УДК 517.587:519.1

А. М. Магомедов

Непрерывное участие объектов в расписании с предписанными операциями

Получены эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия существования непрерывного расписания длительности 3. Рассмотрены некоторые связи между расписаниями, реберными раскрасками графа и паросочетаниями.

Библиография: 20 названий.

Effectively verifiable necessary and sufficient conditions for existence of continuous schedule by length 3 were obtained. Some relationships between scheduling, edge coloring and graph matchings were considered.

Bibliography: 20 items.

Ключевые слова: расписание, раскраска, граф, двудольный, интервал, паросочетание.

Keywords: schedule, coloring, graph, bipartite, interval, matching.

Введение

Все использованные в данной статье, но не определенные в ней обозначения и понятия соответствуют принятым в монографии [18]. Множества вершин и рёбер графа G будем обозначать $V(G)$ и $E(G)$ соответственно, степень вершины v и максимальную степень вершины графа — $d_G v$ и $\Delta(G)$.

Методы теории графов успешно применяются для исследования задач о расписаниях. В свою очередь, исследования в области теории расписаний приводят к появлению новых методов и даже целых направлений в теории графов. Например, проблема 4-х красок возникла в связи с задачами теории расписаний и разбиений [11; с. 110].

Для расписания взаимодействия объектов множества двудольной природы с предписанными операциями важное значение имеет проблема оптимизации как общей длительности расписания, так и времени участия в расписании каждого из объектов.

В пункте 1 для оптимизации некоторых частных случаев расписаний применены методы интервальной реберной раскраски.

В пункте 2 задача оптимизации расписания длительности 3 решена с применением реберно-вершинных инцидентных паросочетаний.

1. Реберные раскраски

1.1. Правильная и интервальная раскраски. Задачу составления расписания можно свести к задаче правильной раскраски графа G.

Определение 1. Правильной t-раскраской графа $G = (V, E)$ называется сюръекция

$$c\colon E \to \{1, \ldots, t\},$$

такая, что $c(e_i) \neq c(e_j)$ для любых смежных ребер $e_i, e_j \in E$. При этом $c(e)$ называется цветом ребра $e \in E$.

Наименьшее t, для которого правильная t-раскраска графа существует, обозначается через χ' (реберное хроматическое число). Задача составления расписания наименьшей длительности равносильна задаче правильной раскраски графа $G = (X, Y, E)$ в цвета $1, \ldots, \chi'$.

Мощность множества вершин и наибольшую степень вершины графа будем обозначать через n и Δ соответственно, полный граф с 3 вершинами — через K_3. Известно [10], что $\Delta \leqslant \chi' \leqslant \Delta + 1$.

Для графа K_3 $\chi' = \Delta + 1$. Согласно теореме Кенига о реберной раскраске [12; с. 80] $\chi' = \Delta$ для любого двудольного графа.

В [8] доказано, что задача проверки равенства $\chi' = \Delta$ NP-полна даже для кубических графов.

В условиях запрета простоев для объектов, участвующих в расписании, приходим к задаче *об интервальной раскраске*.

Определение 2. Правильная t-раскраска c графа $G = (V, E)$ называется интервальной в вершине $v \in V$, если цвета, представленные в вершине v, образуют интервал, и интервальной t-раскраской графа G, если раскраска c интервальна в каждой вершине $v \in V$. Если для заданного t интервальная t-раскраска графа существует, то граф называется интервально t-раскрашиваемым. Если при каком-либо t граф интервально t-раскрашиваем, то граф называется интервально-раскрашиваемым.

Граф K_3 не является интервально-раскрашиваемым. Любой однородный двудольный граф интервально Δ-раскрашиваем.

Термин «интервальная раскраска» впервые был введен в [9] в связи с задачей устранения «окон» в расписании учебных занятий. NP-полнота ряда задач раскраски графов доказывается сведением к ним известной NP-полной задачи «Составление учебного расписания» [2].

Всякий интервально-раскрашиваемый граф допускает правильную Δ-раскраску [9]. Задача об интервальной раскраске графа NP-полна [9]; более того, задача NP-полна и в случае двудольного графа [19].

Определение 3. Двудольный граф $G = (X, Y, E)$ называется (α, β)-бирегулярным, если степень каждой вершины множества X равна α, степень каждой вершины множества Y равна β.

