x) - \hat{L}_{4k+2}^\alpha(x)| \leqslant c(\alpha) \left[k^{\frac{\alpha}{2}-1} + k^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \right],$$

поэтому

$$\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}} |\hat{L}_{4k}^\alpha(x) - \hat{L}_{4k+2}^\alpha(x)|}{2^k} \leqslant c(\alpha) 2^{-2n} \left[n^{\frac{\alpha}{2}-1} + n^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \right]. \tag{6.2.25}$$

Из (6.2.24) и (6.2.25) имеем

$$e^{-\frac{x}{2}} |f^\alpha(x) - p_{4n+2}(x)| \leqslant c(\alpha) 2^{-n} \left[n^{\frac{\alpha}{2}-1} + n^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \right] + \Sigma(x), \tag{6.2.26}$$

где

$$\Sigma(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{e^{-\frac{x}{2}} |\hat{L}_{4k}^\alpha(x) - \hat{L}_{4k+2}^\alpha(x)|}{2^k}. \tag{6.2.27}$$

Воспользуемся снова оценкой (6.1.18), из которой выводим $(2n+1 \leqslant k \leqslant 2n)$

$$e^{-\frac{x}{2}} |\hat{L}_{4k}^\alpha(x) - \hat{L}_{4k+2}^\alpha(x)| \leqslant c(\alpha) \begin{cases} n^{\alpha/2-1}, & 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \\ n^{-3/4} x^{-\alpha/2+1/4}, & 1/n \leqslant x \leqslant 48n, \\ e^{-x/4}, & 48n \leqslant x. \end{cases} \tag{6.2.28}$$

Из (6.2.27) и (6.2.28) находим

$$|\Sigma(x)| \leqslant \frac{c(\alpha)}{2^n} \begin{cases} n^{\alpha/2-1}, & 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \\ n^{-3/4} x^{-\alpha/2+1/4}, & 1/n \leqslant x \leqslant 48n, \\ e^{-x/4}, & 48n \leqslant x, \end{cases}$$

следовательно,

$$|\Sigma(x)| \leqslant \frac{c(\alpha)}{2^n}\left[n^{\frac{\alpha}{2}-1} + n^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\right]. \tag{6.2.29}$$

Сопоставляя (6.2.26) и (6.2.29), приходим к оценке (6.2.23). Лемма 6.2.2 доказана.

Лемма 6.2.3. *Имеет место оценка*

$$|f^\alpha(0) - S^\alpha_{4n}(f^\alpha, 0)| \geqslant c(\alpha)\frac{n^{\alpha/2}}{2^n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (6.2.22) имеем

$$f^\alpha(0) - S^\alpha_{4n}(f^\alpha, 0) = -\frac{1}{2^n}\hat{L}^\alpha_{4n+2}(0) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\hat{L}^\alpha_{4k}(0) - \hat{L}^\alpha_{4k+2}(0)}{2^k}. \tag{6.2.30}$$

Поскольку, в силу (6.1.8)

$$|\hat{L}^\alpha_{4k}(0) - \hat{L}^\alpha_{4k+2}(0)| \leqslant c(\alpha)k^{\alpha/2-1},$$

то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\hat{L}^\alpha_{4k}(0) - \hat{L}^\alpha_{4k+2}(0)}{2^k}\right| \leqslant c(\alpha)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^{\alpha/2-1}}{2^k} \leqslant c(\alpha)\frac{n^{\alpha/2-1}}{2^n}. \tag{6.2.31}$$

Кроме того

$$|\hat{L}^\alpha_{4n+2}(0)| \geqslant c(\alpha)n^{\alpha/2}. \tag{6.2.32}$$

Из (6.2.30)–(6.2.32) имеем

$$|f^\alpha(0) - S^\alpha_{4n}(f^\alpha, 0)| \geqslant c(\alpha)\frac{n^{\alpha/2}}{2^n}.$$

Лемма 6.2.3 доказана. Из лемм 6.2.2 и 6.2.3 непосредственно вытекает следующая

Лемма 6.2.4. *Пусть* $-1/2 < \alpha < 1/2$. *Тогда имеет место оценка*

$$\frac{|f^\alpha(0) - S^\alpha_{4n}(f^\alpha, 0)|}{E_{4n}(f^\alpha)} \geqslant c(\alpha)(4n)^{\alpha+1/2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 6.2.4 дает утвердительный ответ на поставленный выше вопрос о существовании функции $f \in C_0(0,\infty)$, *для которой имеет место оценка (6.2.21) при* $n_k = 4k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Лемма 6.2.4 показывает, что в метрике пространства $C_0(0,\infty)$ суммы Фурье-Лагерра $S^\alpha_n(f^\alpha, x)$ при $\alpha > -1/2$ приближают функцию f^α $n^{\alpha+1/2}$ раз хуже, чем полином наилучшего приближения $p_n(f)$. Этот отрицательный факт является следствием того, что константа Лебега $\lambda^\alpha_n(0)$ для сумм Фурье-Лагерра $S^\alpha_n(f, x)$ в $C_0(0,\infty)$ неограниченно растет вместе с n по порядку как $n^{\alpha+1/2}$ (см. лемму 6.2.2). Другой существенный недостаток сумм Фурье-Лагерра $S^\alpha_n(f, x)$ заключается в том, что они не могут обеспечить хорошего одновременного приближения функции $f(x)$ и ее нескольких производных в метрике пространства $C_0(0,\infty)$. В самом деле, если, например, f r–раз непрерывно дифференцируема на $[0,\infty)$ и $f^{(r)} \in L_{2,\rho}$, то

$$(S^\alpha_n(f, x))^{(r)} = S^{\alpha+r}_{n-r}(f^{(r)}, x)$$

и, как было показано выше (лемма 6.2.4)), уже при $\alpha+r>-1/2$ оператор $S_{n-r}^{\alpha+r}(f^{(r)},x)$, вообще говоря, не может обеспечить хорошего приближения производной $f^{(r)}(x)$ в точке $x=0$. Мы можем продемонстрировать это на следующем простом примере. Хорошо известно [37], что

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L_k^{\alpha}(x)}{2^{k+\alpha+1}},\quad 0\leqslant x<\infty. \tag{6.2.33}$$

m-кратное дифференцирование ряда (6.2.33) дает в силу (6.1.6)

$$(e^{-x})^{(m)}=(-1)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L_k^{\alpha+m}(x)}{2^{k+m+\alpha+1}},\quad 0\leqslant x<\infty. \tag{6.2.34}$$

Отсюда для функции $f(x)=e^{-x}$ имеем

$$(S_n^{\alpha}(f,x))^{(m)}=(-1)^m\sum_{k=0}^{n-m}\frac{L_k^{\alpha+m}(x)}{2^{k+m+\alpha+1}}. \tag{6.2.35}$$

Из (6.2.34) и (6.2.35) для $x=0$ в силу (6.1.5) получаем

$$f^{(m)}(0)-(S_n^{\alpha}(f,0))^{(m)}=(-1)^m\sum_{k=n-m+1}^{\infty}\frac{\binom{k+m+\alpha}{k}}{2^{k+m+\alpha+1}}. \tag{6.2.36}$$

Стало быть найдется постоянная $c=c(m,\alpha)>0$, для которой

$$|f^{(m)}(0)-(S_n^{\alpha}(f,0))^{(m)}|\geqslant c\frac{n^{m+\alpha}}{2^n}. \tag{6.2.37}$$

С другой стороны, поскольку $f^{(m)}(x)=(-1)^m e^{-x}$, то из равенства (6.2.33) выводим

$$|f^{(m)}(0)-(-1)^m S_{n-m}^{\alpha}(f,0)|=\sum_{k=n-m+1}^{\infty}\frac{L_k^{\alpha}(0)}{2^{k+\alpha+1}}=$$

$$\sum_{k=n-m+1}^{\infty}\frac{\binom{k+\alpha}{k}}{2^{k+\alpha+1}}\leqslant c(\alpha)\frac{n^{\alpha}}{2^n}. \tag{6.2.38}$$

Сопоставляя (6.2.37) и (6.2.38), мы замечаем, что производная $(S_n^{\alpha}(f,x))^{(m)}$ приближает $f^{(m)}(x)$ в точке $x=0$ n^m раз хуже, чем некоторый полином (а именно $(-1)^m S_{n-m}^{\alpha}(f,x)$) той же степени, что и $(S_n^{\alpha}(f,x))^{(m)}$. Таким образом, ситуация здесь вполне аналогична той, которая отмечалась в главе 1 в связи с приближением функций $f=f(x)$, заданных на $[-1,1]$ суммами Фурье-Якоби. Возникает идея о построении смешанных рядов по полиномам Лагерра, по аналогии с тем, как это было сделано для полиномов Якоби.

§ 6.3. Смешанные ряды по полиномам Лагерра

Перейдем к построению смешанных рядов по полиномам Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$ для произвольного α, удовлетворяющего условию $-1<\alpha<1$. Через $W^r_{\mathcal{L}_{p,\rho}}(0,\infty)$ обозначим подкласс функций $f=f(x)$ из $\mathcal{L}_{p,\rho}$, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a,b]\subset[0,\infty)$, а

$f^{(r)} \in \mathcal{L}_{p,\rho}$. Тогда мы можем рассмотреть коэффициенты Фурье-Лагерра функции $f^{(r)}(x)$ по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$:

$$f_{r,k}^\alpha = \frac{1}{h_k^\alpha}\int\limits_0^\infty \rho(t) f^{(r)}(t) L_k^\alpha(t)dt \tag{6.3.1}$$

Соответствующий ряд Фурье-Лагерра функции $f^{(r)}$ имеет вид

$$f^{(r)} \sim \sum_{k=0}^\infty f_{r,k}^\alpha L_k^\alpha(x). \tag{6.3.2}$$

Рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x) = Q_{r-1}(f,x) + \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt, \tag{6.3.3}$$

где

$$Q_{r-1}(f,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(r)}(0)}{\nu!}(1+x)^\nu$$

полином Тейлора и выполним формальную подстановку в (6.3.3) вместо $f^{(r)}(t)$ ряда Фурье-Лагерра (6.3.2). Если эта операция законна, то мы придем к следующему равенству

$$f(x) = Q_{r-1}(f,x) + \frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=0}^\infty f_{r,k}^\alpha \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} L_k^\alpha(t)dt. \tag{6.3.4}$$

Воспользуемся равенством (6.1.7), тогда

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} L_k^\alpha(t)dt = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}\frac{d^r}{dt^r} L_{k+r}^{\alpha-r}(t)dt =$$

$$(-1)^r L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - (-1)^r \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{x^\nu}{\nu!}\{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)}. \tag{6.3.5}$$

Далее

$$\{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}^{(\nu)} = (-1)^\nu L_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(t), \tag{6.3.6}$$

а в силу (6.1.5)

$$L_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(0) = \binom{k+\alpha}{k+r-\nu} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \tag{6.3.7}$$

Сопоставляя (6.3.6) и (6.3.7), имеем

$$\{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)} = (-1)^\nu \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \tag{6.3.8}$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} L_k^\alpha(t)dt =$$

$$(-1)^r L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - (-1)^r \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)(-x)^\nu}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!\nu!}. \tag{6.3.9}$$

Из (6.3.4) и (6.3.9) получаем

$$f(x) = E_{r-1}^\alpha(f,x) + J_r^\alpha(f,x), \tag{6.3.10}$$

где

$$E_{r-1}^\alpha(f,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \left[f^{(\nu)}(0) - \frac{(-1)^{r-\nu}}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} f_{r,k}^\alpha \right] \frac{x^\nu}{\nu!}, \tag{6.3.11}$$

$$J_r^\alpha(f,x) = (-1)^r \sum_{k=0}^\infty f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x). \tag{6.3.12}$$

Ряд $J_r^\alpha(f,x)$ будем называть *смешанным* рядом по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$, этим же термином мы обозначим правую часть равенства (6.3.10). Смешанный ряд содержит коэффициенты $f_{r,k}^\alpha$ $(k=0,1,\ldots)$ r-той производной функции $f(x)$ по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$, умноженные на полиномы Лагерра вида $L_{k+r}^{\alpha-r}(x)$. В этом заключается принципиальное отличие смешанного ряда (6.3.12) по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$ от ряда Фурье (6.2.1) по этим же полиномам. Перейдем к рассмотрению достаточных условий на функцию $f(x)$, обеспечивающих сходимость смешанных рядов $L_{k+r}^{\alpha-r}(x)$ и справедливость равенства (6.3.10).

Теорема 6.3.1. *Пусть $-1<\alpha<1$, $r\geqslant 1$, $A>0$, $f\in W_{\mathcal{L}_{2,\rho}}^r$. Тогда смешанный ряд (6.3.12) сходится равномерно относительно $x\in[0,A]$ и для произвольного $x\in[0,\infty)$ имеет место равенство (6.3.10).*

Доказательство. Мы начнем с оценки полинома $L_{k+r}^{\alpha-r}(x)$ при $\alpha>-1$, $r\geqslant 1$ и $x\in[0,A]$. Если $\alpha-r>-1$, то пользуясь оценкой (6.1.15), мы можем записать $(s=4k+2r-2\alpha+2)$

$$|L_{k+r}^{\alpha-r}(x)| \leqslant c(\alpha,r,A) A_{k+r}^{\alpha-r}(x). \tag{6.3.13}$$

Если же $\alpha-r\leqslant -1$, то, пользуясь равенством (6.1.12), имеем

$$L_{k+r}^{\alpha-r}(x) = \frac{\alpha-r+1}{k+\alpha} L_{k+r}^{\alpha-r+1}(x) - \frac{x}{k+\alpha} L_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x). \tag{6.3.14}$$

С другой стороны, из определения (6.1.16) нетрудно увидеть, что при $\alpha>-1$, $k\geqslant 1$, $0\leqslant x\leqslant A$

$$\frac{1}{k+\alpha} A_{k+r}^{\alpha-r}(x) \leqslant c(\alpha,r,A) A_{k+r}^{\alpha-r}(x), \tag{6.3.15}$$

$$\frac{x}{k+\alpha} A_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x) \leqslant c(\alpha,r,A) A_{k+r}^{\alpha-r}(x). \tag{6.3.16}$$

Далее заметим, что если для $0\leqslant x\leqslant A$ справедливы оценки

$$|L_{k+r}^{\alpha-r+1}(x)| \leqslant c(\alpha,r,A) A_{k+r}^{\alpha-r+1}(x), |L_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x)| \leqslant c(\alpha,r,A) A_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x), \tag{6.3.17}$$

то из (6.3.14) – (6.3.16) вытекает оценка (6.3.13). Но если $r=1$, то $\alpha-r+1=\alpha>-1$, $\alpha-r+2=\alpha+1>0$ и поэтому оценки (6.3.17) вытекают из (6.1.15). Тем самым, оценка (6.3.13) для $r=1$ доказана. Предположим теперь, что оценка (6.3.13) верна для $1\leqslant r\leqslant n$. Тогда из (6.3.14) – (6.3.16) следует справедливость оценки (6.3.13) для $r = n+1$. Тем самым доказана справедливость оценки (6.3.13) для произвольного целого $r \geqslant 1$. Оценим теперь остаточный член смешанного ряда (6.3.12), который равен

$$R_n^\alpha(f,x) = (-1)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x). \tag{6.3.18}$$

Имеем

$$|R_n^\alpha(f,x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_{r,k}^\alpha||L_{k+r}^{\alpha-r}(x)| =$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (h_k^\alpha)^{1/2}|f_{r,k}^\alpha|(h_k^\alpha)^{-1/2}|L_{k+r}^{\alpha-r}(x)| \leqslant \eta_n\gamma_n(x), \tag{6.3.19}$$

где

$$\eta_n = \left(\sum_{n+1}^{\infty} h_k^\alpha (f_{r,k}^\alpha)^2\right)^{1/2}, \quad \gamma_n(x) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (L_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2/h_k^\alpha\right)^{1/2}.$$

Если $f^{(r)} \in \mathcal{L}_{2,\rho}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0. \tag{6.3.20}$$

Что касается величины $\gamma_n(x)$, то, используя оценки (6.3.13) и соотношение

$$h_k^\alpha = \Gamma(\alpha+1)\binom{k+\alpha}{k} \asymp k^\alpha (k = 1,2,\ldots),$$

мы находим

$$\gamma_n(x) \leqslant c(\alpha,r)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha}(A_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2\right)^{1/2}. \tag{6.3.21}$$

Пусть $0 \leqslant x \leqslant A$, тода из (6.1.6) следует, что для произвольного действительного β имеет место оценка

$$A_n^\beta(x) \leqslant c(\beta,A)n^\beta(1+nx)^{-\beta/2-1/4} \quad (0 \leqslant x \leqslant A).(6.3.22)$$

Полагая здесь $\beta = \alpha - r$, мы можем записать

$$A_{k+r}^{\alpha-r} \leqslant c(\alpha,r,A)(k+r)^{\alpha-r}(1+(k+r)x)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}.$$

Отсюда имеем $(0 \leqslant x \leqslant A)$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha}(A_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2 \leqslant$$

$$c(\alpha,r,A)\sum_{k=n+1}^{\infty} (k+r)^{\alpha-2r}(1+(k+r)x)^{r-\alpha-1/2} =$$

$$c(\alpha,r,A)\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+r)^{r+1/2}}\left(\frac{1}{k+r}+x\right)^{r-\alpha-1/2}. \tag{6.3.23}$$

Заметим, что при $k > n$

$$\left(\frac{1}{k+r}+x\right)^{r-\alpha-1/2} \leqslant \begin{cases} \left(\frac{1}{n+r}+x\right)^{r-\alpha-1/2}, & r-\alpha \geqslant 1/2, \\ (k+r)^{\alpha+1/2-r}, & r-\alpha < 1/2, \end{cases}$$

поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+r)^{r+1/2}} \left(\frac{1}{k+r} + x\right)^{r-\alpha-1/2} \leqslant$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n+r} + x\right)^{r-\alpha-1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+r)^{-r-1/2}, & r-\alpha \geqslant 1/2, \\ \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+r)^{-2r+\alpha}. & r-\alpha < 1/2, \end{cases} \tag{6.3.24}$$

Сопоставляя (6.3.21), (6.3.23) и (6.3.24), мы находим

$$\gamma_n^2(x) \leqslant c(\alpha, r, A) \begin{cases} n^{1/2-r} \left(\frac{1}{n} + x\right)^{r-\alpha-1/2}, & r-\alpha \geqslant 1/2, \\ n^{-2r+\alpha+1}, & r-\alpha < 1/2. \end{cases} \tag{6.3.25}$$

Из оценки (6.3.25) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n(x) = 0, \tag{6.3.26}$$

причем сходимость равномерна относительно $x \in [0, A]$. Сопоставляя (6.3.19), (6.3.20) и (6.3.26), приходим к первому утверждению теоремы 2.3.1 о равномерной сходимости на $[0, A]$ смешанного ряда (6.3.12). Остается доказать, что имеет место равенство (6.3.10). Если $f \in W^r_{\mathcal{L}_{2,\rho}}$, то $f^{(r)} \in \mathcal{L}_{2,\rho}$ и, следовательно, в метрике пространства $\mathcal{L}_{2,\rho}$ имеет место равенство

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha} L_k^{\alpha}(x). \tag{6.3.27}$$

Пусть

$$S_{r,n}^{\alpha}(f) = S_{r,n}^{\alpha}(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f_{r,k}^{\alpha} L_k^{\alpha}(x)$$

частичная сумма порядка n ряда (6.3.27). Мы имеем

$$\left| \int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt - \int_0^x (x-t)^{r-1} S_{r,n}^{\alpha}(f,t)dt \right| \leqslant$$

$$\int_0^x (x-t)^{r-1} |f^{(r)}(t) - S_{r,n}^{\alpha}(f,x)|dt \leqslant x^{r-1} \int_0^x |f^{(r)}(t) - S_{r,n}^{\alpha}(f,t)|dt =$$

$$x^{r-1} \int_0^x t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{t/2} t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-t/2} |f^{(r)}(t) - S_{r,n}^{\alpha}(f,t)|dt \leqslant$$

$$x^{r-1} \left(\int_0^x t^{-\alpha} e^t dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x t^{\alpha} e^{-t} (f^{(r)}(t) - S_{r,n}^{\alpha}(f,t))^2 dt \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\left(\frac{e^x x^{2r-\alpha-1}}{1-\alpha} \right)^{1/2} \|f^{(r)} - S_{r,n}^{\alpha}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}}. \tag{6.3.28}$$

Поскольку в силу (6.3.27) $\|f^{(r)} - S_{r,n}^{\alpha}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}} \to 0$ $(n \to \infty)$, то из (6.3.28) находим

$$\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha} \int_0^x (x-t)^{r-1} L_k^{\alpha}(t)dt. \tag{6.3.29}$$

Сопоставляя (6.3.3) и (6.3.29), заключаем, что справедливо (6.3.4). Убедимся теперь в законности рассуждений, которые привели к равенству (6.3.10), исходя из (6.3.4). Имея ввиду (6.3.9), для этого достаточно проверить сходимость рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}f_{r,k}^{\alpha}\quad(0\leqslant\nu\leqslant r-1),$$

фигурирующих (6.3.1). Но если $f\in W^r_{\mathcal{L}_{2,\rho}}$, то $f^{(r)}\in\mathcal{L}_{2,\rho}$ и, стало быть,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}|f_{r,k}^{\alpha}|=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}(h_k^{\alpha})^{-1/2}(h_k^{\alpha})^{1/2}|f_{r,k}^{\alpha}|\leqslant$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}\right)^2\frac{1}{h_k^{\alpha}}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}h_k^{\alpha}(f_{r,k}^{\alpha})^2\right)^{1/2}=$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)}{(\Gamma(k+r-\nu+1))^2}\right)^{1/2}\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}}\leqslant$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)\Gamma(k+2)}\right)^{1/2}\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}}\leqslant c(\alpha)\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}}\quad(-1<\alpha<1).$$

Тем самым равенство (6.3.10) и вместе с ним теорема 6.3.1 доказаны.

§ 6.4. Операторы $\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f)$

Для $-1<\alpha<1$, $f\in W^r_{\mathcal{L}_{2,\rho}}$ положим

$$J_{r,n}^{\alpha}(f,x)=(-1)^r\sum_{k=0}^{n}f_{r,k}^{\alpha}L_{k+r}^{\alpha-r}(x),\tag{6.4.1}$$

$$\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f)=\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x)=E_{r-1}^{\alpha}(f,x)+J_{r,n}^{\alpha}(f,x),\tag{6.4.2}$$

где $E_{r-1}^{\alpha}(f,x)$ – полином степени $r-1$, определенный равенством (6.3.11). Тогда из (6.3.10), (6.3.12), (6.4.1) и (6.4.2) имеем

$$f(x)=\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x)+\mathcal{P}_{r,n}^{\alpha}(f,x),\tag{6.4.3}$$

где

$$\mathcal{P}_{r,n}^{\alpha}(f,x)=(-1)^r\sum_{k=n+1}^{\infty}f_{r,k}^{\alpha}L_{k+r}^{\alpha-r}(x).\tag{6.4.4}$$

Из (6.4.2) следует, что $\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+r$. Будем рассматривать $\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f)=\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x)$ как аппарат приближения гладких функций. Но прежде всего установым связь операторов $\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f)$ с суммами Фурье-Лагерра $S_n^{\alpha}(f)$. С этой целью представим $J_{r,n}^{\alpha}(f,x)$ в следующем виде

$$J_{r,n}^{\alpha}(f,x)=J_{r,n-r}^{\alpha}(f,x)+I_{r,n}^{\alpha}(f,x),\tag{6.4.5}$$

где

$$I_{r,n}^{\alpha}(f,x)=(-1)^r\sum_{k=n-r+1}^{n}f_{r,k}^{\alpha}L_{k+r}^{\alpha-r}(x).\tag{6.4.6}$$

С другой стороны, полагая $a = \alpha - r$, $n = k + r$, из (6.1.14) имеем

$$L_{k+r}^{\alpha-r}(x) = \sum_{\nu=0}^{r} \frac{(-r)_\nu}{\nu!} L_{k+r-\nu}^{\alpha}(x). \tag{6.4.7}$$

Из (6.4.6) и (6.4.7) находим

$$I_{r,n}^{\alpha}(f,x) = \varphi_{r,n}^{\alpha}(f,x) + \psi_{r,n}^{\alpha}(f,x), \tag{6.4.8}$$

где

$$\varphi_{r,n}^{\alpha}(f,x) = (-1)^r \sum_{k=n-r+1}^{n} f_{r,k}^{\alpha} \sum_{\nu=k+r-n}^{r} \frac{(-r)_\nu}{\nu!} L_{k+r-\nu}^{\alpha}(x), \tag{6.4.9}$$

$$\psi_{r,n}^{\alpha}(f,x) = (-1)^r \sum_{k=n-r+1}^{n} f_{r,k}^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{k+r-n-1} \frac{(-r)_\nu}{\nu!} L_{k+r-\nu}^{\alpha}(x) \tag{6.4.10}$$

Сопоставляя (6.4.2), (6.4.5), (6.4.8) – (6.4.10), получаем

$$\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x) = E_{r-1}^{\alpha}(f,x) + J_{r,n-r}^{\alpha}(f,x) + \varphi_{r,n}^{\alpha}(f,x) + \psi_{r,n}^{\alpha}(f,x). \tag{6.4.11}$$

Далее, из (6.4.4) и (6.4.7) следует, что

$$\mathcal{P}_{r,n}^{\alpha}(f,x) = (-1)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{r} \frac{(-r)_\nu}{\nu!} L_{k+r-\nu}^{\alpha}(x) \tag{6.4.12}$$

Правая часть равенства (6.4.12) содержит полиномы Лагерра $L_m^{\alpha}(x)$, для которых $m \geqslant n+1$, следовательно $f_l^{\alpha}(\mathcal{P}_{r,n}^{\alpha}(f)) = 0$ при $l \leqslant n$ и это, в свою очередь, означает, что

$$S_n^{\alpha}(\mathcal{P}_{r,n}^{\alpha}(f),x) = 0. \tag{6.4.13}$$

По аналогичной причине из (6.4.10) следует, что

$$S_n^{\alpha}(\psi_{r,n}^{\alpha}(f),x) = 0. \tag{6.4.14}$$

С другой стороны,

$$H(x) = E_{r-1}^{\alpha}(f,x) + J_{r,n-r}^{\alpha}(f,x) + \varphi_{r,n}^{\alpha}(f,x)$$

представляет собой алгебраический полином степени n и, стало быть,

$$S_n^{\alpha}(H,x) = H(x) = \mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x) - \psi_{r,n}^{\alpha}(f,x),$$

поэтому, с учетом (6.4.14)

$$S_n^{\alpha}(\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f),x) = \mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x) - \psi_{r,n}^{\alpha}(f,x). \tag{6.4.15}$$

Сопоставляя (6.4.3), (6.4.13) и (6.4.15), получаем

$$S_n^{\alpha}(f,x) = S_n^{\alpha}(\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f),x) + S_n^{\alpha}(\mathcal{P}_{r,n}^{\alpha}(f),x) = \mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x) - \psi_{r,n}^{\alpha}(f,x)$$

и отсюда

$$\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x) = S_n^{\alpha}(f,x) + \psi_{r,n}^{\alpha}(f,x). \tag{6.4.16}$$

Это и есть искомая связь между оператором $\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f)$ и суммой Фурье-Лагерра $S_n^{\alpha}(f)$. Другое важное свойство операторов $\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f)$ выражается равенством

$$f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu}\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x) = \mathcal{P}_{r-\nu}^{\alpha}, n(f^{(\nu)},x) =$$

$$(-1)^{r-\nu} \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{r-\nu,k}^{(\nu)\alpha} L_{r-\nu+k}^{\alpha-r+\nu}(x) = (-1)^{r-\nu} \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha} L_{r-\nu+k}^{\alpha-r+\nu}(x). \tag{6.4.17}$$

§ 6.5. Операторы $\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f)$ и классы $W^m_{\mathcal{L}_{2,\rho(\cdot,\alpha+m-r)}}$

Здесь мы рассмотрим задачу о приближении функций $f \in W^m_{\mathcal{L}_{2,\rho(\cdot,\alpha+m-r)}}$ посредством операторов $\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f)$, где $m \geqslant r$.

Теорема 6.5.1. *Пусть $m \geqslant r \geqslant 1$, $f \in W^m_{\mathcal{L}_{2,\rho(\cdot,\alpha+m-r)}}$, $A>0$, $0\leqslant x\leqslant A$. Тогда*

$$|f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu}\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x)| \leqslant E_{n+r-m}(f^{(m)},\mathcal{L}_{2,\rho(\cdot,\alpha+m-r)})\gamma_n^\alpha(x),$$

где $E_{n+r-m}(f^{(m)},\mathcal{L}_{2,\rho(\cdot,\alpha+m-r)})$ – наилучшее приближение функции $f^{(m)}=f^{(m)}(x)$ в метрике пространства $\mathcal{L}_{2,\rho(\cdot,\alpha+m-r)}$ алгебраическими полиномами степени $n+r-m$,

$$(\gamma_n^\alpha(x))^2 \leqslant c(\alpha,r,A)\begin{cases} \left(\frac{1}{n}+x\right)^{r-\alpha-\nu-\frac12} n^{-m+\nu+\frac12}, & r-\nu-\alpha-\frac12 \geqslant 0,\\ n^{-m-r+2\nu+\alpha+1}, & r-\nu-\alpha-\frac12 < 0.\end{cases}$$

Доказательство. Прежде всего из формулы Родрига (6.1.1) имеем $(0\leqslant\nu\leqslant k)$

$$t^\alpha e^{-t}L_k^\alpha(t) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}t^{k+\alpha}) = \frac{1}{k!}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{d^{k-\nu}}{dt^{k-\nu}}(e^{-t}t^{k-\nu+\alpha+\nu}) =$$

$$\frac{1}{k!}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left((k-\nu)!e^{-t}t^{\alpha+\nu}L_{k-\nu}^{\alpha+\nu}(t)\right) = \frac{1}{k^{[\nu]}}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(e^{-t}t^{\alpha+\nu}L_{k-\nu}^{\alpha+\nu}(t)\right). \tag{6.5.1}$$

Если теперь $f \in W^m_{\mathcal{L}_{2,\rho(\cdot,\alpha+m-r)}}$, то из (6.5.1) следует, что

$$f_{r,k}^\alpha = \frac{1}{h_k^\alpha}\int\limits_0^\infty \rho(t)f^{(r)}(t)L_k^\alpha(t)dt = \frac{1}{h_k^\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{f^{(r)}(t)}{k^{[m-r]}}\frac{d^{m-r}}{dt^{m-r}}\left(e^{-t}t^{\alpha+m-r}L_{k-m+r}^{\alpha+m-r}(t)\right)dt =$$

$$\frac{(-1)^{m-r}}{h_k^\alpha k^{[m-r]}}\int\limits_0^\infty f^{(r)}(t)e^{-t}t^{\alpha+m-r}L_{k-m+r}^{\alpha+m-r}(t)dt = \frac{(-1)^{m-r}h_{k-m+r}^{m-r+\alpha}}{h_k^\alpha k^{[m-r]}} f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r}. \tag{6.5.2}$$

Обратимся теперь к равенству (6.5.17). С учетом (6.5.2) имеем

$$|f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu}\mathcal{L}_{n+r}^{\alpha}(f,x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^\infty |f_{r,k}^\alpha L_{r-\nu+k}^{\alpha-r+\nu}(x)| =$$

$$\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^{[m-r]}}\frac{(h_{k-m+r}^{m-r+\alpha})^{1/2}}{h_k^\alpha}(h_{k-m+r}^{m-r+\alpha})^{1/2}|f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r}||L_{r-\nu+k}^{\alpha-r+\nu}(x)| \leqslant$$

$$\left(\sum_{k=n+1}^\infty h_{k-m+r}^{m-r+\alpha}(f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r})^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n+1}^\infty\left(\frac{L_{r-\nu+k}^{\alpha-r+\nu}(x)}{k^{[m-r]}}\right)^2\frac{h_{k-m+r}^{m-r+\alpha}}{(h_k^\alpha)^2}\right)^{1/2} =$$

$$E_{n+r-m}(f^{(m)},\mathcal{L}_{2,\rho(\cdot,\alpha+m-r)})\gamma_n^\alpha(x), \tag{6.5.3}$$

где

$$\gamma_n^\alpha(x) = \left(\sum_{k=n+1}^\infty\left(\frac{L_{r-\nu+k}^{\alpha-r+\nu}(x)}{k^{[m-r]}}\right)^2\frac{h_{k-m+r}^{m-r+\alpha}}{(h_k^\alpha)^2}\right)^{1/2}, \tag{6.5.4}$$

Если $0 \leqslant x \leqslant A$, то в силу (6.3.13) и (6.3.22) мы можем записать

$$|L_{r-\nu+k}^{\alpha-r+\nu}(x)| \leqslant c(\alpha, r, A)k^{\alpha-r+\nu}(1+kx)^{\frac{r-\nu-\alpha}{2}-\frac{1}{4}} =$$
$$c(\alpha, r, A)k^{\frac{\alpha-r+\nu}{2}-\frac{1}{4}}(1/k+x)^{\frac{r-\nu-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}. \tag{6.5.5}$$

Кроме того, в силу (6.3.21)

$$\frac{h_{k-m+r}^{m-r+\alpha}}{(h_k^\alpha)^2} \leqslant c(\alpha, m)k^{m-r-\alpha}. \tag{6.5.6}$$

Из (6.5.5) и (6.5.6) находим

$$\left(\frac{L_{r-\nu+k}^{\alpha-r+\nu}(x)}{k^{[m-r]}}\right)^2 \frac{h_{k-m+r}^{m-r+\alpha}}{(h_k^\alpha)^2} \leqslant c(\alpha, m, A)k^{\nu-m-1/2}(1/k+x)^{r-\nu-\alpha-1/2}. \tag{6.5.7}$$

Сопоставляя (6.5.4) и (6.5.7), получаем

$$\gamma_n^\alpha(x) \leqslant c(\alpha, m, A)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\nu-m-1/2}(1/k+x)^{r-\nu-\alpha-1/2}\right)^{1/2}. \tag{6.5.8}$$

Далее, если $k \geqslant n$, то

$$(1/k+x)^{r-\nu-\alpha-1/2} \leqslant \begin{cases} \left(\frac{1}{n}+x\right)^{r-\alpha-\nu-\frac{1}{2}}, & r-\nu-\alpha-\frac{1}{2} \geqslant 0, \\ k^{\nu+\alpha-r+1/2}, & r-\nu-\alpha-\frac{1}{2} < 0, \end{cases}$$

поэтому из (6.5.8) имеем $(0 \leqslant x \leqslant A)$

$$\gamma_n^\alpha(x) \leqslant c(\alpha, r, A)\begin{cases} \left(\frac{1}{n}+x\right)^{r-\alpha-\nu-\frac{1}{2}} n^{-m+\nu+\frac{1}{2}}, & r-\nu-\alpha-\frac{1}{2} \geqslant 0, \\ n^{-m-r+2\nu+\alpha+1}, & r-\nu-\alpha-\frac{1}{2} < 0. \end{cases} \tag{6.5.9}$$

Сопоставляя (6.5.4) с (6.5.9), приходим к утверждению теоремы 6.5.1.

