УДК 517.538

И. И. Шарапудинов, М. Г. Магомед-Касумов, С. Р. Магомедов

Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода

Отправляясь от многочленов Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и натурального r, построена новая система полиномов $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированная относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида

$$< f, g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\kappa(t)dt,$$

где $\kappa(t) = \frac{2}{\pi}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$. Исследованы вопросы сходимости ряда Фурье по системе $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Рассмотрены важные частные случаи систем типа $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, для которых получены явные представления, которые могут быть использованы при исследовании асимптотических свойств функций $T_{r,k}(x)$ при $k \to \infty$ и исследовании аппроксимативных свойств сумм Фурье по системе $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Библиография: 16 названий.

Using Chebyshev polynomials $T_n(x) = \cos(n \arccos x)(n = 0, 1, \ldots)$, for any natural r a new system of polynomials $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, orthonormal with respect to the Sobolev type inner product of the following form

$$< f, g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\kappa(t)dt,$$

where $\kappa(t) = \frac{2}{\pi}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ was built. We study the convergence of the Fourier series on the system $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$. We consider the important special cases of systems of type $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, for which explicit representations are obtained, that can be used in the study of asymptotic properties of functions $T_{r,k}(x)$ when $k \to \infty$ and study the approximation properties of Fourier sums on the system $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Bibliography: 16 items.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, ортогональные по Соболеву полиномы, полиномы Чебышева первого рода.

Keywords: orthogonal polynomials, Sobolev orthogonal polynomials, Chebyshev polynomials of the first kind.

Введение

В ряде наших работ [1] – [7] были введены, так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых обладают свойством совпадения их значений в концах области ортогональности со со значениями исходной функции. Общая идея, которая лежит в основе построения смешанных рядов, заключается в следующем. Предположим, что система функций $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормирована на (a,b) с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int\limits_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\rho(x)dx = \delta_{kl}, \tag{0.1}$$

где δ_{kl} – символ Кронекера. Через $L^p_\rho(a,b)$ обозначим пространство функций $f(x)$, измеримых на (a,b), для которых

$$\int\limits_a^b |f(x)|^p\rho(x)dx < \infty. \tag{0.2}$$

Если $\rho(x)\equiv 1$, то будем писать $L^p_\rho(a,b) = L^p(a,b)$ и $L(a,b) = L^1(a,b)$. Из (0.1) следует, что $\varphi_k(x) \in L^2_\rho(a,b)$ $(k = 0,1,\ldots)$. Мы добавим к этому условию еще одно, считая, что $\varphi_k(x) \in L(a,b)$ $(k = 0,1,\ldots)$. Тогда мы можем определить следующие функции

$$\varphi_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{r-1}\varphi_k(t)dt, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{0.3}$$

Кроме того определим конечный набор функций

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad k = 0,1,\ldots,r-1. \tag{0.4}$$

Из (0.3) и (0.4) следует, что

$$(\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0\leqslant\nu\leqslant r-1,\ r\leqslant k,\\ \varphi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r\leqslant k,\\ \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu\leqslant k<r,\\ 0, & \text{если } k<\nu\leqslant r. \end{cases} \tag{0.5}$$

Через $W^r_{L^p_\rho(a,b)}$ обозначим пространство Соболева $W^r_{L^p_\rho(a,b)}$, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{(r)}(x)\in L^p_\rho(a,b)$. Скалярное произведение в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ определим с помощью равенства

$$< f,g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt. \tag{0.6}$$

Тогда, пользуясь определением функций $\varphi_{r,k}(x)$ (см. (0.3) и (0.4)) и равенством (0.5) нетрудно увидеть(см. теорему 2.1), что система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$. В цитированных выше работах [1] – [7], а также в [8] были рассмотрены некоторые частные случаи ортонормированных систем функций вида $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденных классическими ортонормированными системами Якоби, Лежандра, Чебышева, Лагерра и Хаара. С другой стороны, в последние годы интенсивное развитие получила (см.[9]–[14] и цитированную там литературу) теория полиномов, ортогональных относительно различных скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые, которые "контролируют"поведение соответствующих ортогональных полиномов в нескольких заданных точках числовой оси. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале (a,b), могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах интервала (a,b) со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a,b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. Скалярное произведение (0.6), рассматриваемое в настоящей работе имеет одну особую точку, а именно, точку a, в окрестности которой "контролируется"поведение функций $\varphi_{r,k}(x)$, ортогональных по Соболеву и порожденных исходной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенства (0.3).