В [4] показано, что задача об интервальной Δ-раскрашиваемости двудольного графа разрешима за полиномиальное время при $\Delta \leqslant 4$ и NP-полна при

$\Delta = 5$. В [1] установлена NP-полнота задачи об интервальной Δ-раскрашиваемости (6,3)-бирегулярного графа.

В [13] упоминается $(6,3)$-бирегулярный граф $G = (X, Y, E)$ с $n = 60$, не обладающий кубическим подграфом, включающим множество вершин X (легко доказать, что такой граф не допускает интервальной 6-раскраски). При нечетном Δ любой $(\Delta, 2)$-бирегулярный граф интервально $(\Delta + 1)$-раскрашиваем [7].

С привлечением компьютерных вычислений в [3] доказано, что каждый двудольный граф с $n \leqslant 14$ интервально-раскрашиваем. Двудольные графы $G = (X,Y, E)$ с небольшими значениями Δ и n, не допускающие интервальной раскраски, были построены следующими авторами: С.В. Севастьянов ($\Delta = 21$, $n = 28$), M. Malafiejcki ($\Delta = 15$,$n = 19$), A. Hertz ($\Delta = 14, n = 23$), D. de Werra (Δ =14, $n = 21$), P. Erdős ($\Delta = 13, n = 27$).

Заметим, что в каждом из перечисленных примеров $\min\{|X|, |Y|\} > 3$. В [5] доказано, что если $|X| \leqslant 3$, то для любого простого двудольного графа $G = (X, Y, E)$ существует интервальная раскраска.

Замечание 1. Ни в одном из этих примеров граф $G = (X, Y, E)$ не является бирегулярным, но каждый из них «близок» к бирегулярному графу в том следующем смысле: степени всех вершин множества X (за исключением малого количества вершин) равны некоторому α, а степени всех вершин множества Y равны некоторому β.

В одной из первых работ по интервальной раскраске двудольных графов [6] указаны следующие классы интервально-раскрашиваемых двудольных графов: полные графы, графы с $\Delta \leqslant 3$ и $(\Delta, 2)$-бирегулярные графы с четным Δ.

1.2. Интервальная Δ-раскраска двудольного мультиграфа.

Определение 4. Набор всех ребер заданного двудольного мультиграфа $G = (X, Y, E)$ с концами в вершинах x_i и y_j будем называть пучком и обозначать через E_{ij}. Интервальную раскраску мультиграфа будем называть интервальной в пучке, если цвета ребер пучка различны и образуют интервал.

Задача об интервальной Δ-раскрашиваемости двудольного мультиграфа

Условие. Задан двудольный мультиграф $G = (X, Y, E)$, $X = \{x_1, x_2\}$, $d_G x_1 = d_G x_2 = \Delta$, $d_G y \leqslant \lceil \Delta/2 \rceil$ для каждой вершины $y \in Y$.

Вопрос. Существует ли интервальная Δ-раскраска мультиграфа G, интервальная в каждом пучке?

Утверждение 1. *Задача об интервальной Δ-раскрашиваемости двудольного мультиграфа $G = (X, Y, E)$ NP-полна (даже при $|X| = 2$).*

До сих пор неизвестно, верна ли гипотеза об интервальной раскрашиваемости любого простого бирегулярного графа.

Утверждение 2. *Существует простой $(6, 3)$-бирегулярный граф G, не допускающий интервальной 6-раскраски.*

Построение $(6, 3)$-бирегулярного мультиграфа, не обладающего интервальной Δ-раскраской, тривиально. Например, граф $G = (X, Y, E)$, где

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, множество ребер E задано списками смежности: $y_1(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3)$, $y_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_4, x_4)$, не обладает интервальной 6-раскраской.

2. Рёберно-вершинные инцидентные паросочетания

2.1. Сбалансированное разбиение на примитивы. Для цикломатического числа $|E(G)| - |V(G)| + 1$ связного графа G примем обозначение $\gamma(G)$.

Задача построения непрерывных расписаний в общем виде относится к числу NP-полных задач. Для одного частного случая, когда количество занятий в каждом классе равно пяти, а количество занятий каждого учителя — двум, условия существования расписания длины 5 без «окон» для учителей получены в [15].

