УДК 517.946

М. М. Сиражудинов, С. П. Джамалудинова

G-сходимость и усреднение одного класса эллиптических уравнений второго порядка с комплекснозначными коэффициентами[1]

Исследованы вопросы G-компактности и усреднения одного класса эллиптических операторов второго порядка с комплекснозначными коэффициентами. Установлена G-компактность этого класса. Получены усреднения для операторов с периодическими коэффициентами.

Библиография: 9 названий.

The article analyzes the problems of G-compaction and averaging of a class of second-order elliptic operators with complex-valued coefficients. It proves G-compaction of this class. Averaging for operators with periodic coefficients was obtained.

Bibliography: 9 items.

Ключевые слова: G-сходимость, краевая задача, априорные оценки.
Keywords: G-convergence, boundary value problem, prior estimates.

Введение

Многие задачи математической физики приводят к изучению вопросов G–сходимости дифференциальных операторов. Такие вопросы возникают в теории упругости, электродинамике и других разделах физики и механики. Вопросам G–сходимости дифференциальных операторов посвящено много работ (см. [1] и приведенную там литературу). Теория G–сходимости дивергентных эллиптических операторов второго порядка в общих чертах завершена.

G–сходимость недивергентных дифференциальных операторов – это, иначе, слабая сходимость соответствующих обратных операторов. Поэтому по понятным причинам в задачах G–сходимости кроме корректной разрешимости краевых задач требуются также оценки решений, равномерные относительно любого оператора. Для недивергентных эллиптических операторов и систем такого рода оценки мало изучены, поэтому G–сходимость недивергентных операторов также изучена не столь детально, как для дивергентных операторов. Вопросам G–сходимости и усреднению недивергентных эллиптических операторов посвящены работы [2–6].

Проведено исследование G–сходимости одного класса эллиптических операторов второго порядка с комплекснозначными коэффициентами. Доказана

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00508_а и № 14-01-31389-мол_а)

G–компактность этого класса. Рассмотрены вопросы усреднения для операторов с периодическими коэффициентами.

1. Обозначения и предварительные сведения

1.1. Обозначения. В работе будем придерживаться следующих обозначений:

$Q \subset R^2$ – ограниченная односвязная гладкая область класса $C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$;

$$\partial_{\bar z} = 2^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \partial_z = 2^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right);$$

i — мнимая единица;

$L_2(Q;\mathbb{C})$ – пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых функций. Символ $\mathbb{C}$ в обозначении пространства (здесь и далее) означает также, что это пространство есть линейное пространство над полем действительных чисел. Скалярное произведение в $L_2(Q;\mathbb{C})$ дается равенством:

$$(u,v)_{L_2(Q;\mathbb{C})} = \mathrm{Re}\int_Q u\bar v\,dx, \qquad u,\, v \in L_2(Q;\mathbb{C}),$$

где $\bar v$ — комплексно сопряженная v функция;

$W_p^k(Q)$ $(k \in N, \quad 1 \leqslant p < \infty)$ – обычное пространство Соболева;

$W_p^k(Q;\mathbb{C})$ – пространство Соболева комплекснозначных функций;

$L_2(\Omega)$, $H^k(\Omega) \equiv W_2^k(\Omega)$, $L_2(\Omega;\mathbb{C})$, $H^k(\Omega;\mathbb{C}) \equiv W_2^k(\Omega;\mathbb{C})$ – пространства Лебега и Соболева периодических функций, где Ω — квадрат со стороной T, параллельной оси координат, $|\Omega| = T^2$ – площадь квадрата Ω;

Под периодической функцией $f(x_1,x_2)$ будем понимать функцию периодическую (периода T) по каждой переменной;

$H^{-k} \equiv H^{-k}(\Omega;\mathbb{C})$ — пространство, сопряженное $H^k(\Omega;\mathbb{C})$. Пространство, сопряженное $L_2(\Omega;\mathbb{C})$, отождествляем с $L_2(\Omega;\mathbb{C})$, что возможно, в силу теоремы Рисса.

