УДК 519.1

А. М. Магомедов

Двудольные $(6,3)_6$-бирегулярные графы, не допускающие интервальной раскраски

Предложенный в статье алгоритм элиминации перебора свел задачу поиска нераскрашиваемого графа к построению дерева из 11645 узлов, из которых 2485 узлов – последнего уровня; узловые графы последнего уровня образуют искомое множество $(6,3)_6$- графов M_0. Программа обнаружила среди них точно 62 нераскрашиваемых графа, а для $n \leqslant 5$ выяснила раскрашиваемость всех графов из множеств – аналогов M_0 для рассматриваемых n. Тем самым получено уточнение наименьшего n, для которого существует нераскрашиваемый $(6,3)_6$-граф.

Библиография: 4 названий.

The proposed in the article search elimination algorithm reduced the problem of finding a non-colorable graph to building the tree of 11645 nodes, 2485 of which are last level nodes; graph nodes form the last level of the desired set of $(6,3)_6$-graphs M_0. The program found among them just 62 non-colorable graph, and for $n \leqslant 5$ found coloring of all graphs of the sets – analog M_0 considered for $n \leqslant 5$. Thus obtained specification of least n, for which the non-colorable $(6,3)_6$-graph exists.

Bibliography: 4 items.

Ключевые слова: двудольный граф, раскраска графа, теория расписаний.

Keywords: bipartite graph, graph coloring, job shop scheduling.

Введение

В статье использованы обозначения и определения из книги [1]. *Интервальной* (реберной) *раскраской графа t цветами* будем называть отображение множества ребер графа в множество $\{1,2,\ldots,t\}$, такое, что: 1) для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant t$, найдется ребро, закрашенное в цвет i, 2) в каждой вершине графа все представленные в ней цвета попарно различны и образуют целочисленный интервал.

В [2] доказана NP-полнота задачи об интервальной (реберной) раскрашиваемости 6 цветами двудольного графа $G=(X,Y,E)$, где степени всех вершин X равны 6, а степени всех вершин Y равны 3. Такие графы будем называть (6,3)-*бирегулярными* или, более кратко, $(6,3)$-*графами*; (6,3)-граф $G=(X,Y,E)$, где $|X|=n$ (тогда $|Y|=2n$), будем называть $(6,3)_n$*–графом.* (6,3)-граф будем называть *(не)раскрашиваемым*, если он (не) допускает интервальной раскраски 6 цветами.

Из результата [2], в частности, следует существование нераскрашиваемых $(6,3)_n$-графов. Приведенное в [2] принципиальное решение проблемы в настоящей статье дополнено уточнением наименьшего n, для которого существует нераскрашиваемый $(6,3)_n$-граф. Более точно, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого $n \geqslant 6$ найдется нераскрашиваемый $(6,3)_n$-граф. При $n \leqslant 5$ каждый $(6,3)_n$-граф раскрашиваем.*

1. Интервальная и гармоническая раскраски

Отображение множества ребер E $(6,3)$-графа $G = (X, Y, E)$ в множество из двух цветов, такое, что в каждой вершине $y \in Y$ все три инцидентных y ребра имеют одинаковые цвета, а каждой вершине $x \in X$ инцидентны по три ребра каждого из двух цветов, будем называть *гармонической раскраской графа* G.

Следующая лемма независимо (и в различных терминах) доказана в [2] и [3].

