УДК 517.5

А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова

Сплайны по рациональным интерполянтам

Для непрерывной на данном отрезке (или периодической) функции построены n–точечные ($n = 2, 3, 4$) рациональные интерполянты и по ним интерполяционные рациональные сплайны. Последовательности сплайнов по n–точечным интерполянтам при $n = 2$ и $n = 3$ для любой последовательности сеток с диаметром, стремящимся к нулю, равномерно на всем отрезке сходится к самой функции. При $n = 3$ этим свойством безусловной сходимости обладают первые производные, а при $n = 4$ — первые и вторые производные.

Даны также оценки скорости сходимости.

Библиография: 16 названий.

For a continuous function on a given interval (or periodic) a n–point ($n = 2, 3, 4$) rational interpolant is constructed. Rational splines by means of interpolants are constructed. The sequences of the splines with respect to the n-point interpolant for $n = 2$ and $n = 3$ for each sequence of grids with a diameter tending to zero uniformly on the entire interval converges to the function itself. For $n = 3$ first derivatives have this unconditional convergence property, and for $n = 4$ — first and second derivatives.

We also give estimates of the convergence rate.

Bibliography: 16 items.

Ключевые слова: сплайны, интерполяционные, рациональные сплайны, безусловная сходимость.

Keywords: splines, interpolation, rational splines, unconditional convergence.

Введение

Вопросы сходимости различных видов полиномиальных сплайнов в классических функциональных пространствах исследованы в завершенной форме (см., напр., [1]–[9] и список литературы в них).

Изучаются также (см. [10]–[15] и цитирование в них) аппроксимативные свойства рациональных сплайнов специального вида при ограничениях типа монотонности, выпуклости или сохранения знака.

В данной работе построены n–точечные рациональные интерполянты для значений $n = 2, 3, 4$, на их основе построены интерполяционные рациональные сплайны и получены оценки скорости сходимости этих сплайнов и их производных до допустимых порядков.

1. Сплайны по двуточечным рациональным интерполянтам

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, на котором задана некоторая сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 1)$.

Всюду ниже положим $h_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, $\|\Delta\| = \max\{h_k : k = 1, 2, \ldots, N\}$.

Для каждой пары узлов $x_{k-1} < x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ рассмотрим рациональную функцию вида

$$q_k(x) = q_k(x, H) = a_k + \frac{A_k}{x - u_k} \tag{1.1}$$

с $u_k = x_k + H$ при $H > b - a$ такую, что $q_k(x_j) = f(x_j)$ при $j = k-1, k$.

Из этих условий получим

$$A_k = -f(x_{k-1}, x_k)(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k), \; a_k = f(x_k) + f(x_{k-1}, x_k)(x_{k-1} - u_k); \tag{1.2}$$

здесь $f(x_{k-1}, x_k)$ означает разделенную разность функции $f(x)$ в точках x_{k-1}, x_k.

Значит, рациональная функция (1.1) с $u_k = x_k + H$ и коэффициентами (1.2) представляет собой для функции $f(x)$ двуточечный интерполянт, непрерывный на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$.

При этом в силу монотонности $q_k(x)$ на $[x_{k-1}, x_k]$ и условий $q_k(x_j) = f(x_j)$ $(j = k-1, k)$ имеем

$$|q_k(x) - f(x)| \leqslant \omega(h_k, f) \quad (x \in [x_{k-1}, x_k]). \tag{1.3}$$

Построим теперь по сетке узлов Δ непрерывную на отрезке $[a,b]$ кусочно–рациональную функцию $Q_N(x)$ такую, что $Q_N(x) = q_k(x)$ при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

Тогда для непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$ с использованием (1.3) получим неравенство

$$|Q_N(x) - f(x)| \leqslant \omega(\|\Delta\|, f) \quad (x \in [a,b]). \tag{1.4}$$

Пусть теперь $f \in C^{(1)}[a,b]$, $u_k = x_k + H$ для наперед заданного числа $H > b - a$.

Тогда при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ имеем

$$q_k'(x) = -\frac{A_k}{(x-u_k)^2} = f(x_{k-1}, x_k)\frac{(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)}{(x-u_k)^2} =$$

$$= f'(\xi)\frac{(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)}{(x-u_k)^2}$$

для некоторой точки $\xi \in (x_{k-1}, x_k)$.