§ 6.6. Смешанные ряды в случае $\alpha = 0$

Смешанные ряды по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$ принимают особенно простой вид в случае $\alpha = 0$. В этом случае равенства (6.3.11) и (6.3.12) принимают следующий вид

$$E_{r-1}^0(f, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!}, \tag{6.6.1}$$

$$J_r^0(f, x) = (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^0 L_{k+r}^{-r}(x). \tag{6.6.2}$$

$$f(x) = E_{r-1}^\alpha(f, x) + J_r^\alpha(f, x). \tag{6.6.3}$$

Если мы теперь воспользуемся равенством (6.1.13), то можем заметить, что

$$L_{k+r}^{-r}(x) = (-x)^r L_k^r(x)/(k+1)_r,$$

поэтому, подставляя это значение в (6.6.2), имеем

$$J_r^0(f, x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^0 \frac{L_k^r(x)}{(k+1)_r}. \tag{6.6.4}$$

Сопоставляя (6.6.1), (6.6.3) и (6.6.4), мы приходим к следующему представлению смешанного ряда по полиномам Лагерра $L_k^0(x)$:

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{r-1}f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!}+x^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{r,k}^0}{(k+1)_r}L_k^r(x). \tag{6.6.5}$$

Операторы $\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f)$ в этом случае имеют вид

$$\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f,x)=\sum_{\nu=0}^{r-1}f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!}+x^r\sum_{k=0}^{n}\frac{f_{r,k}^0}{(k+1)_r}L_k^r(x). \tag{6.6.6}$$

Глава 7. Смешанные ряды по полиномам Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$

Эта глава посвящена теории смешанных рядов по полиномам Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $(n=0,1,\dots,N-1)$, ортогональным на равномерной сетке $\Omega_N=\{0,1,\dots,N-1\}$. Эти полиномы представляют собой дискретный аналог полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ $(n=0,1,\dots)$. Нам понадобится ряд свойств полиномов $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$, которые мы приведем без доказательства.

§ 7.1. Сводка формул и дальнейшие свойства полиномов $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$

Для удобства сылок мы здесь соберем некоторые формулы для полиномов $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$, доказанных в главе 3 и установим ряд вспомогательных утверждений. Пусть N – натуральное число, α, β – произвольные комплексные числа. Положим

$$\rho(x)=\rho(x;\alpha,\beta,N)=\frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}, \tag{7.1.1}$$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{(-1)^n}{n!(N-1)^{[n]}\rho(x)}\Delta^n\left\{\rho(x)(x-N-\alpha)^{[n]}x^{[n]}\right\}, \tag{7.1.2}$$

где $\Delta^n f(x)$ – конечная разность n-го порядка функции $f(x)$ в точке x, т.е. $\Delta^0 f(x)=f(x)$, $\Delta^1 f(x)=\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$, $\Delta^n f(x)=\Delta\Delta^{n-1}f(x)$ $(n\geqslant 1)$. В главае 3 было показано, что для каждого $0\leqslant n\leqslant N-1$ равенство (7.1.2) определяет алгебраический полином степени n, для которого

$$T_n^{\alpha,\beta}(N-1,N)=\binom{n+\alpha}{n},\qquad T_n^{\alpha,\beta}(0,N)=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}. \tag{7.1.3}$$

В явном виде полиномы $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ могут быть записаны следуюшим образом:

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)==(-1)^n\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_k x^{[k]}}{\Gamma(k+\beta+1)k!(N-1)^{[k]}}. \tag{7.1.4}$$

Если α, $\beta>-1$, то полиномы $T_n(x)=T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $\quad(0\leqslant n\leqslant N-1)$ образуют ортогональную с весом (7.1.1) систему на множестве $\Omega=\{0,1,\dots,N-1\}$, точнее

$$\sum_{x\in\Omega}\mu(x)T_n(x)T_m(x)=h_{n,N}^{\alpha,\beta}\delta_{nm}, \tag{7.1.5}$$

где δ_{nm} – символ Кронекера,

$$\mu(x)=\mu(x;\alpha,\beta,N)=\frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}\rho(x)$$

$$= \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}. \tag{7.1.6}$$

$$h_{n,N}^{\alpha,\beta} = \frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \tag{7.1.7}$$

При $n=0$ произведение $(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)$ следует заменить на $\Gamma(\alpha+\beta+2)$. Для $0 \leqslant n \leqslant N-1$ положим

$$\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \left\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-1/2} T_n^{\alpha,\beta}(x,N). \tag{7.1.8}$$

Очевидно, если $0 \leqslant n, m \leqslant N-1$, то

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x)\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)\tau_m^{\alpha,\beta}(x,N) = \delta_{nm}. \tag{7.1.9}$$

Другими словами, Полиномы $\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$ образуют ортонормированную с весом $\mu(x)$ систему на $\{0,1,\ldots,N-1\}$.

Формула Кристоффеля–Дарбу для Полиномов Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x) = T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ имеет следующий вид:

$$D_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T_k^{\alpha,\beta}(x)T_k^{\alpha,\beta}(y)}{h_{k,N}^{\alpha,\beta}}$$

$$= \frac{(N-1)^{[n+1]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}} \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}$$

$$\times \frac{T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)T_n^{\alpha,\beta}(y) - T_n^{\alpha,\beta}(x)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y} \tag{7.1.10}$$

Далее

$$(n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x,N) + (n+\beta+1)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$$

$$= \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1} x T_n^{\alpha,\beta+1}(x-1,N-1), \tag{7.1.11}$$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = (-1)^n T_n^{\beta,\alpha}(N-1-x,N), \tag{7.1.12}$$

$$(n+\alpha+1)T_n^{\alpha,\beta}(x,N) - (n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x,N)$$

$$= \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1}(N-1-x)T_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x,N-1), \tag{7.1.13}$$

$$D_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,N-1) == \frac{(N-2)^{[n]}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)2^{-\alpha-\beta-1}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} T_n^{\alpha+1,\beta}(x,N-1), \tag{7.1.14}$$

$$D_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,0) = \frac{(N-2)^{[n]}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)2^{-\alpha-\beta-1}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)} T_n^{\alpha,\beta+1}(x,N-1). \tag{7.1.15}$$

Непосредственно из явной формулы (7.1.4) мы можем вывести следующее полезное равенство

$$\Delta^m T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_m}{(N-1)^{[m]}} T_{n-m}^{\alpha+m,\beta+m}(x,N-m). \tag{7.1.16}$$

Если β такое целое число, что $-n \leqslant \beta \leqslant 1$, то из (7.1.4) выводим также

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{(n+\beta)!}{n!} \frac{(n+\alpha)^{[-\beta]}x^{[-\beta]}}{(N-1)^{[-\beta]}} T_{n+\beta}^{\alpha,-\beta}(x+\beta,N+\beta),$$

а если α и β – целые, $-n \leqslant \beta \leqslant -1$, $-(n+\beta) \leqslant \alpha \leqslant -1$, $N \geqslant 2$, то

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]}(N-x-1)^{[-\alpha]}}{(N-1)^{[-\beta]}(N-1+\beta)^{[-\alpha]}} T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha,-\beta}(x+\beta, N+\alpha+\beta). \tag{7.1.17}$$

Разностная формула Родрига (7.1.2) допускает следующее обобщение

$$\rho(x+m;\alpha,\beta,N+m)T_n^{\alpha,\beta}(x+m,N+m) =$$

$$\frac{(-1)^m}{n^{[m]}(N)_m}\Delta^m \left\{\rho(x;\alpha+m,\beta+m,N)T_{n-m}^{\alpha+m,\beta+m}(x,N)\right\}, \tag{7.1.18}$$

которое, впрочем, непосредственно вытекает из (7.1.2). Если в равенстве (7.1.16) мы заменим α, β и n соответственно, на $\alpha - m$, $\beta - m$ и $k+m$, то придем к формуле

$$\Delta^m T_{k+m}^{\alpha-m,\beta-m}(x,N) = \frac{(k+\alpha+\beta)^m}{(N-1)^{[m]}} T_k^{\alpha,\beta}(x,N-m). \tag{7.1.19}$$

Лемма 7.1.1. *Пусть $a, \alpha > -1$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$. Тогда* [8]

$$\frac{T_n^{a,a}(x,N)}{T_n^{a,a}(N-1,N)} = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n!(\alpha+1)_{n-2j}(n+2a+1)_{n-2j}(1/2)_j(a-\alpha)_j}{(n-2j)!(2j)!(a+1)_{n-2j}(n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}}$$

$$\times \frac{1}{(n-2j+a+1)_j(n-2j+\alpha+3/2)_j} \frac{T_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(x,N)}{T_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(N-1,N)}, \tag{7.1.20}$$

где $[n/2]$–целая часть числа $n/2$.

Лемма 7.1.2. *Пусть $\alpha > -1$, k, r – целые, $r \geqslant 1$, $k \geqslant r+1$. Тогда*

$$T_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x,N) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j^\alpha T_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x,N),$$

где $\lambda_j^\alpha = \lambda_j^\alpha(r,k)$ определены равенством (5.1.24).

Доказательство этой леммы вытекает из леммы 7.1.1. Чтобы в этом убедиться достаточно дословно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 5.1.3, при этом вместо равенства (5.1.25), использованного при доказательстве леммы 5.1.3 следует использовать лемму 7.1.1.

Лемма 7.1.3. *Для чисел $\lambda_j^\alpha = \lambda_j^\alpha(r,k)$, определенных равенством (5.1.24) имеет место оценка*

$$|\lambda_j^\alpha(r,k)| \leqslant c(\alpha,\beta).$$

Доказательство этой леммы непосредственно вытекает из леммы 5.1.2 , так как $\lambda_j^\alpha(r,k) = a_{2j}^{\alpha,\alpha}(r,k)$.

Лемма 7.1.4. *Если $0 \leqslant m \leqslant k$, $x \in \Omega_N$, то имеет место равенство ($T_j(x,N) = T_j^{0,0}(x,N)$)*

$$\frac{(x+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-x)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(x,N) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \sigma_i^k T_{k-m+2i}(x,N),$$

в котором при $k-m+2i \leqslant N-1$

$$\sigma_i^k = \sigma_i^k(m,N) = \frac{(N+m+k)^{[k-m]}(N+m-k-1)^{[2i]}}{(N+k-m+2i)^{[k-m+2i]}} \times$$

$$\frac{\left(k^{[m]}\right)^2 m^{[i]}(1/2)_i(2k+1-2m+4i)}{(2i)!(2k)^{[2m-2i]}(k-m+1)_i(k+3/2)_i(2k+1)}, \quad (7.1.21)$$

а если $k-m+2i > N-1$, *то* $\sigma_i^k(m,N) = 0$.

Доказательство. Выражение $(x+m)^{[m]}(N-x)_m T_{k-m}^{m,m}(x,N)$ представляет собой Полином степени $k+m$, следовательно, мы можем записать ($x \in \Omega_N$)

$$\frac{(x+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-x)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(x,N) = \sum_{j=0}^{k+m} \gamma_j T_j(x,N), \quad (7.1.22)$$

где

$$\gamma_j = \frac{1}{h_{j,N}^{0,0}} \frac{2}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \frac{(t+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-t)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(t,N) T_j(t,N), \quad (7.1.23)$$

в частности, $\gamma_j = 0$, если $j \geqslant N$. Поскольку Полином $T_{k-m}^{m,m}(t,N)$ при $j < k-m$ ортогонален с весом $(x+m)^{[m]}(N-x)_m$ к $T_j(x,N)$, то соответствующие $\gamma_j = 0$. Кроме того, сумма (7.1.23) обращается в нуль, если $k-m$ и j не являются одновременно четными или нечетными. Следовательно, (7.1.22) можно переписать так

$$\frac{(x+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-x)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(x,N) = \sum_{i=0}^{m} \gamma_{k-m+2i} T_{k-m+2i}(x,N), \quad (7.1.24)$$

где

$$\gamma_{k-m+2i} = \frac{1}{h_{k-m+2i,N}^{0,0}} \frac{2}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \frac{(t+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-t)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(t,N) T_{k-m+2i}(t,N), \quad (7.1.25)$$

в частности, если $k-m+2i > N-1$, то $\gamma_{k-m+2i} = 0$. Для вычисления суммы (7.1.25) при $k-m+2i \leqslant N-1$ воспользуемся леммой 3.1.1. Полагая $a=0$, $\alpha = m$, $n = k-m+2i$ и учитывая равенство $T_n^{\alpha,\beta}(N-1,N) = \binom{n+\alpha}{n}$, из леммы 3.1.1 находим

$$T_{k-m+2i}(x,N) = \sum_{j=0}^{q} \frac{(2k-2m+4i-2j)!(k+m+2i-2j)!}{(k-m+2i-2j)!(2j)!(2k+4i-4j)!} \times \frac{(1/2)_j m^{[j]}(-1)^j}{(k-m+2i-2j+1)_j(k+2i-2j+3/2)_j} T_{k-m+2i-2j}^{m,m}(x,N), \quad (7.1.26)$$

где $q = \min\{m, [(k-m+2i)/2]\}$. Умножим обе части этого равенства на $\mu(x,m,m,N) T_{k-m}^{m,m}(x,N)$ и просуммируем от 0 до $N-1$, тогда

$$\frac{2^{2m+1}}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \frac{(t+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-t)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(t,N) T_{k-m+2i}(t,N) = \frac{(2k-2m+2i)!(k+m)!(1/2)_i m^{[i]}(-1)^i}{(k-m)!(2i)!(2k)!(k-m+1)_i(k+3/2)_i} h_{k-m,N}^{m,m}. \quad (7.1.27)$$

Из (7.1.25) и (7.1.27) имеем

$$\gamma_{k-m+2i} = \frac{h_{k-m,N}^{m,m}}{2^{2m} h_{k-m+2i,N}^{0,0}} \frac{(2k-2m+2i)!(k+m)!(1/2)_i m^{[i]}(-1)^i}{(k-m)!(2i)!(2k)!(k-m+1)_i(k+3/2)_i}. \quad (7.1.28)$$

Если мы воспользуемся равенством (7.1.7), то с учетом (7.1.21) мы можем переписать (7.1.28) так

$$\gamma_{k-m+2i} = \frac{(-1)^i (N+m+k)^{[k-m]} (N-1)^{[k-m+2i]}}{(N-1)^{[k-m]} (N+k-m+2i)^{[k-m+2i]}} \times$$

$$\frac{k!^2(2k-2m+4i+1)}{(2k+1)(k-m)!(k+m)!}\frac{(2k-2m+2i)!(k+m)!m^{[i]}(1/2)_i}{(2k)!(k-m)!(2i)!(k-m+1)_i(k+3/2)_i}=$$

$$(-1)^i\frac{(N+m+k)^{[k-m]}(N+m-k-1)^{[2i]}}{(N+k-2m+2i)^{[k-m+2i]}}\times$$
$$\frac{\left(k^{[m]}\right)^2 m^{[i]}(1/2)_i(2k+1-2m+4i)}{(2i)!(2k)^{[2m-2i]}(k-m+1)_i(k+3/2)_i(2k+1)}=(-1)^i\sigma_i^k(m,N).$$

Подставляя это значение в (7.1.24), приходим к утверждению леммы 7.1.4.

При исследовании вопросов сходимости дискретных рядов Фурье-Чебышева важную роль играют асимптотические свойства полиномов $T_n^{\alpha,\beta}(x)$ при $n,N\to\infty$. Пусть $a>0$, $0\leqslant n\leqslant aN^{1/2}$, $0<\varepsilon<1$, α,β – произвольные вещественные числа. Тогда имеет место [21], [32] следующая асимптотическая формула

$$T_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{N-1}{2}(1+t),N\right]=P_n^{\alpha,\beta}(t)+V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t), \tag{7.1.29}$$

для остаточного члена $V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ которой справедлива оценка

$$|V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)|\leqslant c(\alpha,\beta,a,\varepsilon)\frac{n^{3/2}}{N}\qquad(-1+\varepsilon\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon). \tag{7.1.30}$$

Вблизи точек -1 и 1 для остаточного члена $V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ справедливы оценки

$$|V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)|\leqslant c(\alpha,\beta,a,q)\frac{n^{2+\beta}}{N},\qquad(|1+t|\leqslant qn^{-2}, \tag{7.1.31}$$

$$|V_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)|\leqslant c(\alpha,\beta,a,q)\frac{n^{2+\alpha}}{N},\qquad(|1-t|\leqslant qn^{-2}. \tag{7.1.32}$$

§ 7.2. Дискретное преобразование Фурье-Чебышева

Пусть $\alpha,\beta>-1$, $\mu(x)=\mu(x;\alpha,\beta,N)$ функция (7.1.6). Для двух произвольных дискретных функций d и q, заданных на множестве $\Omega_N=\{0,1,\dots,N-1\}$ мы определим скалярное произведение

$$(f,g)_\mu=\sum_{x\in\Omega_N}\mu(x)d(x)q(x). \tag{7.2.1}$$

Евклидово пространство всех дискретных функций вида $d:\Omega_N\to\mathbf{R}$, в котором скалярное произведение определено с помощью равенства (7.2.1) мы обозначим через $l_{2,\mu}^N$. Если $d\in l_{2,\mu}^N$, то через $\|d\|_{\mu,N}$ мы обозначим норму функции d, т.е.

$$\|d\|_{\mu,N}=\left(\sum_{x\in\Omega_N}\mu(x)d^2(x)\right)^{1/2}. \tag{7.2.2}$$

Для $d\in l_{2,\mu}^N$ мы можем определить коэффициенты Фурье-Чебышева

$$d_k^{\alpha,\beta}=d_k^{\alpha,\beta}(N)=\sum_{t\in\Omega_N}\mu(t)\tau_k^{\alpha,\beta}(t,N)d(t),\quad k\in\Omega_N. \tag{7.2.3}$$

Поскольку система $\{\tau_k^{\alpha,\beta}(t,N)\}_0^{N-1}$ ортонормирована на Ω_N с весом $\mu(x)$ $(\alpha,\beta>-1)$, то

$$d(x)=\sum_{k=0}^{N-1}d_k^{\alpha,\beta}\tau_k^{\alpha,\beta}(x,N),\quad x\in\Omega_N. \tag{7.2.4}$$

Равенства (7.2.3) определяют прямое дискретное преобразование Фурье-Чебышева, а равенства (7.2.4) определяют обратное преобразование Фурье-Чебышева. Рассмотрим частичную сумму ряда (7.2.4) порядка $n \leqslant N-1$:

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d,x) = \sum_{k=0}^{n} d_k^{\alpha,\beta} \tau_k^{\alpha,\beta}(x,N). \tag{7.2.5}$$

Она доставляет функции $d = d(x)$ наилучшее приближение в пространстве $l_{2,\mu}^N$ среди всех алгебраических полиномов степени n, т.е.

$$\|d - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d)\|_{l_{2,\mu}^N} = \left(\sum_{t\in\Omega_N} (d(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d,x))^2 \mu(x) \right)^{1/2} =$$

$$E_n(d)_{l_{2,\mu}^N} = \inf_{P_n} \|d - P_n\|_{l_{2,\mu}^N}, \tag{7.2.6}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $P_n(x)$ степени n. Из (7.2.4) следует, что если $n \geqslant N-1$, то $E_n(d)_{l_{2,\mu}^N} = 0$. Если $p_n = p_n(x)$ – произвольный алгебраический полином степени $n \leqslant N-1$, то из (7.2.6) следует, что

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(p_n,x) = p_n(x), \quad (x \in \mathbf{R}). \tag{7.2.7}$$

Далее отметим, что равенство Парсеваля для системы полиномов Чебышева $\{\tau_k^{\alpha,\beta}(x,N)\}_{k=0}^{N-1}$ приобретает следующий вид

$$\sum_{t\in\Omega_N} (d(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d,x))^2 \mu(x) = \sum_{k=n+1}^{N-1} (d_k^{\alpha,\beta})^2. \tag{7.2.8}$$

Сопоставляя (7.2.6) и (7.2.8), имеем также

$$E_n(d)_{l_{2,\mu}^N} = \left(\sum_{k=n+1}^{N-1} (d_k^{\alpha,\beta})^2 \right)^{1/2}. \tag{7.2.9}$$

Если мы воспользуемся ядром $D_{n,N}^{\alpha,\alpha}(x,t)$, то равенство (7.2.5) можно переписать следующим образом

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d,x) = \sum_{t=0}^{N-1} D_{n,N}^{\alpha,\alpha}(x,t) d(t) \mu(t). \tag{7.2.10}$$

В частности, если $x = 0$, то из (7.1.15) и (7.2.10) получим

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d,0) =$$

$$\frac{(N-2)^{[n]}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)2^{-\alpha-\beta-1}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \sum_{t=0}^{N-1} \mu(t) T_n^{\alpha,\beta+1}(t-1,N-1) d(t). \tag{7.2.11}$$

Рассмотрим $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d,0)$ как линейный функционал, действующий в пространстве $C(\Omega_N)$, состоящем из дискретных функций вида $d : \Omega_N \to \mathbf{R}$, для которых норма определяется следующим образом

$$\|d\|_{C(\Omega)_N} = \max_{x\in\Omega_N} |d(x)|. \tag{7.2.12}$$

Пусть

$$\|S_{n,N}^{\alpha,\beta}(0)\|_{C(\Omega_N)} = \sup_{\|d\|_{C(\Omega)_N} \leqslant 1} |S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d,0)| \tag{7.2.13}$$

норма функционала $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(0) : C(\Omega_N) \to \mathbf{R}$. Из (7.2.11) – (7.2.13) нетрудно увидеть, что

$$\|S_{n,N}^{\alpha,\beta}(0)\|_{C(\Omega_N)} =$$

$$\frac{(N-2)^{[n]}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)2^{-\alpha-\beta-1}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \sum_{t=0}^{N-1} \mu(t)|T_n^{\alpha,\beta+1}(t-1,N-1)|. \tag{7.2.14}$$

Лемма 7.2.1. *Пусть $\alpha > -1, \beta > -1/2$, $a > 0$, $0 \leqslant n \leqslant aN^{1/2}$. Тогда*

$$\|S_{n,N}^{\alpha,\beta}(0)\|_{C(\Omega_N)} \geqslant c(\alpha,\beta,a)n^{\beta+1/2}\left(1 - c_1(\alpha,\beta,a)\frac{n^2}{N}\right).$$

Доказательство. Воспользуемся асимптотической формулой (7.1.29), тогда

$$T_n^{\alpha,\beta+1}\left[\frac{N-2}{2}(1+x), N-1\right] = P_n^{\alpha,\beta+1}(x) + V_{n,N-1}^{\alpha,\beta+1}(x), \tag{7.2.15}$$

где для остаточного члена $V_{n,N-1}^{\alpha,\beta+1}(x)$ справедлива оценка

$$|V_{n,N-1}^{\alpha,\beta+1}(t)| \leqslant c(\alpha,\beta,a,\varepsilon)\frac{n^{3/2}}{N} \qquad (-1+\varepsilon \leqslant t \leqslant 1-\varepsilon). \tag{7.2.16}$$

Пусть α и β – произвольные вещественные числа,

$$k(\theta) = \pi^{-1/2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-1/2},$$

$$\lambda = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \quad \gamma = -\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Тогда при $0 < \theta < \pi$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta) = n^{-1/2}k(\theta)\left\{\cos(\lambda\theta+\gamma) + \frac{r_n(\theta)}{n\sin\theta}\right\}, \tag{7.2.17}$$

для остаточного члена $r_n(\theta) = r_n(\theta;\alpha,\beta)$ которой имеет место оценка

$$|r_n(\theta)| \leqslant c(\alpha,\beta,\delta)\left(0 < \frac{\delta}{n} \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{\delta}{n}\right). \tag{7.2.18}$$

Сопоставляя (7.2.15) – (7.2.18), мы замечаем, что

$$T_n^{\alpha,\beta+1}\left[\frac{N-2}{2}(1+x), N-1\right] = n^{-1/2}k(\theta)\cos(\lambda\theta+\gamma) + U_{n,N}^{\alpha,\beta}(\theta), \tag{7.2.19}$$

где $x = \cos\theta$,

$$|U_{n,N}^{\alpha,\beta}(\theta)| \leqslant c(\alpha,\beta,a,\varepsilon)\left(n^{-3/2} + n^{3/2}/N\right), \quad \arccos(\varepsilon) \leqslant \theta \leqslant \arccos(\pi-\varepsilon). \tag{7.2.20}$$

Далее заметим, что из (7.1.6) и формулы Стирлинга вытекает следующая оценка ($\arccos(\varepsilon) \leqslant \theta \leqslant \arccos(\pi-\varepsilon)$)

$$c_1(\alpha,\beta,\varepsilon)/N \leqslant \mu\left[\frac{N-2}{2}(1+\cos\theta), \alpha, \beta, N\right] \leqslant c_2(\alpha,\beta,\varepsilon)/N. \tag{7.2.21}$$

Пусть $x_t = -1 + 2t/(N-2)$, $\theta_t = \arccos x_t$. Тогда из (7.2.19) – (7.2.21) выводим

$$\sum_{t=0}^{N-1} \mu(t)|T_n^{\alpha,\beta+1}(t-1, N-1)| =$$

$$\sum_{t=0}^{N-1} \mu\left[\frac{N-2}{2}(1+x_t), \alpha, \beta, N\right] \left|T_n^{\alpha,\beta+1}\left[\frac{N-2}{2}(1+x_t), N-1\right]\right| >$$

$$\sum_{-1+\varepsilon \leqslant x_t \leqslant 1-\varepsilon} n^{-1/2} k(\theta)|\cos(\lambda\theta+\gamma)|\mu\left[\frac{N-2}{2}(1+\cos\theta_t), \alpha, \beta, N\right] -$$

$$\sum_{-1+\varepsilon \leqslant x_t \leqslant 1-\varepsilon} |U_{n,N}^{\alpha,\beta}(\theta_t)|\mu\left[\frac{N-2}{2}(1+\cos\theta_t), \alpha, \beta, N\right] \geqslant$$

$$\frac{c_1(\alpha,\beta,\varepsilon)}{Nn^{1/2}} \sum_{-1+\varepsilon \leqslant x_t \leqslant 1-\varepsilon} k(\theta_t)|\cos(\lambda\theta_t+\gamma)| - c(\alpha,\beta,a,\varepsilon)\left(n^{-\frac{3}{2}} + \frac{n^{\frac{3}{2}}}{N}\right) \geqslant$$

$$c(\alpha,\beta,a,\varepsilon)\left(n^{-\frac{1}{2}} - \frac{n^{\frac{3}{2}}}{N}\right). \tag{7.2.22}$$

Осталось заметить, что если $n \leqslant aN^{1/2}$, то

$$\frac{(N-2)^{[n]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}} \geqslant \frac{(N-n)^n}{(N+n+\alpha+\beta)^n} = \left(1 - \frac{2n+\alpha+\beta}{N+n+\alpha+\beta}\right)^n =$$

$$\left(1 - \frac{2n+\alpha+\beta}{N+n+\alpha+\beta}\right)^{\frac{N+n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta}\frac{n(2n+\alpha+\beta)}{N+n+\alpha+\beta}} > e^{-\frac{n(2n+\alpha+\beta)}{N+n+\alpha+\beta}} > c(a,\alpha,\beta) > 0. \tag{7.2.23}$$

Утверждение леммы 3.2.1 вытекает из (7.2.14), (7.2.22) и (7.2.23).

Лемма 3.2.1 показывает, что если $\beta > -1/2$, то норма функционала $S_{n,N}^{\alpha,\beta} = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d, 0)$ растет вместе с n со скоростью $n^{\beta+1/2}$ и, как следствие, оператор частичных сумм $S_{n,N}^{\alpha,\beta} = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d)$, вообше говоря, не является харошим средством приближения дискретных функций $d \in C(\Omega_N)$: а именно, вблизи точки $x = 0$ приближение функции $d = d(x)$. доставляемое частичной суммой $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d,x)$ может оказаться $n^{\beta+1/2}$ раз хуже по порядку, чем наилучшее приближение функции d в метрике пространства $C(\Omega_N)$ алгебраическими полиномами степени n. Ситуация ухудится еще сильнее, если мы предпримем попытку приблизить конечные разности $\Delta^\nu d(x)$ функции d конечными разностями $\Delta^\nu S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d,x)$. Это обстоятельство побудило ввести новые *смешанные ряды* по полиномам Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x, M)$, конструкция которых столь же проста как и у рядов Фурье по этим полиномам, а их частичные суммы успешно могут быть использованы в задаче одновременного приближения дискретных функций и их конечных разностей.