$\rightharpoonup$ — знак слабой сходимости в соответствующем пространстве;

$W(Q;\mathbb{C})$ — подпространство пространства Соболева $W_2^2(Q;\mathbb{C})$ комплекснозначных функций над полем $\mathbb{R}$, определенное равенством:

$$W(Q;\mathbb{C}) = \Big\{u \in W_2^2(Q;\mathbb{C}) \;\big|\; \mathrm{Re}\,u\big|_{\partial Q} = 0,\ \mathrm{Re}\,\partial_z u\big|_{\partial Q} = 0, \\ \int_Q \mathrm{Im}\ u\,\mathrm{dx} = 0,\ \int_Q \mathrm{Im}\ \partial_z u\,\mathrm{dx} = 0\Big\}$$

$W_0(Q;\mathbb{C})$ — подпространство $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, элементы которого удовлетворяют соотношениям:

$$\mathrm{Re}\,u\big|_{\partial Q} = 0, \qquad \int_Q \mathrm{Im}\,u\,dx = 0.$$

1.2. Предварительные сведения. Обозначим через $\mathscr{B}(k_0;Q)$ множество эллиптических систем двух уравнений первого порядка, записанных в виде одного уравнения в комплексной форме:

$$Bu \equiv \partial_{\bar z}\, u + \mu\, \partial_z u + \nu\, \overline{\partial_z u} = f, \tag{1.1}$$

где μ, ν — измеримые в Q функции, удовлетворяющие условию

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in Q}\ (|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leqslant k_0 < 1, \tag{1.2}$$

k_0 – положительная постоянная (*константа эллиптичности*); Q – ограниченная односвязная область плоскости с границей класса $C^{1+\alpha}$. Заметим, что любую равномерно эллиптическую систему двух уравнений с действительными коэффициентами из $L_\infty(Q)$ можно представить в виде (1.1), (1.2) (см. [9; § 7, гл. 2 и § 17, гл. 3]).

Рассмотрим краевую задачу Римана–Гильберта (Р–Г):

$$\begin{cases} Bu = f \in L_2(Q;\, \mathbb{C}), \\ u \in \mathcal{W}_0(Q;\, \mathbb{C}). \end{cases} \tag{1.3}$$

Справедлива

Теорема 1 ([6]). *Задача Р–Г (1.3) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q;\, \mathbb{C})$. Более того имеют место априорные оценки*

$$\nu_0\, \|\partial_{\bar z}\, u\|_{L_2(Q_1;\, \mathbb{C})} \leqslant \|Bu\|_{L_2(Q_1;\, \mathbb{C})}, \tag{1.4}$$

$$\nu_0\, \|\, \partial_{\bar z}\, u\,\|^2_{L_2(Q_1;\, \mathbb{C})} \leqslant \operatorname{Re} \int_{Q_1} Bu\, \overline{\partial_{\bar z}\, u}\, dx, \tag{1.5}$$

$$\operatorname{Re} \int_{Q_1} Bu\, \overline{\partial_{\bar z}\, v}\, dx \leqslant \nu_1 \Big(\operatorname{Re} \int_{Q_1} Bu\, \overline{\partial_{\bar z}\, u}\, dx\Big)^{\frac12} \|\partial_{\bar z}\, v\|_{L_2(Q_1;\, \mathbb{C})}, \tag{1.6}$$
$$\forall\, u, v \in W_0(Q_1;\, \mathbb{C}),$$

где

$$\nu_0 = 1 - k_0, \quad \nu_1 = \left(\frac{1+k_0}{1-k_0}\right)^{\frac12},$$

$Q_1 \subseteq Q$ — любая односвязная подобласть (класса $C^{1+\alpha}$).

(Оценки (1.4) – (1.6) справедливы и для многосвязных областей).

Заметим, что величина

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0(Q;\mathbb{C})} = \|\partial_{\bar z}\, u\,\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \quad \Big(= \|\partial_z\, u\,\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}\Big)$$

задает в подпространстве $W_0(Q;\mathbb{C}) \subset W_2^1(Q;\mathbb{C})$ норму, эквивалентную норме пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$.