Значит, для этих точек $x, \xi \in [x_{k-1}, x_k]$ получим

$$|q_k'(x) - f'(x)| = [f'(\xi) - f'(x)] + f'(\xi)\left[\frac{(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)}{(x-u_k)^2} - 1\right].$$

Отсюда

$$|q_k'(x) - f'(x)| \leqslant \omega(h_k, f') + |f'(\xi)| \left[1 - \frac{(u_k - x_{k-1})(u_k - x_k)}{(u_k - x_{k-1})^2}\right] =$$

$$= \omega(h_k, f') + |f'(\xi)| \frac{h_k}{u_k - x_{k-1}};$$

$$|q_k'(x) - f'(x)| \leqslant \omega(h_k, f') + \frac{1}{H} \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} |f'(x)| \cdot h_k. \tag{1.5}$$

Пусть для краткости $j = k$, если $x \in \left[\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k), x_k\right]$, и $j = k - 1$, если $x \in \left[x_{k-1}, \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)\right]$. Тогда найдется точка ξ_1 между точками x и x_j такая, что

$$|q_k(x) - f(x)| = |[q_k(x) - f(x)] - [q_k(x_j) - f(x_j)]| =$$

$$= |q_k'(\xi_1) - f'(\xi_1)|\,|x - x_j| \leqslant |q_k'(\xi_1) - f'(\xi_1)| \frac{h_k}{2}.$$

Отсюда и из (1.5) при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ получим

$$|q_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2} h_k \omega(h_k, f') + \frac{1}{2H} \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} |f'(x)| \cdot h_k^2. \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) вытекает, что если $f \in C^{(1)}[a,b]$, H — любое наперед заданное число, большее $b - a$, $Q_N(x)$ — кусочно–рациональная по сетке Δ функция с $Q_N(x) = q_k(x, H)$ при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, N)$, то при всех натуральных N выполняются неравенства

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |Q_N'(x \pm 0) - f'(x)| \leqslant \omega(\|\Delta\|, f') + \frac{\|f'\|}{H} \|\Delta\|,$$

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |Q_N(x) - f(x)| \leqslant \frac{\|\Delta\|}{2} \omega(\|\Delta\|, f') + \frac{\|f'\|}{2H} \|\Delta\|^2;$$

здесь $\|f'\| = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

2. Сплайны по 3–точечным рациональным интерполянтам

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, на котором задана произвольная сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$.

Тогда справедливы следующие две леммы.

Лемма 2.1. *Для любой тройки узлов* $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, N - 1)$ *и любого фиксированного числа* $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ *существует (единственная) непрерывная на отрезке* $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ *рациональная функция вида*

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \frac{\gamma_i}{x - g_i} \tag{2.1}$$

такая, что

$$R_i(x_j) = f(x_j) \quad (j = i - 1, i, i + 1).$$

Если для различных между собой точек $t_1, t_2, t_3 \in [a, b]$ разделенные разности первого и второго порядков функции $f(x)$ в них обозначить соотвественно через $f(t_1, t_2)$ и $f(t_1, t_2, t_3)$, то непосредственно легко проверить, что искомой рациональной функцией служит (2.1) при $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и следующих значениях коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\ \beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i), \\ \gamma_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Лемма 2.2. *Если для данной тройки узлов* $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ *выбрать*

$$g_i = \begin{cases} 2x_{i+1} - x_i & \text{при} \quad x_{i+1} - x_i \leqslant x_i - x_{i-1}, \\ 2x_{i-1} - x_i & \text{при} \quad x_{i+1} - x_i > x_i - x_{i-1}, \end{cases} \tag{2.3}$$

то для непрерывной на отрезке $[a, b]$ *функции* $f(x)$ *и рациональной функции* (2.1) *с коэффициентами* (2.2) *при* $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ *выполняется неравенство*

$$|f(x) - R_i(x)| \leqslant 19\, \omega(\delta, f), \tag{2.4}$$

где $\delta = \max\{h_i, h_{i+1}\}$.

Переходим к построению кусочно–рациональной функции $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x; f)$ на отрезке $[a, b]$ для данных натуральных чисел $N \geqslant 2$ и k. Возьмем рациональные функции $R_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ из (2.1), которые удовлетворяют условиям (2.2) и (2.3); кроме того, будем считать $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$ (или в случае непрерывной $(b-a)$–периодической функции $f(x)$ сетку узлов Δ будем считать продолженной $(b-a)$–периодически).