Лемма 1. *Для раскрашиваемости $(6,3)$-графа G необходимо и достаточно существование гармонической раскраски графа G.*

Простое арифметическое упражнение с применением системы компьютерной математики Mathematica 8.0 показывает, что метод полного перебора для проверки существования $(6,3)_n$-графа, не допускающего гармонической раскраски, бесперспективен даже при $n = 6$. В самом деле, при $n = 6$ полный перебор всех $(6,3)_n$-графов, когда для каждой из шести вершин $x \in X$ в списки смежности x независимо выбираются шесть вершин из Y, потребует рассмотрения громоздкого числа вариантов – C_{12}^6 в шестой степени (через C_{12}^6 обозначено сочетание из 12 по 6). Каждый способ выбора необходимо дополнить проверкой, является ли полученный граф $(6,3)_n$-графом, а в случае положительного результата–также и проверкой существования гармонической раскраски, что в худшем случае потребует рассмотрения для каждого графа C_{12}^6 случаев. Для компьютера, способного рассмотреть 1 млрд **случаев** в секунду, для вычислений может понадобиться

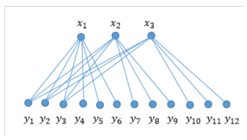
$$(C_1 2^6)^7/(1000000000 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365) \approx 18235 \text{ лет.}$$

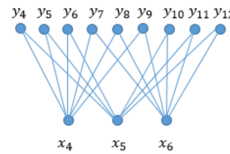
2. Нераскрашиваемые $(6,3)_n$-графы

2.1. Граф G_0, $(6,3)$-надграф которого не допускает гармонической раскраски. Всюду в дальнейшем выберем значения цветов в определении гармонической раскраски равными $+1$ и -1.

Замечание 1. Тогда при любой гармонической раскраске: 1) для любой вершины $x \in X$ сумма цветов ребер, инцидентных x, равна нулю (*свойство гармоничности для вершины* x); 2) следовательно, сумма цветов всех ребер графа также равна нулю.

Обозначим через $G_0 = (X_0, Y_0, E_0)$ двудольный граф, где$_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y_0 = \{y_1, \ldots, y_{12}\}$, а множество ребер E_0 задано списками смежности вершин множества X_0: $x_1(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6)$, $x_2(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_7,\ y_8,\ y_9)$, $x_3(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_{10},\ y_{11},\ y_{12})$ (рис.1а).





а) двудольный граф $G_0 = (X_0, Y_0, E_0)$; б) двудольный граф $G_1 = (X_1, Y_1, E_1)$, пример 6-*дополнения*

Рис. 1.

Лемма 2. *Если* $(6,3)$*-граф* $G = (X, Y, E)$ *является надграфом для* G_0, *то* G *не допускает гармонической раскраски.*

Доказательство. Допустим противное: пусть существует некоторая гармоническая раскраска **c** графа G. Цвет ребер, инцидентных вершине $y_i \in Y$, будем обозначать через c_i, $1 \leqslant i \leqslant 12$. Выполнив почленное сложение равенств, выражающих свойство гармоничности для вершин x_1, x_2 и x_3 соответственно:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 0,$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_7 + c_8 + c_9 = 0,$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_{10} + c_{11} + c_{12} = 0,$$

получим: $(c_1 + \cdots + c_{12}) + 2(c_1 + c_2 + c_3) = 0$.

Так как, согласно замечанию 1, $c_1 + \cdots + c_{12} = 0$, то отсюда: $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, что невозможно ввиду принадлежности c_1, c_2, c_3 множеству $\{-1, +1\}$. Полученное противоречие доказывает, что гармоническая раскраска графа G не существует. Лемма доказана.

2.2. Теорема о нераскрашиваемых $(6,3)$**-графах.** Пусть задано натуральное n, $n \geqslant 6$. Любой двудольный граф $G_1 = (X_1, Y_1, E_1)$, где $X_1 = \{x_4, x_5, \ldots, x_n\}$, $Y_1 = \{y_4, y_5, \ldots, y_{2n}\}$,

$$d(y_4) = \cdots = d(y_{12}) = 2,\ d(y_{13}) = \cdots = \ d(y_{2n}) = 3,\ d(x_4) = \cdots = d(x_n) = 6, \quad (2.1)$$

будем называть *дополнительным графом* (или – *дополнением*) для G_0.