§ 7.3. Смешанные ряды по полиномам $T_n^{\alpha,\beta}(x, M)$

Пусть r и N – натуральные числа. Рассмотрим дискретную функцию $d(x)$, заданную на сетке $\bar\Omega_{N+2r} = \{-r, -r+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N-1, N, \ldots, N-1+r\}$. Положим

$$F(x) = d(x-r), \qquad \Omega_{N+2r}, \tag{7.3.1}$$

$$b(x) = b(x; r, N) = \Delta^r F(x). \tag{7.3.2}$$

Дискретная функция $b(x)$ определена на сетке Ω_{N+r} и, следовательно, ее можно разложить в конечный ряд Фурье по ортонормированной системе полиномов Чебышева $\{\tau_k^{\alpha,\beta}(x,N+r)\}_{k=0}^{N-1+r}$:

$$b(x)=\sum_{k=0}^{N-1+r} d_{r,k}^{\alpha,\beta}\tau_k^{\alpha,\beta}(x,N+r), \tag{7.3.3}$$

где

$$d_{r,k}^{\alpha,\beta}=d_{r,k}^{\alpha,\beta}(N+r)=\sum_{t\in\Omega_{N+r}}\mu(t)b(t)\tau_k^{\alpha,\beta}(t,N+r). \tag{7.3.4}$$

Далее запишем дискретный аналог формулы Тейлора ($x\in\Omega_{N+r}$)

$$F(x+1)=F(0)+\frac{\Delta F(0)}{1!}(x+1)+\frac{\Delta^2F(0)}{2!}(x+1)^{[2]}+\dots$$

$$+\frac{\Delta^{r-1}F(0)}{(r-1)!}(x+1)^{[r-1]}+\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x}(x-t)^{[r-1]}\Delta^rF(t). \tag{7.3.5}$$

и подставим здесь вместо выражения $\Delta^rF(t)$ его значение, найденное из (7.3.2) и (7.3.3), тогда

$$F(x+1)=F(0)+\frac{\Delta F(0)}{1!}(x+1)+\ldots+\frac{\Delta^{r-1}F(0)}{(r-1)!}(x+1)^{[r-1]}+$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{N-1+r}d_{r,k}^{\alpha,\beta}\sum_{t=0}^{x}(x-t)^{[r-1]}\tau_k^{\alpha,\beta}(t,N+r). \tag{7.3.6}$$

Учитывая равенство (7.1.8), мы можем переписать (7.3.6) еще так

$$F(x+1)=F(0)+\frac{\Delta F(0)}{1!}(x+1)+\ldots+\frac{\Delta^{r-1}F(0)}{(r-1)!}(x+1)^{[r-1]}+$$

$$\sum_{k=0}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}}\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x}(x-t)^{[r-1]}T_k^{\alpha,\beta}(t,N+r). \tag{7.3.7}$$

Пусть $\lambda=\alpha+\beta$, $(k+\lambda)^{[r]}\neq0$. Тогда мы можем воспользоваться равенством (7.1.19). Это дает

$$T_k^{\alpha,\beta}(t,N+r)=\frac{(N-1+2r)^{[r]}}{(k+\lambda)^{[r]}}\Delta^rT_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t,N+2r). \tag{7.3.8}$$

С другой стороны, из формулы (7.3.5), примененной к функции $T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t,N+2r)$ имеем

$$\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x}(x-t)^{[r-1]}\Delta^rT_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t,N+2r)=$$

$$T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x+1,N+2r)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{\Delta^\nu T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(0,N+2r)}{\nu!}(x+1)^{[\nu]}. \tag{7.3.9}$$

Далее, в силу (7.1.16)

$$\Delta^\nu T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(0,N+2r)=\frac{(k+\lambda-r+1)_\nu}{(N-1+2r)^{[\nu]}}T_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}(0,N+2r-\nu), \tag{7.3.10}$$

а из (7.1.3) имеем

$$T_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}(0,N+2r-\nu)=$$

$$(-1)^{k+r-\nu}\binom{k+\beta}{k+r-\nu} = \frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!} \qquad (7.3.11)$$

Сопоставляя (7.3.10) и (7.3.11), находим

$$\Delta^\nu T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(0,N+2r) = \frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!(N-1+2r)^{[\nu]}}. \qquad (7.3.12)$$

В дальнейшем мы рассмотрим случай, когда $-2 < \lambda < 2$. При этом мы отдельно рассмотрим два случая: 1) $\lambda \notin \{-1,0,1\}$; 2) $\lambda \in \{-1,0,1\}$. Пусть $\lambda \notin \{-1,0,1\}$, тогда каково бы ни было $k = 0,1,\ldots$ выражение $(k+\lambda)^{[r]}$ не обращается в нуль и, следовательно, мы можем воспользоваться равенством (7.3.8). Это в сочетании с (7.3.9) и (7.3.12) дает

$$\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x}(x-t)^{[r-1]}T_k^{\alpha,\beta}(t,N+r) = \frac{(N-1+2r)^{[r]}}{(k+\lambda)^{[r]}}T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x+1,N+2r)-$$

$$\frac{(N-1+2r)^{[r]}}{(k+\lambda)^{[r]}}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu(x+1)^{[\nu]}}{\nu!\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!(N-1+2r)^{[\nu]}}. \qquad (7.3.13)$$

Сопоставляя (7.3.1), (7.3.7) и (7.3.13), мы получим

$$d(x-r) = Q_{r-1,N}(d,x) + A_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x), \qquad (7.3.14)$$

где $x \in \Omega_{N+r}$,

$$Q_{r-1,N}(f,x) = d(-r) + \frac{\Delta d(-r)}{1!}x + \ldots + \frac{\Delta^{r-1}d(-r)}{(r-1)!}x^{[r-1]}, \qquad (7.3.15)$$

$$A_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x) =$$

$$-\sum_{\nu=0}^{r-1}\left(\frac{(-1)^{r-\nu}(N+r)_{r-\nu}}{\nu!\Gamma(\nu-r+\beta+1)}\sum_{k=0}^{N-1+r}\frac{(-1)^k d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}}\frac{\Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu}{(k+r-\nu)!(k+\lambda)^{[r]}}\right)x^{[\nu]}. \qquad (7.3.16)$$

$$\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x) = (N-1+2r)^{[r]}\sum_{k=0}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}}\frac{T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x,N+2r)}{(k+\lambda)^{[r]}}. \qquad (7.8.17)$$

Правую часть равенства (7.3.14), а также функцию $\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(x) = \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x)$ мы будем называть смешанными рядами по полиномам Чебышева $T_k^{\alpha,\beta}(x,M)$.

Перейдем теперь к случаю, когда $\lambda = \alpha+\beta \in \{-1,0,1\}$. Перепишем (7.3.7) следующим образом

$$d(x-r) = Q_{r-1,N}(d,x) + B_{2r-1-\lambda,N}^{\alpha,\beta}(d,x) + G_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x), \qquad (7.3.18)$$

где

$$B_{2r-1-\lambda,N}^{\alpha,\beta}(d,x) = \sum_{k=0}^{r-\lambda-1}\frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}}\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-1}(x-t)^{[r-1]}T_k^{\alpha,\beta}(t,N+r), \qquad (7.3.19)$$

алгебраический полином степени $2r-1-\lambda$,

$$G_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x) = \sum_{k=r-\lambda}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}}\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-1}(x-t)^{[r-1]}T_k^{\alpha,\beta}(t,N+r) \qquad (7.3.20)$$

Если $k+\lambda \geqslant r$, то $(k+\lambda)^{[r]}>0$ и для таких k мы можем воспользоваться равенством (7.3.8) и вытекающим отсюда равенством (7.3.13). Тогда (7.3.20) мы можем переписать так

$$G_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x)=E_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x)+\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x), \tag{7.3.21}$$

где

$$E_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x)=$$

$$-\sum_{\nu=0}^{r-1}\left(\frac{(-1)^{r-\nu}(N+r)_{r-\nu}}{\nu!\Gamma(\nu-r+\beta+1)}\sum_{k=r-\lambda}^{N-1+r}\frac{(-1)^k d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}}\frac{\Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu}{(k+r-\nu)!(k+\lambda)^{[r]}}\right)x^{[\nu]}, \tag{7.3.22}$$

$$\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x)=(N-1+2r)^{[r]}\sum_{k=r-\lambda}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}}\frac{T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x,N+2r)}{(k+\lambda)^{[r]}}. \tag{7.3.23}$$

Сопоставляя (7.3.18)–(7.3.23), мы получаем следующий смешанный ряд в случае $\lambda=\alpha+\beta\in\{-1,0,1\}$

$$d(x-r)=Q_{r-1,N}(d,x)+B_{2r-1-\lambda,N}^{\alpha,\beta}(d,x)+E_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x)+\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x), \tag{7.3.24}$$

где $x\in\Omega_{N+r}$. Покажем, что равенства (7.3.14) и (7.3.24) остаются в силе для всех $x\in\Omega_{N+2r}$, а не только для $x\in\Omega_{N+r}$. В самом деле, рассмотрим функция $\bar d(x)=d(N-1-x)$, $x\in\bar\Omega_{N+2r}$. Тогда, полагая $\bar F(x)=\bar d(x-r)=d(N-1-x+r)=F(N-1+2r-x$, имеем

$$\Delta^r\bar F(t)=\sum_{l=0}^{r}(-1)^{r+l}\binom{r}{l}\bar F(t+l)=\sum_{l=0}^{r}(-1)^{r+l}\binom{r}{l}F(N-1+2r-l-t)=$$

$$\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{2r-\nu}\binom{r}{r-\nu}F(N-l+r+\nu-t)=$$

$$(-1)^r\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{r+\nu}\binom{r}{\nu}F(N-1+r-t+\nu)=(-1)^r\Delta^rF(N-1+r-t)$$

и, стало быть,

$$\bar b(t)=\Delta^r\bar F(t)=(-1)^r\Delta^rF(N-1+r-t)=(-1)^rb(N-1+r-t).$$

Поэтому в силу симметрии (7.1.12) имеем

$$\bar b_k^{\beta,\alpha}(N+R)=\sum_{t\in\Omega_{N+r}}\mu(t;\beta,\alpha,N+r)\tau_k^{\beta,\alpha}(t,N+r)\bar b(t)=$$

$$(-1)^r\sum_{t\in\Omega_{N+r}}\mu(t;\beta,\alpha,N+r)\tau_k^{\beta,\alpha}(t,N+r)b(N-1+r-t)=$$

$$(-1)^{r+k}\sum_{t\in\Omega_{N+r}}\mu(N-1+r-t;\alpha,\beta,N+r)\tau_k^{\alpha,\beta}(N-1+r-t,N+r)b(N-1+r-t)$$

$$=(-1)^{r+k}b_k^{\alpha,\beta}(N+r), \tag{7.3.25}$$

$$\frac{(-1)^{r+k}}{\{h_{k,N}^{\beta,\alpha}\}^{1/2}}T_{k+r}^{\beta-r,\alpha-r}(x,N+2r)=\frac{1}{\{h_{k,N}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}}T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r,}(N-1+2r-x,N+2r).$$

Отсюда и из (7.3.25) выводим

$$\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, N-1+2r-x) = \mathcal{F}_{r,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, x). \tag{7.3.26}$$

Докажем теперь, что равенство (7.3.14) справедливо при всех $x \in \Omega_{N+2r}$. С этой целью положим

$$p_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(x) = Q_{r-1,N}(d,x) + A_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x) \tag{7.3.27}$$

и перепишем равенство (7.3.14) так

$$d(x-r) = p_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta,}(d,x), \quad x \in \Omega_{N+r} \tag{7.3.28}$$

и, аналогично,

$$\bar{d}(x-r) = p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d},x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d},x), \quad x \in \Omega_{N+r} \tag{7.3.29}$$

Равенство (7.3.29) с учетом (7.3.26) принимает следующий вид

$$d(N-1+r-x) = p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d},x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d},x) =$$

$$p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d},x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, N-1+2r-x), \quad x \in \Omega_{N+r}$$

или, что то же самое,

$$d(x-r) = p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, N-1+2r-x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x), \tag{7.3.30}$$

где $N-1+2r-x \in \Omega_{N+r}$, т.е. $x \in \{r, r+1, \dots, N-1+2r\}$. Сопоставляя (7.3.28) с (7.3.30), мы замечаем, что

$$p_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x) = p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, N-1+2r-x), \quad x \in \{r, r+1, \dots, N-1+2r\}. \tag{7.3.31}$$

Поскольку $p_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x)$ и $p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, N-1+r-x)$ представляют собой алгебраические полиномы степени $r-1 < N$, то из (7.3.31) следует, что они тождественно равны. Поэтому равенство (7.3.30) в сочетании с (7.3.28) дает

$$d(x-r) = p_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x), \quad x \in \Omega_{N+2r} \tag{7.3.32}$$

Тем самым доказано, что равенство (7.3.14) справедливо для всех $x \in \Omega_{N+2r}$. Если $2r \leqslant N-1$, то совершенно аналогично доказывается, что равенство (7.3.24) также верно для всех $x \in \Omega_{N+2r}$. Таким образом нами установлена

Теорема 7.3.1 *Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\lambda = \alpha+\beta$ – не целое, $r \leqslant N$, $x \in \Omega_{N+2r}$. Тогда для произвольной дискретной функции $d = d(x)$, заданной на множестве $\bar{\Omega}_{N+2r} = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}$ имеет место равенство*

$$d(x-r) = Q_{r-1,N}(d,x) + A_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x),$$

где функции $Q_{r-1,N}(d,x)$, $A_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x)$, $\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x)$ определены равенствами (7.3.15)–(7.3.17).

Если $\lambda = \alpha+\beta \in \{-1, 0, 1\}$, $x \in \bar{\Omega}_{N+2r}$, то

$$d(x-r) = Q_{r-1,N}(d,x) + B_{2r-1-\lambda,N}^{\alpha,\beta}(d,x) + E_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x),$$

где функции $B_{2r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x)$, $E_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d,x)$, $\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x)$ определены равенствами (7.3.19), (7.3.22) и (7.3.23).

§ 7.4. Смешанный ряд по полиномам $T_n^{0,0}(x,M)$

В случае $\alpha=\beta=0$ смешанный ряд (7.3.23) принимает следующий вид ($\lambda=0$, $d_{r,k}=d_{r,k}^{0,0}$)

$$\mathcal{F}_{r,N}(d,x)=\mathcal{F}_{r,N}^{0,0}(d,x)=(N-1+2r)^{[r]}\sum_{k=r}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{\left\{h_{k,N+r}^{0,0}\right\}^{1/2}}\frac{T_{k+r}^{-r,-r}(x,N+2r)}{k^{[r]}}. \quad (7.4.1)$$

С другой стороны, из (7.1.17) имеем

$$T_{k+r}^{-r,-r}(x,N+2r)=\frac{(-1)^r x^{[r]}(N+2r-x-1)^{[r]}}{(N-1+2r)^{[r]}(N-1+r)^{[r]}}T_{k-r}^{r,r}(x-r,N). \quad (7.4.2)$$

Из (7.4.1) и (7.4.2) находим

$$\mathcal{F}_{r,N}(d,x)=\frac{(-1)^r x^{[r]}(N+2r-x-1)^{[r]}}{(N-1+r)^{[r]}}\sum_{k=r}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r]}}\frac{T_{k-r}^{r,r}(x-r,N)}{\left\{h_{k,N+r}^{0,0}\right\}^{1/2}}. \quad (7.4.3)$$

Подставляя это значение в (7.3.24), получаем

$$d(x)=q_{2r-1,N}(x)+\frac{(-1)^r (x+r)^{[r]}(N-1+r-x)^{[r]}}{(N-1+r)^{[r]}}\sum_{k=r}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r]}}\frac{T_{k-r}^{r,r}(x,N)}{\left\{h_{k,N+r}^{0,0}\right\}^{1/2}} \quad (7.4.4)$$

где $x\in\bar{\Omega}_{N+2r}$,

$$q_{2r-1,N}(x)=Q_{r-1,N}(d,x+r)+B_{2r-1,N}^{0,0}(d,x+r)+E_{r-1,N}^{0,0}(d,x+r)$$

полином степени $2r-1$. Из (7.4.4) следует, что полином $q_{2r-1,N}(x)$ совпадает с функцией $d(x)$ при $x\in\{-r,\ldots,-1\}\cup\{N,\ldots,N-1+r\}$. Поэтому $q_{2r-1,N}(x)$ имеет вид

$$q_{2r-1,N}(x)=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\frac{(x+1)_r(N-x)_r}{(i-1)!(r-i)!(N+i)_r}\left[\frac{d(-i)}{x+i}+\frac{d(N-1+i)}{N-1+i-x}\right]. \quad (7.4.5)$$

Сопоставляя (7.4.4) и (7.4.5), мы можем записать смешанный ряд в следующем виде

$$d(x)=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\frac{(x+1)_r(N-x)_r}{(i-1)!(r-i)!(N+i)_r}\left[\frac{d(-i)}{x+i}+\frac{d(N-1+i)}{N-1+i-x}\right]+$$

$$\frac{(-1)^r (x+r)^{[r]}(N-1+r-x)^{[r]}}{(N-1+r)^{[r]}}\sum_{k=r}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r]}}\frac{T_{k-r}^{r,r}(x,N)}{\left\{h_{k,N+r}^{0,0}\right\}^{1/2}}, \quad (7.4.6)$$

где $x\in\bar{\Omega}_{N+2r}=\{-r,\ldots,-1,0,1,\ldots,N-1,N,\ldots,N-1+r\}$.

§ 7.5. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d)$

Запишем равенства (7.3.14) и (7.3.24) в следующем виде

$$d(x)=q^{\alpha,\beta}(x)+\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d,x+r), \quad (7.5.1)$$

где $q^{\alpha,\beta}(x)$ – некоторый (явно заданный) алгебраический полином степени не выше, чем $2r$, причем ($\lambda = \alpha+\beta$)

$$\deg q^{\alpha,\beta}(f,x) = \begin{cases} 2r-1-\lambda, & \lambda \in \{-1,0,1\}, \\ r-1, & \lambda \notin \{-1,0,1\}, \end{cases}. \tag{7.5.2}$$

Представим $\mathcal{F}^{\alpha,\beta}_{r,N}(d,x+r)$ в следующем виде

$$\mathcal{F}^{\alpha,\beta}_{r,N}(d,x+r) = \mathcal{F}^{\alpha,\beta}_{r,N,n}(d,x+r) + R^{\alpha,\beta}_{r,N,n}(d,x+r), \tag{7.5.3}$$

где

$$\mathcal{F}^{\alpha,\beta}_{r,N,n}(d,x) = (N-1+2r)^{[r]} \sum_{k=\bar{r}}^{n+r} \frac{d^{\alpha,\beta}_{r,k}}{\left\{h^{\alpha,\beta}_{k,N+r}\right\}^{1/2}} \frac{T^{\alpha-r,\beta-r}_{k+r}(x,N+2r)}{(k+\lambda)^{[r]}}, \tag{7.5.4}$$

$$\bar{r} = \begin{cases} r-\lambda, & \lambda \in \{-1,0,1\}, \\ 0, & \lambda \in (-2,2) \setminus \{-1,0,1\}, \end{cases},$$

$$R^{\alpha,\beta}_{r,N,n}(d,x) = \mathcal{F}^{\alpha,\beta}_{r,N}(d,x) - \mathcal{F}^{\alpha,\beta}_{r,N,n}(d,x). \tag{7.5.5}$$

Через $\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(d,x)$ мы обозначим полином степени $n+2r$, определенный с помощью следующего равенства

$$\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(d,x) = q^{\alpha,\beta}(x) + \mathcal{F}^{\alpha,\beta}_{r,N,n}(d,x+r), \tag{7.5.6}$$

где

$$q^{\alpha,\beta}(x-r) = \begin{cases} Q_{r-1,N}(d,x) + A^{\alpha,\beta}_{r-1,N}(d,x), & \lambda \notin \{-1,0,1\}, \\ Q_{r-1,N}(d,x) + B^{\alpha,\beta}_{2r-1-\lambda,N}(d,x) + E^{\alpha,\beta}_{r-1,N}(d,x), & \lambda \in \{-1,0,1\}, \end{cases}$$

а полиномы $Q_{r-1,N}(d,x)$, $A^{\alpha,\beta}_{r-1,N}(d,x)$, $B^{\alpha,\beta}_{2r-1-\lambda,N}(d,x)$ и $E^{\alpha,\beta}_{r-1,N}(d,x)$ определены равенствами (7.3.15), (7.3.16),(7.3.19) и (7.3.22) и имеют степени $r-1$, $r-1$, $2r-1-\lambda$ и $r-1$ соответственно. Из (7.5.1) , (7.5.3) – (7.5.6) имеем

$$d(x-r) = \mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(d,x-r) + R^{\alpha,\beta}_{r,N,n}(d,x). \tag{7.5.7}$$

Установим связь между оператором $\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(d)$ и оператором частичной суммы Фурье-Чебышева $S^{\alpha,\beta}_{n,N+2r} = S^{\alpha,\beta}_{n,N+2r}(f)$, определенным в (7.2.5). Мы ограничимся здесь рассмотрением важного частного случая, когда $\alpha=\beta$. Перепишем сумму $\mathcal{F}^{\alpha}_{r,N,n}(d,x) = \mathcal{F}^{\alpha,\alpha}_{r,N,n}(d,x)$, определенную равенством (7.5.4) следующим образом

$$\mathcal{F}^{\alpha}_{r,N,n}(d,x) = \mathcal{F}^{\alpha}_{r,N,n-2r}(d,x) + I^{\alpha}_{r,N,n}(d,x),$$

где $n \geqslant 2r$,

$$I^{\alpha}_{r,N,n}(d,x) = (N-1+2r)^{[r]} \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{d^{\alpha,\alpha}_{r,k}}{\left\{h^{\alpha,\alpha}_{k,N+r}\right\}^{1/2}} \frac{T^{\alpha-r,\alpha-r}_{k+r}(x,N+2r)}{(k+\lambda)^{[r]}}. \tag{7.5.8}$$

Пользуясь леммой 3.1.2, можем записать

$$I^{\alpha}_{r,N,n}(d,x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{(N-1+2r)^{[r]}}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{d^{\alpha,\alpha}_{r,k}}{\left\{h^{\alpha,\alpha}_{k,N+r}\right\}^{1/2}} \sum_{j=0}^{r} \lambda^{\alpha}_j T^{\alpha,\alpha}_{k+r-2j}(x,N+2r)$$

$$= \varphi^{\alpha}_{r,N,n}(x) + \psi^{\alpha}_{r,N,n}(x), \tag{7.5.9}$$

$$\varphi^{\alpha}_{r,N,n}(x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{(N-1+2r)^{[r]}}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{d^{\alpha,\alpha}_{r,k}}{\left\{h^{\alpha,\alpha}_{k,N+r}\right\}^{1/2}} \sum_{j=[\frac{k+r-n-1}{2}]+1}^{r} \lambda^{\alpha}_j T^{\alpha,\alpha}_{k+r-2j}(x, N+2r), \tag{7.5.10}$$

$$\psi^{\alpha}_{r,N,n}(x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{(N-1+2r)^{[r]}}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{d^{\alpha,\alpha}_{r,k}}{\left\{h^{\alpha,\alpha}_{k,N+r}\right\}^{1/2}} \sum_{j=0}^{[\frac{k+r-n-1}{2}]} \lambda^{\alpha}_j T^{\alpha,\alpha}_{k+r-2j}(x, N+2r), \tag{7.5.11}$$

где $[a]$ – целая часть числа a. Сопоставляя (7.5.6) – (7.5.9), мы можем записать

$$\mathcal{Y}^{\alpha,\alpha}_{n+2r,N}(d,x) = q^{\alpha,\alpha}(x) + \mathcal{F}^{\alpha}_{r,N,n-2r}(d,x+r) + \varphi^{\alpha}_{r,N,n}(d,x+r) + \psi^{\alpha}_{r,N,n}(d,x+r), \tag{7.5.12}$$

а из (7.5.7) имеем

$$d(x) = \mathcal{Y}^{\alpha,\alpha}_{n+2r,N}(d,x) + R^{\alpha}_{r,N,n}(d,x+r), \quad x \in \bar{\Omega}_{N+2r}. \tag{7.5.13}$$

Сопоставляя (7.5.12) и (7.5.13), находим

$$d(x) = q^{\alpha,\alpha}(x) + \mathcal{F}^{\alpha}_{r,N,n-2r}(d,x+r) + \varphi^{\alpha}_{r,N,n}(d,x+r)$$
$$+\psi^{\alpha}_{r,N,n}(d,x+r) + R^{\alpha}_{r,N,n}(d,x+r), \quad x \in \bar{\Omega}_{N+2r}. \tag{7.5.14}$$

Покажем, что ($x \in \bar{\Omega}_{N+2r}$)

$$q^{\alpha,\alpha}(x) + \mathcal{F}^{\alpha}_{r,N,n-2r}(d,x+r) + \varphi^{\alpha}_{r,N,n}(d,x+r) = S^{\alpha}_{n,N+2r}(\bar{d},x+r), \tag{7.5.15}$$

где $S^{\alpha}_{n,N+2r}(\bar{d},x+r)$ – частичная сумма Фурье функции $\bar{d}(x) = d(x-r)$ порядка n по полиномам Чебышева $T^{\alpha,\alpha}_k(x, N+2r)$ $(k = 0,1,\ldots,N+2r-1)$ (см. (7.2.5)). В самом деле, левая часть равенства (7.5.15) представляет собой алгебраический полином степени n, поэтому

$$q^{\alpha,\alpha}(x) + \mathcal{F}^{\alpha}_{r,N,n-2r}(d,x+r) + \varphi^{\alpha}_{r,N,n}(d,x+r) = \sum_{l=0}^{n} v_l T^{\alpha,\alpha}_l(x+r, N+2r). \tag{7.5.16}$$

Далее, из (7.5.11) следует, что

$$\psi^{\alpha}_{r,N,n}(d,x+r) = \sum_{l=n+1}^{n+2r} q_l T^{\alpha,\alpha}_l(x+r, N+2r). \tag{7.5.17}$$

а из (7.5.5) мы заключаем

$$R^{\alpha}_{r,N,n}(d,x+r) = (N-1+2r)^{[r]} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d^{\alpha,\alpha}_{r,k}}{\left\{h^{\alpha,\alpha}_{k,N+r}\right\}^{1/2}} \frac{T^{\alpha-r,\alpha-r}_{k+r}(x+r, N+2r)}{(k+\lambda)^{[r]}} =$$

$$\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{(N-1+2r)^{[r]}}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{d^{\alpha,\alpha}_{r,k}}{\left\{h^{\alpha,\alpha}_{k,N+r}\right\}^{1/2}} \sum_{j=0}^{r} \lambda^{\alpha}_j T^{\alpha,\alpha}_{k+r-2j}(x, N+2r) =$$

$$\sum_{l=n+1}^{N-1+2r} a_l T^{\alpha,\alpha}_l(x+r, N+2r). \tag{7.5.18}$$

Сопоставляя (7.5.14), (7.5.16)–(7.5.18), замечаем, что

$$d(x) = \sum_{l=0}^{n} v_l T_l^{\alpha,\alpha}(x+r, N+2r) + \sum_{l=n+1}^{n+2r} (q_l + a_l) T_l^{\alpha,\alpha}(x+r, N+2r)$$

$$+ \sum_{l=n+2r+1}^{N-1+2r} a_l T_l^{\alpha,\alpha}(x+r, N+2r),$$

где $x \in \bar{\Omega}_{N+2r}$. Заменим здесь x на $x-r$, тогда

$$d(x-r) = \sum_{l=0}^{n} v_l T_l^{\alpha,\alpha}(x, N+2r) + \sum_{l=n+1}^{n+2r} (q_l + a_l) T_l^{\alpha,\alpha}(x, N+2r)$$

$$+ \sum_{l=n+2r+1}^{N-1+2r} a_l T_l^{\alpha,\alpha}(x, N+2r), \quad x \in \Omega_{N+2r} \tag{7.5.19}$$

Но так как система $\{T_l^{\alpha,\alpha}(x, N+2r)\}_{l=0}^{N-1+2r}$ при $\alpha > -1$ ортогональна на Ω_{N+2r}, то правая часть равенства (7.5.19) представляет собой разложение функции $\bar{d}(x) = d(x-r)$ в ряд Фурье по этой системе и, стало быть,

$$\sum_{l=0}^{n} v_l T_l^{\alpha,\alpha}(x, N+2r) = S_{n,N+2r}^{\alpha}(\bar{d}, x), x \in \Omega_{N+2r}. \tag{7.5.20}$$

Сравнивая (7.5.16) с ((7.5.20), приходим к равенству (7.5.15).Тогда (7.5.14) мы можем переписать так

$$d(x) = S_{n,N+2r}^{\alpha}(\bar{d}, x+r) + \psi_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r) + R_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r), \quad x \in \bar{\Omega}_{N+2r}. \tag{7.5.21}$$

Отсюда и из (7.5.13) выводим искомую связь между оператором $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\alpha}(d)$ и оператором частичной суммы Фурье $S_{n,N+2r}^{\alpha}(\bar{d})$:

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha}(d, x) = S_{n,N+2r}^{\alpha}(\bar{d}, x+r) + \psi_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r). \tag{7.5.22}$$

Другое важное свойство операторов $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x)$ выражается равенством

$$\Delta^\nu d(x-r) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x-r) = R_{r-\nu,N+\nu,n+\nu}^{\alpha,\beta}(\Delta^\nu d, x) =$$

$$\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{(N+\nu-1+2(r-\nu))^{[r-\nu]} d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]} \left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}} T_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}(x, N+\nu+2(r-\nu)), \tag{7.5.23}$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$. В самом деле из (7.5.7) имеем

$$d(x-r) - \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x-r) = R_{r,N,n}^{\alpha,\beta}(d, x) =$$

$$\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{(N-1+2r)^{[r]} d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]} \left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}} T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x, N+2r)$$

и, стало быть,

$$\Delta^\nu d(x-r) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x-r) =$$

$$\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{(N-1+2r)^{[r]} d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]} \left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}} \Delta^\nu T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x, N+2r).$$

Если мы воспользуемся равенством (7.1.16), то получим отсюда (7.5.23).

§ 7.6. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}^{0,0}_{n+2r,N}(d)$

Отдельного рассмотрения заслуживает случай $\alpha=\beta=0$. Воспользовавшись равенством (7.4.2), мы можем представить $\mathcal{F}_{r,N,n}(d,x)=\mathcal{F}^{0,0}_{r,N,n}(d,x)$ (см.(7.5.4)) следующим образом

$$\mathcal{F}_{r,N,n}(d,x)=\frac{(-1)^r x^{[r]}(N+2r-x-1)^{[r]}}{(N-1+r)^{[r]}}\sum_{k=r}^{n+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r]}}\frac{T^{r,r}_{k-r}(x-r,N)}{\left\{h^{0,0}_{k,N+r}\right\}^{1/2}}. \tag{7.6.1}$$

С другой стороны, из (7.4.4) следует, что $q^{0,0}(x)=q_{2r-1,N}(x)$, где $q_{2r-1,N}(x)$ определен равенством (7.4.5). Поэтому, сопосставляя (7.6.1) с (7.4.5) и (7.5.6), имеем

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x)=\mathcal{Y}^{0,0}_{n+2r,N}(d,x)=$$

$$\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\frac{(x+1)_r(N-x)_r}{(i-1)!(r-i)!(N+i)_r}\left[\frac{d(-i)}{x+i}+\frac{d(N-1+i)}{N-1+i-x}\right]+$$

$$\frac{(-1)^r(x+r)^{[r]}(N+r-1-x)^{[r]}}{(N-1+r)^{[r]}}\sum_{k=r}^{n+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r]}}\frac{T^{r,r}_{k-r}(x,N)}{\left\{h^{0,0}_{k,N+r}\right\}^{1/2}}, \tag{7.6.2}$$

Из (7.4.3), (7.5.5) и (7.6.1) мы имеем далее

$$R_{r,N,n}(d,x+r)=R^{0,0}_{r,N,n}(d,x+r)=$$

$$\frac{(-1)^r(x+r)^{[r]}(N+r-1-x)^{[r]}}{(N-1+r)^{[r]}}\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r]}}\frac{T^{r,r}_{k-r}(x,N)}{\left\{h^{0,0}_{k,N+r}\right\}^{1/2}}, \tag{7.6.3}$$

поэтому $(x\in\bar{\Omega}_{N+2r})$

$$d(x)-\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x)=R_{r,N,n}(d,x+r)=$$

$$\frac{(-1)^r(x+r)^{[r]}(N+r-1-x)^{[r]}}{(N-1+r)^{[r]}}\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r]}}\frac{T^{r,r}_{k-r}(x,N)}{\left\{h^{0,0}_{k,N+r}\right\}^{1/2}}. \tag{7.6.4}$$

Равенство (7.5.23) в случае $\alpha=\beta=0$ и $x\in\bar{\Omega}_{N+2r}\cap[-r,N-1+r-\nu]$ приобретает следующий вид

$$\Delta^\nu d(x)-\Delta^\nu\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x)=$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(x+r)^{[r-\nu]}(N-x)_{r-\nu}}{(N-1+r-\nu)^{[r-\nu]}}\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r-\nu]}}\frac{T^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu}(x+\nu,N+\nu)}{\left\{h^{0,0}_{k,N+r}\right\}^{1/2}}. \tag{7.6.5}$$

Из равенства (7.6.5) следует, что полином $\Delta^\nu\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x)$ при $0\leqslant\nu\leqslant r-1$ интерполирует функцию $\Delta^\nu d(x)$ в точках множества $\{-r,\dots,-\nu-1\}\cup\{N,\dots,N-1+r-\nu\}$, в частности, $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x)$ интерполирует $d(x)$ в точках множества $\{-r,\dots,-1\}\cup\{N,N+1,\dots,N-1+r\}$. Оператор $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x)$ допускает еще одно представление, отличное от (7.5.22). Чтобы убедиться в этом мы обратимся к равенству (7.6.2), которую перепишем в следующем виде

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x)=q_{2r-1,N}(x)+\mathcal{F}_{r,n-2r}(d,N,x)+I_{r,n}(d,N,x), \tag{7.6.6}$$

где $q_{2r-1,N}(x)$ – алгебраический полином степени $2r-1$, определенный равенством (7.4.5),

$$\mathcal{F}_{r,n-2r}(d,N,x) = \frac{(-1)^r(x+r)^{[r]}(N+r-x-1)^{[r]}}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{n-r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} \frac{T_{k-r}^{r,r}(x,N)}{\left\{h_{k,N+r}^{0,0}\right\}^{1/2}}, \tag{7.6.7}$$

$$I_{r,n}(d,N,x) = \frac{(-1)^r(x+r)^{[r]}(N+r-x-1)^{[r]}}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} \frac{T_{k-r}^{r,r}(x,N)}{\left\{h_{k,N+r}^{0,0}\right\}^{1/2}}. \tag{7.6.8}$$

В силу леммы 3.1.4 мы можем записать

$$I_{r,n}(d,N,x) = \Phi_{r,n}(d,N,x) + \Psi_{r,n}(d,N,x), \tag{7.6.9}$$

$$\Phi_{r,n}(d,N,x) = \frac{(-1)^r(N+r)^{[r]}(N+r+1)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \times$$

$$\sum_{k=n-r}^{n+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}\left\{h_{k,N+r}^{0,0}\right\}^{1/2}} \sum_{i=0}^{[(n+r-k)/2]} (-1)^i \sigma_i^k T_{k-r+2i}(x,N), \tag{7.6.10}$$

$$\Psi_{r,n}(d,N,x) = \frac{(-1)^r(N+r)^{[r]}(N+r+1)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \times$$

$$\sum_{k=n-r}^{n+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}\left\{h_{k,N+r}^{0,0}\right\}^{1/2}} \sum_{i=[(n+r-k)/2]+1}^{r} (-1)^i \sigma_i^k T_{k-r+2i}(x,N), \tag{7.6.11}$$