Связный граф G будем называть *примитивом*, если $\gamma(G) \leqslant 1$ и $\Delta(G) = 3$. Пусть G — связный граф, такой, что $\Delta(G) = 2p + 1$, $p \in Z^+$. Разбиение графа G на p рёберно-непересекающихся примитивов G_i $(i = 1, \ldots, p)$ будем называть *сбалансированным разбиением на примитивы*, если для каждой вершины v графа G и для каждого $i = 1, \ldots, p$ в примитив G_i включены $\lceil d_G v/p \rceil$ либо $\lfloor d_G v/p \rfloor$ рёбер, инцидентных вершине v. Сбалансированные разбиения на примитивы востребованы в задачах оптимизации расписаний и интервальных раскрасок графов.

Теорема 1 [16]. *Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = 2p + 1$ ($p \in Z^+$). Граф G допускает сбалансированное разбиение на примитивы тогда и только тогда, когда для каждого подграфа G' графа G справедливо неравенство*

$$|E(G')| \leqslant p|V(G')|. \tag{2.1}$$

Теорема 2 [17]. *Проверка условий (2.1) для всех подграфов графа G может быть выполнена за время $O(|V(G)|^3 \log |V(G)|)$.*

Из теоремы 1 видна актуальность рассмотрения случая, когда граф G является примитивом. Этому случаю и посвящен данный пункт. Найдены эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия существования непрерывного расписания длительности 3, показано применение рёберно-вершинных инцидентных паросочетаний к решению задачи оптимизации расписания.

2.2. Рёберно-вершинные инцидентные паросочетания и оптимизация расписания. Пусть исходные данные к школьному расписанию учебных занятий заданы связным графом G, $\Delta(G) = 3$; каждое ребро e соответствует учителю $t = t(e)$, а концевые вершины ребра e — классам $c_1(t)$ и $c_2(t)$, в каждом из которых учитель t должен провести по одному занятию. Требуется выяснить существование расписания длины 3, в котором учителя и классы не имеют «окон».

Инъективное отображение $E(G) \to V(G)$ множества рёбер графа в множество вершин, такое, что каждое ребро отображается в одну из своих инцидентных вершин, называется *рёберно-вершинным инцидентным паросочетанием* (*рвп*) графа G. Понятно, что для существования у графа G *рвп* необходимо выполнение неравенства $|E(G)| \leqslant |V(G)|$, равносильного, очевидно, неравенству

$$\gamma(G) \leqslant 1. \tag{2.2}$$

Другими словами, для существования *рвп* необходимо, чтобы граф G содержал не более одного цикла. Это условие оказывается и достаточным.

Предложение. Условие (2.2) необходимо и достаточно для существования *рвп* у графа G.

Замечание 2. Заметим, что ограничение $\Delta(G) = 3$ в доказательстве утверждения не использовано, другими словами, утверждение 1 справедливо для любого $\Delta(G)$. Вопросы существования *рвп* и других, близких по смыслу паросочетаний рассмотрены в [18; с. 93-94].

Теорема 3. *Для существования непрерывного расписания длины 3, соответствующего связному графу G с $\Delta(G) = 3$, необходимо и достаточно выполнение условия $\gamma(G) \leqslant 1$.*

Следствие 1. *Пусть условие (2.2) выполнено. Если G не является деревом, то существует непрерывное расписание длины 3, во втором занятии которого задействованы не только все учителя (для непрерывного расписания длины 3 и с двумя занятиями у каждого учителя это свойство, очевидно, всегда выполнено), но и все классы. Если же G — дерево, v_0 — произвольно выбранная вершина G, а c_0 — класс, соответствующий вершине v_0, то существует непрерывное расписание длины 3, во втором занятии которого задействованы все учителя и все классы, отличные от c_0.*

Следствие 2. *Если условие (2.2) выполнено, то существует непрерывное расписание длины 3, где третье занятие проводится лишь в тех классах, которые соответствуют вершинам степени 3.*

2.3. Непрерывные расписания длины $\Delta = 2^p$. Пусть теперь исходные данные к «школьному» расписанию учебных занятий заданы регулярным связным графом G степени $\Delta = 4$ или, в более общем случае, $\Delta = 2^p$, где $p \in Z^+$. Утверждение о существовании непрерывного расписания длины Δ в общем случае четного Δ равносильно известной теореме Петерсена о факторизации (по-прежнему предполагается, что каждому учителю запланированы точно два урока). Для нетривиального частного случая $\Delta = 2^p$ предложим элементарное доказательство этой классической теоремы.