В описанном ниже алгоритме построения дополнительного графа *текущие значения* степеней вершин v обозначены через $D(v)$, разности $d(v) - D(v)$ названы *дефицитами* вершин v, а вершины с дефицитами, (не)равными нулю, названы (*не*)*насыщенными*.

Алгоритм построения дополнительного графа

Вход: граф $G_0 = (X_0, Y_0, E_0)$, натуральное $n, n \geqslant 6$, списки $d(y_4)$, $\ldots$, $d(y_{2n})$ и $d(x_4)$, $\ldots$, $d(x_n)$ со значениями элементов, заданными в (2.1); элементы списков приобретут смысл степеней соответствующих вершин лишь после завершения алгоритма.

Выход: – дополнение для G_0.

1. Инициализация: $X_1 := \{x_4, x_5, \ \ldots, \ x_n\}$; $Y_1 := \{y_4, y_5, \ \ldots, \ y_{2n}\}$; $D(v)$:=0 для всех $v \in X_1 \cup Y_1$;

{Легко видеть, что после инициализации
1) *сумма дефицитов вершин каждого из множеств* X_1 *и* Y_1 *равна* $6n - 18$;
2) *разность любых двух элементов следующего списка:*

$$d(y_4) - D(y_4), \quad \ldots, \quad d(y_{2n}) - D(y_{2n}) \tag{2.2}$$

равна -1, 0 *или* 1 («свойство близости элементов списка»)}

1. Цикл: **пока** в множестве X_1 имеется ненасыщенная вершина x, соединить x рёбрами с каждой из шести вершин множества Y_1, имеющих наибольшие значения дефицитов

{проведение ребра сопровождается увеличением текущих степеней его концевых вершин}
Конец алгоритма.

Лемма 3. *Для любого заданного натурального* n, $n \geqslant 6$, *алгоритм построения дополнительного графа генерирует – дополнение* $G_1 = (X_1, Y_1, E_1)$ *для графа* G_0.

Доказательство. Выполнение каждой итерации цикла уменьшает на единицу шесть наибольших элементов списка (2.2), что, очевидно, сохраняет свойство близости элементов списка. Отсюда следует, что пока дефицит хотя бы одной вершины множества Y_1 превышает 1, дефицит любой из вершин Y_1 не меньше 1.

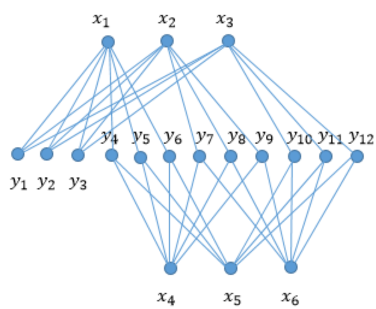


Рис. 2. Нераскрашиваемый $(6,3)_6$-граф G

Последнее, ввиду очевидных соотношений: $|Y_1| = 2n - 3$ и $2n - 3 \geqslant 6$, обеспечивает возможность насыщения очередной выбранной вершины $x \in X_1$.

Обозначим через k наименьший номер итерации, после выполнения которой дефицит каждой вершины множества Y_1 равен 0 или 1. Тогда количество вершин Y_1, имеющих дефицит 1, равно, как легко видеть, $6(n-3) - 6k$, а количество ненасыщенных вершин (с дефицитом 6 каждая) в множестве X_1 составляет $(n-3) - 3$. Выполнимость заключительных $(n-3) - k$ итераций цикла очевидна: каждая из них заключается в соединении ненасыщенной вершины множества X_1 с шестью вершинами множества Y_1, дефициты которых равны 1. Лемма доказана.

Замечание 2. Если частное и остаток от целочисленного деления $2n - 12$ на 6 обозначить через p и q соответственно, то можно показать, что наименьший номер итерации k, после которой дефициты вершин Y_1 не превышают 1, равен $2p + 2$ (при $q = 0$) или $2p + 1$ (при $q \neq 0$).