Положим $R_{r,n}(d,N,x) = R_{r,N,n}(d,x+r)$,

$$U_{r,n}(d,N,x) = \Phi_{r,n}(d,N,x) + \mathcal{F}_{r,n-2r}(d,N,x), \tag{7.6.12}$$

$$V_{r,n}(d,N,x) = \Psi_{r,n}(d,N,x) + R_{r,n}(d,N,x) \tag{7.6.13}$$

Из (7.6.7) и (7.6.10) следует, что $U_{r,n}(d,N,x)$ представляет собой алгебраический полином степени n, т.е.

$$U_{r,n}(d,N,x) = \sum_{k=0}^{n} u_k T_k(x,N), \tag{7.6.14}$$

а из (7.6.4) и (7.6.11) имеем

$$V_{r,n}(d,N,x) = \sum_{k=n+1}^{N-1} v_k T_k(x,N), \tag{7.6.15}$$

СС другой стороны, из (7.6.4), (7.6.6)–(7.6.9), (7.6.12)–(7.6.13) вытекает, что

$$d(x) = U_{r,n}(d,N,x) + V_{r,n}(d,N,x), \quad x \in \bar{\Omega}_{N+2r}. \tag{7.6.16}$$

Из (7.6.14) – (7.6.16) следует, что

$$U_{r,n}(d,N,x) = S_n(d,N,x), \tag{7.6.17}$$

где

$$S_n(d,N,x) = \sum_{k=0}^{n} d_k^{0,0} \tau_k(x,N), \tag{7.6.18}$$

частичная сумма Фурье функции d на множестве Ω_N по полиномам Чебышева $\tau_k(x,N)=\tau_k^{0,0}(x,N)$ $(0\leqslant k\leqslant N-1)$. Поскольку в силу (7.6.6), (7.6.13) и (7.6.16)

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x)=d(x)-R_{r,n}(d,N,x)=d(x)-V_{r,n}(d,N,x)+\Psi_{r,N}(d,N,x)=$$

$$U_{r,n}(d,N,x)+\Psi_{r,N}(d,N,x),$$

то из (7.6.17) находим окончательно

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x)=S_n(d,N,x)+\Psi_{r,N}(d,N,x). \tag{7.6.19}$$

§ 7.7. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}$

Мы будем рассматривать оператор $\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}=\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(d)$ как аппарат приближения дискретных функций, заданных на сетке $\bar\Omega_{N+2r}$. При этом нам понадобятся некоторые обозначения. Положим

$$B^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N)=$$

$$\max\left\{\frac{|T^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}_{k+r-\nu}(x,N+2r-\nu)|}{\sqrt{h^{\alpha,\beta}_{k,N+r}}}:n+r+1\leqslant k\leqslant N-1+r\right\}, \tag{7.7.1}$$

$$H^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N)=\frac{\left(\sqrt{\frac{x+1}{N}}+\frac1n\right)^{\beta}\left(\sqrt{1-\frac{x}{N+2r}}+\frac1n\right)^{\alpha}}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{N}}+\frac1n\right)^{r-\nu-1/2}\left(\sqrt{1-\frac{x}{N+2r}}+\frac1n\right)^{r-\nu-1/2}}B^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N),$$

$$U^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N)=\left(\sqrt{\frac{x+1}{N}}+\frac1n\right)^{\beta-r+\nu+1/2}\left(\sqrt{1-\frac{x}{N+2r}}+\frac1n\right)^{\alpha-r+\nu+1/2}$$

$$\times\left(\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\left(\frac{n^{r-\nu}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}}\right)^2\frac{[T^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}_{k+r-\nu}(x,N+2r-\nu)]^2}{h^{\alpha,\beta}_{k,N+r}}\right)^{1/2},$$

$$\chi^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(N)=\max\{H^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N):x\in\Omega_{N+2r}\}, \tag{7.7.2}$$

$$\sigma^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(N)=2^{r-\nu}n^{-1/2}\max\{U^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N):x\in\Omega_{N+2r}\}, \tag{7.7.3}$$

Заметим, что

$$B^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N)\leqslant\chi^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(N)\left(\sqrt{\frac{x+1}{N}}+\frac1n\right)^{-\beta+r-\nu-1/2}\left(\sqrt{1-\frac{x}{N+2r}}+\frac1n\right)^{-\alpha+r-\nu-1/2}. \tag{7.7.4}$$

С произвольной дискретной функцией $d=d(x)$, заданной на сетке $\bar\Omega_{N+2r}$, мы свяжем дискретную функцию $g(x)=\frac{N-1+2r}{2}\Delta^r d(x-r)$, определенную на Ω_{N+r} . Пусть $E_{n+r}(g)_{l^{N+r}_{2,\mu}}$ – представляет собой наилучшее приближение функции $g(x)$ в пространстве $l^{N+r}_{2,\mu}$ алгебраическими полиномами степени $n+r$. Тогда мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 7.7.1. *Если* $\alpha,\beta>-1$, $\lambda=\alpha+\beta$, $1\leqslant r$*–целое,* $0\leqslant\nu\leqslant r-1$, $x\in\Omega_{N+2r-\nu}$, *то имеет место оценка*

$$\left(\frac{N-1+2r}{2}\right)^{\nu}\left|\Delta^{\nu}d(x-r)-\Delta^{\nu}\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(d,x-r)\right|\leqslant$$

$$B^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N)2^{r-\nu}\left(\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{1}{((k+\lambda)^{[r-\nu]})^2}\right)^{1/2}E_{n+r}(g)_{l^{N+r}_{2,\mu}}. \tag{7.7.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обратимся к равенству (7.5.23). С учетом введенных выше обозначений имеем

$$\left|\Delta^{\nu}d(x-r)-\Delta^{\nu}\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(d,x-r)\right|\leqslant$$

$$B^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N)\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{(N-1+2r-\nu)^{[r-\nu]}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}}|d^{\alpha,\beta}_{r,k}|.$$

Отсюда имеем $(0\leqslant\nu\leqslant r-1)$

$$\left(\frac{N-1+2r}{2}\right)^{\nu}\left|\Delta^{\nu}d(x-r)-\Delta^{\nu}\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(d,x-r)\right|\leqslant$$

$$B^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N)\left(\frac{N-1+2r}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{(N-1+2r-\nu)^{[r-\nu]}|d^{\alpha,\beta}_{r,k}|}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}}\leqslant$$

$$B^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N)\left(\frac{N-1+2r}{2}\right)^{r}\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{2^{r-\nu}|d^{\alpha,\beta}_{r,k}|}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}}\leqslant$$

$$B^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(x,N)2^{r-\nu}\left(\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{1}{((k+\lambda)^{[r-\nu]})^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\left[\left(\frac{N-1+2r}{2}\right)^{r}d^{\alpha,\beta}_{r,k}\right]^2\right)^{1/2}. \tag{7.7.6}$$

В силу (3.2)–(3.4) мы замечаем, что

$$\left(\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\left[\left(\frac{N-1+2r}{2}\right)^{r}d^{\alpha,\beta}_{r,k}\right]^2\right)^{1/2}=E_{n+r}(g)_{l^{N+r}_{2,\mu}}, \tag{7.7.7}$$

Сопоставляя (7.7.6) и (7.7.7), приходим к утверждению теоремы 7.7.1.

Следствие 7.7.1. *В условиях теоремы 7.7.1 имеет место следующая оценка* $(x\in\Omega_{N+2r-\nu})$

$$\left(\frac{N-1+2r}{2}\right)^{\nu}\left|\Delta^{\nu}d(x-r)-\Delta^{\nu}\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(d,x-r)\right|\leqslant c(\lambda,r)\chi^{\alpha,\beta}_{n,r,\nu}(N)\frac{E_{n+r}(g)_{l^{N+r}_{2,\mu}}}{n^{r-\nu-1/2}}\times$$

$$\left(\sqrt{\frac{x+1}{N}}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta+r-\nu-1/2}\left(\sqrt{1-\frac{x}{N+2r}}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha+r-\nu-1/2}, \tag{7.7.8}$$

где $c(\lambda,r)$ *– положительное число, зависящее лишь от указанных параметров.*

В самом деле, из теремы 7.7.1 нетрудно увидеть что

$$\left(\frac{N-1+2r}{2}\right)^{\nu}\left|\Delta^{\nu}d(x-r)-\Delta^{\nu}\mathcal{Y}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(d,x-r)\right|\leqslant$$

$$c(\lambda,r)B_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x,N)\frac{E_{n+r}(g)_{l_{2,\mu}^{N+r}}}{n^{r-\nu-1/2}}. \qquad (7.7.9)$$

Если мы воспользуемся оценкой (7.7.4), то из (7.7.9) получим (7.7.8).

Замечание 3.7. Эксперимент, проведенный с помощью ЭВМ показал, что число $\chi_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N)$ не имеет тенденции к неограниченному росту при $N,n\to\infty$.

Теорема 7.7.2. *Если $\alpha,\beta>-1$, $\lambda=\alpha+\beta$, $1\leqslant r$–целое, $0\leqslant\nu\leqslant r-1$, $x\in\Omega_{N+2r-\nu}$, то имеет место оценка*

$$\left(\frac{N-1+2r}{2}\right)^{\nu}\left|\Delta^{\nu}d(x-r)-\Delta^{\nu}\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d,x-r)\right|\leqslant$$

$$\sigma_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N)\frac{E_{n+r}(g)_{l_{2,\mu}^{N+r}}}{n^{r-\nu-1/2}}\left(\sqrt{\frac{x+1}{N}}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta+r-\nu-1/2}\left(\sqrt{1-\frac{x}{N+2r}}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha+r-\nu-1/2}.$$

Доказательство этой теоремы получается аналогично доказательству теоремы 7.7.1, используя введенные выше обозначение 7.7.3.

§ 7.8. Операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f)$

В предыдущих разделах были рассмотрены операторы $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d)$, действующие в пространствах дискретных функций вида $d:\Omega_{N+2r}\to\mathbf{R}$. Отправляясь от этих операторов, мы построим здесь операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f)$, действующие в пространстве непрерывных функций $C[-1,1]$ и исследуем их аппроксимативные свойства. Пусть функция $f=f(x)$ определена в узлах сетки $H_\Lambda=\{x_j=-1+\frac{2j}{\Lambda-1}\}_{j=0}^{\Lambda-1}$, где $\Lambda=N+2r, N,r\in\mathbf{N}$. Определим на сетке $\bar{\Omega}_\Lambda=\{-r,-r+1,\dots,-1,0,1,\dots,N,\dots,N-1+r$ дискретную функцию $d:\bar{\Omega}_\Lambda\to\mathbf{R}$ следующим образом

$$d(j-r)=f(x_j),\quad (j\in\Omega_\Lambda). \qquad (7.8.1)$$

Тогда для функции $d=d(j)$ мы можем построить полином $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d)$ с помощью равенства (7.5.6). Положим

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f)=\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x)=\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}\left(d,\frac{\Lambda-1}{2}(1+x)-r\right). \qquad (7.8.2)$$

Ясно, что $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ вместе с $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d,t)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+2r$. Поэтому мы можем рассмотреть $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f)$ как оператор, действующий в пространстве $C[-1,1]$. Отметим следующие свойства оператора $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f)$, непосредственно вытекающие из свойств оператора $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d)$. Из (7.8.2) и (7.5.7) имеем

$$f(x_j)-\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x_j)=d(j-r)-\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d,j-r)=R_{r,N,n}^{\alpha,\beta}(d,j)=$$

$$(N-1+2r)^{[r]}\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}}\frac{T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(j,N+2r)}{(k+\lambda)^{[r]}}. \qquad (7.8.3)$$

Если мы положим $\sigma=2/(N-1+2r)$, то из (7.5.23) в сочетании с (7.8.1) выводим

$$\Delta_\sigma^\nu f(x_j)-\Delta_\sigma^\nu\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x_j)=\Delta^\nu d(j-r)-\Delta^\nu\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d,j-r)=$$

$$\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{(N+\nu-1+2(r-\nu))^{[r-\nu]}d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}\left\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\right\}^{1/2}}T_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu,\beta-r+\nu}(x,N+\nu+2(r-\nu)), \qquad (7.8.4)$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, Δ_σ^ν – конечная разность порядка ν с шагом σ. Если мы обратимся к оценке (7.7.8), то из (7.8.4) получим $(0 \leqslant j \leqslant N+2r-\nu-1)$

$$\sigma^{-\nu}\left|\Delta_\sigma^\nu f(x_j) - \Delta_\sigma^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x_j)\right| \leqslant c(\lambda,r)\chi_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N)\frac{E_{n+r}(g)_{l_{2,\mu}^{N+r}}}{n^{r-\nu-1/2}}\times$$

$$\left(\sqrt{\frac{j+1}{N}}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta+r-\nu-1/2}\left(\sqrt{1-\frac{j}{N+2r}}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha+r-\nu-1/2}, \qquad (7.8.5)$$

где $g(j) = \sigma^{-\nu}\Delta^r d(j-r)$. Отсюда, воспользовавшись известной формулой

$$\sigma^{-\nu}\left[\Delta_\sigma^\nu f(x_j) - \Delta_\sigma^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x_j)\right] = f^{(\nu)}(x_j+\nu\sigma\theta_j) - \left(\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x_j+\nu\sigma\theta_j)\right)^{(\nu)},$$

где $0<\theta_j<1$, в предположении ν – кратной непрерывной дифференцируемости функции $f=f(x)$, мы получим

$$\left|f^{(\nu)}(x_j+\nu\sigma\theta_j) - \left(\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x_j+\nu\sigma\theta_j)\right)^{(\nu)}\right| \leqslant c(\lambda,r)\chi_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N)\frac{E_{n+r}(g)_{l_{2,\mu}^{N+r}}}{n^{r-\nu-1/2}}\times$$

$$\left(\sqrt{\frac{j+1}{N}}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta+r-\nu-1/2}\left(\sqrt{1-\frac{j}{N+2r}}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha+r-\nu-1/2}, \qquad (7.8.6)$$

где $0<\theta_j<1$, $0 \leqslant j \leqslant N+2r-\nu$.

Аналогично, из теоремы 7.7.2 мы выводим слудующую оценку

$$\left|f^{(\nu)}(x_j+\nu\sigma\theta_j) - \left(\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x_j+\nu\sigma\theta_j)\right)^{(\nu)}\right| \leqslant$$

$$\sigma_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N)\frac{E_{n+r}(g)_{l_{2,\mu}^{N+r}}}{n^{r-\nu-1/2}}\left(\sqrt{\frac{j+1}{N}}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta+r-\nu-1/2}\left(\sqrt{1-\frac{j}{N+2r}}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha+r-\nu-1/2}.$$

§ 7.9. Операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{0,0}(f)$ и классы $A_q(B)$

Обозначим через $\mathcal{E}_q$ эллипс с фокусами в точках -1 и 1, сумма полуосей которого равна $1/q$. Мы будем здесь рассмотривать аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}^{0,0}(f)$ на классах $A_q(B)$, состоящих из функций $f=f(x)$, аналитических в эллипсе $\mathcal{E}_q$, ограниченных там по модулю константой B и принимающих действительные значения на $[-1,1]$. Рассмотрим сначала некоторые вспомогательные утверждения Пусть дискретная функция $\bar{d}=\bar{d}(t)$ задана на сетке $\Omega_{N+2r} = \{0,1,\ldots,N-1,N,\ldots,N-1,N-1+2r$. Тогда мы можем определить коэффициенты Фурье-Чебышева

$$\bar{d}_k^\alpha = \bar{d}_k^\alpha(N+2r) = \sum_{j=0}^{N-1+2r}\mu(j;\alpha,\alpha)\bar{d}(j)\tau_k^{\alpha,\alpha}(j,N+2r), \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1+2r \quad (7.9.1)$$

и составить дискретный ряд Фурье–Чебышева

$$\bar{d}(t) = \sum_{k=0}^{N-1+2r}\bar{d}_k^\alpha\tau_k^{\alpha,\alpha}(t,N+2r), \quad t\in\Omega_{N+2r}. \qquad (7.9.2)$$

Если мы воспользуемся равенством (7.1.8), то (7.9.2) можно переписать так

$$\bar{d}(t) = \sum_{k=0}^{N-1+2r} \frac{\bar{d}_k^\alpha}{\sqrt{h_{k,N+2r}^{\alpha,\alpha}}} T_k^{\alpha,\alpha}(t, N+2r), \quad t \in \Omega_{N+2r}. \tag{7.9.3}$$

Теперь обратимся к равенству (7.1.16), из которого в сочетании с (7.9.3) получим

$$\Delta^r \bar{d}(t) = \sum_{k=r}^{N-1+2r} \frac{\bar{d}_k^\alpha}{\sqrt{h_{k,N+2r}^{\alpha,\alpha}}} \frac{(k+2\alpha+1)_r}{(N+2r-1)^{[r]}} T_{k-r}^{\alpha+r,\alpha+r}(t, N+r), \quad t \in \Omega_{N+r}. \tag{7.9.4}$$

С другой стороны мы можем записать

$$\Delta^r \bar{d}(t) = \sum_{l=0}^{N-1+r} \bar{d}_{r,l,N+r} \tau_l(t, N+r), \tag{7.9.5}$$

где $\tau_l(t, N+r) = \tau_l^{0,0}(t, N+r)$,

$$\bar{d}_{r,l,N+r} = \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N-1+r} \Delta^r \bar{d}(j) \frac{T_l(j, N+r)}{\sqrt{h_{l,N+r}^{0,0}}}. \tag{7.9.6}$$

Подставим в (7.9.6) вместо функции $\Delta^r \bar{d}(j)$ ее значение из (7.9.4), тогда

$$\bar{d}_{r,l,N+r} =$$

$$\frac{2}{N+r} \sum_{k=r}^{N-1+2r} \frac{\bar{d}_k^\alpha}{\sqrt{h_{k,N+2r}^{\alpha,\alpha}}} \frac{(k+2\alpha+1)_r}{(N+2r-1)^{[r]}} \sum_{j=0}^{N-1+r} T_{k-r}^{\alpha+r,\alpha+r}(j, N+r) \frac{T_l(j, N+r)}{\sqrt{h_{l,N+r}^{0,0}}} =$$

$$\frac{2}{(N+r)\sqrt{h_{l,N+r}^{0,0}}} \sum_{s=0}^{\left[\frac{N-1+r-l}{2}\right]} \frac{\bar{d}_{l+r+2s}^\alpha}{\sqrt{h_{l+r+2s,N+2r}^{\alpha,\alpha}}} \frac{(l+r+2s+2\alpha+1)_r}{(N+2r-1)^{[r]}} b_{l,s}, \tag{7.9.7}$$

где

$$b_{l,s} = \sum_{j=0}^{N-1+r} T_{l+2s}^{\alpha+r,\alpha+r}(j, N+r) T_l(j, N+r).$$

Для вычисления последней суммы мы обратимся к лемме 7 .1.1. Полагая в этой лемме $\alpha = 0$, $a = \alpha + r$, $n = l + 2s$, получим

$$b_{l,s} = T_{l+2s}^{\alpha+r,\alpha+r}(N-1+r, N+r) \times$$

$$\frac{(l+2s)!l!(l+2s+2\alpha+2r+1)_l(1/2)_s(\alpha+r)_s}{l!(2s)!(\alpha+r+1)_l(l+1)_l(l+\alpha+r+1)_s(l+3/2)_s} \frac{N+r}{2} h_{l,N+r}^{0,0}$$

$$= \frac{(l+2s+2\alpha+2r+1)_l(1/2)_s(\alpha+r)_s\Gamma(l+2s+\alpha+r+1)h_{l,N+r}^{0,0}}{(2s)!(\alpha+r+1)_l(l+1)_l(l+\alpha+r+1)_s(l+3/2)_s\Gamma(\alpha+r+1)} \frac{N+r}{2}.$$

Подставляя это значение в (7.9.7), мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 7.9.1 *Пусть $\alpha > -1$, $r \geqslant 0$. Тогда*

$$\bar{d}_{r,l,N+r} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{N-1+r-l}{2}\right]} \sqrt{\frac{h_{l,N+r}^{0,0}}{h_{l+r+2s,N+2r}^{\alpha,\alpha}}} \frac{(l+r+2s+2\alpha+1)_r}{(N+2r-1)^{[r]}} \times$$

$$\frac{(l+2s+2\alpha+2r+1)_l(1/2)_s(\alpha+r)_s\Gamma(l+2s+\alpha+r+1)}{(2s)!(\alpha+r+1)_l(l+1)_l(l+\alpha+r+1)_s(l+3/2)_s\Gamma(\alpha+r+1)}\bar{d}^{\alpha}_{l+r+2s}(N+2r).$$

Лемма 7.9.2 *Пусть* $\alpha>-1$, $r\geqslant 1$, $0<q<1$, $B>0$, $\bar{d}=\bar{d}(t)$ *– дискретная функция, заданная на* Ω_{N+2r}. *Тогда если*

$$|\bar{d}^{\alpha}_k(N+2r)|\leqslant \frac{Bq^k}{(k+1)^{r-1}},\quad k=0,1,\ldots,N+2r-1, \tag{7.9.8}$$

то

$$|\bar{d}_{r,l,N+r}|\leqslant c(\alpha,r,q)B\frac{(l+1)q^l}{(N+2r-1)^r},\quad l=0,1,\ldots,N+r-1$$

Доказательство. Из равенства (7.1.7) имеем

$$\frac{h^{0,0}_{l,N+r}}{h^{\alpha,\alpha}_{l+r+2s,N+2r}}=\frac{2^{-2\alpha}(2l+2r+4s+2\alpha+1)\Gamma(l+2s+2\alpha+r+1)(l+r+2s)!}{(2l+1)(\Gamma(l+2s+\alpha+r+1))^2}\times$$

$$\frac{(N+r+l)^{[l]}(N+2r-1)^{[l+r+2s]}}{(N+r-1)^{[l]}(N+3r+l+2s+2\alpha)^{[l+r+2s]}},$$

при этом

$$\frac{(N+r+l)^{[l]}(N+2r-1)^{[l+r+2s]}}{(N+r-1)^{[l]}(N+3r+l+2s+2\alpha)^{[l+r+2s]}}=$$

$$\frac{(N+r+l)^{[l]}}{(N+3r+l+2s+2\alpha)^{[l]}}\frac{(N+2r-1)^{[r+2s]}}{(N+3r+2s+2\alpha)^{[r+2s]}}\frac{(N+r-2s-1)^{[l]}}{(N+r-1)^{[l]}}<1. \tag{7.9.9}$$

Кроме того, в силу формулы Стирлинга

$$\frac{\Gamma(l+2s+2\alpha+r+1)(l+r+2s)!}{(\Gamma(l+2s+\alpha+r+1))^2}\leqslant c(\alpha). \tag{7.9.11}$$

Сопоставляя (7.9.9) – (7.9.11), замечаем, что

$$\frac{h^{0,0}_{l,N+r}}{h^{\alpha,\alpha}_{l+r+2s,N+2r}}\leqslant c(\alpha,r)\frac{l+s+1}{l+1}. \tag{7.9.12}$$

Далее

$$\frac{(l+2s+2\alpha+2r+1)_l(1/2)_s(\alpha+r)_s\Gamma(l+2s+\alpha+r+1)}{(2s)!(\alpha+r+1)_l(l+1)_l(l+\alpha+r+1)_s(l+3/2)_s\Gamma(\alpha+r+1)}=$$

$$\frac{\Gamma(2(l+s)+2\alpha+2r+1)}{\Gamma(l+s+3/2)\Gamma(l+s+\alpha+r+1)}\frac{\Gamma(l+1)\Gamma(l+3/2)}{\Gamma(2l+1)}\frac{\Gamma(l+2s+\alpha+r+1)}{\Gamma(l+2s+2\alpha+2r+1)}\times$$

$$\frac{\Gamma(s+\frac12)\Gamma(s+\alpha+r)}{\Gamma(2s+1)\Gamma(\frac12)\Gamma(\alpha+r)}\leqslant c(\alpha,r)\frac{\Gamma(2(l+s))}{\Gamma(l+s+\frac12)\Gamma(l+s)}\frac{\Gamma(l)\Gamma(l+\frac12)}{\Gamma(2l)}\frac{\Gamma(s+\frac12)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)}\times$$

$$(s+1)^{\alpha+r-1}\frac{l+1}{l+s+1}=c(\alpha,r)2^{2(l+s)-1}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2l-1}\sqrt{\pi}2^{2s-1}\sqrt{\pi}}(s+1)^{\alpha+r-1}\frac{l+1}{l+s+1}=$$

$$c(\alpha,r)\frac{2(l+1)}{l+s+1}(s+1)^{\alpha+r-1}. \tag{7.9.13}$$

Из леммы 7.9.1 с учетом оценок (7.9.12), (7.9.13) и условия (7.4.8) имеем

$$|\bar{d}_{r,l,N+r}|\leqslant$$

$$c(\alpha,r)B\sum_{s=0}^{[\frac{N-1+r-l}{2}]}\left(\frac{l+1}{l+s+1}\right)^{\frac12}\frac{(s+1)^{\alpha+r-1}}{(l+r+2s+1)^{r-1}}\frac{(l+r+2s+2\alpha+1)_r}{(N+2r-1)^{[r]}}q^{l+r+2s}\leqslant$$

$$\frac{c(\alpha,r)Bq^{l+r}}{(N+2r-1)^{[r]}}\sum_{s=0}^{[\frac{N-1+r-l}{2}]}(s+1)^{\alpha+r-1}(l+2s+1)q^{2s}\leqslant c(\alpha,r,q)B\frac{(l+1)q^l}{(N+2r-1)^r}.$$

Лемма 7.9.2 доказана.

Лемма 7.9.3. *Пусть* $r\geqslant 1$, $0<q<1$, $B>0$, $f^{(r-1)}\in A_q(B)$, $\bar d(j)=f(x_j)$ $(x_j\in H_\Lambda)$,

$$\bar d_k(N+2r)=\frac{2}{N+2r}\sum_{j=0}^{N-1+2r}\bar d(j)\tau_k(j,N+2r).$$

Тогда

$$|\bar d_k(N+2r)|\leqslant C(r,q)B\frac{q^k}{(k+1)^{r-1}},\quad k=0,1,\dots N-1+2r.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $k\geqslant 2r+2$. Мы имеем

$$\left|\bar d_k(N+2r)\right|=\left|\frac{2}{N+2r}\sum_{j=0}^{N-1+2r}\bar d(j)\tau_k(j,N+2r)\right|=$$

$$\left|\frac{2}{N+2r}\sum_{j=0}^{N-1+2r}[f(x_j)-\mathcal{Y}^0_{(k-2r-1)+2r}(f,x_j)]\tau_k(j,N+2r)\right|. \tag{7.9.14}$$

(Здесь мы воспользовалмись тем фактом, что $\mathcal{Y}^0_{(k-2r-1)+2r}(f,x)$ представляет собой алгебраический полином степени $k-1$ и ,следовательно,

$$\frac{2}{N+2r}\sum_{j=0}^{N-1+2r}\mathcal{Y}^0_{(k-2r-1)+2r}(f,x_j)\tau_k(j,N+2r)=0.)$$

Из равенства (7.9.14) и теоремы 5.9.2 , воспользовавшись неравенством Коши-Шварца, имеем

$$\left|\bar d_k(N+2r)\right|\leqslant\frac{2\sqrt{2\pi}B\kappa_r q^{k-r+1}}{(1-q)(1-q^2)^2(k-2r-1)^{r-1}}\frac{2}{N+2r}\sum_{j=0}^{N-1+2r}|\tau_k(j,N+2r)|\leqslant$$

$$c(r,q)\frac{q^k}{(k+1)^{r-1}}\left(\frac{2}{N+2r}\sum_{j=0}^{N-1+2r}1\right)^{1/2}=c(r,q)\frac{q^k}{(k+1)^{r-1}},2r+2\leqslant k\leqslant N-1+2r.$$

Лемма 7.9.3 доказана.

Для целых t при $-\nu\leqslant t\leqslant N-1$ положим

$$\theta_N(t)=\theta(t;N,r,\nu)=\max_{1\leqslant n\leqslant N-1+\nu}|\tau_n^{r-\nu,r-\nu}(t+\nu,N+\nu)|\left[\frac{t+\nu+1}{N}(1-\frac{t}{N})\right]^{\frac{r-\nu}{2}+\frac14}, \tag{7.9.15}$$

$$\eta_N(t)=\eta_N(t;r,\nu)=\frac{2^{r-\nu}N^{2(r-\nu)}}{(N-1+r-\nu)^{[r-\nu]}(N-1+2r)^{r-\nu}}\frac{(t+r)^{[r-\nu]}(N-t)_{r-\nu}}{[(t+\nu+1)(N-t)]^{r-\nu}}$$

$$\times\max_{1\leqslant k\leqslant N-1+r}\left(\frac{h^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu,N+\nu}}{h^{0,0}_{k,N+r}}\right)^{1/2}. \tag{7.9.16}$$

Положим $\bar{d}(t) = f(x_t)$, $0 \leqslant t \leqslant N-1+2r$, $d(j) = \bar{d}(j+r)$, $j \in \bar{\Omega}_{N+2r}$. Тогда из (7.8.2) и (7.6.5) имеем

$$\Delta_\sigma^\nu f(x_j) - \Delta_\sigma^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_j) = \Delta^\nu d(j-r) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,j-r) =$$
$$\frac{(-1)^{r-\nu} j^{[r-\nu]}(N+r-j)_{r-\nu}}{(N-1+r-\nu)^{[r-\nu]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r-\nu]}} \frac{T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(j-r+\nu,N+\nu)}{\left\{h_{k,N+r}^{0,0}\right\}^{1/2}}. \tag{7.9.17}$$

Сопоставляя (7.9.15)–(7.9.17), находим

$$\sigma^{-\nu}|\Delta_\delta^\nu f(x_j) - \Delta_\delta^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_j)| \leqslant \eta_N(j-r)\theta_N(j-r)\times$$
$$\left[\frac{j-r+\nu+1}{N}(1-\frac{j-r}{N})\right]^{\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}} \left(\frac{N-1+2r}{2}\right)^r \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{|d_{r,k}|}{k^{[r-\nu]}}, \tag{7.9.18}$$

где $r-\nu \leqslant j \leqslant N-1+r$.

Теорема 7.9.1 *Пусть $r \geqslant 1$, $0 < q < 1$, $B > 0$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, $r-\nu \leqslant j \leqslant N-1+r$, $x_j \in H_\Lambda$, $\delta = 2/(N-1+2r)$. Тогда*

$$\delta^{-\nu}|\Delta_\delta^\nu f(x_j) - \Delta_\delta^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_j)| \leqslant$$
$$c\eta_{N,r,\nu}(j-r)\theta_{N,r,\nu}(j-r)\left[\frac{j-r+\nu+1}{N}(1-\frac{j-r}{N})\right]^{\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}} \frac{q^{n+r}}{(n+r)^{r-\nu-1}},$$
$$|f^{(\nu)}(x_j+\nu\delta\theta_j) - \mathcal{X}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f,x_j+\nu\delta\theta_j)| \leqslant$$
$$c\eta_{N,r,\nu}(j-r)\theta_{N,r,\nu}(j-r)\left[\frac{j-r+\nu+1}{N}(1-\frac{j-r}{N})\right]^{\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}} \frac{q^{n+r}}{(n+r)^{r-\nu-1}},$$

где $0 < \theta_j < 1$, а число $c = c(r,q,B)$ зависит лишь от указанных параметров.

Доказательство. Пусть $\bar{d}(t) = d(t-r) = f(x_t)$, $t \in \bar{\Omega}_{N+2r}$. Тогда $\Delta^r d(t-r) = \Delta^r \bar{d}(t)$ $(t \in \Omega_{N+r})$ и

$$d_{r,k} = \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N-1+r} \Delta^r \bar{d}(t)\tau_k(j,N+r) = \bar{d}_{r,k,N+r}. \tag{7.9.19}$$

С другой стороны, в силу лемм 7.9.2 и 7.9.3

$$\delta^{-r}|\bar{d}_{r,k,N+r}| \leqslant c(r,q)B(k+1)q^k, \quad k = 0,1,\ldots,N-1+r. \tag{7.9.20}$$

Сопоставляя (7.9.19) и (7.9.20), имеем

$$\delta^{-r}|d_{r,k}| \leqslant c(r,q)B(k+1)q^k, \quad k = 0,1,\ldots,N-1+r. \tag{7.9.21}$$

Утверждение теоремы 7.9.1 непосредственно вытекает из (7.9.18) и (7.9.21).

Глава 8. Смешанные ряды по полиномам Мейкснера

В этой главе в качестве аппарата приближения рассматриваются классические полиномы Мейкснера, ортогональные на бесконечной равномерной сетке $\{0,\delta,2\delta,\ldots\}$, где $0 < \delta$ – произвольное действительное число. Эти полиномы представляют собой дискретный аналог полиномов Лагерра и, как следствие, многие разностные свойства полиномов Мейкснера аналогичны дифференциальным свойсвам полиномов Лагерра. Это. в свою очередь, позволяет конструировать смешанные ряды по аналогичной схеме, по которой были построены смешанные ряды по полиномам Лагерра. Нам понадобятся некоторые свойства полиномов Мейкснера, которые мы соберем в следующем разделе.