Из (0.3) – (0.6) нетрудно увидеть, что ряд Фурье функции $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ имеет смешанный характер, а, более точно, имеет следующий вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x), \tag{0.7}$$

где

$$f_{r,k} = \int_a^b f^{(r)}(t)\varphi_{k-r}(t)\rho(t)dt, \tag{0.8}$$

поэтому ряды Фурье вида (0.7) будем (следуя [1] – [7]) называть *смешанными рядами* по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. В [1] – [8] было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномами, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. При этом отметим, что в работах [1] – [6] основное внимание уделялось исследованию аппроксимативных свойств смешанных рядов по ультрасферическим полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$, тогда как в работе [7] были найдены условия на параметры α и β, которые обеспечивают равномерную сходимость смешанных рядов по общим полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$. В настоящей статье вводятся и исследуются системы функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (0.6) и порожденных системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Особое внимание уделено исследованию свойств системы полиномов $\{\varphi_{r,k}(x) = T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденной многочленами Чебышева $\varphi_k(x) = T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ на интервале $(-1, 1)$. Рассмотрена зада о представлении функций $T_{r,k}(x)$, определенных равенством (0.3) на $(-1, 1)$, в виде, более удобном для исследования их асимптотических свойств при $k \to \infty$. Исследованы аппроксимативные свойства сумм Фурье по системе $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

1. О сходимости рядов Фурье по системам функций, ортогональным по Соболеву, порожденными общими ортонормированными системами

Рассмотрим сначала задачу о полноте в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ системы $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из функций, определенных равенствами (0.3) и (0.4).

Теорема 1. *Предположим, что функции $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ образуют полную в $L^2_\rho(a, b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на отрезке $[a, b]$. Тогда система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенств* (0.3) *и* (0.4)*, полна в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (0.6).

Доказательство. Из равенства (0.3) следует, что если $r \leqslant k$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $(\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)}_{x=a} = 0$, поэтому в силу (0.5), (0.6), имеем

$$< \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} >= \int_a^b (\varphi_{r,k}(x))^{(r)} (\varphi_{r,l}(x))^{(r)} \rho(x) dx =$$

$$\int_a^b \varphi_{k-r}(x) \varphi_{l-r}(x) \rho(x) dx = \delta_{kl}, \quad k, l \geqslant r, \tag{1.1}$$

а из (0.4) и (0.6) имеем

$$< \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} >= \sum_{\nu=0}^{r-1} (\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)}|_{x=a} (\varphi_{r,l}(x))^{(\nu)}|_{x=a} = \delta_{kl}, \quad k, l < r. \tag{1.2}$$

Очевидно также, что

$$< \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} >= 0, \quad \text{если} \quad k < r \leqslant l \quad \text{или} \quad l < r \leqslant k. \tag{1.3}$$

Это означает, что функции $\varphi_{r,k}(t)\,(k = 0, 1, \dots)$ образуют в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (0.6). Остается убедиться в ее полноте в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$. С этой целью покажем, что если для некоторой функции $f = f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ и для всех $k = 0, 1, \dots$ справедливы равенства $< f, \varphi_k >= 0$, то $f(x) \equiv 0$. В самом деле, если $k \leqslant r - 1$, то $< f, \varphi_{r,k} >= f^{(k)}(a)$, поэтому с учетом того, что $< f, \varphi_{r,k} >= 0$, для нашей функции $f(x)$ формула Тейлора приобретает вид

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt. \tag{1.4}$$

С другой стороны, для всех $k \geqslant r$ имеем

$$0 =< f, \varphi_{r,k} >= \int_a^b f^{(r)}(x)(\varphi_{r,k}(x))^{(r)}\rho(x)dx = \int_a^b f^{(r)}(x)\varphi_{k-r}(x)\rho(x)dx.$$