При $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ положим

$$R_{N,k}(x) = \frac{R_i(x)(x - x_{i-1})^k + R_{i-1}(x)(x_i - x)^k}{(x - x_{i-1})^k + (x_i - x)^k}. \tag{2.5}$$

Значит, на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ функция $R_{N,k}(x)$ представляет собой некоторую рациональную функцию с отличным от нуля знаменателем.

При $k = 1$ равенство (2.5) приобретает форму

$$R_{N,1}(x) = R_i(x)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}.$$

Если при этом вместо рациональных функций $R_i(x)$ брать полиномы второй степени, интерполирующие $f(x)$ в узлах x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, то вместо $R_{N,1}(x)$ получим кубический сплайн (дефекта 2).

Следующее утверждение лежит в основе безусловной сходимости рациональных сплайнов. Оно вытекает из лемм 2.1 и 2.2.

Теорема 2.1. *Пусть данное натуральное число* $N \geqslant 2$ *и на отрезке* $[a, b]$ *задана произвольная сетка узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

Тогда для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ *функции* $f(x)$ *и интерполяционного рационального сплайна* $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x;f)$ *при любом натуральном* k *и всех* $x \in [a,b]$ *выполняется неравенство*

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leqslant 19\,\omega(\|\Delta\|, f).$$

В работе [8] построен пример функции из класса $\mathrm{Lip}\,\frac{1}{3}$, для которой существует расходящаяся последовательность интерполяционных кубических сплайнов.

В работах [2], [3] доказано, что для любого α $(0 < \alpha < 1)$ существует функция из класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$ и последовательность сеток с диаметром разбиения, стремящимся к нулю, для которых соответствующая последовательность интерполяционных параболических или кубических сплайнов расходится.

Следуя Ю.Н. Субботину ([16]), будем говорить, что интерполяционные сплайны безусловно сходятся к данной функции, если для любой последовательности сеток с диаметром, стремящимся к нулю, соответствующая последовательность интерполяционных сплайнов равномерно сходится к этой функции. Вполне аналогично определяется безусловная сходимость для производных функций и соответствующих сплайнов.

Значит, безусловная сходимость интерполяционных кубических или параболических сплайнов для всех функций класса не свойственна ни одному из классов $\mathrm{Lip}\,\alpha$ при $0 < \alpha < 1$. При этом ([2], [3], [9]) для непрерывной периодической функции имеет место безусловная сходимость интерполяционных параболических (кубических) сплайнов тогда и только тогда, когда функция принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,1$.

Известно также ([1]–[3]), что для производной $f^{(i)}(x)$ каждой функции из класса $C^{(i)}[a,b]$ при $i = 1, 2$ имеет место безусловная сходимость соответствующих производных интерполяционных параболических и кубических сплайнов.

Рассмотрим теперь вопрос скорости сходимости рациональных сплайнов $R_{N,k}(x;f)$ к непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$. При этом для произвольно заданной сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ будем придерживаться принятых выше обозначений.

Лемма 2.3. *Если для тройки узлов* $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ *значение* g_i *выбрано по* (2.3), *то для непрерывно дифференцируемой на отрезке* $[a,b]$ *функции* $f(x)$ *и рациональной функции* (2.1) *с коэффициентами* (2.2) *при* $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ *выполняется неравенство*

$$|f(x) - R_i(x)| \leqslant 16\,\delta\omega(\delta, f'),$$

где $\delta = \max\{h_i, h_{i+1}\}$.

Из леммы 2.3 вытекает

Теорема 2.2. *Пусть натуральное* $N \geqslant 2$ *и задана произвольная сетка узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

Тогда для любой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ *функции* $f(x)$ *и интерполяционного рационального сплайна* $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x;f)$ *при любом натуральном* k *и всех* $x \in [a,b]$ *выполняются неравенства*

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leqslant 16\,\|\Delta\|\,\omega(\|\Delta\|, f'),$$

$$|f'(x) - R'_{N,k}(x)| \leqslant (20k + 14)\omega(\|\Delta\|, f').$$

Приведем также оценку скорости сходимости рациональных сплайнов для дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Теорема 2.3. *Для произвольной сетки узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$, *любой дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке* $[a, b]$ *функции* $f(x)$ *и интерполяционного рационального сплайна* $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x; f)$ *при любом натуральном* k *и всех* $x \in [a, b]$ *выполняется неравенство*

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leqslant 6\,\|\Delta\|^2 \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|.$$

3. Сплайны по 4–точечным рациональным интерполянтам

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, на котором задана некоторая сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$.