§ 8.1. Сводка формул для полиномов Мейкснера

В главе 4 было показано, что для $q \neq 0$ и произвольного α полином Мейкснера порядка n можно определить с помощью равенства

$$M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x,q) = \frac{q^{-n}}{n!\rho(x)}\Delta^n\left\{\rho(x)x^{[n]}\right\}, \tag{8.1.1}$$

где $x^{[0]} = 1$, $x^{[n]} = x(x-1)\dots(x-n+1)$,

$$\rho = \rho(x) = \rho(x,\alpha,q) = q^x\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}. \tag{8.1.2}$$

Следующие свойства полиномов Мейкснера были установлены в главе 4:

ортогональность

$$\sum_{x\in\Omega} M_k^\alpha(x)M_n^\alpha(x)\rho(x) = \delta_{n,k}h_n^\alpha(q) \quad 0<q<1, \alpha>-1, \tag{8.1.3}$$

где

$$h_n^\alpha(q) = \sum_{x=0}^{\infty}\rho(x)\left\{M_n^\alpha(x)\right\}^2 = \binom{n+\alpha}{n}q^{-n}\Gamma(\alpha+1); \tag{8.1.4}$$

явный вид

$$M_n^\alpha(x,q) = \binom{n+\alpha}{n}{}_2F_1(-n,-x;\alpha+1;1-\frac{1}{q})$$

$$= \binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x)_k}{(\alpha+1)_k k!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k; \tag{8.1.5}$$

конечные разности

$$\Delta M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x+1) - M_n^\alpha(x) = \frac{q-1}{q}M_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{8.1.6}$$

$$x\Delta^2 M_n^\alpha(x-1) + [q(\alpha+1) - x(1-q)]\Delta M_n^\alpha(x) + n(1-q)M_n^\alpha(x) = 0; \tag{8.1.7}$$

формула Кристоффеля-Дарбу

$$\mathcal{K}_{q,n}^\alpha(x,y) = \sum_{k=0}^{n} q^k\frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}M_k^\alpha(x)M_k^\alpha(y)$$

$$= \frac{(n+1)!q^{n+1}}{\Gamma(n+\alpha+1)(q-1)}\frac{M_{n+1}^\alpha(x)M_n^\alpha(y) - M_n^\alpha(x)M_{n+1}^\alpha(y)}{x-y}, \tag{8.1.8}$$

в частности,

$$\mathcal{K}_{q,n}^\alpha(x,0) = \frac{q^n}{\Gamma(\alpha+1)}M_n^{\alpha+1}(x-1); \tag{8.1.9}$$

рекуррентные соотношения

$$M_{n+1}^\alpha(x) - M_n^\alpha(x) = M_{n+1}^{\alpha-1}(x), \tag{8.1.10}$$

$$x(q-1)M_{n-2}^{\alpha+2}(x-1) + [q(\alpha+1) - x(1-q)]M_{n-1}^{\alpha+1}(x) - nqM_n^\alpha(x) = 0. \tag{8.1.11}$$

$$(n+1)qM_{n+1}^\alpha(x) =$$

$$[n(q+1) + q(\alpha+1) + (q-1)x]M_n^\alpha(x) - (n+\alpha)M_{n-1}^\alpha(x), \tag{8.1.12}$$

где $M_{-1}^{\alpha}(x) = 0$, $M_0^{\alpha}(x) = 1$.

$$M_{n+1}^{\alpha-1}(x) = \frac{\alpha}{n+1} M_n^{\alpha}(x) - \frac{(1-q)x}{q(n+1)} M_n^{\alpha+1}(x-1), \tag{8.1.12A}$$

$$M_n^{-l}(x) = \frac{(n-l)!}{n!}\left(\frac{1}{q}-1\right)^l (-x)_l M_{n-l}^l(x-l) \quad (l - \text{целое}, 1 \leqslant l \leqslant n). \tag{8.1.13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} M_n^{\alpha}(j) M_n^{\alpha}(i) = \frac{j! q^{-j}}{\Gamma(j+\alpha+1)} (1-q)^{-\alpha-1} \delta_{ij}. \tag{8.1.14}$$

$$\tilde{M}_n^{\alpha}(j,q) = \tilde{M}_j^{\alpha}(n,q). \tag{8.1.15}$$

где $\tilde{M}_n^{\alpha}(x,q) = \binom{n+\alpha}{n}^{-1} M_n^{\alpha}(x,q)$.

§ 8.2. Дальнейшие свойства полиномов Мейкснера

В этом параграфе мы рассмотрим дальнейшие свойства полиномов Мейкснера, которые будут нужны при построении смешанных рядов по эмим полиномам.

Лемма 8.2.1. *Пусть* $0 < p, q < 1$, $a, \alpha > -1$. *Тогда*

$$\frac{M_n^a(x,p)}{M_n^a(0,p)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!(\alpha+1)_k}{k!(n-k)!(a+1)_k} \left[\frac{q(1-p)}{p(1-q)}\right]^k$$

$$\times {}_2F_1\left[k-n, k+\alpha+1; k+a+1; \frac{q(1-p)}{p(1-q)}\right] \frac{M_k^{\alpha}(x,q)}{M_k^{\alpha}(0,q)}, \tag{8.2.1}$$

в частности, если $p = q$, *то*

$$M_n^a(x,p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a-\alpha)_k}{k!} M_k^{\alpha}(x,q). \tag{8.2.2}$$

По поводу доказательства этой леммы см [49], стр. 383–384. В качестве следствия равенства (8.2.2) отметим следующее утверждение.

Лемма 8.2.2. *Пусть* $\alpha > -1$, k, r*– целые. Тогда*

$$M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{r^{[j]}}{j!} M_{k+r-j}^{\alpha}(x,q). \tag{8.2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что $\alpha - r > -1$, тогда, полагая $a = \alpha - r$, мы можем воспользоваться равенством (8.2.2). Поскольку при $j \geqslant r+1$ $a - \alpha_j = (-r)_j = 0$, то из (8.2.2) следует (8.2.3) при $(\alpha - r > -1$. Но, правая и левая части равенства (8.2.3) в силу (8.1.5) представляют собой аналитические функции параметра α. Поэтому равенство (8.2.3) справедливо при любых $\alpha > -1$.

Лемма 8.2.3. *Пусть* $0 \leqslant r$. *Тогда*

$$\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(x,q) = \frac{1}{(1-q)^r} \sum_{i=0}^{r} (-q)^i \binom{r}{i} M_{k+i}^0(x,q).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в (8.2.3) $\alpha = r$, имеем

$$M_j^0(x,q) = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{\nu} \binom{r}{\nu} M_{j-\nu}^r(x,q), \tag{8.2.4}$$

С другой стороны, мы можем записать

$$\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}}M_k^r(x,q)=\sum_{j=0}^{k+r}\gamma_j M_j^0(x,q), \tag{8.2.5}$$

где

$$\gamma_j=\frac{1}{h_j^0(q)}\sum_{t=0}^{\infty}\rho(t,0,q)\frac{(t+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}}M_k^r(t,q)M_j^0(t,q)=$$

$$q^j(1-q)\sum_{t=0}^{\infty}q^t\frac{(t+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}}M_k^r(t,q)M_j^0(t,q)=$$

$$\frac{q^j}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r}\sum_{t=0}^{\infty}q^t\frac{\Gamma(t+r+1)}{\Gamma(t+1)}(1-q)^{r+1}M_k^r(t,q)M_j^0(t,q), \tag{8.2.6}$$

в частности, $\gamma_j=0$, при $j<k$. Из (8.2.4) и (8.2.6) имеем

$$\gamma_j=\frac{q^j}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r}\sum_{t=0}^{\infty}\rho(t,r,q)M_k^r(t,q)\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu\binom{r}{\nu}M_{j-\nu}^r(x,q)=$$

$$\frac{q^j(-1)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r}\binom{r}{j-k}\sum_{t=0}^{\infty}\rho(t,r,q)\left[M_k^r(t,q)\right]^2=$$

$$\frac{q^j(-1)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r}\binom{r}{j-k}h_k^r(q)=\frac{(-q)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r}\binom{r}{j-k}\binom{k+r}{k}\Gamma(r+1). \tag{8.2.7}$$

Из (8.2.5) и (8.2.7) находим

$$(1-q)^q\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}}M_k^r(x,q)=\sum_{j=k}^{k+r}(-q)^{j-k}\binom{r}{j-k}M_j^0(x,q)=\sum_{i=0}^{r}(-q)^i\binom{r}{i}M_{k+i}^0(x,q).$$

Лемма 8.2.3 доказана.

Пусть $N>0$, $\delta=1/N$, $q=e^{-\delta}$, $\Omega_\delta=\{0,\delta,2\delta,\ldots\}$. Введем Полиномы

$$M_{n,N}^\alpha(x)=M_n^\alpha(Nx,e^{-1/N}), \tag{8.2.7A}$$

$$m_{n,N}^\alpha(x)=m_n^\alpha(Nx,e^{-1/N})=\left\{h_n^{\alpha,e^{-1/N}}\right\}^{-1/2}M_{n,N}^\alpha(x). \tag{8.2.7B}$$

Если $\alpha>-1$, то система $\left\{M_{n,N}^\alpha(x)\right\}_{n=0}^\infty$ ортогональна, а система $\left\{m_{n,N}^\alpha(x)\right\}_{n=0}^\infty$ ортонормирована на Ω_δ с весом

$$\eta_N(x)=\eta_N(x,\alpha)=\eta_N(x,\alpha,e^{-\delta})=\left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}, \tag{8.2.7C}$$

точнее,

$$\sum_{x\in\Omega_\delta}\eta_N(x)M_{n,N}^\alpha(x)M_{k,N}^\alpha(x)=h_n^{\alpha,q}\delta_{nk}, \tag{8.2.7E}$$

$$\sum_{x\in\Omega_\delta}\eta_N(x)m_{n,N}^\alpha(x)m_{k,N}^\alpha(x)=\delta_{nk}, \tag{8.2.7D}$$

Далее,

$$M_{n,N}^\alpha(x)=\frac{\Gamma(Nx+1)e^{n\delta+x}}{n!\Gamma(Nx+\alpha+1)}\Delta_\delta^n\left\{\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)e^{-x}}{\Gamma(Nx-n+1)}\right\}. \tag{8.2.7F}$$

Пусть $0 < \delta \leqslant 1$, $N = 1/\delta$, $\lambda > 0$, $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$, $\alpha > -1$, $0 \leqslant x < \infty$. Тогда справедливы [48] следующие соотношения:

$$\left|m_{n,N}^{\alpha}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda) n^{-\alpha/2} A_n^{\alpha}(x), \tag{8.2.8}$$

$$\left|M_{n,N}^{\alpha}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda) A_n^{\alpha}(x), \tag{8.2.9}$$

где $A_n^{\alpha}(x)$ функция, определенная в (6.1.16). Отметим также следующие полезные оценки. Пусть $0 < \delta \leqslant 1$, $N = 1/\delta$, $\lambda > 0$, $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$, $\alpha > -1$, $s \geqslant 0$, $0 \leqslant x < \infty$. Тогда

$$\left|m_{n,N}^{\alpha}(x \pm s\delta)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda,s) n^{-\alpha/2} A_n^{\alpha}(x), \tag{8.2.10}$$

$$\left|M_{n,N}^{\alpha}(x \pm s\delta)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda,s) A_n^{\alpha}(x), \tag{8.2.11}$$

$$\left|\left(m_{n,N}^{\alpha}(x \pm s\delta)\right)'\right| \leqslant c(\alpha,\lambda,s) n^{-\alpha/2} A_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{8.2.12}$$

$$\left|\left(M_{n,N}^{\alpha}(x \pm s\delta)\right)'\right| \leqslant c(\alpha,\lambda,s) A_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{8.2.13}$$

Лемма 8.2.4. *Пусть $\alpha > -1$, $1 \leqslant r$–целое, $s = 4k + 2(\alpha - r) + 2 > 0$, $0 < \delta \leqslant 1$, $N = 1/\delta$, $\lambda > 0$, $1 \leqslant k \leqslant \lambda N$. Тогда*

$$\left|M_{n+r,N}^{\alpha-r}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda,r) A_n^{\alpha-r}(x), \quad 0 < x < \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\alpha - r > -1$, то пользуясь оценкой (8.2.9), мы можем записать $(s = 4k + 2r - 2\alpha + 2)$

$$|M_{n+r,N}^{\alpha-r}(x)| \leqslant c(\alpha,r,\lambda) A_{n+r}^{\alpha-r}(x). \tag{8.2.14}$$

Если же $\alpha - r \leqslant -1$, то, пользуясь равенством (8.1.12A), имеем

$$M_{k+r}^{\alpha-r}(x) = \frac{\alpha - r + 1}{k + r} M_{k+r-1}^{\alpha-r+1}(x) - \frac{(1-q)x}{q(k+r)} M_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x-1).$$

Отсюда и из (8.2.7A) имеем

$$M_{k+r,N}^{\alpha-r}(x) = \frac{\alpha - r + 1}{k + r} M_{k+r-1,N}^{\alpha-r+1}(x) - \frac{e^{\delta}(1-e^{-\delta})Nx}{(k+r)} M_{k+r-1,N}^{\alpha-r+2}(x-\delta). \tag{8.2.15}$$

С другой стороны, из определения (6.1.16) нетрудно увидеть, что при $\alpha > -1$, $k \geqslant 1$, $0 \leqslant x < \infty$

$$\frac{1}{k+r} A_{k+r-1}^{\alpha-r+1}(x) \leqslant c(\alpha,r) A_{k+r}^{\alpha-r}(x), \tag{8.2.16}$$

$$\frac{x}{k+r} A_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x) \leqslant c(\alpha,r) A_{k+r}^{\alpha-r}(x). \tag{8.2.17}$$

Далее заметим, что если для $0 \leqslant x < \infty$, $k \leqslant \lambda N$ справедливы оценки

$$|M_{k+r-1,N}^{\alpha-r+1}(x)| \leqslant c(\alpha,r,\lambda) A_{k+r}^{\alpha-r+1}(x), \quad |M_{k+r-1,N}^{\alpha-r+2}(x-\delta)| \leqslant c(\alpha,r,\lambda) A_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x), \tag{8.2.18}$$

то из (8.2.15) – (8.2.17) вытекает оценка (8.2.14). Но если $r = 1$, то $\alpha - r + 1 = \alpha > -1$, $\alpha - r + 2 = \alpha + 1 > 0$ и поэтому оценки (8.2.18) вытекают из (8.2.11). Тем самым, оценка (8.2.14) для $r = 1$ доказана. Предположим теперь, что оценка (8.2.14) верна для $1 \leqslant r \leqslant l$. Тогда из (8.2.15) – (8.2.17) следует справедливость оценки (8.2.14) для $r = l + 1$. Справедливость оценки (8.2.14) и вместе с ней и леммы 8.2.4 для произвольного целого $r \geqslant 1$ доказана.

§ 8.3. Дискретное преобразование Фурье-Мейкснера

Пусть $\alpha > -1$, $0 < q < 1$, функция $\rho(x) = \rho(x, \alpha, q)$ определена равенством (8.1.2). Для двух функций d и g, заданных на множестве $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ мы определим скалярное произведение

$$(d, g)_\rho = \sum_{x \in \mathbf{Z}_+} d(x) g(x) \rho(x). \tag{8.3.1}$$

Гильбертово пространство всех дискретных функций вида $d : \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{R}$, для которых

$$\|d\|_\rho = (d, d)_\rho^{1/2} < \infty$$

мы обозначим $l_{2,\rho}$. Если $d \in l_{2,\rho}$, то мы можем определить коэффициенты Фурье-Мейкснера

$$d_k^\alpha = \sum_{x \in \mathbf{Z}_+} d(x) \rho(x, \alpha, q) m_n^\alpha(x, q), \tag{8.3.2}$$

где

$$m_n^\alpha(x, q) = \{h_n^\alpha(q)\}^{-1/2} M_n^\alpha(x, q) \quad (n = 0, 1, \dots) \tag{8.3.3}$$

ортонормированные полиномы Мейкснера. Система $\{m_n^\alpha(x, q)\}_{n=0}^\infty$ является базисом пространства $l_{2,\rho}$, поэтому, если $d \in l_{2,\rho}$, то

$$d(x) = \sum_{k=0}^\infty d_k^\alpha m_k^\alpha(x, q), \quad x \in \mathbf{Z}_+. \tag{8.3.4}$$

Рассмортрим частичную сумму ряда (8.3.4) порядка n

$$S_{q,n}^\alpha(d) = S_{q,n}^\alpha(d, x) = \sum_{k=0}^n d_k^\alpha m_k^\alpha(x, q). \tag{8.3.5}$$

Она дает функции $d = d(x)$ наилучшее приближение в пространстве $l_{2,q}$ среди всех алгебраических полиномов степени n, т.е.

$$\|d - S_{q,n}^\alpha(d)\|_{l_{2,q}} = \inf_{p_n} \|d - p_n\|_{l_{2,q}} = E_n(d)_{l_{2,q}}, \qquad (8.3.6).$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $p_n = p_n(x)$ степени n. Если $p_n = p_n(x)$ произвольный алгебраический полином степени n, то

$$S_{q,n}^\alpha(p_n, x) = p_n(x), \quad x \in \mathbf{R} \tag{8.3.7}$$

Отметим также, что равенство Парсеваля для полиномов принимает следующий вид

$$\sum_{x \in \mathbf{Z}_+} \left(d(x) - S_{q,n}^\alpha(d, x)\right)^2 \rho(x) = \sum_{k=n+1}^\infty (d_k^\alpha)^2 \tag{8.3.8}$$

Сопоставляя (8.3.6) и (8.3.8), имеем

$$E_n(d)_{l_{2,q}} = \left(\sum_{k=n+1}^\infty (d_k^\alpha)^2\right)^{1/2}. \tag{8.3.9}$$

Воспользовавшись ядром $\mathcal{K}_{q,n}^\alpha(t, x)$

$$S_{q,n}^\alpha(d, x) = \sum_{x \in \mathbf{Z}_+} \mathcal{K}_{q,n}^\alpha(t, x) d(t) \rho(t), \tag{8.3.10}$$

в частности, если $x = 0$, то в силу (8.1.9) равенство (8.3.10) принимает следующий вид

$$S_{q,n}^{\alpha}(d,0) = \frac{q^n}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{x\in\mathbf{Z}_+} M_n^{\alpha+1}(t-1,q)d(t)\rho(t). \tag{8.3.11}$$

Равенство (8.3.11) можно использовать при исследовании поведения разности $d(0) - S_{q,n}^{\alpha}(d,0)$, когда $n\to\infty$ для различных классов дискретных функций $d = d(x)$, вчастности для классов $C(\mathbf{Z}_+, q)$. На этом пути можно показать, что аппроксимативные свойства сумм Фурье-Мейкснера $S_{q,n}^{\alpha}(d,x)$ существенно зависят от параметра α, а именно, вместе с ростом $\alpha \geqslant -1/2$ аппроксимативные свойства $S_{q,n}^{\alpha}(d,x)$ ухудшаются. Мы здесь не остановимся на подробном анализе этой задачи, а ограничимся лишь рассмотрением одного характерного примера.

Обратимся к производящей функции для полиномов Мейкснера

$$d(x) = \phi(z,x) = \phi(z,x,\alpha,q) = \left(\frac{1-z/q}{1-z}\right)^x \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}, \tag{8.3.12}$$

определенной равенством (4.4.1), из которого мы находим

$$d(x) - S_{q,n}^{\alpha}(d,x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k^{\alpha}(x)z^k. \tag{8.3.13}$$

Рассмотрим вопрос об использовании сумм Фурье-Мейкснера $S_{q,n}^{\alpha}(d,x)$ для приближения разностной проиводной фукции $d(x)$ из (8.3.12). Другими словами, мы оценим разность $|\Delta d(x) - \Delta S_{q,n}^{\alpha}(d,x)|$. Воспользовавшись формулой (8.1.6), из (8.3.13) имеем

$$\Delta d(x) - \Delta S_{q,n}^{\alpha}(d,x) = \frac{z(q-1)}{q} \sum_{k=n}^{\infty} M_k^{\alpha+1}(x)z^k. \tag{8.3.14}$$

В частности, полагая здесь $x = 0$ и учитывая равенство $M_k^{\alpha+1}(0) = \binom{k+\alpha+1}{k}$, получаем

$$\Delta d(0) - \Delta S_{q,n}^{\alpha}(d,0) = \frac{z(q-1)}{q} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k+\alpha+1}{k} z^k. \tag{8.3.15}$$

Отсюда следует, что

$$|\Delta d(0) - \Delta S_{q,n}^{\alpha}(d,0)| \geqslant \frac{1-q}{q}\binom{n+\alpha+1}{n} z^{n+1} \geqslant c(\alpha)\frac{1-q}{q} z^{n+1}n^{\alpha+1}. \tag{8.3.16}$$

С другой стороны, пользуясь равенством (8.3.12), имеем

$$\Delta d(x) = \left(\frac{1-z/q}{1-z}\right)^{x+1} \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} - \left(\frac{1-z/q}{1-z}\right)^{x} \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} =$$

$$\left(\frac{1-z/q}{1-z}\right)^{x} \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} \frac{z}{1-z}\frac{q-1}{q} = d(x)\frac{z}{1-z}\frac{q-1}{q}, \tag{8.3.17}$$

поэтому

$$S_{q,n-1}^{\alpha}(\Delta d,x) = \frac{z}{1-z}\frac{q-1}{q} S_{q,n-1}^{\alpha}(d,x). \tag{8.3.18}$$

Сопоставляя (8.3.13), (8.3.17) и (8.3.18), имеем

$$\Delta d(x) - S_{q,n-1}^{\alpha}(\Delta d,x) = \frac{z}{1-z}\frac{q-1}{q} \sum_{k=n}^{\infty} M_k^{\alpha}(x)z^k. \tag{8.3.19}$$

В частности, для $x = 0$ из (8.3.19) находим

$$\Delta d(0) - S_{q,n-1}^{\alpha}(\Delta d, 0) = \frac{z}{1-z}\frac{q-1}{q}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k+\alpha}{k}z^k,$$

откуда, в свою очередь, получаем оценку

$$|\Delta d(0) - S_{q,n-1}^{\alpha}(\Delta d, 0)| \leqslant c(\alpha)\frac{1-q}{q}\frac{z^{n+1}}{1-z}n^{\alpha}. \tag{8.3.20}$$

Далее, из (8.3.6) следует, что

$$\|\Delta d - \Delta S_{q,n}^{\alpha}(d)\|_{l_{2,\rho}} \geqslant \inf_{p_{n-1}} \|\Delta d - p_{n-1}\|_{l_{2,\rho}} = \|\Delta d - S_{q,n-1}^{\alpha}(\Delta d)\|_{l_{2,\rho}} \tag{8.3.21}$$

Из неравенства (8.3.21) видно, что полином $\Delta S_{q,n}^{\alpha}(d,x)$ приближает функцию $\Delta d(x)$ в метрике постранства $l_{2,\rho}$ не лучше, чем полином $S_{q,n-1}^{\alpha}(\Delta d, x)$. Более того, оценки (8.3.16) и (8.3.20) показывают, что полином $\Delta S_{q,n}^{\alpha}(d,x)$ приближает функцию $\Delta d(x)$ в точке $x = 0$ n–раз хуже (по порядку), чем полином $S_{q,n-1}^{\alpha}(\Delta d, x)$, который является полиномом наилучшего приближения к функции $\Delta d(x)$ в метрике пространства $l_{2,\rho}$. Это означает, что суммы Фурье-Мейкснера $S_{q,n}^{\alpha}(d,x)$ не являются хорошим аппаратом, пригодным для одновременного приближения дискретных функций из $l_{2,\rho}$ и их конечных разностей (разностных производных). Это обстоятельство побудило нас ввести новые ряды по полиномам Мейкснера, лишенные указанного недостатка. Мы приступим к изучению этих новых рядов, которых мы назвали *смешанными рядами* по полиномам Мейкснера.

§ 8.4. Смешанные ряды по полиномам Мейкснера

Пусть $r \geqslant 1$, $\Omega(r) = \{-r, -r+1, \dots, 0, 1, \dots\}$, $0 < q < 1$, $\alpha > -1$, $\rho = \rho(x) = \rho(x;\alpha,q)$. Рассмотрим дискретную функцию $d = d(x)$, заданную на $\Omega(r)$ и такую, что на множестве $\Omega(0)$ она принадлежит пространству $l_{2,\rho}$. Тогда функция $\bar d(x) = d(x-r)$ определена на $\mathbf{Z}_+$ и принадлежит пространству $l_{2,\rho}$. Вместе с $\bar d(x)$ пространству $l_{2,\rho}$ принадлежит также функция $b(x) = \Delta^r \bar d(x) = \Delta^r d(x-r)$. Поэтому мы можем определить коэффициенты Фурье-Мейкснера этой функции

$$d_{r,k}^{\alpha} = \sum_{\mathbf{Z}_+} b(t)m_k^{\alpha}(t,q)\rho(t) = \sum_{\mathbf{Z}_+} \Delta^r \bar d(t) m_k^{\alpha}(t,q)\rho(t). \tag{8.4.1}$$

Имеет место следующая

Теорема 8.4.1. *Пусть $r \geqslant 1$, $\Omega(r) = \{-r, -r+1, \dots, 0, 1, \dots\}$, $0 < q < 1$, $\alpha > -1$, $\rho = \rho(x) = \rho(x;\alpha,q)$, $d = d(x)$ – дискретная функция, заданная на $\Omega(r)$ и такая, что на множестве $\Omega(0)$ она принадлежит пространству $l_{2,\rho}$, $\bar d(x) = d(x-r)$. Тогда*

$$\bar d(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}\gamma_{r,\nu}\frac{x^{[\nu]}}{\nu!} + \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{r,k}^{\alpha}}{\{h_k^{\alpha}(q)\}^{1/2}}M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q),$$

где

$$\gamma_{r,\nu} = \Delta^{\nu}\bar d(0) - \frac{(q/(q-1))^{r-\nu}}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{r,k}^{\alpha}}{\{h_k^{\alpha}(q)\}^{1/2}}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ряд Фурье-Мейкснера функции $\Delta^r \bar d(x)$

$$\Delta^r \bar d(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{r,k}^{\alpha} m_k^{\alpha}(x,q). \tag{8.4.2}$$

и формулу

$$\bar{d}(x) = \bar{d}(0) + \frac{\Delta\bar{d}(0)}{1!}x + \frac{\Delta^{r-1}\bar{d}(0)}{(r-1)!}x^{[r-1]} + \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-1}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r\bar{d}(t). \qquad (8.4.3)$$

Из (8.4.2) и (8.4.3) имеем

$$\bar{d}(x) = Q_{r-1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} d_{r,k}^{\alpha}\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-1}(x-1-t)^{[r-1]}m_k^{\alpha}(t,q), \qquad (8.4.4)$$

где

$$Q_{r-1}(x) = \sum_{k=0}^{r-1}\frac{\Delta^k\bar{d}(0)}{k!}x^{[k]}.$$

Теперь воспользуемся формулой (8.1.6), тогда

$$m_k^{\alpha}(t,q) = \{h_k^{\alpha}(q)\}^{-1/2}M_k^{\alpha}(t,q) = \{h_k^{\alpha}(q)\}^{-1/2}\left(\frac{q}{q-1}\right)^r\Delta^r M_{k+r}^{\alpha-r}(t,q). \qquad (8.4.5)$$

Поэтому

$$\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-1}(x-1-t)^{[r-1]}m_k^{\alpha}(t,q) =$$

$$\{h_k^{\alpha}(q)\}^{-1/2}\frac{(q/(q-1))^r}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-1}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r M_{k+r}^{\alpha-r}(t,q). \qquad (8.4.6)$$

Далее

$$\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-1}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r M_{k+r}^{\alpha-r}(t,q) = M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q) - \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{x^{[\nu]}}{\nu!}\Delta^{\nu}M_{k+r}^{\alpha-r}(0,q), \qquad (8.4.7)$$

$$\Delta^{\nu}M_{k+r}^{\alpha-r}(0,q) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^{\nu}M_{k+r\nu}^{\alpha-r+\nu}(0,q) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \qquad (8.4.8)$$

Из (8.4.7) и (8.4.8) имеем

$$\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-1}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r M_{k+r}^{\alpha-r}(t,q) = M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q) -$$

$$\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{x^{[\nu]}}{\nu!}\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}, \qquad (8.4.9)$$

Сопоставляя (8.4.6) и (8.4.9), находим

$$\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-1}(x-1-t)^{[r-1]}m_k^{\alpha}(t,q) = \{h_k^{\alpha}(q)\}^{-1/2}\left(\frac{q}{q-1}\right)^r M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q) - \{h_k^{\alpha}(q)\}^{-1/2}$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{x^{[\nu]}}{\nu!}\left(\frac{q}{q-1}\right)^{r-\nu}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}, \qquad (8.4.10)$$

Подставим это значение в (8.4.4), тогда

$$\bar{d}(x) = E^\alpha_{r-1,q}(d,x) + J^\alpha_{r,q}(d,x), \tag{8.4.11}$$

где

$$E^\alpha_{r-1,q}(d,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{x^{[\nu]}}{\nu!}\left[\Delta^\nu \bar{d}(0) - \frac{(q/(q-1))^{r-\nu}}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)}\sum_{k=0}^\infty \frac{d^\alpha_{r,k}}{\{h^\alpha_k(q)\}^{1/2}}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}\right] \tag{8.4.12}$$

полином степени $r-1$, а

$$J^\alpha_{r,q}(d,x) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \sum_{k=0}^\infty \frac{d^\alpha_{r,k}}{\{h^\alpha_k(q)\}^{1/2}} M^{\alpha-r}_{k+r}(x,q). \tag{8.4.13}$$

Следует отметить, что ряд

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{d^\alpha_{r,k}}{\{h^\alpha_k(q)\}^{1/2}}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}$$

абсолютно сходится. В самом деле, в силу неравенства Коши-Буняковского и равенства (8.1.4)

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{|d^\alpha_{r,k}|}{\{h^\alpha_k(q)\}^{1/2}}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} \leqslant \left(\sum_{k=0}^\infty (d^\alpha_{r,k})^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{h^\alpha_k(q)}\left(\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \|\Delta\bar{d}(*)\|_{l_{2,\rho}}\left(\sum_{k=0}^\infty q^k \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+1)}{(\Gamma(k+r-\nu+1))^2}\right)^{1/2} < \infty.$$

Отсюда следует, что переход от равенства (8.4.4) к (8.4.11), путем применения (8.4.10) является законным. Поэтому, утверждение теоремы 8.4.1 вытекает из равенства (8.4.11).

Случай $\alpha = 0$ заслуживает отдельного рассмотрения. В этом случае мы воспользуемся свойством (8.1.13), тогда

$$M^{0-r}_{k+r}(x,q) = \frac{k!}{(k+r)!}\left(\frac{1-q}{q}\right)^r (-x)_r M^r_k(x-r,q). \tag{8.4.14}$$

Подставляя (8.4.14) в (8.4.13), имеем

$$J^0_{r,k}(d,x) = (-x)_r \sum_{k=0}^\infty \frac{d^0_{r,k}}{(k+1)_r}\frac{M^r_k(x-r,q)}{\{h^0_k(q)\}^{1/2}}(-1)^r. \tag{8.4.15}$$

С другой стороны, если $\alpha = 0$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $\frac{1}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)} = 0$, поэтому из (8.4.12) находим

$$E^\alpha_{r-1,q}(d,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{x^{[\nu]}}{\nu!}\Delta^\nu \bar{d}(0). \tag{8.4.16}$$

Сопоставляя (8.4.11), (8.4.15) и (8.4.16), мы приходим к следующему результату.

Следствие 8.4.1. *Пусть $r \geqslant 1$, $\Omega(r) = \{-r,-r+1,\dots,0,1,\dots\}$, $0 < q < 1$, $\rho = \rho(x) = \rho(x;0,q)$, $d = d(x)$ – дискретная функция, заданная на $\Omega(r)$ и такая, что на множестве $\Omega(0)$ она принадлежит пространству $l_{2,\rho}$. Тогда*

$$d(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}\Delta^\nu d(-r)\frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!} + (x+r)^{[r]}\sum_{k=0}^\infty \frac{d^0_{r,k}}{(k+1)_r}\frac{M^r_k(x,q)}{\{h^0_k(q)\}^{1/2}}, \tag{8.4.17}$$

где $x \in \Omega(r) = \{-r, -r+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$.

Правые части равенств (8.4.11) и (8.4.17) мы будем называть *смешанными рядами* по полиномам Мейкснера. Этим же термином мы обозначим и ряд (8.4.13).