Отсюда и из того, что $\varphi_m(x)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ образуют в $L^2_\rho(a, b)$ полную ортонормированную систему имеем $f^{(r)}(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$. Поэтому $f(x) \equiv 0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Предположим, что* $\frac{1}{\rho(x)} \in L(a, b)$, *а функции* $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *образуют полную в* $L^2_\rho(a, b)$ *ортонормированную с весом* $\rho(x)$ *систему на отрезке* $[a, b]$, $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ *– система, ортонормированная в* $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ *относительно скалярного произведения* (0.6), *порожденная системой* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ *посредством равенств* (0.3) *и* (0.4). *Тогда, если* $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$, *то ряд Фурье (смешанный ряд)* (0.7) *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно относительно* $x \in [a, b]$.

Доказательство. Обозначим через $S_n(f^{(r)}) = S_n(f^{(r)}, x)$ частичную сумму ряда Фурье функции $f^{(r)}(x) \in L^2_\rho(a, b)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$, т.е.

$$S_n(f^{(r)}, x) = \sum_{k=0}^n f_{r,k+r}\varphi_k(x), \tag{1.5}$$

где коэффициенты $f_{r,k+r}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ определены равенством (0.8). Из условий теоремы 2 следует, что при $n \to \infty$

$$\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)}\|_{L^2_\rho(a,b)} \to 0. \tag{1.6}$$

Далее, обозначим через $Y_{n+r}(f, x)$ частичную сумму смешанного ряда (0.7) следующего вида

$$Y_{n+r}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x), \tag{1.7}$$

и запишем формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt. \tag{1.8}$$

Из (1.7) и (1.8) имеем

$$f(x) - Y_{n+r}(f, x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt - \sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x). \tag{1.9}$$

Обратимся к равенству (0.3), тогда (1.9) можно переписать так

$$f(x) - Y_{n+r}(f, x) =$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt - \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{r-1}\sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k}\varphi_{k-r}(t)dt =$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{r-1}[f^{(r)}(t)-S_n(f^{(r)},t)]dt. \tag{1.10}$$

Из (1.10) и неравенства Гельдера имеем

$$|f(x)-Y_{n+r}(f,x)| \leqslant$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\left(\int\limits_a^b \frac{|x-t|^{2(r-1)}}{\rho(t)}dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_a^b [f^{(r)}(t)-S_n(f^{(r)},t)]^2\rho(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.11}$$

Сопоставляя (1.6) с (1.11), убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Как мы уже отмечали выше, основным объектом исследования настоящей работы является система полиномов $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортогональных по Соболеву относительного скалярного произведения вида (0.6), порожденных на $(-1,1)$ полиномами Чебышева первого рода $T_k(x)=\cos(k\arccos x)$. В частности, рассмотрена задача о представлении полиномов $T_{r,k}(x)$, в виде, более удобном для исследования их асимптотических свойств при $k\to\infty$. При исследовании этой задачи нам понадобятся некоторые хорошо известные свойства классических полиномов Якоби.

2. Некоторые сведения о полиномах Якоби

Для произвольных действительных α и β полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ можно определить [15] с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{\mu(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\mu(x)\sigma^n(x)\right\}, \tag{2.1}$$

где α,β – произвольные действительные числа, $\mu(x)=\mu(x;\alpha,\beta)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\sigma(x)=1-x^2$. Если $\alpha,\beta>-1$, то полиномы Якоби образуют ортогональную систему с весом $\mu(x)$, т.е.

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)\mu(x)dx = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm}, \tag{2.2}$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \tag{2.3}$$

Нам понадобятся еще следующие свойства полиномов Якоби [15, 16]:

связь с полиномами Чебышева $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$

$$P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}T_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}T_n(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+\sigma_n)T_n(x) \quad (\sigma_n = O(1/n)); \tag{2.4}$$

производные

$$\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \tag{2.5}$$

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{2^\nu}P_{n-\nu}^{\alpha+\nu,\beta+\nu}(x), \tag{2.6}$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1)\dots(a+\nu-1)$, $a^{[0]} = 1$;

равенства

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\alpha+1)_k}\left(\frac{1-t}{2}\right)^k, \tag{2.7}$$

