УДК 517.587

Т. И. Шарапудинов

Дискретные полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева, ортогональными на равномерной сетке

Рассмотрены полиномы, ортогональные в смысле Соболева на равномерной сетке, порожденные полиномами Чебышева, ортогональными на равномерной сетке. Получен явный вид этих полиномов, удобный для изучения их асимптотических свойств.

Библиография: 19 названий.

The orthogonal polynomials with respect to the Sobolev-type inner product, generated by orthogonal on uniform grid Chebyshev polynomials are considered. The explicit form of these polynomials, convenient to study their asymptotic properties is obtained.

Bibliography: 19 items.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, ортогональные по Соболеву полиномы, полиномы Чебышева.

Keywords: orthogonal polynomials, Sobolev-type orthogonal polynomials, Chebyshev polynomials.

Введение

Полиномы ортогональные относительно скалярных произведений типа Соболева в последние годы были исследованы (см.[1] – [6] и цитированную там литературу) в работах многих авторов. В том числе было показано, что классические полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ и Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$ обладают свойством ортогональности относительно скалярного произведения типа Соболева, если параметры α, и β принимают целые отрицательные значения. Скалярные произведения типа Соболева содержат, как правило, слагаемые, которые "отвечают"за поведение соответствующих ортогональных полиномов на концах области ортогональности. Полиномы, ортогональные по Соболеву на отрезке $[a, b]$, могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого отрезка. Это свойство имеет важное значение для многих приложений. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на $[a, b]$ весом полиномы этим важным свойством не обладают.

С другой стороны отметим, что в ряде работ Шарапудинова И.И. (см. [7] – [12]) были введены, так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых также обладают свойством совпадения их значений в концах области ортогональности со со значениями исходной функции. В работах [7] – [12] были подробно исследованы аппроксимативные свойства смешанных рядов для функций из различных функциональных пространств и классов. В частности, было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномами, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных.

В настоящей работе показано, что классические полиномы Чебышева $T_k^{\alpha-r,\beta-r}(x,N+r)$ $(r\leqslant k\leqslant N+r-1)$, определяемые разностной формулой Родрига (2.2), при условии $(k+\alpha+\beta)^{[r]}\neq 0$ образуют ортогональную систему относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида:

$$< f,g >=\sum_{j=0}^{N}\mu(j)\Delta^r f(j)\Delta^r g(j), \tag{1.1}$$

где $\Delta f(j)=f(j+1)-f(j)$, $\Delta^r f(j)=\Delta\Delta^{r-1}f(j)$ – конечная разность, $\mu(x)$ – весовая функция. Нам понадобится ряд свойств полиномов Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$, которые мы соберем в следующем параграфе.

1. Некоторые сведения о полиномах Чебышева, ортогональных на равномерной сетке

Пусть N – натуральное, α, β – произвольные числа. Положим

$$\rho(x)=\rho(x;\alpha,\beta,N)=\frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}, \tag{2.1}$$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{(-1)^n}{n!(N-1)^{[n]}\rho(x)}\Delta^n\left\{\rho(x)(x-N-\alpha)^{[n]}x^{[n]}\right\}, \tag{2.2}$$

где $\Delta^n f(x)$ – конечная разность n-го порядка функции $f(x)$ в точке x, т.е. $\Delta^0 f(x)=f(x)$, $\Delta^1 f(x)=\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$, $\Delta^n f(x)=\Delta\Delta^{n-1}f(x)$ $(n\geqslant 1)$, $a^{[0]}=1$, $a^{[k]}=a(a-1)\cdots(a-k+1)$ при $k\geqslant 1$. Для каждого $0\leqslant n\leqslant N-1$ равенство (2.2) определяет [13] – [17] алгебраический полином степени n, для которого

$$T_n^{\alpha,\beta}(N-1,N)=\binom{n+\alpha}{n}, \qquad T_n^{\alpha,\beta}(0,N)=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}.$$

Полные доказательства приведенных ниже свойств полиномов Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ можно найти, например, в монографии [18]. Прежде всего отметим, что полиномы $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ допускают следующее явное представление

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=(-1)^n\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_k x^{[k]}}{\Gamma(k+\beta+1)k!(N-1)^{[k]}}. \tag{2.3}$$