§ 8.5. Операторы $\mathcal{L}^\alpha_{n+r,q}(d)$

Пусть $\alpha > -1$, $0 < q < 1$, $\rho(x) = \rho(x, \alpha, q)$, $r \geqslant 1$, $d : \Omega(r) \to \mathbf{R}$, $\bar{d} = \bar{d}(x) = d(x-r)$, $\bar{d} \in l_{2,\rho}$. Тогда мы можем определить смешанный ряд (8.4.11). Положим

$$J^\alpha_{r,n,q}(d,x) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \sum_{k=0}^{n} \frac{d^\alpha_{r,k}}{\{h^\alpha_k(q)\}^{1/2}} M^{\alpha-r}_{k+r}(x,q), \tag{8.5.1}$$

$$\mathcal{L}^\alpha_{n+r,q}(d) = \mathcal{L}^\alpha_{n+r,q}(d,x) = E^\alpha_{r-1,q}(d, x+r) + J^\alpha_{r,n,q}(d, x+r), \tag{8.5.2}$$

$E^\alpha_{r-1,q}(d,x)$ – полином степени $r-1$, определенный равенством (8.4.12). Тогда из (8.4.11), (8.4.13), (8.5.1) и (8.5.2) имеем

$$d(x) = \mathcal{L}^\alpha_{n+r,q}(d,x) + \mathcal{P}^\alpha_{r,n,q}(d, x+r), \tag{8.5.3}$$

где

$$\mathcal{P}^\alpha_{r,n,q}(d,x) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d^\alpha_{r,k}}{\{h^\alpha_k(q)\}^{1/2}} M^{\alpha-r}_{k+r}(x,q), \tag{8.5.4}$$

Из (8.5.2) следует, что $\mathcal{L}^\alpha_{n+r,q}(d,x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+r$. Мы будем рассматривать $\mathcal{L}^\alpha_{n+r,q}(d) = \mathcal{L}^\alpha_{n+r,q}(d,x)$ как аппарат приближения дискретных функций из $l_{2,\rho}$.

Прежде всего установим связь операторов $\mathcal{L}^\alpha_{n+r,q}(d)$ с суммами Фурье-Мейкснера $S^\alpha_{n,q}(d)$, определенными равенством (8.3.5). С этой целью представим $J^\alpha_{r,n,q}(d,x)$ в следующем виде

$$J^\alpha_{r,n,q}(d,x) = J^\alpha_{r,n-r,q}(d,x) + I^\alpha_{r,n,q}(d,x), \tag{8.5.5}$$

где

$$I^\alpha_{r,n,q}(d,x) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \sum_{k=n-r+1}^{n} \frac{d^\alpha_{r,k}}{\{h^\alpha_k(q)\}^{1/2}} M^{\alpha-r}_{k+r}(x,q). \tag{8.5.6}$$

С другой стороны, полагая $a = \alpha - r$, $n = k + r$, из (8.2.2) имеем

$$M^{\alpha-r}_{k+r}(x,q) = \sum_{\nu=0}^{r} \frac{(-r)_\nu}{\nu!} M^\alpha_{k+r-\nu}(x,q). \tag{8.5.7}$$

Из (8.5.6) и (8.5.7) находим

$$I^\alpha_{r,n,q}(d,x) = \varphi^\alpha_{r,n,q}(d,x) + \psi^\alpha_{r,n,q}(d,x), \tag{8.5.8}$$

где

$$\varphi^\alpha_{r,n,q}(d,x) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \sum_{k=n-r+1}^{n} \frac{d^\alpha_{r,k}}{\{h^\alpha_k(q)\}^{1/2}} \sum_{\nu=k+r-n}^{r} \frac{(-r)_\nu}{\nu!} M^\alpha_{k+r-\nu}(x,q). \tag{8.5.9}$$

$$\psi^\alpha_{r,n,q}(d,x) =$$

$$\left(\frac{q}{q-1}\right)^r \sum_{k=n-r+1}^{n} \frac{d_{r,k}^\alpha}{\{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}} \sum_{\nu=0}^{k+r-n-1} \frac{(-r)_\nu}{\nu!} M_{k+r-\nu}^\alpha(x,q). \tag{8.5.10}$$

Сопоставляя (8.5.2), (8.5.5), (8.5.8)-(8.5.10), получаем

$$\mathcal{L}_{n+r,q}^\alpha(d,x-r) = E_{r-1,q}^\alpha(d,x) + J_{r,n-r,q}^\alpha(d,x) + \varphi_{r,n,q}^\alpha(d,x) + \psi_{r,n,q}^\alpha(d,x). \tag{8.5.11}$$

Далее, из (8.5.4) и (8.5.7) следует, что

$$\mathcal{P}_{r,n,q}^\alpha(d,x) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d_{r,k}^\alpha}{\{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}} \sum_{\nu=0}^{r} \frac{(-r)_\nu}{\nu!} M_{k+r-\nu}^\alpha(x,q). \tag{8.5.12}$$

Правая часть равенства (8.5.12) содержит полиномы Мейкснера $M_k^\alpha(x,q)$, для которых $k \geqslant n+1$, следовательно, $d_k^\alpha(\mathcal{P}_{r,n,q}^\alpha(d)) = 0 \qquad (0 \leqslant l \leqslant n)$, а это, в свою очередь, означает, что

$$S_{q,n}^\alpha(\mathcal{P}_{r,n,q}^\alpha(d),x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{8.5.13}$$

По аналогичной причине из (8.5.10) следует, что

$$S_{q,n}^\alpha(\psi_{r,n,q}^\alpha(d),x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{8.5.14}$$

С другой стороны,

$$D(x) = E_{r-1,\alpha}^\alpha(d,x) + J_{r,n-r,q}^\alpha(d,x) + \varphi_{r,n,q}^\alpha(d,x)$$

представляет собой алгебраический полином степени n и, стало быть, в силу (8.5.11)

$$S_{q,n}^\alpha(D,x) = D(x) = \mathcal{L}_{n+r,q}^\alpha(d,x-r) - \psi_{r,n,q}^\alpha(d,x). \tag{8.5.15}$$

Равенства (8.5.3), (8.5.13) и (8.5.15), взятые вместе дают

$$S_{q,n}^\alpha(\bar{d},x) = \mathcal{L}_{n+r,q}^\alpha(d,x-r) - \psi_{r,n,q}^\alpha(d,x)$$

или, что то же

$$\mathcal{L}_{n+r,q}^\alpha(d,x) = S_{q,n}^\alpha(\bar{d},x+r) + \psi_{r,n,q}^\alpha(d,x+r). \tag{8.5.16}$$

Замечание 8.5.1. *При доказательстве (8.5.16) мы использовали ряд преобразований рядов, без их детального обоснования. Если $d \in l_{2,\rho}$, то установить законность этих преобразований не составляет особого труда, но мы здесь на этом не остановимся.*

Другое важное свойство операторов $\mathcal{L}_{n+r,q}^\alpha(d)$ выражается следующим равенством

$$\Delta^\nu d(x-r) - \Delta^\nu \mathcal{L}_{n+r,q}^\alpha(d,x-r) = \mathcal{P}_{r-\nu,n,q}^\alpha(\Delta^\nu d,x) =$$

$$\left(\frac{q}{q-1}\right)^{r-\nu} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d_{r,k}^\alpha}{\{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}} M_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(x,q), \tag{8.5.17}$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, которое непосредственно вытекает из (8.5.3) и (8.1.6).

§ 8.6. Операторы $\mathcal{L}^0_{n+r,q}(d)$

В случае $\alpha = 0$ оператор $\mathcal{L}^\alpha_{n+r,q}(d)$ принимает следующий вид

$$\mathcal{L}^0_{n+r,q}(d,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!} \Delta^\nu d(-r) + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{r,k}}{(k+1)_r} \frac{M_k^r(x,q)}{\{h_k^0(q)\}^{1/2}}. \tag{8.6.1}$$

Из (8.4.17) имеем

$$d(x) = \mathcal{L}^0_{n+r,q}(d,x) + R_n(d,x,q), \tag{8.6.2}$$

где

$$R_n(d,x,q) = (x+r)^{[r]} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d_{r,k}}{(k+1)_r} \frac{M_k^r(x,q)}{\{h_k^0(q)\}^{1/2}}. \tag{8.6.3}$$

Установым отдельно связь между $\mathcal{L}^0_{n+r,q}(d,x)$ и суммой Фурье-Мейкснера $S_{q,n}(d,x) = S^0_{q,n}(d,x)$. Пусть

$$I_{r,n}(d,x,q) = (x+r)^{[r]} \sum_{k=n-r+1}^{n} \frac{d_{r,k}}{(k+1)_r} \frac{M_k^r(x,q)}{\{h_k^0(q)\}^{1/2}}. \tag{8.6.4}$$

Поскольку в силу леммы 8.2.3

$$\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+1)_r} M_k^r(x,q) = \frac{1}{(1-q)^r} \sum_{i=0}^{r} (-q)^i \binom{r}{i} M^0_{k+i}(x,q),$$

то

$$I_{r,n}(d,x,q) = \varphi_{r,n}(d,x,q) + \psi_{r,n}(d,x,q), \tag{8.6.5}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{r,n}(d,x,q) &= \tfrac{1}{(1-q)^r} \sum_{k=n-r+1}^{n} \tfrac{d_{r,k}}{(k+1)_r} \sum_{i=0}^{n-k} (-q)^i \tbinom{r}{i} M^0_{k+i}(x,q), \\ \psi_{r,n}(d,x,q) &= \tfrac{1}{(1-q)^r} \sum_{k=n-r+1}^{n} \tfrac{d_{r,k}}{(k+1)_r} \sum_{i=n-k+1}^{r} (-q)^i \tbinom{r}{i} M^0_{k+i}(x,q). \end{aligned} \tag{8.6.6}$$

Аналогично,

$$R_{r,n}(d,x,q) = \frac{1}{(1-q)^r} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d_{r,k}}{(k+1)_r} \sum_{i=0}^{r} (-q)^i \binom{r}{i} M^0_{k+i}(x,q). \tag{8.6.7}$$

Из (8.6.2), (8.6.4)–(8.6.6) имеем

$$d(x) = \mathcal{L}^0_{n+r,q}(d,x) - \psi_{r,n}(d,x,q) + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k M_k^0(x,q), \tag{8.6.8}$$

Так как в силу (8.6.1), (8.6.4)–(8.6.7) $\mathcal{L}^0_{n+r,q}(d,x) - \psi_{r,n}(d,x,q)$ не содержит полиномов $M_k^0(x,q)$, у которых $k > n$, то из (8.6.4) выводим $\mathcal{L}^0_{n+r,q}(d,x) - \psi_{r,n}(d,x,q) = S_{n,q}(d,x)$, где $S_{n,q}(d,x)$ сумма Фурье-Мейкснера функции $d = d(x)$ порядка n. Таким образом

$$\mathcal{L}^0_{n+r,q}(d,x) = S_{n,q}(d,x) + \psi_{r,n}(d,x,q). \tag{8.6.9}$$

Замечание 8.6.1. *При переходе от равенства (8.6.2) к (8.6.8) мы использовали ряд преобразований рядов, без их детального обоснования. Если $d \in l_{2,\rho}$, то установить законность этих преобразований не составляет особого труда, но мы здесь на этом не остановимся.*

Непосредственно из (8.5.17) и (8.1.13) выводим также следующее свойство

$$\Delta^\nu d(x) - \Delta^\nu \mathcal{L}_{n+r,q}^0(d,x) = R_{r-\nu,n}(\Delta^\nu d, x, q) =$$

$$(x+r)^{[r-\nu]} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d_{r,k} q^{k/2}}{(k+1)_{r-\nu}} M_k^{r-\nu}(x+\nu, q). \tag{8.6.10}$$

Обозначим через

$$E_n(\Delta^r \bar{d}, l_{2,q}) = \inf_{p_n} \|\Delta^r \bar{f} - p_n\|_{l_{2,q}}$$

наилучшее приближение функции $\Delta^r \bar{f}$ алгебраическими полиномами $p_n = p_n(x)$ степени не выше n в пространстве $l_{2,q} = l_{2,\rho}$, где $\rho = \rho(x,0,q) = q^{-x}$. Мы установим здесь следующее утверждение

Теорема 8.6.1. *Пусть $r \geqslant 1$, $0 < q < 1$, $d \in l_{2,q}$. Тогда имеют место соотношения*

$$(1-q)\sum_{x=0}^{\infty} \frac{q^x(1-q)^r}{(x+r)^{[r]}} \left[d(x) - \mathcal{L}_{n+r,q}^0(d,x)\right]^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{d_{r,k}^0}{\sqrt{(k+1)_r}}\right)^2,$$

$$\left\{(1-q)\sum_{x=0}^{\infty} \frac{q^x}{(x+r)^{[r]}} \left[d(x) - \mathcal{L}_{n+r,q}^0(d,x)\right]^2\right\}^{1/2} \leqslant \sqrt{\frac{(1-q)^{-r}}{(n+1)_r}} E_n(\Delta^r \bar{d}, l_{2,q}). \tag{8.6.11}$$

Доказательство. Полагая $\nu = 0$, из (8.6.10) имеем

$$\frac{d(x) - \mathcal{L}_{n+r,q}^0(d,x)}{(x+r)^{[r]}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d_{r,k} q^{k/2}}{(k+1)_r} M_k^r(x,q) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d_{r,k}^0}{\sqrt{(k+1)_r}} \frac{M_k^r(x,q)}{\sqrt{h_k^r(q)}}.$$

Отсюда, используя равенство Парсеваля, находим

$$(1-q)\sum_{x=0}^{\infty} \frac{q^x(1-q)^r}{(x+r)^{[r]}} \left[d(x) - \mathcal{L}_{n+r,q}^0(d,x)\right]^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{d_{r,k}^0}{\sqrt{(k+1)_r}}\right)^2$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)_r} \left(E_n(\Delta^r \bar{d}, l_{2,q})\right)^2.$$

Теорема 8.6.1 доказана.

Следствие 8.6.1. *Если* ($x \in \{-r, -r+1, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$), то при соблюдении условий теоремы 8.6.1 имеет место оценка

$$\frac{q^{x/2}}{(x+1)_r} |d(x) - \mathcal{L}_{n+r,q}^0(d,x)| \leqslant \sqrt{\frac{(1-q)^{-r-1}}{(n+1)_r}} E_n(\Delta^r \bar{d}, l_{2,q}).$$

§ 8.7. Приближение функций на сетке $\{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$

Пусть $0 < N$ – произвольное число, $\delta = 1/N$, $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$. Здесь мы рассмотрим функции вида $f : \Omega_\delta \to \mathbf{R}$. Полагая $f_\delta(j) = f(j\delta)$, мы получим дискретную функцию, заданную на $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$, которую мы предположим принадлежащей $l_{2,\rho}$

(см. 4.3). Рассмотрим функцию $d(t) = f_\delta(t+r) = f(t\delta + r\delta)$, заданную на множестве $\Omega(r) = \{-r, -r+1, \ldots, 0, 1, \ldots\}$, для которой мы можем построить смешанный ряд по порлиномам Мейкснера $M_k^\alpha(x,q)$ (см. 4.4). В силу (8.4.11) имеем

$$f(\delta x) = f_\delta(x) = \bar{d}(x) = E^\alpha_{r-1,q}(d,x) + J^\alpha_{r,q}(d,x) + \mathcal{P}^\alpha_{r,n,q}(d,x), \tag{8.7.1}$$

Мы можем для функции $d = d(x)$ рассмотреть оператор $\mathcal{L}^\alpha_{n+r,q}(d,x)$, определенный равенством (8.5.2). Тогда в силу (8.5.3) имеем

$$f(\delta x) = \bar{d}(x) = \mathcal{L}^\alpha_{n+r,q}(d, x-r) + \mathcal{P}^\alpha_{r,n,q}(d,x) = E^\alpha_{r-1,q}(d,x) + J^\alpha_{r,q}(d,x) + \mathcal{P}^\alpha_{r,n,q}(d,x). \tag{8.7.2}$$

Равенство (8.5.17) можно переписать так ($x \in \Omega(0)$)

$$\Delta^\nu_\delta f(x\delta) - \Delta^\nu \mathcal{L}^\alpha_{n+r,q} + (d, x-r) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^{r-\nu} \sum_{k=n+1}^\infty \frac{d^\alpha_{r,k}}{\{h^\alpha_k(q)\}^{1/2}} M^{\alpha-r+\nu}_{k+r-\nu}(x,q), \tag{8.7.3}$$

где $\Delta^\nu_\delta f(x\delta)$ – конечная разность порядка ν с шагом δ, а равенство (8.6.10) при $\alpha = 0$ перепишем следующим образом ($x \in \Omega(r)$)

$$\Delta^\nu_\delta f((x+r)\delta) - \Delta^\nu \mathcal{L}^0_{n+r,q}(d,x) =$$

$$(-1)^{n-\nu}(x+r)^{[r-\nu]} \sum_{k=n+1}^\infty \frac{d^0_{r,k} q^{k/2}}{(k+1)_{r-\nu}} M^{r-\nu}_k(x+\nu, q). \tag{8.7.4}$$

Ведем следующие обозначения

$$M^\alpha_{k,N}(t) = M^\alpha_k(Nt, e^{-1/N}), \tag{8.7.5}$$

$$\mathcal{N}^\alpha_{n+r,N}(f,t) = \mathcal{L}^\alpha_{n+r,e^{-1/N}}(d, Nt-r). \tag{8.7.6}$$

Тогда равенства (8.7.3) и (8.7.4) принимают следующий вид ($t \in \Omega_\delta$)

$$\Delta^\nu_\delta f(t) - \Delta^\nu_\delta \mathcal{N}^\alpha_{n+r,N}(f,t) = \left(\frac{1}{1-e^{1/N}}\right)^{r-\nu} \sum_{k=n+1}^\infty \frac{d^\alpha_{r,k}}{\{h^\alpha_k(e^{-1/N})\}^{1/2}} M^{\alpha-r+\nu}_{k+r-\nu,N}(t), \tag{8.7.7}$$

$$\Delta^\nu_\delta f(t) - \Delta^\nu_\delta \mathcal{N}^0_{n+r,N}(f,t) = (-1)^{n-\nu}(Nt)^{[r-\nu]} \sum_{k=n+1}^\infty \frac{d^0_{r,k} e^{-\frac{k}{2N}}}{(k+1)_{r-\nu}} M^{r-\nu}_{k,N}(t-(r-\nu)\delta). \tag{8.7.8}$$

Мы остановимся более подробно на вопросе об аппроксимативных свойствах операторов $\mathcal{N}^\alpha_{n+r,N}(f) = \mathcal{N}^\alpha_{n+r,N}(f,t)$. Пусть $-1 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 0$, $t \in \Omega_\delta \setminus \{0\}$. Тогда заметим, что в силу (8.1.15)

$$M^{\alpha-r+\nu}_{k+r-\nu,N}(t) = \binom{\alpha+k}{k+r-\nu} \tilde{M}^{\alpha-r+\nu}_{k+r-\nu}(Nt, e^{\frac{-1}{N}}) = \binom{\alpha+k}{k+r-\nu} \tilde{M}^{\alpha-r+\nu}_{Nt}(k+r-\nu, e^{\frac{-1}{N}}) =$$

$$\frac{\binom{\alpha+k}{k+r-\nu}}{\binom{Nt+\alpha-r+\nu}{Nt}} M^{\alpha-r+\nu}_{Nt,N}((k+r-\nu)\delta), \quad t \in \Omega_\delta. \tag{8.7.9}$$

С другой стороны, из оценки (8.2.9) и равенства (6.1.16) следует, что при $\delta \leqslant t \leqslant \lambda$, $s(t) = 4Nt$

$$\left| M^{\alpha-r+\nu}_{Nt,N}((k+r-\nu)\delta) \right| \leqslant c(\alpha,r,\lambda) A^{\alpha-r+\nu}_{Nt}((k+r-\nu)\delta) \leqslant c(\alpha,r,\lambda) \times$$

$$\begin{cases} (Nt)^{\alpha-r+\nu}, & (k+r-\nu)\delta \leqslant 1/s(t), \\ e^{\frac{1}{2}(k+r-\nu)\delta}(Nt)^{\frac{1}{2}(\alpha-r+\nu)-\frac{1}{4}}((k+r-\nu)\delta)^{\frac{1}{2}(r-\nu-\alpha)-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{s(t)} \leqslant (k+r-\nu)\delta \leqslant \frac{s(t)}{2}, \\ e^{\frac{1}{2}(k+r-\nu)\delta}[s(t)((s(t))^{\frac{1}{3}}+|(k+r-\nu)\delta-s(t)|)]^{\frac{-1}{4}}, & \frac{s(t)}{2} \leqslant (k+r-\nu)\delta \leqslant \frac{3s(t)}{2}, \\ e^{\frac{1}{4}(k+r-\nu)\delta}, & \frac{3s(t)}{2} \leqslant (k+r)\delta. \end{cases} \tag{8.7.10}$$

Далее, из (8.1.4) имеем

$$\frac{1}{\{h_k^\alpha(e^{-1/N})\}^{1/2}} = \binom{k+\alpha}{k}^{-1/2} e^{-k/(2N)} \leqslant c(\alpha)(k+1)^{-\alpha/2}e^{-k/(2N)}, \tag{8.7.11}$$

$$\frac{\binom{\alpha+k}{k+r-\nu}}{\binom{Nt+\alpha-r+\nu}{Nt}} \leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{Nt}{k+r}\right)^{r-\nu-\alpha}, \tag{8.7.12}$$

Сопоставляя (8.7.9)–(8.7.13), мы заключаем, что

$$\frac{M_{k+r-\nu,N}^{\alpha-r+\nu}(t)}{\{h_k^\alpha(e^{-1/N})\}^{1/2}} \leqslant c(\alpha,r,\lambda)\times$$

$$\begin{cases} (k)^{\nu-r+\alpha/2}, & (k+r-\nu)\delta \leqslant 1/s(t), \\ t^{\frac{r-\nu-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(k+r)^{-\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}} & \frac{1}{s(t)} \leqslant (k+r-\nu)\delta \leqslant \frac{s(t)}{2}, \\ \frac{t^{-\alpha/2}}{N^{r-\nu}[s(t)((s(t))^{\frac{1}{3}}+|(k+r-\nu)\delta-s(t)|)]^{\frac{1}{4}}}, & \frac{s(t)}{2} \leqslant (k+r-\nu)\delta \leqslant \frac{3s(t)}{2}, \\ e^{\frac{1}{4}\delta(k+r)}(k+1)^{-\alpha/2}\left(\frac{Nt}{k+r}\right)^{r-\nu-\alpha}, & \frac{3s(t)}{2} \leqslant (k+r)\delta. \end{cases} \tag{8.7.13}$$

Учитывая эти оценки и полагая $[a]$ равной целой части числа a, мы можем записать

$$\frac{1}{(e^{1/N}-1)^{r-\nu}}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{d_{r,k}^\alpha}{\{h_k^\alpha(e^{-1/N})\}^{1/2}}M_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(t)\right| \leqslant c(\alpha,r,\lambda)\left(\Sigma_1^\alpha+\Sigma_2^\alpha+\Sigma_3^\alpha+\Sigma_4^\alpha\right), \tag{8.7.14}$$

где

$$\Sigma_1^\alpha = \begin{cases} 0, & [1/t] \leqslant n \\ \sum_{k=n+1}^{[1/t]} \frac{|d_{r,k}^\alpha|N^r}{(k+r)^{r-\nu-\alpha/2}} & [1/t] \geqslant n+1 \end{cases}, \tag{8.7.15}$$

$$\Sigma_2^\alpha = t^{\frac{r-\nu-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\sum_{k=[1/t]}^{[2N^2t]}\frac{|d_{r,k}^\alpha|N^r}{(k+r)^{\frac{r-\nu}{2}+\frac{1}{4}}},, \tag{8.7.16}$$

$$\Sigma_3^\alpha = \frac{t^{\frac{-\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{N^{r-\nu+\frac{1}{2}}}\sum_{k=[2N^2t]}^{[6N^2t]}\frac{|d_{r,k}^\alpha|N^r}{\left((Nt)^{-\frac{2}{3}}+\left|\frac{k+r}{N^2t}-4\right|\right)^{1/4}}, \tag{8.7.17}$$

$$\Sigma_4^\alpha = \sum_{k=[6N^2t]}^{\infty}\left(\frac{Nt}{k+r}\right)^{r-\nu-\alpha}e^{-\frac{k}{4N}}(k+1)^{-\frac{\alpha}{2}}|d_{r,k}^\alpha|N^r. \tag{8.7.18}$$

Сопоставляя (8.7.14) с (8.7.7), мы получаем следующую оценку $(t \in \Omega_\delta \setminus \{0\})$

$$N^\nu|\Delta_\delta^\nu f(t) - \Delta_\delta^\nu \mathcal{N}_{n+r,N}^\alpha(f,t)| \leqslant c(\alpha,r,\lambda)\left(\Sigma_1^\alpha+\Sigma_2^\alpha+\Sigma_3^\alpha+\Sigma_4^\alpha\right), \tag{8.7.19}$$

в которой фигурируют величины Σ_i^α $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, определенные равенствами (8.7.15)–(8.7.18).

Заметим, что числа $N^r d^\alpha_{r,k}$ представляют собой коэффициенты Фурье-Мейкснера функции $\delta^{-r}\Delta^r\bar{d} = \delta^{-r}\Delta^r_\delta f(x\delta)$ по полиномам Мейкснера $M^\alpha_k(x,e^{-\delta}) = M^\alpha_{k,N}(t)$ $(t=\delta x,\quad x=0,1,\ldots)$, другими словами $N^r d^\alpha_{r,k}$ – это коэффициенты Фурье-Мейкснера r-той разделенной разности функции $f(x)$, заданной на сетке $\Omega_\delta\{0,\delta,2\delta,\ldots\}$. При этом, оценка (8.7.19) получена для $t\in\Omega_\delta\setminus\{0\}$. Что касается точки $t=0$, то в этом случае из (8.7.7) мы имеем

$$\Delta^\nu_\delta f(0)-\Delta^\nu_\delta\mathcal{N}^\alpha_{n+r,N}(f,0)=\left(\frac{1}{1-e^{1/N}}\right)^{r-\nu}\sum_{k=n+1}^\infty\frac{\binom{\alpha+k}{k+r-\nu}}{\{h^\alpha_k(e^{-1/N})\}^{1/2}}d^\alpha_{r,k}. \qquad (8.7.20)$$

Перейдем теперь к случаю $\alpha=0$. Мы будем исходить из равенства (8.7.8). Прежде всего заметим, что $(Nt)^{[r-\nu]}=0$ при $t\in\Omega_\delta\cap[0,(r-\nu-1)\delta]$, стало быть

$$\Delta^\nu_\delta f(t)-\Delta^\nu_\delta\mathcal{N}^0_{n+r,N}(f,t)=0,\quad t\in\Omega_\delta\cap[0,(r-\nu-1)\delta].$$

Поэтому мы можем считать, что $t\geqslant(r-\nu)\delta$ и, следовательно, $Nt-r+\nu\geqslant0$. Стало быть, если $t-(r-\nu)\delta\in\Omega_\delta$, то в силу (8.1.15) имеем

$$M^{r-\nu}_{k,N}(t-(r-\nu)\delta)=\binom{r-\nu+k}{k}\tilde{M}^{r-\nu}_k(Nt+\nu-r,e^{-1/N})=$$

$$\binom{r-\nu+k}{k}\tilde{M}^{r-\nu}_{Nt+\nu-r}(k,e^{-1/N})=\frac{\binom{r-\nu+k}{k}}{\binom{Nt}{Nt+\nu-r}}M^{r-\nu}_{Nt+\nu-r,N}(k\delta). \qquad (8.7.21)$$

Пусть $(r-\nu+1)\delta\leqslant t\leqslant\lambda$, $s(t)=4Nt$. Тогда

$$\frac{\binom{r-\nu+k}{k}}{\binom{Nt}{Nt+\nu-r}}\leqslant c(r)\frac{k^{r-\nu}}{(Nt)^{[r-\nu]}},$$

$$\left|M^{r-\nu}_{Nt,N}(k)\delta)\right|\leqslant c(r,\lambda)\begin{cases}(Nt)^{r-\nu}, & k\delta\leqslant1/s(t),\\ e^{\frac12k\delta}(Nt)^{\frac12(r-\nu)-\frac14}(k\delta)^{\frac12(\nu-r)-\frac14}, & \frac{1}{s(t)}\leqslant k\delta\leqslant\frac{s(t)}{2},\\ e^{\frac12k\delta}(Nt)^{-\frac13}\left[(Nt)^{-\frac23}+|\frac{k}{N^2t}-4|\right]^{\frac{-1}{4}}, & \frac{s(t)}{2}\leqslant k\delta\leqslant\frac{3s(t)}{2},\\ e^{\frac14k\delta}, & \frac{3s(t)}{2}\leqslant k\delta.\end{cases}$$

Из этих оценок в силу (8.7.21) и (8.7.11) находим

$$\frac{(Nt)^{[r-\nu]}|M^{r-\nu}_{k,N}(t-(r-\nu)\delta)|}{\{h^0_k(e^{-1/N})\}^{1/2}}\leqslant$$

$$c(r,\lambda)N^{r-\nu}\begin{cases}1, & k\delta\leqslant1/s(t),\\ e^{\frac12k\delta}(Nt)^{\frac12(r-\nu)-\frac14}(tk)^{\frac12(r-\nu)-\frac14}, & \frac{1}{s(t)}\leqslant k\delta\leqslant\frac{s(t)}{2},\\ (Nt)^{-\frac13}\left[(Nt)^{-\frac23}+|\frac{k}{N^2t}-4|\right]^{\frac{-1}{4}}\left(\frac{k}{N}\right)^{r-\nu}, & \frac{s(t)}{2}\leqslant k\delta\leqslant\frac{3s(t)}{2},\\ e^{\frac14k\delta}\left(\frac{k}{N}\right)^{r-\nu}, & \frac{3s(t)}{2}\leqslant k\delta.\end{cases}$$

Сопоставляя эти оценки с (8.7.8), получаем для $t\in\Omega_\delta$

$$N^\nu|\Delta^\nu_\delta f(t)-\Delta^\nu_\delta\mathcal{N}^0_{n+r,N}(f,t)|\leqslant c(r,\lambda)(\Sigma^0_1+\Sigma^0_2+\Sigma^0_3+\Sigma^0_4), \qquad (8.7.22)$$

где

$$\Sigma_1^0 = \begin{cases} 0, & [1/t] \leqslant n \\ \sum_{k=n+1}^{[1/t]} \frac{N^r|d_{r,k}^0|}{(k+r)^{r-\nu}}, & [1/t] \geqslant n+1 \end{cases}, \tag{8.7.23}$$

$$\Sigma_2^0 = t^{\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}} \sum_{k=[1/t]}^{[2N^2t]} \frac{N^r|d_{r,k}^0|}{(k+r)^{\frac{r-\nu}{2}+\frac{1}{4}}}, \tag{8.7.24}$$

$$\Sigma_3^0 = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{N^{r-\nu+1/2}} \sum_{k=[2N^2t]}^{[6N^2t]} \frac{N^r|d_{r,k}^0|}{\left[(Nt)^{-\frac{2}{3}} + |\frac{k}{N^2t} - 4|\right]^{\frac{1}{4}}}, \tag{8.7.25}$$

$$\Sigma_4^0 = \frac{1}{N^{r-\nu}} \sum_{k=[6N^2t]}^{\infty} e^{-\frac{k}{4N}} N^r |d_{r,k}^0|. \tag{8.7.26}$$

§ 8.8. Приближение полиномов на $[0,\infty)$

Результаты предыдущего раздела (см. (8.7.14) и (8.7.22)) позваляют оценить сверху отклонение оператора $\mathcal{N}_{n+r,N}^\alpha(f)$ от функции $f \in l_{2,\rho}$ на сетке $\Omega_\delta = \{0, \delta, \ldots\}$. Здесь рассмотрим вопрос о приближении операторами $\mathcal{N}_{n+r,N}^\alpha(f)$ алгебраических полиномов $p_m = p_m(x)$ достаточно высокой степени m на полуоси $[0,\infty)$. Точнее, ё мы будем рассматривать случай, когда $n = O(N)$, $m = O(N)$. Подобная задача возникает, например, в следующей ситуации. Предположим, что для достаточно гладкой функции $f = f(x)$, определенной на полуоси $[0,\infty)$, сконструирован алгебраический полином $p_m = p_m(t)$, приближающий на сетке Ω_δ функцию f с точностьтю ε в следующем смысле

$$e^{-\frac{t}{2}}|f(x) - p_m(t)| \leqslant \varepsilon, \quad t \in \Omega_\delta.$$

Если при этом оказалось так, что число m велико, то сразу возникает задача об «укорачивании» полинома $p_m = p_m(t)$, т.е. требуется заменить полином $p_m(t)$ некоторым другим полиномом $p_{n,m} = p_{n,m}(t)$, степень n которого существенно меньше, чем m. Одновременно возникает вопрос об оценке погрешности $e^{-\frac{t}{2}}|p_{n,m}(x) - p_m(t)|$, проистекающей в результате замены полинома $p_m(x)$ полиномом $p_{n,m}(t)$. Мы здесь рассмотрим один из способов «укорачивания» полинома $p_m(t)$, основанный на использовании оператора $\mathcal{N}_{n+r,N}^\alpha(f)$. Поскольку $p_m \in l_{2,\rho}$, то в силу (8.7.7) мы можем записать

$$\Delta_\delta^\nu p_m(t) - \Delta_\delta^\nu \mathcal{N}_{n+r,N}^\alpha(f,t) = \left(\frac{1}{1-e^{1/N}}\right)^{r-\nu} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_{r,k}^\alpha}{\{h_k^\alpha(e^{-1/N})\}^{1/2}} M_{k+r-\nu,N}^{\alpha-r+\nu}(t), \tag{8.8.1}$$