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}}\frac{d^m}{dx^m}\left\{(1-x)^{m+\alpha}(1+x)^{m+\beta}P_{n-m}^{m+\alpha,m+\beta}(x)\right\}, \tag{2.8}$$

где $k^{[0]} = 1$, $k^{[r]} = k(k-1)\dots(k-r+1)$,

$$P_n^{\alpha,\beta}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}, \quad P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \tag{2.9}$$

$$\frac{P_n^{a,a}(x)}{P_n^{a,a}(1)} = \sum_{j=0}^{[n/2]}\frac{n!(\alpha+1)_{n-2j}(n+2a+1)_{n-2j}(1/2)_j(a-\alpha)_j}{(n-2j)!(2j)!(a+1)_{n-2j}(n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}}$$
$$\times\frac{1}{(n-2j+a+1)_j(n-2j+\alpha+3/2)_j}\frac{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(x)}{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(1)}, \tag{2.10}$$

где $[b]$ – целая часть числа b.

Лемма 2.1. *Пусть $\alpha > -1$, k, r – целые, $r \geqslant 1$, $k \geqslant r+1$. Тогда*

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^{r}\lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x),$$

где

$$\lambda_j^\alpha = \lambda_j^\alpha(r,k) = \frac{(-1)^j(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\alpha - r > -1$, тогда, полагая $a = \alpha - r$, мы можем воспользоваться формулой (2.10) Поскольку при $j \geqslant r+1$ выполняется равенство $(a-\alpha)_j = (-r)_j = 0$, то из (2.10) мы имеем

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^{r}\lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x),$$

где

$$\lambda_j^\alpha = \frac{P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(1)}{P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(1)}\frac{(k+r)!(\alpha+1)_{k+r-2j}(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}}{(k+r-2j)!(2j)!(\alpha-r+1)_{k+r-2j}}\times$$

$$\frac{(1/2)_j(-r)_j}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k-2j+\alpha+1)_j(k+r-2j+\alpha+3/2)_j} =$$
$$\frac{(-1)^j(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!}.$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы 3.1 в случае $\alpha > r-1$. Но поскольку $P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)$, λ_j^α и $P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x)$ представляют собой аналитические функции относительно α, то утверждение леммы 3.1 вытекает из уже доказанного случая.

Лемма 2.2. *Пусть k, r – целые, $r \geqslant 1$, $k \geqslant r+1$. Тогда*

$$P_{k+r}^{-\frac12-r,-\frac12-r}(x) = \sum_{j=0}^{r}\lambda_j^{-\frac12}(k,r)P_{k+r-2j}^{-\frac12,-\frac12}(x),$$

где

$$\lambda_j^{-\frac12}(k,r) = \frac{(-1)^j(k-r)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(k-1/2)^{[j]}}{(k+r-2j)_{k+r-2j}(k+r-2j+1)_j(2j)!} =$$
$$(-1)^j\frac{((k+r-2j)!)^2 2^{2k+2r-4j}}{(2(k+r-2j))!}\frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}}\frac{r^{[j]}}{j!}\frac{k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости утверждения леммы 3.2 достаточно в лемме 3.1 взять $\alpha = -\frac12$.

Лемма 2.3. *Пусть k, r – целые, $r \geqslant 1$, $k \geqslant r+1$. Тогда*

$$P_{k+r}^{-\frac12-r,-\frac12-r}(x) = \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}}\sum_{j=0}^{r}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{r^{[j]}k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}}T_{k+r-2j}(x).$$

Доказательство. Утверждение леммы 3.3 непосредственно вытекает из леммы 3.2 и равенств (2.4) и (2.11).