Тогда для любой четверки узлов $x_{k-2} < x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ $(k = 2, 3, \ldots, N-1)$ существует непрерывная на отрезке $[x_{k-2}, x_{k+1}]$ рациональная функция вида

$$r_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_{k-1})(x - x_k) + \frac{A_k}{x - u_k} \tag{3.1}$$

такая, что

$$r_k(x_j) = f(x_j) \quad (j = k-2, k-1, k, k+1)$$

(полюс u_k определяется только узлами x_j $(j = k-2, k-1, k, k+1)$), а коэффициенты для одной и той же четверки узлов могут иметь разные выражения через разделенные разности функции $f(x)$ в этих узлах.

В частности, выполняются равенства

$$\begin{aligned}
A_k &= -f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) \prod_{j=-2}^{1} (x_{k+j} - u_k),\\
a_k &= f(x_k) - \frac{A_k}{x_k - u_k},\\
c_k &= f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) - \frac{A_k}{(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)(x_{k+1} - u_k)},\\
b_k &= f(x_{k-1}, x_{k+1}) - c_k(x_{k+1} - x_k) + \frac{A_k}{(x_{k-1} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

При тех же значениях A_k и a_k два других коэффициента могут задаваться равенствами

$$\begin{aligned}
c_k &= f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) - \frac{A_k}{(x_{k-2} - u_k)(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)},\\
b_k &= f(x_{k-2}, x_k) + c_k(x_{k-1} - x_{k-2}) - \frac{A_k}{(x_{k-2} - u_k)(x_k - u_k)}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ради краткости всюду ниже будем пользоваться также обозначениями:

$$\alpha_k = \min\{h_{k-1}, h_k, h_{k+1}\}, \quad \beta_k = \max\{h_{k-1}, h_k, h_{k+1}\} \quad (k = 1, 2, \ldots, N-1);$$

$$g_k = \begin{cases} \max\{h_{k-1}, h_k\}, \text{ если } h_{k-1} < h_{k+1},\\ \max\{h_k, h_{k+1}\}, \text{ если } h_{k+1} \leqslant h_{k-1}. \end{cases}$$

Лемма 3.1. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *на котором задана сетка* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, *и пусть для данного* k $(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ *рациональная функция* $r_k(x)$ *из равенства* (3.1) *имеет коэффициенты* (3.2) *и полюс* $u_k = x_{k-2} - g_k$, *если* $h_{k-1} < h_{k+1}$, *и имеет коэффициенты* (3.3) *и полюс* $u_k = x_{k+1} + g_k$, *если* $h_{k+1} \leqslant h_{k-1}$.

Тогда при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ *выполняется неравенство*

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant 38\,\frac{\beta_k}{\alpha_k}\,\omega(\beta_k, f).$$

В нижеследующих двух леммах считаем, что для данной произвольной сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ при данном k $(k = 2, 3, \ldots, N-1)$ рациональная функция $r_k(x)$ из равенства (3.1) имеет коэффициенты (3.2) и полюс $u_k = x_{k-2} - g_k$, если $h_{k-1} < h_{k+1}$, и имеет коэффициенты (3.3) и полюс $u_k = x_{k+1} + g_k$, если $h_{k+1} \leqslant h_{k-1}$.

Лемма 3.2. *Если* $f \in C^{(1)}[a,b]$ *и дана сетка* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, *то для любого* $k = 2, 3, \ldots, N-1$ *при* $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ *выполняются неравенства*

$$|r_k'(x) - f'(x)| \leqslant 57\,\omega(\beta_k, f'),$$

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{57}{2}\,h\,\omega(\beta_k, f'),$$

где $h = h_j$, *если* $x \in [x_{j-1}, x_j]$ *для данного* $j = k-1, k, k+1$.

Лемма 3.3. *Если* $f \in C^{(2)}[a,b]$ *и дана сетка* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, *то для любого* $k = 2, 3, \ldots, N-1$ *при* $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ *выполняются неравенства*

$$|r_k''(x) - f''(x)| \leqslant 39\,\omega(\beta_k, f''),$$

$$|r_k'(x) - f'(x)| \leqslant 39\,h\,\omega(\beta_k, f''),$$

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{39}{2}\,h^2\,\omega(\beta_k, f''),$$

где $h = h_j$, *если* $x \in [x_{j-1}, x_j]$ *для данного* $j = k-1, k, k+1$.