где $p_{r,k}^\alpha$ – коэффициенты Фурье-Мейкснера функции $p(j) = \Delta^r p_m((j-r)\delta)$, $j \in \Omega(r)$ по полиномам Мейкснера $m_k^\alpha(j, e^{-1/N}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Поскольку $p(t) = \Delta^r p_m((t-r)\delta)$ представляет собой алгебраический полином степени $m - r$, то $p_{r,k}^\alpha = 0$ при $k > m - r$, поэтому (8.8.1) мы можем переписать так

$$\Delta_\delta^\nu p_m(t) - \Delta_\delta^\nu \mathcal{N}_{n+r,N}^\alpha(f,t) = \left(\frac{1}{1-e^{1/N}}\right)^{r-\nu} \sum_{k=n+1}^{m-r} \frac{p_{r,k}^\alpha}{\{h_k^\alpha(e^{-1/N})\}^{1/2}} M_{k+r-\nu,N}^{\alpha-r+\nu}(t), \tag{8.8.2}$$

В частности, если $\nu = 0$, то правая часть равенства (8.8.2) дает нам погрешность, возникающую в результате замены полинома $p_m(t)$ полиномом $\mathcal{N}_{n+r,N}^\alpha(f,t)$. Мы оценим правую часть равенства (8.8.2) при условии $m \leqslant \lambda N$, где $0 < \lambda$ – произвольное фиксированное число. В этом случае мы можем воспользоваться оценкой

$$\frac{|M_{k+r-\nu,N}^{\alpha-r+\nu}(t)|}{\{h_k^\alpha(e^{-1/N})\}^{1/2}} \leqslant c(\alpha,r,\lambda)A_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(t)(k+1)^{-\alpha/2}, \tag{8.8.3}$$

вытекающей из (8.7.11) и леммы 4.2.4. Имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m-r}\frac{p_{r,k}^\alpha(\delta)}{\{h_k^\alpha(e^{-\delta})\}^{1/2}}M_{k+r-\nu,N}^{\alpha-r+\nu}(t)\right| \leqslant \eta_{n,m}^\alpha(\delta)\gamma_{n,m,N}^\alpha(t), \tag{8.8.4}$$

$$\eta_{n,m}^\alpha(\delta) = \left(\sum_{n+1}^{m-1}(p_{r,k}^\alpha(\delta))^2\right)^{1/2}, \tag{8.8.5}$$

$$\gamma_{n,m,N}^\alpha(t) = \left(\sum_{k=n+1}^{m-1}\left(M_{k+r-\nu,N}^{\alpha-r+\nu}(t)\right)^2/h_k^\alpha(e^{-\delta})\right)^{1/2}. \tag{8.8.6}$$

Что касается величины $\gamma_{n,m,N}^\alpha(t)$, то, используя оценки (8.8.3) мы находим

$$\gamma_{n,m,N}^\alpha(t) \leqslant c(\alpha,r,\lambda)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-\alpha}(A_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(t))^2\right)^{1/2}. \tag{8.8.7}$$

Пусть $0 \leqslant t \leqslant A$, тода из (8.2.8) следует, что для произвольного действительного β имеет место оценка

$$A_n^\beta(t) \leqslant c(\beta,A)n^\beta(1+nt)^{-\beta/2-1/4} \quad (0 \leqslant t \leqslant A). \tag{8.8.8}$$

Полагая здесь $\beta = \alpha - r + \nu$, мы можем записать

$$A_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(t) \leqslant c(\alpha,r,A)(k+r)^{\alpha-r+\nu}(1+(k+r)t)^{\frac{r-\nu-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}.$$

Отсюда имеем $(0 \leqslant t \leqslant A)$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-\alpha}(A_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(t))^2 \leqslant c(\alpha,r,A)\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+r)^{\alpha-2r+2\nu}(1+(k+r)t)^{r-\nu-\alpha-1/2} =$$

$$c(\alpha,r,A)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k+r)^{r-\nu+1/2}}\left(\frac{1}{k+r}+t\right)^{r-\nu-\alpha-1/2}. \tag{8.8.9}$$

Заметим, что при $k > n$

$$\left(\frac{1}{k+r}+t\right)^{r-\nu-\alpha-1/2} \leqslant \begin{cases}\left(\frac{1}{n+r}+t\right)^{r-\nu-\alpha-1/2}, & r-\nu-\alpha \geqslant 1/2,\\ (k+r)^{\alpha+1/2-r+\nu}, & r-\nu-\alpha < 1/2,\end{cases}$$

поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k+r)^{r-\nu+1/2}}\left(\frac{1}{k+r}+t\right)^{r-\nu-\alpha-1/2} \leqslant$$

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{n+r}+t\right)^{r-\nu-\alpha-1/2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+r)^{-r+\nu-1/2}, & r-\nu-\alpha \geqslant 1/2,\\ \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+r)^{-2r+2\nu+\alpha}. & r-\nu-\alpha < 1/2,\end{cases} \tag{8.8.10}$$

Сопоставляя (8.8.7), (8.8.9) и (8.8.10), мы находим

$$(\gamma_{n,m,N}^{\alpha}(t))^2 \leqslant c(\alpha,r,A) \begin{cases} \left(\frac{1}{n}+t\right)^{r-\nu-\alpha-1/2} n^{-r+\nu+1/2}, & r-\nu-\alpha \geqslant 1/2, \\ n^{-2r+2\nu+\alpha+1}, & r-\nu-\alpha < 1/2. \end{cases} \tag{8.8.11}$$

Из (8.8.2), (8.8.4), (8.8.5) и (8.8.11) вытекает

Теорема 4.8.1. *Пусть $\delta > 0$, $\lambda > 0$, $A > 0$, $N = 1/\delta$, $m \leqslant \lambda N$, $p_m = p_m(t)$ – алгебраический полином степени m. Тогда, если $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, $0 \leqslant t \leqslant A$, то имеет место оценка*

$$\left(\frac{1}{e^\delta-1}\right)^{\nu} |\Delta_\delta^\nu p_m(t) - \Delta_\delta^\nu \mathcal{N}_{n+r,N}^{\alpha}(f,t)| \leqslant$$

$$c(\alpha,r,\lambda,A)\eta_{n,m}^{\alpha}(\delta)\left(\frac{1}{e^\delta-1}\right)^{r} \begin{cases} \left(\frac{1}{n}+t\right)^{r-\nu-\alpha-1/2} n^{-r+\nu+1/2}, & r-\nu-\alpha \geqslant 1/2, \\ n^{-2r+2\nu+\alpha+1}, & r-\nu-\alpha < 1/2, \end{cases}$$

где величина $\eta_{n,m}^{\alpha}(\delta)$ определена равенством (8.8.5).

Комментарии к главе 8

Идея построения смешанных рядов по полиномам, ортогональным на дискретных сетках, в том числе и для полиномов Мейкснера и методы конструирования таких рядов были рассмотрены в работе [56]. В работе [57] рассмотрены аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Мейкснера, часть из которых мы привели в главе 8.

Глава 9. Некоторые приложения смешанных рядов

В настоящей главе мы остановимся на некоторых приложениях смешанных рядов. В частности, мы рассмотрим задачи, связанные с приближенным решенеием дифференциальных и интегральныхураванений, с обработкой и сжатием дискретной и графической информаций и некоторые другие.

§ 9.1. Введение

Основная идея приложений смешанных рядов связана с задачей одновременного приближения функций и их производных, которая, в частности, возникает в связи с необходимостью приближенного представления решений дифференциальных или интегральных уравнений в виде разложений по той или иной ортонормированной системе. Для определенности рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', \dots . y^{(r-1)}) = 0, \tag{9.1.1}$$

Предположим, что его решение $y = f(x)$ представлено в виде ряда Чебышева

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \hat{T}_k(x), \tag{9,1.2}$$

где $\hat{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\quad \{\hat{T}_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos(k \arccos x)\}_{k=0}^{\infty}$ – система полиномов Чебышева первого рода. Если сходятся все ряды вида

$$f^{(\nu)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \hat{T}_k^{(\nu)}(x) \quad (0 \leqslant \nu \leqslant r-1), \tag{9,1.3}$$

то из (9.1.1) мы находим

$$F\left(x, \sum_{k=0}^{\infty} c_k \hat{T}_k(x), \sum_{k=0}^{\infty} c_k \hat{T}'_k(x), \dots, \sum_{k=0}^{\infty} c_k \hat{T}_k^{(r-1)}(x)\right) = 0. \tag{9.1.4}$$

Численные методы решения уравнкения (9.1.4) относительно неизвестных коэффициентов c_k позволяют найти приближенные значения лишь конечного числа $c_k(k = 0, 1, \dots, N)$. Поэтому вместо точных равенств (9.1.3) мы будем иметь приближенные равенства

$$f^{(\nu)}(x) \approx \sum_{k=0}^{N} c_k \hat{T}_k^{(\nu)}(x) = S_N^{(\nu)}(f, x) \quad (0 \leqslant \nu \leqslant r-1), \tag{9.1.5}$$

соответственно, вместо точного равенства (9.1.4) мы будем иметь приближенное равенство

$$F\left(x, \sum_{k=0}^{N} c_k \hat{T}_k(x), \sum_{k=0}^{N} c_k \hat{T}'_k(x), \dots, \sum_{k=0}^{N} c_k \hat{T}_k^{(r-1)}(x)\right) \approx 0. \tag{9.1.6}$$

Выбрав N достаточно большим, мы можем добыться требуемой точности в приближенных равенствах (9.1.5) и (9.1.6) и тогда частичную сумму $S_N(f, x) = S_N^{(0)}(f, x)$ можно взять в качестве приближенного решения (с требуемой точностью) уравнения (9.1.1). Однако, может случиться так, что некоторые из рядов (9.1.3) сходятся очень медленно (чаще всего это характерно для рядов (9.1.3), соответствующих случаю $\nu \geqslant 1$) и тогда для достижения удовлетворительной точности в приближенных равенствах (9.1.5) и (9.1.6) потребуется взять N чрезмерно большим. Это создает целый ряд неудобств, связанных с практическим использованием (хранением, численной реализацией и другими) разложений в (9.1.5). Естественно возникает задача о замене «длинных» разложений в (9.1.5) существенно более «короткими», но без существенной потерии точности приближенных равенств (9.1.5). Поскольку $\hat{T}_k^{(\nu)}(1) \asymp k^{2\nu}$, то отбрасывание одного или нескольких слагаемых из сумм (9.1.8) может привести к существенной потере точности априближенных равенств, полученных из (9.1.5) и (9.1.6) путем замены сумм $S_N^{(\nu)}(x)$ суммами, оставшимися в результате указанного отбрасывания. Это означает, что, вообще говоря, мы не можем решить поставленную выше задачу «укорачивания» сумм вида (9.1.8) путем простого механческого отбрасывания из них нескольких слагаемых. С другой стороны, число N было выбрано большим на столько, что сумма (9.1.7) и ее производные (9.1.8) приближают соответственно решение дифференциального уравнения $y = f(x)$ и ее производные $f^{(\nu)}(x)$ с требуемой точностью. Поэтому нам достаточно найти некоторый полином вида $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \hat{T}_k(x)$, степень n которого существенно меньше, чем N и такой, что $p_n^{(\nu)}(x)$ приближает $S_N^{(\nu)}(x)$ с требуемой точностью при любом ν $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1)$. Тогда в качестве приближенного решения уравнения (9.1.1) мы можем взять $y = p_n(x)$, предпочитая его приближенному решению $y = S_N(x)$. Задача нахождения полинома $p_n(x)$, удовлетворяющего этим условиям мы будем называть задачей об одновременном приближении функции $y = S_N(x)$ и ее производных. Смешанные ряды оказались весьма удобным инструментом решения этой задачи. Другое направление приложений смешанных рядов связано с тем, что их частичные суммы обладают свойством кратной (эрмитовой) интерполяции в концах отрезка ортогональности соответствующей ортонормированной системы полиномов. Например, как уже отмечалось в пятой главе, частичные суммы смешанного ряда по полиномам Лежандра кратно интерполируют исходную функцию в точках -1 и 1. Это свойство имеет важное значение при обработке графической информации. В настоящей главе мы рассматриваем некоторые задачи подобного рода более детально.

§ 9.2. Некоторые приложения смешанных рядов по полиномам Чебышева первого рода

Среди различных классических ортогональных полиномов доминирующее положение с точки зрения приложений занимают, пожалуй, полиномы Чебышева первого рода. Большинство из этих приложений полиномов Чебышева связано с разложением функций (решений уравнений различных типов) в ряды по этим полиномам (см.,например, [37], [58], [59]) $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$. Популярность разложений по полиномам Чебышева объясняется целым рядом обстоятельств, среди которых в первую очередь следует отметить возможность вычисления коэффициентов этих разложений с помощью быстрого преобразования Фурье, простая рекуррентная формула для вычисления значений самых полиномов Чебышева и хорошие аппроксимативные свойства частичных сумм рядов Фурье-Чебышева на классах дифференцируемых и аналитических функций. И тем не менее, рядам Фурье-Чебышева присущ, так же как общим рядам Фурье-Якоби уже неоднократно отмечавшийся выше существенный недостаток, заключающийся в том, что они плохо приспособлены для их использования в задаче одновременного приближения функции и ее производных, возникающей, в частности, при решении дифференциальных уравнений приближенными методами. Здесь мы покажем, что от этого недостатка можно избавиться путем совместного применения в этой задаче рядов Фурье-Чебышева и смешанных рядов по полиномам Чебышева. Перейдем теперь более детальному обсуждению этой основной идеи, включающему конкретные машинные алгоритмы, численно решающие задачу одновременного приближения функций и их производных, основанные на совместном использовании методов рядов Фурье и смешанных рядов. Предположим, что нам удалось найти приближение искомой функции $f = f(x)$ в виде частичной суммы Фурье-Чебышева, т.е. мы имеем приближенное равенство

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{N} a_k(f) T_k(x) = S_N(f,x), \tag{9.2.1}$$

причем N выбрано большим настолько, что с требуемой точностью производная $(S_N(f,x))^{(\nu)}$ приближает производную $f^{(\nu)}(x)$ при каждом $\nu = 1,\dots r-1$, где r–некоторое натуральное число. Исходя из (9.2.1) требуется найти полином $p_n(x)$ существенно меньшей степени n, который, в свою очередь, с удовлетворительной точностью решает задачу одновременного приближения функции $S_N(x)$ и ее производных $(S_N(f,x))^{(\nu)}$ при каждом $\nu = 1,\dots r-1$. Как уже отмечалось выше, решить эту задачу простым отбрасыванием части слагаемых из суммы $\sum_{k=0}^{N} a_k(f)\,(T_k(x))^{(\nu)}$ не удается ввиду быстрого роста производных $(T_k(x))^{(\nu)}$ при $x = 1$ и $k \to \infty$. Требуются более глубокие преобразования, которые учитывают информацуию об исходной функции f (точнее свойства, связанные с ее дифференцированием $r-1$–раз), содержащееся во всех найденных коэффициентах Фурье-Чебышева $a_k(f)$ $(0 \leqslant k \leqslant N)$, фигурирующих в (9.2.1). Смешанные ряды по полиномам Чебышева $T_k(x)$ как раз и позволяют достаточно эффективно распорядиться такой информацией. Смешанные ряды по полиномам Чебышева $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ были построены в главе 1, как частный случай смешанных рядов по полиномам Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$ при $\alpha = \beta = -1/2$. А именно, пусть $f \in W^r_{L_1^{-1/2}}$, тогда смешанный ряд (9.5.1) принимает вид

$$f(x) = p(x) + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}}{(k-1)^{[r]}} P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r,-\frac{1}{2}-r}(x), \tag{9.2.2}$$

где $p(x)$– полином степени $2r$,

$$f_{r,k} = \frac{1}{h_k^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} f^{(r)}(x) P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x)dx. \tag{9.2.3}$$

Следовательно, оператор $\mathcal{Y}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f)$, будучи частичной суммой смешанного ряда (9.2.2), допускает представление

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f,x) = p(x) + \sum_{k=r+1}^{n+r} \frac{2^r f_{r,k}}{(k-1)^{[r]}} P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r,-\frac{1}{2}-r}(x), \tag{9.2.4}$$

Кроме того, если мы воспользуемся представлением (9.5.22), то можем записать

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x) = S_n(f,x) + \psi_{r,n}(x), \tag{9.2.5}$$

где $S_n(f,x) = S_n^{-1/2}(f,x)$ – частичная сумма порядка n ряда Фурье функции f по полиномам Чебышева $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$, а $\psi_{r,n}(x) = \psi_{r,n}^{-1/2}(x)$, в соответствии с (9.5.13) имеет вид

$$\psi_{r,n}(x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{2^r f_{r,k}}{(k-1)^{[r]}} \sum_{j=0}^{[\frac{k+r-n-1}{2}]} \lambda_j^{-1/2} P_{k+r-2j}^{-1/2,-1/2}(x), \tag{9.2.6}$$

где $[a]$–целая часть числа a. Положим

$$a_k(g) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{g(t)\cos(k\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}dt, \tag{9.2.7}$$

тогда, поскольку

$$P_k^{-1/2,-1/2}(x) = \frac{(2n)!}{(2^k k!)^2}\cos(k\arccos x),$$

$$h_k^{-1/2,-1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}\right)^2,$$

то из (9.2.3) находим

$$f_{r,k} = \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!}a_k(f^{(r)}). \tag{9.2.8}$$

При $\alpha = -1/2$ равенство (5.1.24) принимает следующий вид

$$\lambda_j^{-1/2} = \lambda_j^{-1/2}(r,k) = \frac{(-1)^j(k-r)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(k-1/2)^{[j]}}{(k+r-2j)_{k+r-2j}(k+r-2j+1)_j(2j)!} =$$

$$(-1)^j\frac{((k+r-2j)!)^2 2^{2k+2r-4j}}{(2(k+r-2j))!}\frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}}\frac{r^{[j]}}{j!}\frac{k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}}. \tag{9.2.9}$$

С другой стороны имеем

$$P_{k+r-2j}^{-1/2,-1/2}(x) = \frac{(2(k+r-2j))!}{(2^{k+r-2j}(k+r-2j)!)^2}\cos((k+r-2j)\arccos x) =$$

$$\frac{(2(k+r-2j))!}{(2^{k+r-2j}(k+r-2j)!)^2}T_{k+r-2j}(x). \tag{9.2.10}$$

Из (9.2.6), (9.2.9) и (9.2.10) находим

$$\lambda_j^{-1/2}P_{k+r-2j}^{-1/2,-1/2}(x) = (-1)^j\frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}}\frac{r^{[j]}}{j!}\frac{k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}}T_{k+r-2j}(x), \tag{9.2.11}$$

$$\psi_{r,n}(x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} a_k(f^{(r)})\sum_{j=0}^{[\frac{k+r-n-1}{2}]}(-1)^j\binom{r}{j}\frac{kT_{k+r-2j}(x)}{2^r(k+r-j)^{[r+1]}}. \tag{9.2.12}$$

Сопоставляя (9.2.5) и (9.2.12), для оператора $\mathcal{Y}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f,x)$ мы получаем представление

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f)T_k(x) +$$

$$\sum_{k=n-r+1}^{n+r} a_k(f^{(r)})\sum_{j=0}^{[\frac{k+r-n-1}{2}]}(-1)^j\binom{r}{j}\frac{kT_{k+r-2j}(x)}{2^r(k+r-j)^{[r+1]}}, \tag{9.2.13}$$

В случае необходимости, исходя из равенства (9.2.13) можно также найти зачения производных $\mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)$ $(1 \leqslant \nu \leqslant r-1)$:

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f)T_k^{(\nu)}(x) + (\psi_{r,n}(x))^{(\nu)}, \tag{9.2.14}$$

где

$$(\psi_{r,n}(x))^{(\nu)} = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} a_k(f^{(r)}) \sum_{j=0}^{[\frac{k+r-n-1}{2}]} (-1)^j \binom{r}{j} \frac{kT^{(\nu)}_{k+r-2j}(x)}{2^r(k+r-j)^{[r+1]}}.$$

В приложении 1 к данной главе показано, что представления (9.2.13) и (9.2.14) могут быть использованы при численной реализации операторов $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ и их производных. Мы здесь воспользуемся программой, разработанной в приложении 1 с целью сопоставления аппроксимативных свойств операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)$ и операторов частичных сумм ряда Фурье-Чебышева $S_{n+2r}(f) = S_{n+2r}(f,x)$, связанных с $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ равенством (9.2.5). Продемонстрируем это на конкретных примерах вида(конечный ряд Фурье-Чебышева по полиномам Чебышева первого рода)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(x), \tag{9.2.15}$$

где N–достаточно большое число, а коэффициенты a_k подбираются так, чтобы r–я производня $f^{(r)}(x)$ была не очень «плохой». Дело в том, что если $f^{(r)}(x)$ принимает на $[-1,1]$ черезмерно большие по абсолютной величине значения, то, как следствие, оказываются большими по абсолютной величине коэффициенты $a_k(f^{(r)})$, фигурирующие в определении $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f)$. Это, в свою очередь, ухудшает аппроксимативные свойства оператора $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f)$. В этом случае операторы $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f)$ не могут быть успешно использованы в задаче одновременного приближения функции f и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1)$. Если же r–я производня $f^{(r)}(x)$ не принимает на $[-1,1]$ очень больших значений, то приведенные ниже примеры показывают, что операторы $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f)$ могут успешно решать задачу одновременного приближения функции f и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1)$, ограничившись значительно меньшими, чем N значениями параметра n. При этом особо следует отметить, что приведенные ниже примеры наглядно показывают, что частичные суммы $S_{n+2r}(f,x)$ ряда (9.2.15) и их производные для решения этой задачи совсем не подходят. А именно, при приближении аргумента x к концам -1 и 1 разность между $f^{(\nu)}(x)$ и $S^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ для $\nu > 0$ становится, как правило, очень большой по абсолютной величине, в то время, как разность между $f^{(\nu)}(x)$ и $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f)$ достаточно быстро стремится к нулю.

2.1. Примеры. Пусть

$$a_k = e^{-kc_1}(k+1)^{c_2}\cos(kc_3), \quad f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(x), \tag{9.2.16}$$

где c_1, c_2, c_3 – проивольные постоянные. Выбирая различные значения этих констант, мы получим различные примеры функций $f(x)$, определенных равенствами (9.2.16). Будем приближать производные $f^{(\nu)}(x)$ $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1)$ таких функций $f = f(x)$ посредством $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ и $S^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$. Цель предпринятого нами эксперимента заключается в том, чтобы изучить поведение разностей $f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ и $f^{(\nu)}(x) - S^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ для $x \in [-1,1]$ и различных значений параметра n, определяющего совместно с параметном r значение степени полиномов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)$ и $S_{n+2r}(f,x)$. Будем исходить из того, что требуется приблизить $f^{(\nu)}(x)$ с точностью E. Для достижения заданной точности приближения $f^{(\nu)}(x)$ на достаточно густой сетке из $[-1,1]$ посредством $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ или $S^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ будем увеличивать значение параметра n настолько, чтобы та или иная из разностей $f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ и $f^{(\nu)}(x) - S^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ по абсолютной величине стала меньше, чем E. При этом будем сопоставлять соответствущие зачения параметра

n, найденные для каждого из этих разностей в отдельности. Полученные результаты собраны в соответствующиж таблицах.

Пример 1.

$$N = 300, \quad c1 = 6, \quad c2 = 0, \quad c3 = 2, \quad r = 3, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

E	1	0.1	0.01	0.001
$\lvert f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=6	n=18	n=31	n=45
$\lvert f(x) - S_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=6	n=14	n=28	n=41
$\lvert f^{(1)}(x) - \mathcal{Y}^{(1)}_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=26	n=42	n=57	n=72
$\lvert f^{(1}(x) - S^{(1)}_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=24	n=43	n=65	n=79
$\lvert f^{(2)}(x) - \mathcal{Y}^{(2)}_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=54	n=70	n=87	n=103
$\lvert f^{(2)}(x) - S^{(2)}_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=87	n=101	n=123	n=134

Пример 2.

$$N = 300, \quad c1 = 8, \quad c2 = -2, \quad c3 = 8, \quad r = 4, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

E	1	0.1	0.01	0.001
$\lvert f^{(1)}(x) - \mathcal{Y}^{(1)}_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=8	n=8	n=16	n=32
$\lvert f^{(1}(x) - S^{(1)}_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=8	n=8	n=16	n=29
$\lvert f^{(2)}(x) - \mathcal{Y}^{(2)}_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=8	n=25	n=43	n=62
$\lvert f^{(2}(x) - S^{(2)}_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=18	n=40	n=71	n=93
$\lvert f^{(3)}(x) - \mathcal{Y}^{(3)}_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=38	n=60	n=80	n=100
$\lvert f^{(3)}(x) - S^{(3)}_{n+2r}(f,x)\rvert < E$	n=93	n=104	n=157	n=179

Итак, ппроизводная $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ приближает производную $f^{(\nu)}(x)$ значительно лучше, чем $S^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$. При этом следует иметь ввиду, что, если производная $f^{(r)}(x)$ имеет черезмерно резкие и большие по абсолютной величине колебания, то функция $(\psi_{r,n}(x))^{(\nu)}$, фигурирующая в (9.2.16) через посредство коэффициентов $a_k(f^{(r)})$ унаследует соответствующие резкие колебания и в этом случае аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ резко ухудшаются. Поэтому, правильный выбор параметра r, фигурирующего в конструкции оператора $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ имеет существенное значение. Если нет необходимости привлекать большие зачения этого параметра, то и не следует этого делать! В зависимости от условий поставленной задачи, нужно стремииться выбирать наименьшее из возможных его значений. Например, если речь идет о численном решении дифференциального урапванения порядка не выше двух (именно такие уравнения чаще всего встречаются на практике), то, очевидно, выбор параметра r следует ограничивать неравенством $1 \leqslant r \leqslant 3$.

§ 9.3. Некоторые приложения смешанных рядов по полиномам Лежандра

В предыдущем пункте была рассмотрена задача об одновременном приближении функции f и ее производных до порядка $r-1$ в том случае, когда $f \in W^r_{L_1^{-1/2}}$. Этому условию не удовлетворяют, например, функции f, для которых $f^{(r)}(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ и для такой функции коэффициенты $f^{-1/2}_{r,k}$, определяющие соответствующий смешанный ряд не существуют. С другой стороны, для указанной функции можно построить смешанный ряд по ультрасферическим полиномам $P^{\alpha,\alpha}_n(x)$ с $\alpha > -1/2$ и решить задачу одновременного приближения функции f и ее производных посредством операторов $\mathcal{Y}^{\alpha}_{n+2r}(f,x)$. Мы здесь рассмотрим случай полиномов Лежандра, для которых $\alpha = 0$. Следует отметить, что операторы $\mathcal{Y}^{\alpha}_{n+2r}(f)$ в случае $\alpha = 0$ могут быть использованы как для решения задачи одновременного приближения функции f и ее производных, так и для их интерполяции в точках -1 и 1. Это свойство операторов $\mathcal{Y}^{0}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}^{0}_{n+2r}(f,x)$ имеет важное значение при их использовании для обработки и сжатия изображений и, в особенности, для обработки кусочно-гладких кривых(границ изображений). Будем исходить из того, что функция $f \in W^r_{L_1}$, Тогда мы можем для нее составить смешанный ряд по полиномам Лежандра (см.(5.3.37))

$$f(x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P^{r,r}_{k-r}(x) + D_{2r-1}(x), \tag{9.3.1}$$

где

$$D_{2r-1}(x)=\frac{(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{1}{\nu!}\times$$

$$\left[\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu}}\sum_{s=0}^{r-1-\nu}\frac{(r)_s(1+x)^s}{2^s s!}+\frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu}}\sum_{s=0}^{r-1-\nu}\frac{(r)_s(1-x)^s}{2^s s!}\right], \tag{9.3.2}$$

$$f_{r,k}=\frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}f^{(r)}(x)P_n^{0,0}(x)dx \tag{9.3.3}$$

Учитывая (9.3.1), мы можем записать

$$\mathcal{Y}^0_{n+2r}(f,x)=\frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=r}^{n+r}\frac{f_{r,k}}{k^{[r]}}P_{k-r}^{r,r}(x)+D_{2r-1}(x). \tag{9.3.4}$$

При вычислении производных $\left(\mathcal{Y}^0_{n+2r}(f,x)\right)^{(\nu)}$ $(0\leqslant\nu\leqslant r-1)$ можно воспользоваться равенством

$$\left(\mathcal{Y}^0_{n+2r}(f,x)\right)^{(\nu)}=\mathcal{Y}^0_{n+\nu+2(r-\nu)}(f^{(\nu)},x). \tag{9.3.5}$$

В приложении 2 к данной главе показано, что представления (9.3.4) и (9.3.5) могут быть использованы при численной реализации операторов $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$. Мы здесь воспользуемся программой, разработанной в приложении 2 с целью сопоставления аппроксимативных свойств операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)=\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)$ и операторов частичных сумм ряда Фурье-Лежандра $S_{n+2r}(f)=S_{n+2r}(f,x)$. Продемонстрируем это на конкретных примерах вида(конечный ряд Фурье-Лежандра)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N}f_kP_k(x) \tag{9.3.6}$$

где N–достаточно большое число, а коэффициенты f_k подбираются так, чтобы r–я производня $f^{(r)}(x)$ не имела слишком сильных колебаний на $[-1,1]$. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, если $f^{(r)}(x)$ принимает на $[-1,1]$ черезмерно большие по абсолютной величине значения, то, как как и в случае смешанных рядов по полиномам Чебышева первого рода, оказываются большими по абсолютной величине коэффициенты $f_{r,k}(f)$, фигурирующие в определении $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f)$. Это, в свою очередь, ухудшает аппроксимативные свойства оператора $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f)$. В этом случае операторы $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f)$ не могут быть успешно использованы в задаче одновременного приближения функции f и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ $(0\leqslant\nu\leqslant r-1)$. Если же r–я производня $f^{(r)}(x)$ не принимает на $[-1,1]$ очень больших значений, то приведенные ниже примеросы показывают, что операторы $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f)$ могут успешно решать задачу одновременного приближения функции f и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ $(0\leqslant\nu\leqslant r-1)$, обеспечивая требуемую точность приближения $f^{(\nu)}(x)$ посредством полдиномов $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f)$, степень которых существенно меньше, чем N. При этом особо следует отметить, что приведенные ниже примеры наглядно показывают, что часитчные суммы $S_{n+2r}(f,x)$ ряда (9.3.6) и их производные для решения этой задачи совсем не подходят. А именно, при приближении аргумента x к концам -1 и 1 разность между $f^{(\nu)}(x)$ и $S^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ для $\nu>0$ становится, как правило, очень большой по абсолютной величине, в то время, как разность между $f^{(\nu)}(x)$ и $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f)$ достаточно быстро стремится к нулю. Эти кривые наглядно демонстрируют, что ппроизводная $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ приближает производную $f^{(\nu)}(x)$ значительно лучше, чем $S^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$.

3.1. Примеры.. Пусть

$$f_k = e^{-kc_1}(k+1)^{c_2}\cos(kc_3), \quad f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k P_k(x), \tag{9.3.7}$$

где c_1, c_2, c_3 – проивольные постоянные. Выбирая различные значения этих констант, мы получим различные примеры функций $f(x)$, определенных равенствами (9.3.7). Будем приближать производные $f^{(\nu)}(x)$ $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1)$ таких функций $f = f(x)$ посредством $\mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)$ и $S_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)$. Цель предпринятого нами эксперимента заключается в том, чтобы изучить поведение разностей $f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)$ и $f^{(\nu)}(x) - S_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)$ для $x \in [-1,1]$ и различных значений параметра n, определяющего совместно с параметном r значение степени полиномов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)$ и $S_{n+2r}(f,x)$. Интересно сопоставлять графики разностей $f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)$ и $f^{(\nu)}(x) - S_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)$. Ниже приводятся графики, соответствующие некоторым значениям параметров c_1, c_2, c_3, r, ν и n. Левые графики соответствуют последовательно: производной $f^{(\nu)}(x)$, ее приближению посреством $\mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)$ и разности $f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)$, а справа – это графики функций $f^{(\nu)}(x)$, $S_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)$, $f^{(\nu)}(x) - S_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)$ – соответственно (сверху вниз).