Если α, $\beta>-1$, то полиномы $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $\quad(0\leqslant n\leqslant N-1)$ образуют ортогональную с весом $\rho(x)$ (см. (2.1)) систему на множестве $\Omega_N=\{0,1,\ldots,N-1\}$, точнее

$$\sum_{x\in\Omega_N} \mu(x)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)T_m^{\alpha,\beta}(x,N) = h_{n,N}^{\alpha,\beta}\delta_{nm}, \tag{2.4}$$

где δ_{nm} – символ Кронекера,

$$\mu(x) = \mu(x;\alpha,\beta,N) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}\rho(x)$$

$$= \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}, \tag{2.5}$$

$$h_{n,N}^{\alpha,\beta} = \frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \tag{2.6}$$

При $n=0$ произведение $(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)$ следует заменить на $\Gamma(\alpha+\beta+2)$. Для $0\leqslant n\leqslant N-1$ положим

$$\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \left\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-1/2} T_n^{\alpha,\beta}(x,N). \tag{2.7}$$

Очевидно, если $0\leqslant n,m\leqslant N-1$, то

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x)\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)\tau_m^{\alpha,\beta}(x,N) = \delta_{nm}. \tag{2.8}$$

Другими словами, многочлены $\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $(0\leqslant n\leqslant N-1)$ образуют ортонормированную с весом $\mu(x)$ систему на Ω_N.

Формула Кристоффеля–Дарбу для многочленов Чебышева имеет следующий вид:

$$\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\tau_k^{\alpha,\beta}(x)\tau_k^{\alpha,\beta}(y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{T_k^{\alpha,\beta}(x)T_k^{\alpha,\beta}(y)}{h_{k,N}^{\alpha,\beta}} =$$

$$\frac{(N-1)^{[n+1]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2}\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\times$$

$$\frac{T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)T_n^{\alpha,\beta}(y) - T_n^{\alpha,\beta}(x)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y}. \tag{2.9}$$

Поскольку $\Delta a^{[k]} = ka^{[k-1]}$, то из (2.3) находим

$$(n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x,N) + (n+\beta+1)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$$

$$= \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1}xT_n^{\alpha,\beta+1}(x-1,N-1). \tag{2.10}$$

Из равенства $\mu(N-1-x;\beta,\alpha,N) = \mu(x;\alpha,\beta,N)$, непосредственно вытекающего из соотношения ортогональности (2.4) следует, что при $\alpha,\beta>-1$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = (-1)^nT_n^{\beta,\alpha}(N-1-x,N). \tag{2.11}$$

Поскольку обе части этого равенства аналитичны относительно α и β, то оно справедливо для произвольных α и β. Из (2.10) и (2.11) имеем также следующее равенство

$$(n+\alpha+1)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)-(n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x,N)$$
$$=\frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1}(N-1-x)T_n^{\alpha+1,\beta}(x,N-1). \tag{2.12}$$

Непосредственно из явной формулы (2.3) мы можем вывести следующее полезное равенство

$$\Delta^m T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{(n+\alpha+\beta+1)_m}{(N-1)^{[m]}}T_{n-m}^{\alpha+m,\beta+m}(x,N-m), \tag{2.13}$$

где $(a)_0=1$, $(a)_k=a(a+1)\cdots(a+k-1)$ при $k\geqslant 1$. Если β такое целое число, что $-n\leqslant\beta\leqslant-1$, то из (2.13) выводим также

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{(n+\beta)!}{n!}\frac{(n+\alpha)^{[-\beta]}x^{[-\beta]}}{(N-1)^{[-\beta]}}T_{n+\beta}^{\alpha,-\beta}(x+\beta,N+\beta), \tag{2.14}$$

а если α и β – целые, $-n\leqslant\beta\leqslant-1$, $-(n+\beta)\leqslant\alpha\leqslant-1$, $N\geqslant 2$, то

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]}(N-x-1)^{[-\alpha]}}{(N-1)^{[-\beta]}(N-1+\beta)^{[-\alpha]}}T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha,-\beta}(x+\beta,N+\alpha+\beta). \tag{2.15}$$