Теорема 2. *Для любого* $n \geqslant 6$ *существует* $(6,3)_n$*-граф* $G = (X, Y, E)$*, не допускающий гармонической раскраски.*

Доказательство. В качестве графа G можно взять объединение G_0 и его – дополнения G_1. Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого $n \geqslant 6$ существует нераскрашиваемый $(6,3)_n$-граф $G = (X, Y, E)$.

На рис.2 приведен $(6,3)_6$-граф G, не допускающий гармонической раскраски (следовательно, граф G нераскрашиваем).

3. Элиминация перебора множества неизоморфных $(6,3)_n$-графов

3.1. Дерево сокращенного перебора T. Начало построения. Отметим, что граф $G_0 = (X_0, Y_0, E_0)$, сыгравший ключевую роль в доказательстве теоремы 2, был построен нами в результате компьютерных вычислений. Но если происхождение графа G_0 для доказательства теоремы 2, составляющей первую часть утверждения теоремы 1, несущественно, то вторая часть утверждения теоремы 1 всецело получена «компьютерным» путем. В разделе 2 обсуждались трудности перебора $(6,3)_n$-графов при $n = 6$; проблема перебора сохраняет остроту и для значения $n = 5$, хотя вычислительные трудности не столь велики, как в случае $n = 6$. Изложим подход, который позволяет существенно сократить перебор.

Отношение изоморфизма разбивает множество M всех $(6,3)_n$-графов на классы эквивалентности (классы попарно неизоморфных графов). Если M_0 – подмножество множества M, включающее не менее одного представителя из каждого класса эквивалентности, то проверка существования нераскрашиваемого $(6,3)_n$-графа сводится к аналогичной проверке для графов из M_0.

Замечание 3. Сложность построения множества M_0, включающего из каждого класса эквивалентности точно одного представителя, объясняется трудностью задачи об изоморфизме графов, которая была опубликована в [4] как «открытая» задача, относительно которой неизвестно, является ли она NP-полной. Насколько нам известно, за истекшие четыре десятилетия успех в решении проблемы не достигнут.

Обозначения: $X = \{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}\}$, $Y = \{y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{2n-1}\}$;
$X_i = \{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_i\},\ 0 \leqslant i \leqslant n-1$;; $Y_j = \{y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_j\}, 0 \leqslant j \leqslant 2n-1$.

Построение множества M_0 опишем в виде процесса построения корневого дерева T глубины $n-1$, узлы которого представлены графами (в дальнейшем – «узловые графы»):

а) каждый узел V последнего, $(n-1)$-го уровня представлен некоторым $(6,3)_n$-графом $G = G^V_{n-1}$, а множество M_0 определяется как множество всех узловых графов $(n-1)$-го уровня;

б) каждый узел v уровня $i-1$, принадлежащий пути от корня к вершине последнего уровня V, представлен порожденным на множестве вершин $X_{i-1} \cup Y$ подграфом $G^{(v)}_{i-1}$ графа $G^{(V)}_{n-1}$;

в) в качестве узлового графа для корня дерева T можно без ограничения общности выбрать двудольный граф $G_0 = (X_0,\ Y,\ E_0)$, где $E_0 = \{(x_0, y_0), \ldots, (x_0, y_5)\}$, поскольку выбор для вершины x_0 любого иного списка смежности приводит к графу, изоморфному G_0.

3.2. Три правила сокращения узлов в дереве T. С каждым порожденным на множестве вершин $X_i \cup Y$ подграфом $G^{(\omega)}_i$ графа $G^{(V)}_{n-1}$ будем связывать термин «*наследник* узла v», где v – некоторый узел $(i-1)$-го уровня. Сформулируем условия, при которых наследник включается в дерево T и, таким образом, становится потомком некоторого узла v (более точно, его непосредственным потомком). Пусть построены все узлы v дерева T до $(i-1)$-го уровня включительно, $i < n$. Если в узловом графе $G_{i-1}^{(v)}$ все вершины некоторого подмножества $Y' \subseteq Y$: а) имеют степени меньше 3; б) обладают идентичными списками смежности, то подмножество Y' будем называть *предполем*, а предполе, не являющееся собственным подмножеством никакого другого предполя, будем называть *полем* (узла v). Количество полей рассматриваемого узла v обозначим через N, поля – через $F_1, \ldots, F_N$, их мощности – через $l_1, \ldots, l_N$, индексы первых элементов полей – через $s_1, \ldots, s_N$.