§ 9.4. Приложения дискретных смешанных рядов

Здесь мы рассмотрим некоторые задачи, в которых естественным путем появляются смешанные ряды по полиномам Чебышева и Мейкснера, ортогональных на дискретных равномерных сетках. Речь идет об аппроксимации решений разностных уравнений, полученных в результате дискретизации дифференциальных уравнений. Хорошо извесно, что наиболее универсальным методом приближенного решения дифференциальных уравнений является так называемый сеточный метод (построение разностных схемм). Вернемся здесь снова к дифференциальному уравнению (9.1.1) и заменим в нем все производные $y^{(\nu)}(x)$ $(1 \leqslant \nu \leqslant r-1)$ соответствующими операторами конечных разностей $\mathcal{L}_h^\nu g$, а функцию $F = F(x, y_1 \dots, y_r)$ - некоторой линейной функцией $\hat{F} = \hat{F}(x, y_1, \dots, y_r)$. Тогда мы получим вместо дифференциального уравнения (9.1.1) разностное уравнение $(k = 0, 1, \dots)$

$$\hat{F}(x_0 + kh, (\mathcal{L}_h^0 g)(x_0 + kh), (\mathcal{L}_h^1 g)(x_0 + kh), \dots, (\mathcal{L}_h^{r-1} g)(x_0 + kh)) = 0. \tag{9.4.1}$$

Задача о выборе разностных операторов $\mathcal{L}_h^\nu$ и функции $\hat{F}$, удовлетворяющих тем или иным условиям детально исследована в теории разностных схем. Указанные условия, как правило, подбираются таким образом, чтобы сеточная функция $g = g(x_0 + kh)$ $(k = 0, 1, \dots)$, являющаяся решением разностного уравнекния (9.4.1) с заданной точностью аппроксимировала на сетке $\{x_0, x_0 + h, \dots\}$ решение дифференциального уравнения (9.1.1), которую мы обозначим через $y = f(x)$. Для аппроксимации $f(x)$ между узлами $x_0 + kh$ и $x_0 + (k+1)h$ обычно используют один из методов интерполяции (интерполяционные сплайны, полиномы и т.д.). Следует отметить, что интерполирующая функция $g(x)$ должна быть выбрана так, чтобы она сама приближала с требуемой точностью функцию $f(x)$, а ее производные $g^{(\nu)}(x)$ приближали соответствующие производные функции $f(x)$. В противном случае подстановка $g^{(\nu)}(x)$ в уравнение (9.1.1) вместо $f^{(\nu)}(x)$, вообще говоря, не обратить левую часть этого уравнения в нуль (приближенно с требуемой точностью) и, следовательно, в этом случае нельзя считать, что $g(x)$ является его приближенным решением. В этом пункте ниже предпринимается попытка показать, что при конструировании интерполирующей функции $g(x)$, решающей задачу одновременного приближения функции f и ее производных, могут быть использованы смешанные ряды по полиномам Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x, N)$, построенные в главе 3 и смешанные ряды по полиномам Мейкснера, построенные в главе 4. В отличие от интерполяционного сплайна, требующего для своего «запоминания» сохранение всех значений функции $g(x)$ на сетке $\{x_0, x_0+h, \ldots\}$, найденные путем решения разностного уравнения (9.4.1), «запоминание» частичной суммы смешанного ряда в качестве интерполирующей функции $g(x)$ требует хранение дискретной информации (коэффициентов частичной суммы) значительно меньшего объема. В этом и заключается основное преимущество использования в качестве функции $g(x)$ частичных сумм смешанных рядов по полиномам Чебышева и Мейкснера, образующих ортогональные системы на соответствующих дисмкретных сетках, перед интерполяционными сплайнами. Мы рассмотрим здесь отдельно два случая, когда сетка $\{x_0, x_0+h, \ldots\}$ состоит из конечного числа точек $\{x_0, x_0+h, \ldots, x_0+(\Lambda-1)h\}$ и когда она бесконечна. Первому случаю соответствуют смешанные ряды по полиномам Чебышева $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = T_n^{\alpha,\beta}(\frac{N-1}{2}(1+x), N)$, если взять $x_0=-1$, $h=2/(\Lambda-1)$, а второму случаю соответствуют смешанные ряды по полиномапм Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(x/h, e^{-h})$, если взять $x_0=0$, $h=1/N$.

Рассмотрим первый случай. Итак, пусть заданы значения функции $g=g(x)$ на сетке $\{x_j = -1+\frac{2j}{(\Lambda-1)}\}_{j=0}^{\Lambda-1}$, которые найдены путем решения разностного уравнения (9.4.1). Будем исходить из того, что функция $g=g(x)$ с требуемой точностью аппроксимирует на сетке $\{x_j = -1+\frac{2j}{(\Lambda-1)}\}_{j=0}^{\Lambda-1}$ функцию $f(x)$, поэтому мы можем считать, что значения функции $f(x_j)$ $(j=0,1,\ldots,\Lambda-1)$ также заданны. Исходя из дискретной информации $\{f(x_j)\}_{j=0}^{\Lambda-1}$, требуется построить оператор $\mathcal{X}$ вида $\mathcal{X} : \{f(x_j)\}_{j=0}^{\Lambda-1} \to C[-1,1]$ так, чтобы функцию $\mathcal{X}(x)$ можно было использовать в задаче одновременного приближения решения дифференциального уравнения (9.1.1) $y=f(x)$ и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ $\nu=1,\ldots,r-1$. Здесь мы положими $N=\Lambda-2r$ и обратимся к операторам $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta} = \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta} f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$, построенным в (7.8.2). Этот оператор был построен на основе дискретной информации $\{f(x_j)\}_{j=0}^{\Lambda-1}$ и поэтому имет искомый вид: $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta} : \{f(x_j)\}_{j=0}^{\Lambda-1} \to C[-1,1]$. В (7.8.6) была получена следующая оценка

$$\left| f^{(\nu)}(x_j+\nu\sigma\theta_j) - \left(\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f, x_j+\nu\sigma\theta_j)\right)^{(\nu)} \right| \leqslant$$

$$c(\lambda,r)\chi_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N)\frac{E_{n+r}(q)_{l_{2,\mu}^{N+r}}}{n^{r-\nu-1/2}} \frac{\left(\sqrt{\frac{x_j+1}{N}(1-\frac{x_j}{N+2r})}+\frac{1}{n}\right)^{r-\nu-1/2}}{\left(\sqrt{\frac{x_j+1}{N}}+\frac{1}{n}\right)^{\beta}\left(\sqrt{1-\frac{x_j}{N+2r}}+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}, \qquad (9.4.2),$$

где $\sigma=2/(\Lambda-1)$, $0<\theta_j<1$, $0\leqslant j\leqslant N+2r-\nu$, $0\leqslant\nu\leqslant r-1$, $q=q(j)=\sigma^{-\nu}\Delta^r d(j-r)$ $(d(j-r)=f(x_j))$, $E_{n+r}(q)_{l_{2,\mu}^{N+r}}$ – наилучшее приближение дискретной функции $q=q(l)$ в пространстве $l_{2,\mu}^{N+r}$ алгебраическими полиномами степени $n+r$ (см. пункт 3.8). Как уже отмечалось в главе 3, величина $\chi_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N)$ не имеет тенденции к неограниченному росту при $n,N\to\infty$, поэтому из (9.4.2) нетрудно увидеть, что производная $\left(\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x)\right)^{(\nu)}$ достаточно хорошо приближает производную $f^{(\nu)}(x)$ на сетке $\{x_j+\nu\sigma\theta_j)\}_{j=0}^{\Lambda-1}$. Обычно эта сегка достатчно густо расположена на отрезке $[-1,1]$ (это необходимо для аппроксимации решения дифференциального уравнения (9.1.1) $y=f(x)$ с приемлимой точностью решением разностного уравнения (9.4.1) $g=g(x)$), поэтому с большой долей уверенности мы можем сказать, что производная $\left(\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,x)\right)^{(\nu)}$ достаточно хорошо приближает производную $f^{(\nu)}(x)$ на всем отрезке $[1,1]$ при всех $0\leqslant\nu\leqslant r-1$. К сказанному следует добавить. что для численной реализации операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f)$ мы можем воспользоваться рекуррентными соотношениями, которыми связаны между собой полиномы Чебышева $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ $(n=0,1,\ldots,N-1)$.

Перейдем теперь к рассмотрению второго случая, когда сетка $\{x_0, x_0+h, \ldots\}$ бесконечна. Для определенности будем считать, что $x_0 = 0$. В этом сучае решение разностного уравнения (9.4.1) $g = g(kh)$ определено на сетке $\{0, h, 2h\ldots\}$. Будем исходить из того, что функция $g = g(x)$ с требуемой точностью аппроксимирует на сетке $\{0, h, 2h\ldots\}$ функцию $f(x)$, поэтому мы можем считать, что значения функции $f(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots$ также заданны. Исходя из дискретной информации $\{f(x_j)\}_{j=0}^{\infty}$, требуется построить оператор $\mathcal{X}$ вида $\mathcal{X} : \{f(x_j)\}_{j=0}^{\infty} \to C[0, \infty)$ так, чтобы функцию $\mathcal{X}(x)$ можно было использовать в задаче одновременного приближения решения дифференциального уравнения (9.1.1) $y = f(x)$ и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ $\nu = 1, \ldots, r-1$. Здесь мы положими $N = 1/h$ и обратимся к операторам $.\mathcal{N}^{\alpha}_{n+r,N}(f) = \mathcal{N}^{\alpha}_{n+r,N}(f, x)$, построенным в глае 4. Это частичные суммы смешанного ряда по полиномам Мейкснера, построенного для функции $f = f(x)$, заданной на сетке $\{0, h, 2h\ldots\}$. Следуя идее, уже встречавшейся в пункте (9.1.1), мы предположим, что эта функция имеет вид $f(x) = p_m(x)$, где $p_m(x)$ – алгебраический полином достаточно большой степени m. Тогда из теорема (8.8.1) имеем

$$\left(\frac{1}{e^h - 1}\right)^{\nu} |\Delta_h^{\nu} p_m(t) - \Delta_h^{\nu} \mathcal{N}^{\alpha}_{n+r,N}(f, t)| \leqslant$$

$$c(\alpha, r, \lambda, A)\eta^{\alpha}_{n,m}(h)\left(\frac{1}{e^h - 1}\right)^{r} \begin{cases} \left(\frac{1}{n} + t\right)^{r-\nu-\alpha-1/2} n^{-r+\nu+1/2}, & r-\nu-\alpha \geqslant 1/2, \\ n^{-2r+2\nu+\alpha+1}, & r-\nu-\alpha < 1/2, \end{cases}$$

где величина $\eta^{\alpha}_{n,m}(h)$ определена равенством (8.8.5). Отсюда, воспользовавшись формулой

$$|\Delta_h^{\nu} p_m(t) - \Delta_h^{\nu} \mathcal{N}^{\alpha}_{n+r,N}(f, t)| = h^{\nu} |p_m^{(\nu)}(t + \theta_t \nu h) - \left(\mathcal{N}^{\alpha}_{n+r,N}(f, t + \theta_t \nu h)\right)^{(\nu)}|,$$

находим $(0 < \theta_t < 1)$

$$\left(\frac{h}{e^h - 1}\right)^{\nu} |p_m^{(\nu)}(t + \theta_t \nu h) - \left(\mathcal{N}^{\alpha}_{n+r,N}(f, t + \theta_t \nu h)\right)^{(\nu)}| \leqslant$$

$$c(\alpha, r, \lambda, A)\eta^{\alpha}_{n,m}(h)\left(\frac{1}{e^\delta - 1}\right)^{r} \begin{cases} \left(\frac{1}{n} + t\right)^{r-\nu-\alpha-1/2} n^{-r+\nu+1/2}, & r-\nu-\alpha \geqslant 1/2, \\ n^{-2r+2\nu+\alpha+1}, & r-\nu-\alpha < 1/2. \end{cases} \quad (9.4.3)$$

Заметим, что если r-я производная функции $f = f(x)$ не очень «плохая», то число $p^{\alpha}_{r,k}(h)(1/(e^h - 1))^r)$ близко k-тому коэффициенту Фурье-Лагерра функции $f^{(r)}(x)$, поээтому величина

$$\eta^{\alpha}_{n,m}(h)\left(\frac{1}{e^h - 1}\right)^{r} = \left(\sum_{n+1}^{m-1} \left(p^{\alpha}_{r,k}(h)\left(1/(e^h - 1)\right)^r\right)^2\right)^{1/2}$$

должна стремиться к нулю вместе с ростом n. Тогда оценка (9.4.3) означает, что оператор $\mathcal{N}^{\alpha}_{n+r,N}(f) = \mathcal{N}^{\alpha}_{n+r,N}(f, x)$ достаточно успешно решает задачу об одновременном приближении функции $f = f(x)$ и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1)$ в том смысле, что алгебраический полином $f = f(x)$ достаточно высокой степени m без существенной потерии требуемой точности будет заменен алгебраическим полиномом $\mathcal{N}^{\alpha}_{n+r,N}(f) = \mathcal{N}^{\alpha}_{n+r,N}(f, x)$ зачительно меньшей степени $n + r$.

Замечание. *Для приближения функций, заданных на сетке $\{0, h, 2h\ldots\}$ часто применяют частичные суммы рядов Фурье по полиномам Мейкснера. В частности и поэтому представляется интересным рассмотренный нами выше случай, когда функция $f(x)$ совпадает с алгебраическим полиномом достаточно высокой степени.*

§ 9.5. Еще о приложении дискретных смешанных рядов

В ряде прикладных областей можно встретить задачи, в которых требуется приблизить полиномом каждую кривую из некоторого достаточно многочисленного семейства. При этом в рассматриваемое семейство могут входить, как замкнутые так и незамкнутые гладкие кривые. Такие задачи достаточно часто встречаются в картографии, геологии, геофизике, геотермии, в вопросах, связанных с аппроксимацией параметров атмосферы, в статистике случайных процессов и в других областях. Достаточно типичной является ситуация, когда задано семейство кривых $z_l(t) = (x_l(t), y_l(t))$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1, \quad l = 1, 2, \dots, L)$, которые служат линиями уровня некоторой функции $u = u(x, y)$. Таким образом, вдоль каждой кривой $z_l = z_l(t)$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ функция $u(z_l(t))$ сохраняет некоторое постоянное значение $u_l = u(z_l(t))$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$. Требуется «восстановить» функцию $u(z) = u(x, y)$ в тех точках $z = (x, y)$, которые не расположены ни на одной из заданных кривых $z_l = z_l(t)$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1, \quad l = 1, 2, \dots, L)$. В связи с этой задачей возникают следуюшие вопросы. Во-первых требуется приближенно представить все функции $x_l = x_l(t), y = y_l(t)$, $l = 1, 2, \dots, L$ на отрезке $[-1, 1]$, во-вторых нужно выбрать конечномерное пространство приближающих функций двух переменных $z = (x, y)$. Если кривые составляют на экране дисплея картинку, полученную технически путем сканирования заданного реального объекта (карты, чертежа, рисунка и т.д.), то нетрудно убедиться в том, что параметризацию кривых $z_l = z_l(t)$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1, \quad l = 1, 2, \dots, L)$ следует выбрать так, чтобы экранные точки (пикселы) кривых соответствовали значениям параметра t, совпадающими с узлами некоторой равномерной сетки $t = t_j = -1 + 2j/M$ $(j = 0, 1, \dots M)$ из отрезка $[-1, 1]$. Приняв такую точку зренмия, мы приходим к задаче о приближенном представлении функций $x_l = x_l(t), y_l = y_l(t)$, исходя из дискретной информации $x_l(t_j), y_l = y_l(t_j)$ $(j = 0, 1, \dots M)$. Ниже мы покажем, что в квачестве удобного инструмента решения этой задачи могут быть приняты полиномиальные операторы $\mathcal{X}^{\alpha,\beta}_{n+2r,N}(f)$, которые уже упоминались выше.

Что же касается выбора конечномерного пространства приближающих функций, то мы рассмотрим пространство алгебраических полиномов вида

$$p_m(x, y) = \sum_{i+j \leqslant m} a_{i,j} x^i y^j. \tag{9.5.1}$$

Среди порлиномов вида (9.5.1) мы выберем тот, для которого достигается минимум следующего интеграла

$$J(a_{0,0}, \dots, a_{m,0}, \dots, a_{0,m}) = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{l=1}^{L} (u_l - p_m(x_l(t), y_l(t)))^2 =$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{l=1}^{L} \left(u_l - \sum_{i+j \leqslant m} a_{i,j} x_l^i(t) y_l^j(t) \right)^2. \tag{9.5.2}$$

Чтобы найти приближенные значения коэффициентов $a_{i,j}$ мы заменим функции $x_l = x_l(t), y_l = y_l(t)$ алгебраическими полиномами степени n, которые мы обозначим, соответственно, через $x_{l,n}(t)$ и $y_{l,n}(t)$. Тогда мы приходим к задаче минимизации следующей функции

$$J_n(a_{0,0}, \dots, a_{m,0}, \dots, a_{0,m}) = \int_{-1}^{1} \frac{S_{n,m}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \tag{9.5.3}$$

где $S_{n,m}(t) = \sum_{l=1}^{L}\left(u_l - \sum_{i+j\leqslant m} a_{i,j}x_{l,n}^i(t)y_{l,n}^j(t)\right)^2$ предстапвляет собой алгебраический полином степени $2nm$.

Обозначим через

$$\tau_\nu = \cos\frac{(2\nu-1)\pi}{2(nm+1)}, \quad \nu = 1,2,\ldots,nm+1 \tag{9.5.4}$$

нули полинома Чебышева $T_{nm+1}(x) = \cos((nm+1)\arccos x)$. Тогда, используя квадратурную формулу типа Гаусса, равенство (9.5.3) может быть записано следующим образом

$$J_n(a_{0,0},\ldots,a_{m,0},\ldots,a_{0,m}) = \frac{\pi}{nm+1}\sum_{\nu=1}^{nm+1} S_{n,m}(\tau_\nu) =$$

$$\frac{\pi}{nm+1}\sum_{\nu=1}^{nm+1}\sum_{l=1}^{L}\left(u_l - \sum_{i+j\leqslant m} a_{i,j}x_{l,n}^i(\tau_\nu)y_{l,n}^j(\tau_\nu)\right)^2 \tag{9.5.5}$$

Теперь мы можем найти неизвестные коэффициенты $a_{i,j}(n)$ путем решения системы линейных уравнений

$$J_n'(a_{0,0},\ldots,a_{m,0},\ldots,a_{0,m})_{a_{i,j}} = 0. \tag{9.5.6}$$

При этом следует заметить, что коэффициенты $a_{i,j}(n)$ минимизирующие (9.5.5), вообще говоря, отличаются от искомых коэффициентов $a_{i,j}$, минимизирующих функцию (9.5.2). Величина погрешности $\Delta_{i,j}(n) = |a_{i,j} - a_{i,j}(n)|$, возникающей в результате замены $a_{i,j}$ на $a_{i,j}(n)$ существенно зависит от выбора полиномов $x_{l,n}(t)$ и $y_{l,n}(t)$, аппроксимирующих исходные функции $x_l(t)$ и $y_l(t)$ на $[-1,1]$. Причем, подавляющее большинство узлов Чебышева τ_ν (см. (9.5.4)), фигурирующих в (9.5.5), сосредоточивается в непосредственной близости концов -1 и 1 и, следовательно, ваеличины погрешностей $\Delta_{i,j}(n)$ наиболее существенно зависят от поведения разностей $|x_l(t) - x_{l,n}(t)|$ и $|y_l(t) - y_{l,n}(t)|$ вблизи точек -1 и 1. Как следствие, мы можем ожилдать, что величины погрешностей $\Delta_{i,j}(n)$ будут тем меньше, чем мы лучше приблизим функции $x_l(t)$ и $y_l(t)$ полиномами $x_{l,n}(t)$ и $y_{l,n}(t)$ вблизи концов -1 и 1. Поэтому полиномы $x_{l,n}(t)$ и $y_{l,n}(t)$ следует выбрать так, чтобы они приближали исходные функции $x_l(t)$ и $y_l(t)$ вблизи концов -1 и 1 значительно лучше, чем на всем отрезке в целом.

Полиномиальные операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f,t)$, о которых шла речь в разделе (7.8) построенны на основе дискретной информации $f(t_j)$ $(l = 0,1\ldots,N-1)$, где $\{t_j = -1 + 2j/(N-1)\}_{j=0}^{N-1}$ – равномерная сетка из отрезка $[-1,1]$. Они обеспечивают среди алгебраических полиномов степени $n+2r$ наилучший порядок приближения на классах гладких функций $W^rH_{L_2}^\mu(M)$ и на классах аналитических функций $A_q(B)$, которые каждую отдельную функцию $f = f(t)$ из указанных классов приближают вблизи концов -1 и 1 значительно лучше, чем на всем отрезке в целом. Поэтому в промежуточной задаче, в которой требуется предварительно аппроксимировать функции $x_l(t)$ и $y_l(t)$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1, \quad l = 1,2,\ldots,L)$, успешно могут быть использованы полиномы $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(x_l) = \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(x_l,t)$ и $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(y_l) = \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(y_l,t)$.

Замечание 9.5.1 *Область определения искомой функции u=u(x,y) линейной заменой переменных x и y можно перевести в квадрат $[-1,1]^2$ и после этого аппроксимирующий полдином $p_m(x,y)$, фигурирующий в (9.5.1) следует представить в виде*

$$p_m(x,y) = \sum_{i+j\leqslant m} b_{i,j}T_i(x)T_j(y),$$

где $T_k(x)$ – полином Чебышева первого рода. Тогда задача сводится к нахождению описанным выше методом неизвестных коэффициентов $b_{i,j}$.

§ 9.6. Приложение 1. Численная реализация частичных сумм смешанного ряда по полиномам Чебышева первого рода

Перейдем к вопросу о численной реализации значений полинома $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f) = (\mathcal{Y}^{-1/2}_{n+2r}(f,x))^{(\nu)}$, исходя из представления (9.2.14). Будем считать, что функция $f = f(x)$ задана в виде конечного ряда Фурье-Чебышева

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(f)T_k(x), \tag{9.6.1}$$

где N может представлять собой достаточно большое число и в этом случае задача состоит в том, чтобы приближенно заменить f некоторым алгебраическим полиномом $p_m(x)$ существенно меньшей степени m, чем N, а ее производные до порядка $r-1$ с приемлимой точностью заменить соответствующими производными полинома $p_m(x)$. В качестве такого полинома мы будем рассматривать $\mathcal{Y}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}^{-1/2}_{n+2r}(f,x)$, который представляет собой алгебраический полином степени $m = n+2r$. Алгоритм вычислений в первом приближении сводится к последовательности следующих действий:

1. Дифференцируем ряд (9.6.1) r-раз и находим $f^{(r)}(x)$:

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(f)T_k^{(r)}(x); \tag{9.6.2}$$

2. Исходя из (9.6.2), путем быстрого преобразования Фурье находим коэффициенты $\{a_k(f^{(r)}\}_{k-0}^{N}$;
3. Исходя из (9.2.12), вычислим $\psi_{r,n}(x)$;
4. Исходя из (9.2.14), вычислим $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$.

При детальном описании алгоритма вычисления значений полинома $\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)$ и ее производных $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)$ нам прежде всего потребуются рекуррентные соотношения, которым подчинены полиномы Чебышева $T_k(x)$ и их производные $T_k^{(\nu)}(x)$. Воспользуемся рекуррентной формулой для ультрасферических полиномов, отмечавшейся при доказательстве леммы 1.7.2, тогда мы получим

$$P_k^{\alpha,\alpha}(x) = \frac{(2k+2\alpha-1)(k+\alpha)}{(k+2\alpha)k}xP_{k-1}^{\alpha,\alpha}(x) - \frac{(k+\alpha-1)(k+\alpha)}{(k+2\alpha)k}P_{k-2}^{\alpha,\alpha}(x). \tag{9.6.3}$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$(T_{k+\nu}(x))^{(\nu)} = \frac{(2^{k+\nu}(k+\nu)!)^2(k+\nu)_\nu}{(2(k+\nu))!2^\nu}P_k^{\nu-1/2,\nu-1/2}(x). \tag{9.6.4}$$

Сопоставляя (9.6.3) и (9.6.4), мы приходим к следующим соотношениям: для $k < \nu$ $(T_k(x))^{(\nu)} = 0$, кроме того для $\nu \geqslant 1$ $(T_\nu(x))^{(\nu)} = 2^{\nu-1}\nu!$, $(T_{\nu+1}(x))^{(\nu)} = 2^\nu(\nu+1)!x$ и

$$(T_k(x))^{(\nu)} = \frac{k}{k-\nu}2x\,(T_{k-1}(x))^{(\nu)} - \frac{k(k+\nu-2)}{(k-\nu)(k-2)}\,(T_{k-2}(x))^{(\nu)} \quad (k > \nu+1). \tag{9.6.5}$$

§ 9.7. Приложение 2. Численная реализация частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра

Перейдем к вопросу о численной реализации значений полинома $\mathcal{Y}^0_{n+2r}(f,x)$, исходя из представления (9.3.4). Будем считать, что функция f задана в виде ее конечного разложения по полиномам Лежандра, а именно

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(f)P_k(x), \tag{9.7.1}$$

где $P_k(x) = P_k^{0,0}(x)$ – полином Лежандра, N – заданное (достаточно большое) число. Требуется с заданной точностью решить задачу одновременного приближения функции f и ее нескольких производных алгебраическим полиномом степени m, где m – существенно меньше, чем N.

В качестве такого полинома мы будем рассматривать $\mathcal{Y}^0_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}^0_{n+2r}(f, x)$, который представляет собой алгебраический полином степени $m = n + 2r$.

Алгоритм вычислений в первом приближении сводится к последовательности следующих действий:

1. Дифференцируем ряд (9.7.1) r-раз находим $f^{(r)}(x)$:

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{N} a_k(f)P_k^{(r)}(x); \tag{9.7.2}$$

2. Используя (9.7.2) и квадратурную формулу Гаусса, находим коэффициенты $\{f_{r,k}\}_{k=0}^{n+r}$;
3. Исходя из (9.3.2), вычислим $D_{2r-1}(x)$;
4. Исходя из (9.3.4), вычислим $\mathcal{Y}^0_{n+2r}(f, x)$.

Список литературы

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. ТТ.1,2. – М.: Наука. 1973, 1974.

[2] Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз. 1962.

[3] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука. 1979.

[4] Бернштейн С.Н. О многочленах, ортогональных на конечном отрезке // Полн.собр.соч. Т.2. М.: Изд. АН СССР. 1954. С. 7–106.

[5] Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука. 1977.

[6] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979.

[7] Erdelyi A. Asymptotic solutions of differential equations with transition points or singularites // J. Math. Phys. 1(1960). Pp. 16–26. MR 22 ♯ 2773

[8] Erdelyi A. Asymptotic forms for Laguerre polynomials // J. Indian Math. Soc. 24(1960). Pp. 235–250. MR 23 ♯ A1073.

[9] Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Lagerre and Hermite series // Amer. J. Mathem. 87(1965). Pp. 695–708.

[10] Muckenhaupt B. Mean convergence of Hermit and Lagerre series. I. // Trans. Amer. Mathem. Soc. 147(1970). Pp. 419–431.

[11] Muckenhaupt B. Mean convergence of Hermit and Lagerre series. II. // Trans. Amer. Mathem. Soc. 147(1970). Pp. 433–460.

[12] Чебышев П.Л. Об интерполировании величин равноотстоящих (1875) // Полн. собр. соч. Т.3. М.: Изд.АН СССР. 1948. С. 66–87.

[13] Марков А.А. О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей. – СПб., 1884.

[14] Hahn W. Uber orthogonalpolynomsisteme, die q–Differenzengleihungen genugen // Math. Nachr. 1949. Bd. 2. S. 4–34.

[15] Никифоров А.Ф.,Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные многочлены дискретной переменной. – М.: Наука. 1985.

[16] Askey R., Wilson J.A. A set of orthogonal polynomials that generalyze the Racach cooﬃcients or 6j–symbols // SIAM J. Math. Anal. 1979. V. 10. Pp. 1008–1016.

[17] Dunkl C. A Krawtchouk Polynomials Addition Theorem and Treath Products of Simmetric Grups // Indiana Univ. Math. J. 25(1976). Pp. 335–358.

[18] Krawtchouk M.F. Sur une generalisation des polynomes d Hermite // Comptes Rendus de 1 Acad. des. Sc. Paris. 1929. 189. 620–622.

[19] Stanton D. Three addition theorems for some q–Krawtchouk polynomials // Geometriae Dedicate. 10(1981). Pp. 403–425.

[20] Weber M., Erdeleyi A. On the finite difference analogue of Rodrigues formula // Amer. Math. Month. 1952. V. 59. Pp. 163–168.

[21] Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства ортогональных многочленов Хана дискретной переменной // Матем.сборник. 1989. Т.180. Вып. 9. С. 1259–1277.

[22] Чебышев П.Л. Об одном новом ряде. // Полн.собр.соч. Т.2. М.: Изд. АН СССР. 1947. С. 236 – 238.

[23] Karlin S., McGregor J.L. The Hahn polnomials, formulas and an application // Scripta Math. V.26. $\mathcal{N}o$. 1. Pp. 33–46.

[24] Шарапудинов И.И. Приближение функций суммами Фурье по ортогональным многочленам Чебышева дискретного переменного. М.: Деп. в ВИНИТИ. Вып. 3137–80. 1980. С. 1–44.

[25] Шарапудинов И.И. Функция Лебега частных сумм Фурье по полиномам Хана // Функциональный анализ, теория функций и их приложения. Махачкала. Изд-во Даг.гос.ун-та. 1982. С. 132–144.

[26] Шарапудинов И.И. Некоторые свойства многочленов, ортогональных на конечной системе точек // Изв. вузов. Математика. 1983. Вып. 5. С. 85–88.

[27] Шарапудинов И.И. Весовые оценки многочленов Хана // Теория функций и приближений. Тр. Саратовской зимней школы (24 января – 5 февраля 1982 г.)

[28] Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства и весовые оценки многочленов Хана // Изв.вузов. Математика. 1985. Вып. 5. С. 78–80.

[29] Шарапудинов И.И. Некоторые свойства ортогональных многочленов Мейкснера // Матем.заметки. 1990. Т.47. Вып.3. С. 135–137.

[30] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье // Дискретная математика. 1990. Т.2 Вып. 2. С. 33–44.

[31] Шарапудинов И.И. К асимптотическому поведению ортогональных многочленов Чебышева дискретной переменной // Матем.заметки. 1990. Т.48. Вып. 6. С. 150–152.

[32] Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства и весовые оценки многочленов Чебышева–Хана // Матем.сборник. 1991. Т. 183. Вып. 3. С. 408–420.

[33] Шарапудинов И.И. Некоторые вопросы теории ортогональных систем. Докторская диссертация. – М.: МИАН им.В.А.Стеклова. 1991.

[34] Шарапудинов И.И. Об асимптотике многочленов Чебышева, ортогональных на конечной системе точек // Вестник МГУ. Серия 1. 1992. Вып. 1. С. 29–35.

[35] Meixner J. Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Function // Journ. of the London Mathematical Sociate 9(1934). P. 6–13.

[36] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Издательство московского университета. 1976.

[37] Теляковский С.А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами // Матем. сб. 1966. Т. 70. Вып. 2. С. 252–265.

[38] Chang R., Chen K., Wang M. A new approach to the parameter estimation of linear time invariant delayed systems via modified Laguerre polynomials // Int.Journal Systems sci. 1985. V. 16. $\mathcal{N}o$. 12. Pp. 1505–1515.

[39] Clement P.R. Laguerre functions in Signal Analysis and Parameter Identification // Journal of Franclin Institute. 1982. V. 313. $\mathcal{N}o$. 2. P. 85–95.

[40] Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука. 1967.

[41] Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука. 1979.

[42] Dooge J.C.I., Garvey B.J. The use of Meixner functions in the identification of heavily–damped system // Proc. of the Roy. Irich Academy. 1978. V. 78. A.N.I. Pp. 157–179.

[43] Hwang R., Shih Y. Parameter identifikation of discrete sistems via diskrete Legendre polynomials // Compx ters Electrical Enginering. 1986. V. 12. $\mathcal{N}o$. 3/4. Pp. 155–160.

[44] Markett C. Mean Cesaro summability of Laguerre expansion and norm estimate with shifted parameter // Anal. Math. 8(1982). Pp. 19–37.

[45] Шарапудинов И.И. Об асимптотике и весовых оценках полиномов Мейкснера, ортогональных на сетке $\{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$ // Матем. заметки. 1997. Т. 62. Вып. 4. С. 603–616.

[46] Шарапудинов И,И. Об асимптотике и весовых оценках полиномов Мейкснера // Матем. заметки. 1997. Т. 62. Вып. 4. С. 603–616.

[47] Джамалов А.Ш. Об асимптотике полиномов Мейкснера // Матем.заметки. 1997. Т. 62. Вып. 4. С. 624–625.

[48] Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала. Издательство Даг. гос. пед. Ун-та. 1997.

[49] Gasper G. Positiviti and special function // Theory and appl. Spec. Funct. Edited by Richard A.Askey. 1975. Pp. 375–433.

[50] Агаханов С.А., Натансон Г.И. Функция Лебега сумм Фурье-Якоби // Вестник Ленингр. ун-та. 1968. Вып. 1. С. 11–13.

[51] Бадков В.М. Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье-Якоби // Сиб. Мат. Ж. 1968. Т.9. Вып. 6. С. 1263–1283.

[52] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960.

[53] Банаи Э., Ито Т. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. – М.: Мир. 1987.

[54] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука. 1965.

[55] Гопенгауз И.З. К теореме А.Ф.Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке // Матем.заметки. 1967. Т.1. Вып. 2. С. 163–172.

[56] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по полиномам, ортогональным на дискретных сетках. // Воронежская зимняя математическая школа.«Современные методы теории функций и смежные проблемы». Тезисы докладов. 26 января – 2 февраля 2003 г. Воронеж. С. 285–286.

[57] Гаджиева З.Д. Смешанные ряды по полиномам Мейкснера. Кандидатская диссертация. – Саратов. Саратовский гос.ун-т. 2004 г.

[58] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука. 1987.

[59] Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука. 1983.

Поступила в редакцию
15.01.2015