Пользуясь базовыми 4-точечными рациональными интерполянтами $r_k(x)$, построим рациональные сплайны.

Сначала функцию $f(x)$ будем считать непрерывной $(b-a)$–периодической. Сетку узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ продолжим также $(b-a)$–периодически и в соответствии с этим распространим определение приведенных выше рациональных интерполянтов $r_k(x)$ на узлы продолженной сетки.

Как видно из приводимого ниже замечания, случай функции $f(x)$, определенной лишь на самом отрезке $[a,b]$, рассматривается вполне аналогично и получаемые результаты вполне аналогичны периодическому случаю.

Для каждого k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ составим рациональную функцию

$$\begin{aligned} Q_k(x) = r_k(x) + (r_{k-1}(x) - r_k(x))\frac{(x_k - x)^2}{(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k-1})} + \\ + (r_{k+1}(x) - r_k(x))\frac{(x - x_{k-1})^2}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

непрерывную на $[x_{k-1}, x_k]$, причем $Q_k(x_j) = f(x_j)$ при $j = k-1, k$.

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a, b]$ кусочно–рациональную функцию $\rho_N(x) = \rho_N(x; f)$ $(N = 3, 4, \dots)$ такую, что при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, N)$ выполняется равенство $\rho_N(x) = Q_k(x)$.

Следующие равенства (при $k = 1, 2, \dots, N-1$) можно проверить, непосредственно вычисляя производные $Q_k'(x)$ и $Q_k''(x)$:

$$\begin{gathered} \rho_N'(x_k - 0) = Q_k'(x_k) = Q_{k+1}'(x_k) = \rho_N'(x_k + 0), \\ \rho_N'(x_k) = r_k'(x_k)\frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} + r_{k+1}'(x_k)\frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}; \end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} &\rho_N''(x_k - 0) = Q_k''(x_k) = Q_{k+1}''(x_k) = \rho_N''(x_k + 0), \\ &\rho_N''(x_k) = r_k''(x_k)\frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} + r_{k+1}''(x_k)\frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} + \\ &\qquad\qquad + (r_{k+1}'(x_k) - r_k'(x_k))\frac{4}{h_k + h_{k+1}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Следовательно, $\rho_N(x)$ $(N \geqslant 3)$ представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую на отрезке $[a, b]$ функцию с $\rho_N(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0, 1, \dots, N)$ такую, что на частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, N)$ совпадает с рациональной функцией $Q_k(x)$.

Исследуя аппроксимативные свойства рациональных сплайнов $\rho_N(x) = \rho_N(x; f)$, в приводимых ниже теоремах 3.1–3.3 будем предполагать, что на отрезке $[a, b]$ задана произвольная сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, продолженная $(b-a)$–периодически.

Следующее утверждение в принятых выше обозначениях дает оценку скорости сходимости сплайнов по 4–точечным рациональным интерполянтам $r_k(x)$ в случае непрерывной функции.

Теорема 3.1. *Для непрерывной $(b-a)$–периодической функции $f(x)$ и рационального сплайна $\rho_N(x) = \rho_N(x; f)$ $(N \geqslant 3)$ при $x \in [a, b]$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - \rho_N(x)| \leqslant 38 \sup\left\{\frac{\beta_k}{\alpha_k}\omega(\beta_k, f) : k = 2, 3, \dots, N-1\right\};$$

в частности,

$$|f(x) - \rho_N(x)| \leqslant 38\,\frac{\|\Delta\|}{\alpha}\,\omega(\|\Delta\|, f),$$

где $\alpha = \min\{h_k : k = 1, 2, \dots, N\}$.