Пусть $\alpha, \beta > -1$, $p \geqslant 1$. Обозначим через $L^p_{\alpha,\beta}$ пространство измеримых функций $f = f(x)$, определенных на $[-1,1]$, для которых

$$\|f\|_{L^p_{\alpha,\beta}} = \left(\int_{-1}^{1}\mu(x)|f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Если $f \in L^p_{\alpha,\beta}$, то мы можем определить коэффициенты Фурье-Якоби

$$f_k^{\alpha,\beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}}\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta f(x)P_k^{\alpha,\beta}(x)dx$$

и рассмотреть сумму Фурье-Якоби по полиномам Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$:

$$S_n^{\alpha,\beta}(f) = S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta}P_k^{\alpha,\beta}(x),$$

которая при $\alpha = \beta = -\frac12$ представляет собой [15] сумму Фурье по полиномам Чебышева $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$. В работе [17] доказана следующая

Теорема 3. *Пусть $\alpha, \beta > -1$, $A, B \in \mathbb{R}$, $p > 1$ таковы, что*

$$\left|\frac{A+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right\},$$

$$\left|\frac{B+1}{p} - \frac{\beta+1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\right\}.$$

Тогда, если $f \in L^p_{A,B}$, то имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{L^p_{A,B}} = 0.$$

3. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные многочленами Чебышева первого рода

Полиномы Чебышева

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

образуют ортонормированную в $L^2_\kappa(-1,1)$ с весом $\kappa(x) = \frac{2}{\pi}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ систему. Как хорошо известно [15], система полиномов Чебышева (3.1) полна в $L^2_\kappa(-1,1)$. Эта система порождает на $[-1,1]$ систему полиномов $T_{r,k}(x)$ ($k = 0, 1, \ldots$), определенных равенствами

$$T_{r,k}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{3.2}$$

$$T_{r,r}(x) = \frac{(x+1)^r}{\sqrt{2}r!}, \quad T_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}T_k(t)dt, \; k = 1, 2 \ldots. \tag{3.3}$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Система полиномов $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная системой ортонормированных полиномов Чебышева (3.1) посредством равенств (3.2) и (3.3), полна в $W^r_{L^2_\kappa(-1,1)}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения*

$$< f, g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\kappa(t)dt. \tag{3.4}$$

Ряд Фурье (0.7) для системы $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ приобретает вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} + \frac{f_{r,r}}{\sqrt{2}}T_{r,r}(x) + \sum_{k=r+1}^{\infty} f_{r,k}T_{r,k}(x), \tag{3.5}$$

где

$$f_{r,k} = \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)T_{k-r}(t)\kappa(t)dt. \tag{3.6}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если* $f(x) \in W^r_{L^2_\kappa(-1,1)}$, *то ряд Фурье (смешанный ряд)* (3.5) *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно относительно* $x \in [-1,1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\frac{1}{\kappa(x)} \in L(-1,1)$, то утверждение следствия 2 вытекает из теоремы 2 и следствия 1.

В дальнейшем будет значительно усилено утверждение следствия 2, распространив его на более широкие, чем $W^r_{L^2_\kappa(-1,1)}$ классы Соболева $W^r_{L^{p(x)}_\kappa(-1,1)}$ с переменным показателем $p(x)$. Но для этого нам нужны дальнейшие свойства полиномов $T_{r,k}(x)$, определенных равенствами (3.2) и (3.3).

Пусть $\lambda = \alpha + \beta$. Тогда если $(k+\lambda)^{[r]} \neq 0$, то мы можем воспользоваться равенством (2.6) и записать

$$P_k^{\alpha,\beta}(t) = \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t). \tag{3.7}$$

Если $k \geqslant r - \lambda$, то, очевидно, $(k+\lambda)^{[r]} \neq 0$ и для таких k мы можем воспользоваться равенством (3.7). Итак, пусть $(k+\lambda)^{[r]} \neq 0$. Тогда в силу (3.7)

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t)\, dt =$$

$$\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\, dt =$$

$$\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(1+x)^\nu}{\nu!} \left\{ P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) \right\}^{(\nu)}_{t=-1} \right]. \tag{3.8}$$

Далее, в силу (2.6)

$$\left\{ P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) \right\}^{(\nu)} = \frac{(k+\lambda-r+1)_\nu}{2^\nu} P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r,\beta+\nu-r}(t), \tag{3.9}$$

а из (2.9) имеем

$$P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r,\beta+\nu-r}(-1) = (-1)^{k+r-\nu} \binom{k+\beta}{k+r-\nu} =$$

$$\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!}. \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) находим

$$\left\{ P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) \right\}^{(\nu)}_{t=-1} = \frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!2^\nu} = A^{\alpha,\beta}_{\nu,k,r}. \tag{3.11}$$