Разностная формула Родрига (2.1) допускает следующее обобщение

$$\rho(x+m;\alpha,\beta,N+m)T_n^{\alpha,\beta}(x+m,N+m)=$$
$$\frac{(-1)^m}{n^{[m]}(N)_m}\Delta^m\left\{\rho(x;\alpha+m,\beta+m,N)T_{n-m}^{\alpha+m,\beta+m}(x,N)\right\}, \tag{2.16}$$

которое, впрочем, непосредственно вытекает из (2.1). Заменяя здесь m на ν, α и β на $m-\nu$, n на $k+\nu-m$, мы можем также записать

$$\Delta^\nu\{(x+1)_m(N-x)_m T_{k-m}^{m,m}(x,N)\}=$$
$$(-1)^\nu(k+\nu-m)^{[\nu]}(N+\nu-1)^{[\nu]}(x+1+\nu)_{m-\nu}(N-x)_{m-\nu}T_{k+\nu-m}^{m-\nu,m-\nu}(x+\nu,N+\nu). \tag{2.17}$$

Если в равенстве (2.16) мы заменим α, β и n, соответственно, на $\alpha-m$, $\beta-m$ и $k+m$, то придем к формуле

$$\Delta^m T_{k+m}^{\alpha-m,\beta-m}(x,N)=\frac{(k+\alpha+\beta)^{[m]}}{(N-1)^{[m]}}T_k^{\alpha,\beta}(x,N-m). \tag{2.18}$$

2. Об ортогональности полиномов Чебышева $T_n^{\alpha-r,\beta-r}(x,N)$ по Соболеву

Для произвольных $\alpha,\beta>-1$ и целого $r\geqslant 0$ рассмотрим соотношение ортогональности (2.4) и подставим вместо $T_k^{\alpha,\beta}(x,N)$ выражение

$$T_{k-r}^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{(N+r-1)^{[r]}}{(k-r+\alpha+\beta)^{[r]}}\Delta^r T_k^{\alpha-r,\beta-r}(x,N+r), \tag{3.1}$$

которое вытекает непосредственно из (2.18). Тогда получим

$$\sum_{x\in\Omega_N} \mu(x)\Delta^r T_n^{\alpha-r,\beta-r}(x,N+r)\Delta^r T_m^{\alpha-r,\beta-r}(x,N+r)$$

$$=\left(\frac{(n-r+\alpha+\beta)^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}}\right)^2 h_{n-r,N}^{\alpha,\beta}\delta_{nm}.$$

Отсюда

$$< T_n^{\alpha-r,\beta-r}(*,N+r), T_m^{\alpha-r,\beta-r}(*,N+r) >=$$

$$\sum_{x\in\Omega_N} \mu(x)\Delta^r T_n^{\alpha-r,\beta-r}(x,N+r)\Delta^r T_m^{\alpha-r,\beta-r}(x,N+r) =$$

$$\left(\frac{(n-r+\alpha+\beta)^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}}\right)^2 h_{n-r,N}^{\alpha,\beta}\delta_{nm}. \tag{3.2}$$

Равенство (3.1), с помощью которого мы вывели (3.2), имеет смысл, если выражение $(k+\alpha+\beta)^{[r]}$ не обращается в нуль. Мы рассмотрим различные случаи.

Случай 1. Пусть $\beta = 0$, α – нецелое. Тогда очевидно, что каковы бы ни были целые k и r величина $(k+\alpha+\beta)^{[r]}$ не обращается в нуль, т.е. $(k+\alpha+\beta)^{[r]} = (k+\alpha)^{[r]} \neq 0$, следовательно, равенство (3.2) имеет место для произвольных $n,m \geqslant 0$. В этом частном случае равенству (3.2) можно придать следующий вид ($\mu(x)=\mu(x;\alpha,0,N)$)

$$< T_n^{\alpha-r,-r}(*,N+r), T_m^{\alpha-r,-r}(*,N+r) >=$$

$$\sum_{x\in\Omega_N} \mu(x)\Delta^r T_n^{\alpha-r,-r}(x,N+r)\Delta^r T_m^{\alpha-r,-r}(x,N+r) =$$