Теорема 3.2. *Для непрерывно дифференцируемой $(b-a)$–периодической функции $f(x)$ и рационального сплайна $\rho_N(x) = \rho_N(x; f)$ $(N \geqslant 3)$ при $x \in [a, b]$ выполняются неравенства*

$$|f(x) - \rho_N(x)| \leqslant \frac{57}{2}\,\|\Delta\|\omega(\|\Delta\|, f'),$$

$$|f'(x) - \rho_N'(x)| \leqslant 285\,\omega(\|\Delta\|, f').$$

Теорема 3.3. *Для дважды непрерывно дифференцируемой $(b-a)$–периодической функции $f(x)$ и рационального сплайна $\rho_N(x) = \rho_N(x; f)$ $(N \geqslant 3)$ при $x \in [a, b]$ выполняются неравенства*

$$|f(x) - \rho_N(x)| \leqslant \frac{39}{2} \|\Delta\|^2 \omega(\|\Delta\|, f''),$$

$$|f''(x) - \rho_N''(x)| \leqslant 429\, \omega(\|\Delta\|, f'').$$

Замечание о непериодическом случае. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, на котором задана сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, то 4–точечные рациональные интерполянты $r_k(x)$ и их коэффициенты при $k = 2, 3, \cdots < N - 1$ определяем, как и выше, по формулам (3.1)–(3.3).

Интерполянты $r_k(x)$ для концевых пар частичных отрезков, т.е. для значений $k = 0, 1$ и $k = N, N - 1$, определим равенствами $r_0(x) = r_1(x) = r_2(x)$ $(x \in [x_0, x_3])$ и $r_{N+1}(x) = r_N(x) = r_{N-1}(x)$ $(x \in [x_{N-3}, x_N])$.

Промежуточные рациональные функциии $Q_k(x)$ при всех $k = 1, 2, \ldots, N$ определяются по вышеприведенной формуле (3.4). Определение рационального сплайна $\rho_N(x) = \rho_N(x; f)$, его непрерывность и непрерывность $\rho_N'(x)$ и $\rho_N''(x)$ на $[a, b]$ также сохраняются.

При этом значения $\rho_N'(x_k)$ и $\rho_N''(x_k)$ при всех $k = 1, 2, \ldots, N$ вычисляются по общим формулам (3.5) и (3.6).

Все оценки, полученные выше в теоремах 3.1–3.3, сохраняются и в непериодическом случае.

Список литературы

[1] Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., Мир. 1972.

[2] Стечкин С.В., Субботин Ю.Н. Добавления к книге Дж. Алберг, Э. Нилсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. М., Мир. 1972.

[3] Стечкин С.В., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М. Наука. 1976.

[4] Корнейчук Н.В. Сплайны в теории приближения. М., Наука. 1984.

[5] Черных Н.И. Приближение сплайнами с заданной плотностью распределения узлов // Тр. МИАН СССР. 1975. Vol. 138. М. С. 174–197.

[6] Малоземов В.Н., Певный А.Б. Полиномиальные сплайны. Л. Изд-во ЛГУ. 1986.

[7] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн–функций. М., Наука. 1980.

[8] Nord S. Approximation properties of the spline fit // BIT. 1967. Vol. 7. Pp. 132–144.

[9] Привалов Ал.А. О сходимости кубических интерполяционных сплайнов к непрерывной функции // Матем. заметки. 1979. Т.25. Вып. 5. С. 681–700.

[10] Schaback R. Spezielle rationale Splinefunktionen // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 7. Issue 2. Pp. 281–292.

[11] Duan Q., Djidjeli K., Price W.G., Twizell E.H. Weighted rational cubic spline interpolation and its application // J. of Computational and Applied Mathematics. 2000. Vol. 117. Issue 2. Pp. 121–135.

[12] Oja P. Rational spline interpolation to monotonic data // Proceed. of the Estonian Acad. of Sciences. Physics*Mathematics. 1999. Vol. 48. Issue 1. Pp. 22–30.

[13] Tian M., Geng H.L. Error analysis of a rational interpolation spline // Intern. J. of Mathematical Analysis. Vol. 5. Issue 25–28. Pp. 1287–1294.

[14] Hussain M.Z., Sarfraz M., Shaikh T.S. Shape preserving rational cubic spline for positive and convex data // Egyptian Informatics Journal. 2011. Vol. 12. Pp. 231–236.

[15] Edeoa A. Gofeb G., Tefera T. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. 2015. Vol. 12. Issue 1. Pp. 110–122.

[16] Субботин Ю.Н. Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Т.3. Вып. 4. С. 1043–1058.

А.-Р. К. Рамазанов (A.-R. K. Ramazanov)
Дагестанский государственный университет, Дагестанский научный центр РАН
E-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Поступила в редакцию
01.12.2015

В. Г. Магомедова (V. G. Magomedova)
Дагестанский государственный университет
E-mail: vazipat@rambler.ru