Сопоставляя (3.8) и (3.11) мы можем записать

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t)\, dt =$$

$$\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}}\left[P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}^{\alpha,\beta}}{\nu!}(1+x)^\nu\right]. \tag{3.12}$$

Из (3.12), (2.4) и (3.3) при $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ имеем

$$T_{r,r+k}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}T_k(t)\,dt=$$

$$\frac{2^{2k}k!^2}{(2k)!(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(t)\,dt=$$

$$\frac{k!^2}{(2k)!}\frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}}\left[P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r,-\frac{1}{2}-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}{\nu!}(1+x)^\nu\right], \tag{3.13}$$

где в силу (3.11) и равенств

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},\quad \Gamma(z+1/2)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2z)}{\Gamma(z)2^{2z-1}}$$

для $k\geqslant r+1$ находим

$$A_{\nu,k,r}=A_{\nu,k,r}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}=\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+1/2)(k-r)_\nu}{\Gamma(\nu-r+1/2)(k+r-\nu)!2^\nu}$$

$$=\frac{(-1)^k\Gamma(k+1/2)(k-r)_\nu\Gamma(r-\nu+1/2)}{\pi(k+r-\nu)!2^\nu}=$$

$$\frac{(-1)^k(2k-1)!(2(r-\nu)-1)!(k-r)_\nu}{(k-1)!(r-\nu-1)!(k+r-\nu)!2^{2(k+r-1)-\nu}}. \tag{3.14}$$

Таким образом, при $k\geqslant r+1$ мы получаем следующее представление

$$T_{r,r+k}(x)=\frac{k!^2}{(2k)!}\frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}}\left[P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r,-\frac{1}{2}-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!}(1+x)^\nu\right]. \tag{3.15}$$

Теперь обратимся к лемме 3.3, из которой выводим

$$\frac{k!^2}{(2k)!}\frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}}P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r,-\frac{1}{2}-r}(x)=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}\frac{kT_{k+r-2j}(x)}{2^r(k+r-j)^{[r+1]}}. \tag{3.16}$$

Сопоставляя (3.15) и (3.16), мы можем записать ($k\geqslant r+1$)

$$T_{r,r+k}(x)=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{(-1)^jkT_{k+r-2j}(x)}{2^r(k+r-j)^{[r+1]}}-\frac{k!^22^{r+2k}}{(2k)!(k-1)^{[r]}}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!}(1+x)^\nu. \tag{3.17}$$

Рассмотрим два важных частных случая, соответствующие значениям $r=1$ и $r=2$.

1) Пусть $r=1$. Тогда из (3.14) имеем

$$A_{0,k,1}=\frac{(-1)^k(2k-1)!}{(k-1)!(k+1)!2^{2k}},\quad k=2,3,\dots. \tag{3.18}$$

Из (3.17) и (3.18) для $k\geqslant 2$ находим

$$T_{1,k+1}(x)=\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{kT_{k+1-2j}(x)}{2(k+1-j)^{[2]}}-\frac{k!^2}{(2k)!}\frac{2^{2k+1}}{(k-1)}\frac{(-1)^k(2k-1)!}{(k-1)!(k+1)!2^{2k}}$$

$$=\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{kT_{k+1-2j}(x)}{2(k+1-j)^{[2]}}-\frac{(-1)^k}{k^2-1}. \tag{3.19}$$

Кроме того из (3.2) и (3.3) имеем

$$T_{1,0}(x)=1,\quad T_{1,1}(x)=\frac{1+x}{\sqrt{2}},\quad T_{1,2}(x)=x^2-1. \tag{3.20}$$