Пример. Для узлового графа G_{i-1}^{v}, изображенного на рис.3 слева, $N = 4$, $F_1 = \{y_1,\ y_2\}$, $F_2 = \{y_3, y_4, y_5, y_6\}$, $F_3 = \{y_7, y_8, y_9,\ y_{10}\}$, $F_4 = \{y_{11}, y_{12}\}$, $l_1 = 2$, $l_2 = 4$, $l_3 = 4$, $l_4 = 2$; $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 7$, $s_4 = 11$.

С точностью до изоморфизма наследник ω узла v определяется количеством a_k вершин списка смежности вершины x_i узлового графа $G_i^{(\omega)} = (X_i, Y, E_\omega)$, принадлежащих полям F_k :

$$a_1 + \cdots + a_N = 6, \tag{3.1}$$

$$0 \leqslant a_k \leqslant l_k;\ k = 1, \ldots,\ N. \tag{3.2}$$

Отсюда следует корректность следующего правила.

Правило 1. Из рассмотрения удаляются все наследники ω узла v за исключением тех, для которых список смежности вершины x_i в графе $G_i^{(\omega)}$ содержит точно a_k начальных вершин поля F_k, $k = 1,\ \ldots,\ N$; таким образом, количество наследников, подлежащих дальнейшему рассмотрению, равно количеству наборов целых чисел, удовлетворяющих системе (3.1)–(3.2).

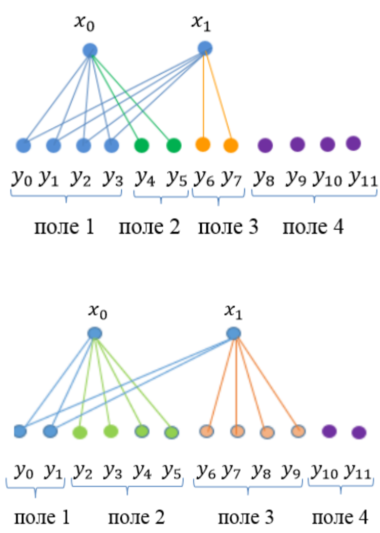


Рис. 3. Изображены два узла 1-го уровня: v и v'. Поля выделены.

Узловые графы, соответствующие наследникам одного и того же родительского узла, неизоморфны; однако узловые графы наследников разных узлов одного уровня могут оказаться изоморфными. Так, изображенные на рис. 4*а* и 4*б* наследники узлов 1-го уровня v и v', чьи узловые графы изображены на рис.3, изоморфны.

Правило 2. Из наследников ω узла v, удовлетворяющих правилу 1, для дальнейшего рассмотрения выбираются лишь те, у которых список смежности вершины x_i в графе $G_i^{(\omega)}$ имеет не больше общих вершин с Y_5, чем список смежности вершины x_{i-1}

в узловом графе родительской вершины v. В самом деле, данное правило равносильно требованию упорядочить вершины $x_0, \ldots,\ x_{n-1}$ по принципу невозрастания в их списках смежности количеств вершин, принадлежащих Y_5.

а) б)

Рис. 4. Изоморфные наследники узлов v и v', приведенных на рис.3.

Правило 3. Наследник ω *промежуточного* уровня i $(i < n-1)$, удовлетворяющий правилам 1-2, включить в дерево T в качестве потомка узла v лишь если в узловом графе $G_i^{(\omega)}$ не менее шести вершин множества Y имеют степени меньше 3; легко видеть, что в противном случае достройка узлового графа $G_i^{(\omega)}$ до $(6,3)_n$-графа невозможна.