Напомним формулировку теоремы: для разбиения связного графа $G = (V, E)$ на 2-факторы необходимо и достаточно, чтобы G был регулярным графом четной степени Δ.

Условие необходимости тривиально. При $\Delta = 4$ доказательство достаточности также несложно. В самом деле, тогда граф G является эйлеровым. Из очевидных соотношений:

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G v = 4|V|$$

следует, что $|E|$ четно. Выполним обход эйлерова цикла, начиная с произвольной вершины v_0 и поочередно помечивая ребра цикла метками 1 и 2. Из четности $|E|$ следует, что каждой вершине графа (в частности, и v_0) инцидентны два ребра, помеченных 1, и два ребра, помеченных 2. Таким образом, граф G разбивается на два 2-фактора: $G_i = (V, E_i)$, где E_i — набор ребер, помеченных i; $i = 1, 2$.

Пусть теперь $\Delta = 2^p$, где p — целое положительное. Пока $p > 1$, выполним, как и выше, помечивание ребер метками 1 и 2 и присвоение

$$p := p - 1,$$

получая каждый раз разбиение графа на два 2^p-фактора (с уменьшенным значением p). В результате получим искомое разбиение исходного графа на 2-факторы.

Список литературы

[1] *Asratian A.S, Casselgren C.J.* Some results on interval edge colorings of (α, β)-biregular bipartite graphs // Department Math. 2007. Linkoping University S–581 83. Linkoping, Sweden.

[2] *Even S., Itai A., Shamir A.* On the complexity of timetable and integral multi-commodity flow problems // SIAM J. Comput. 1976. V. 5. N 4. P. 691–703.

[3] *Giaro K.* Compact task scheduling on dedicated processors with no waiting period (in Polish) / PhD thesis, Technical University of Gdansk, IETI Faculty. Gdansk. 1999.

[4] *Giaro K.* The complexity of consecutive Δ-coloring of bipartite graphs: 4 is easy, 5 is hard // Ars Combin. 1997. V. 47. P. 287–298.

[5] *Giaro K., Kubale M., Malafiejcki M.* On the deficiency of bipartite graphs // Discrete Appl. Math. 94. Gdansk. 1999. P. 193–203.

[6] *Hansen H.M.* Scheduling with minimum waiting periods (In Danish) // Master Thesis, Odense University. Odense, Denmark. 1992.

[7] *Hanson D., Loten C.O.M., Toft B.* On interval colourings of bi-regular bipartite graphs // Ars Combinat. 1998. V. 50. P. 23–32.

[8] *Holyer I.* The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. 1981. V. 10. N 4. P. 718–720.

[9] *Асратян А.С., Камалян Р.Р.* Интервальные раскраски рёбер мультиграфа / Прикладная математика. Вып. 5. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та. 1987. С. 25–34.

[10] *Визинг В.Г.* Об оценке хроматического класса p-графа // Дискретный анализ. Сб. науч. тр. Вып. 3. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1964. С. 25–30.

[11] *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 1982.

[12] *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. Пер. с англ. М.: Мир, 1998.

[13] *Магомедов А.М.* К вопросу об условиях уплотнения матрицы из 6 столбцов. М., 1991. Деп. в ВИНИТИ.

[14] *Магомедов А.М.* Условия и алгоритм уплотнения матрицы из 4 столбцов. М., 1992. Деп. в ВИНИТИ, N 175–B92.

[15] *Магомедов А. М., Магомедов Т. А.* Интервальная на одной доле правильная рёберная 5-раскраска двудольного графа // ПДМ / Раздел «Прикладная теория графов». – Томск. – 2011. – N 5. – С. 85-91.

[16] *Магомедов А. М., Сапоженко А. А.* Условия существования непрерывных расписаний длительности пять // Вестник МГУ, сер. Вычислительная математика и кибернетика. – 2010. – N 1. – С. 39-44.

[17] *Магомедов А. М., Магомедов Т. А.* О приложении алгоритма вычисления подграфа максимальной плотности к задаче оптимизации расписания // Матзаметки. – 2013. – Т. 93. N 2. – С. 313-315.

[18] *Оре О.* Теория графов. М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.

[19] *Севастьянов С.В.* Об интервальной раскрашиваемости рёбер двудольного графа // Методы дискретного анализа. 1990. Т. 50. С. 61–72.

[20] *Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А.* Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, 1989.

А. М. Магомедов (A. M. Magomedov)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

Поступила в редакцию
13.11.2014