2) Для $r=2$ и $k\geqslant 3$ из (3.14) и (3.17) имеем

$$A_{0,k,2}=\frac{6(-1)^k(2k-1)!}{(k-1)!(k+2)!2^{2(k+1)}},\quad A_{1,k,2}=\frac{(-1)^k(2k-1)!(k-2)}{(k-1)!(k+1)!2^{2k+1}},$$

$$T_{2,k+2}(x)=\sum_{j=0}^{2}\binom{r}{j}\frac{(-1)^jkT_{k+2-2j}(x)}{2^2(k+2-j)^{[3]}}-\frac{k!^2}{(2k)!}\frac{2^{2+2k}}{(k-1)^{[2]}}\sum_{\nu=0}^{1}\frac{A_{\nu,k,2}}{\nu!}(1+x)^{\nu},$$

поэтому при $k\geqslant 3$

$$T_{2,k+2}(x)=\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\frac{(-1)^jkT_{k+2-2j}(x)}{4(k+2-j)^{[3]}}-(-1)^k\left[\frac{1+x}{k^2-1}+\frac{3}{(k^2-1)(k^2-4)}\right]. \tag{3.21}$$

С другой стороны, из (3.2) и (3.3) имеем

$$T_{2,0}(x)=1,\quad T_{2,1}(x)=1+x,\quad T_{2,2}(x)=\frac{(1+x)^2}{2\sqrt{2}}, \tag{3.22}$$

$$T_{2,3}(x)=\frac{1}{6}(x-2)(x+1)^2,\quad T_{2,4}(x)=\frac{1}{6}x(x-2)(x+1)^2. \tag{3.23}$$

Возвращаясь к вопросу об условиях равномерной сходимости ряда Фурье (смешанного ряда) (3.5) можно сформулировать следующую теорему

Теорема 4. *Пусть $A,B\in\mathbb{R}$, $p>1$ таковы, что*

$$\left|\frac{A+1}{p}-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{4},\quad \left|\frac{B+1}{p}-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{4}, \tag{3.24}$$

$\rho(x)=(1-x)^A(1+x)^B$. Тогда, если $f\in W^r_{L^p_\rho}(-1,1)$, то ряд (3.5) равномерно на $[-1,1]$ сходятся к $f(x)$.

Список литературы

[1] Шарапудинов И.И.Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Математический сборник. 2000. Т. 191. Вып. 5. С. 143–160.

[2] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Математические заметки. 2000. Т. 72. Вып.5. С. 765—795.

[3] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам // Махачкала. Издательство Дагестанского научного центра. 2004. 276 с.

[4] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Математический сборник. 2006. Т. 197. Вып. 3. С. 135–154.

[5] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Математические заметки. 2008. Т. 84. Вып. 3. С. 452–471.

[6] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Математический сборник. 2003. Т. 194. Вып. 3. С. 115–148.

[7] Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Математические заметки. 2010. Т. 88. Вып. 1. С. 116–147.

[8] Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 1. С. 68–76.

[9] Iserles A., Koch P.E., Norsett S.P., Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65. Pp. 151–175.

[10] Marcellan F., Alfaro M., Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. North-Holland. 1993. Vol. 48. Pp. 113–131.

[11] Meijer H.G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Pp. 1–16.

[12] Kwon K.H., Littlejohn L.L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. Issue. 2. Pp. 289–303.

[13] Kwon K.H., Littlejohn L.L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. Vol. 28. Pp. 547—594.

[14] Marcellan F., Yuan Xu. ON SOBOLEV ORTHOGONAL POLYNOMIALS // arXiv: 6249v1 [math.C.A] 25 Mar 2014. Pp 1–40.

[15] Сеге Г. Ортогональные многочлены. Москва. Физматгиз. 1962.

[16] Gasper G. Positiviti and special function // Theory and appl.Spec.Funct. Edited by Richard A.Askey. 1975. Pp. 375–433.

[17] Muckenhoupt B. Mean convergence of Jacobi series // Proc.Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 23. Issue 2. Pp. 306–310.

[18] Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. Москва. АФЦ. 1999.

Поступила в редакцию
7.10.2015

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)
Дагестанский научный центр РАН, Владикавказский научный центр РАН
E-mail: sharapud@mail.ru

М. Г. Магомед-Касумов (M. G. Magomed-Kasumov)
Владикавказский научный центр РАН, Дагестанский научный центр РАН
E-mail: rasuldev@gmail.com

С. Р. Магомедов (S. R. Magomedov)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: salihne@ya.ru