Для реализации правила 1 используется рекурсивная процедура MakeSplit ($value$, k, a, l, s, N), где a и l – векторы из N целых неотрицательных и целых положительных чисел соответственно, которая по заданным $value$, N, l, s и k генерирует все разбиения заданного натурального $value$ на слагаемые $a_k + \cdots + a_N$, не превышающие соответствующих $l_k, \ldots,\ l_N$.

Процедура MakeSplit ($value,\ k,\ a,\ l, s,\ N$)

если $k = N$, **то** begin a_k:=value; Добавление end {о процедуре Добавление см. ниже в п.4.3}

иначе

для j **от** $max(0,\ value\ -\ (a_{k+1} + \cdots + a_N))$ **до** $min\ (value,\ l_k)$ **выполнить**

begin $a_k := j$; MakeSplit $(value - j,\ k+1,\ a,\ l,\ s, N)$ end;

Конец процедуры

3.3. Построение узлов очередного уровня дерева T. Построение узлов очередного,i-го уровня дерева T выполняется следующим образом. Для графа $G_{i-1}^{(v)}$ каждого узла v уровня $i-1$ определяется множество полей графа $(N,\ l_1, \ldots,\ l_N$ и $s_1, \ldots,\ s_N)$, после чего вызовом MakeSplit ($value$, 1, a, l, s, N), где значение фактического параметра $value$ предварительно установлено в значение 6, генерируются разбиения числа 6, удовлетворяющие (3.1)- (3.2); затем для каждого из разбиений процедура *Добавление* проверяет соблюдение для графа $G_i^{(\omega)}$ правил 1-3 и, в случае их соблюдения, добавляет ω в дерево T в качестве потомка вершины v: количество узлов R в построенной части дерева T увеличивается на единицу, узлу с номером R приписывается граф $G_i^{(\omega)}$, после чего выполняются действия сопроводительного характера: i, N, номер родительского узла v и векторы a, l и s заносятся в соответствующие массивы с позиции R.

Заключение

Предложенный алгоритм элиминации перебора свел задачу к построению дерева из 11645 узлов, из которых 2485 узлов – последнего уровня; узловые графы последнего уровня образуют искомое множество $(6,3)_6$-графов M_0. Программа обнаружила среди них точно 62 нераскрашиваемых графа (включая изображенный на рис.2), а для $n \leqslant 5$ выяснила раскрашиваемость всех графов из множеств – аналогов M_0 для рассматриваемых n. Тем самым доказано и второе утверждение теоремы 1.

Область практического применения – оптимизация «школьного» расписания. Пусть рассматривается однодневное расписание учебных занятий: X – множество классов, Y – множество учителей, исходные данные к расписанию заданы $(6,3)$-графом $G=(X,Y,E)$ – каждому классу запланированы 6 уроков, а каждому учителю – 3 урока. Если цвету $t \in \{1,\ldots,6\}$ каждого ребра $(x_i,y_j) \in E$ соотнести номер академического часа – занятия j-го учителя в i-м классе, то задача о раскрашиваемости графа G преобразуется в задачу о существовании расписания длительности 6 без «окон» у учителей и классов.

Список литературы

[1] Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984. – 455 с.

[2] Casselgren C.J. On Some Graph Coloring Problems // Doctoral Thesis No. 48. Department of Mathematics and Mathematical Statistics Umea University, 2011.

[3] Магомедов А.М. К вопросу об условиях уплотнимости матрицы из 6 столбцов // Деп. в ВИНИТИ, 1991.

[4] Karp R.M. Reducibility among combinatorial problems // in R.E. Miller and J.W. Thatcher (eds.), Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York, 1972. P. 85–103.

А. М. Магомедов (A. M. Magomedov)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

Поступила в редакцию
20.11.2013