$$\left(\frac{(n-r+\alpha)^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}}\right)^2 h_{n-r,N}^{\alpha,0}\delta_{nm} \quad (n,m\geqslant r). \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) можно рассматривать как соотношение ортогональности для полиномов Чебышева $T_n^{\alpha-r,-r}(x,N+r)$ $(r\leqslant n\leqslant N+r-1)$ относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида

$$< f,g >= \sum_{x\in\Omega_N} \mu(x)\Delta^r f(x)\Delta^r g(x). \tag{3.4}$$

Случай 2. Пусть $\alpha=\beta=0$, $k\geqslant 2r$. Тогда $(k-r+\alpha+\beta)^{[r]} = (k-r)^{[r]} \neq 0$ и поэтому снова имеет место равенство (3.2), т.е.

$$< T_n^{-r,-r}(*,N+r), T_m^{-r,-r}(*,N+r) >=$$

$$\sum_{x\in\Omega_N} \mu(x)\Delta^r T_n^{-r,-r}(x,N+r)\Delta^r T_m^{-r,-r}(x,N+r) =$$

$$\left(\frac{(n-r)^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}}\right)^2 h_{n-r,N}^{0,0}\delta_{nm} \quad (n,m\geqslant 2r). \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) означает, что полиномы $T_n^{-r,-r}(x, N+r)$ $(2r \leqslant n \leqslant N+r-1)$ ортогональны по Соболеву относительно скалярного произведения (3.4).

Список литературы

[1] Kwon K. H., Littlejohn L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k //Ann. Numer. Anal. — Г.1995— Т.2, С. 289–303.

[2] Kwon K. H., Littlejohn L. L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. — Г. 1998, С.547 —594.

[3] Marcellan F., Alfaro M., Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics — Г. 1993 — Т. 48, С. 113 – 131.

[4] Iserles A. ,Koch P.E., Norsett S.P., Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory — Г. 1991 — Т. 65, С. 151-175.

[5] Meijer H. G. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory — Г. 1993 — Т. 73, С. 1-16.

[6] Marcellan F., Yuan Xu. On sobolev orthogonal polynomials // arXiv: 6249v1 [math.C.A] 25 Mar 2014 — Г. 2014, С. 1-40.

[7] Шарапудинов И. И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Математический сборник — Т. 191 — №5 — Г. 2000, С. 143 – 160.

[8] Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Математические заметки — Т. 72 — №5 — Г. 2002, С. 765–795

[9] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам — Махачкала: Издательство Дагестанского научного центра — Г. 2004, С.176.

[10] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математические заметки — Г. 2005 — Т. 78 — №3 , С. 442–465.

[11] Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Математический сборник — Г. 2006 — Т. 197 — №3 , С. 135–154.

[12] Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Математические заметки — Г. 2008 — Т. 197 — №3 , С. 452 – 471.

[13] Чебышев П. Л. О непрерывных дробях (1855) // Полн.собр.соч. — Т. 2 — М.: Изд.АН СССР, — Г. 1947 , С. 103 – 126.

[14] Чебышев П. Л. Об одном новом ряде // Полн.собр.соч. — Т. 2 — М.: Изд.АН СССР — Г. 1947, С. 236 – 238.

[15] Чебышев П. Л. Об интерполировании по способу наименьших квадратов (1859) // Полн.собр.соч. — Т. 2 — М. Изд.АН СССР — Г. 1947, С. 314–334.

[16] Чебышев П. Л. Об интерполировании (1864) // Полн.собр.соч. — Т. 2 — М.:Изд.АН СССР — Г. 1947, С. 357–374.

[17] Чебышев П. Л. Об интерполировании величин равноотстоящих (1875) // Полн.собр.соч. — Т. 2 — М.:Изд.АН СССР — Г. 1947, С. 66–87.

[18] Шарапудинов И. И. Многочлены, ортогональные на сетках, Махачкала: Издательство Даг. гос. пед. ун-та — Г. 1997, С.252.

[19] Сеге Г. // Ортогональные многочлены — Москва: Физматгиз — Г. 1962, С.500.

Т. И. Шарапудинов (T. I. Sharapudinov)
Владикавказский научный центр РАН, Дагестанский научный центр РАН
E-mail: sharapudinov@gmail.com

Поступила в редакцию
17.10.2015