Определение 1. Скажем, что последовательность операторов $\{B_k\}$ из класса $\mathscr{B}(k_0,Q)$ G–сходится в области Q к $B \in \mathscr{B}(k_0;Q)$ (и будем писать $\text{G-lim}\, B_k = B$, $B_k \xrightarrow{G} B$) , если $\{B_k^{-1}\}$ слабо сходится к B^{-1}, где B_k и B операторы краевых задач Римана–Гильберта: $B_k u_k = f \in L_2(Q;\mathbb{C})$, $u_k \in W_0(Q)$, $\quad Bu = f \in L_2(Q;\mathbb{C})$, $\quad u \in W_0(Q)$.

Иначе говоря, G–сходимость означает слабую сходимость решений $u_k \rightharpoonup u$ в $W_0(Q)$ для любой правой части $f \in L_2(Q;\mathbb{C})$.

Нами в работе [6] доказана

Теорема 2 ([6]). *Класс $\mathscr{B}(k_0;Q)$ обобщенных операторов Бельтрами G–компактен. (Иначе говоря, из любой последовательности $\{B_k\} \subset \mathscr{B}(k_0;Q)$ можно выделить G–сходящуюся в смысле определения 1 подпоследовательность).*

Укажем в виде следствия некоторые свойства коэффициентов, которые сохраняются после перехода к G–пределу.

Следствие 1 ([6]). *Пусть $B_k \xrightarrow{G} B$ в области Q; $B_k, B \in \mathscr{B}(k_0;Q)$; μ_k, ν_k, μ, ν — коэффициенты B_k, B. Тогда*

1) если $\nu_k = e^{i\alpha}\mu_k$, $k = 1, 2, \dots$, где $\alpha \in [-\pi, \pi)$ фиксированное число, то $\nu = e^{i\alpha}\mu$;

2) если $\nu_k = e^{i\alpha}\overline{\mu_k}$, $k = 1, 2, \dots$, то $\nu = e^{i\alpha}\bar{\mu}$.
В частности, при $\nu_k = \mu_k$ имеем $\nu = \mu$; при $\nu_k = \overline{\mu_k}$ — $\nu = \bar{\mu}$,

G-сходимость обладает свойством локальности, а именно имеет место

Теорема 3 ([6]). *Пусть $B_k \xrightarrow{G} B$ в области Q и $Q_1 \subseteq Q$ — любая (класса $C^{1+\alpha}$) подобласть. Тогда $B_k \xrightarrow{G} B$ и в области Q_1.*

G–сходимости $B_k \xrightarrow{G} B$ достаточно для сходимости и других решений из $W_2^1(Q;\, \mathbb{C})$. Точнее, имеет место

Теорема 4 ([6]). *Пусть $B_k u_k = f_k$, $f_k \to f$ в $L_2(Q;\, \mathbb{C})$, $u_k \rightharpoonup u$ в $W_2^1(Q;\, \mathbb{C})$ и пусть G–$\lim B_k = B$. Тогда $Bu = f$.*

Рассмотрим следующую ***краевую задачу Пуанкаре***:

$$Au \equiv \partial^2_{z\bar{z}} u + \mu\, \partial^2_{zz} u + \nu\, \partial^2_{\bar{z}\bar{z}} \bar{u} = f \in L_2(Q;\mathbb{C}), \qquad u \in W(Q), \tag{1.7}$$

где $\mu = \mu(x)$ и $\nu = \nu(x)$ – измеримые в области Q, комплекснозначные функции удовлетворяющие условию ; Q – ограниченная односвязная область плоскости с границей класса $C^{2+\alpha}$.

В дальнейшем класс операторов вида (1.7), (1.2) будем обозначать $A(k_0;Q)$.

В работе [7] доказана следующая

Теорема 5 ([7]). *Краевая задача Пуанкаре (1.7) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q;\mathbb{C})$. Более того, имеют место априорные оценки*

$$(1 - k_0)\, \big\|\, \partial^2_{z\bar{z}} u \,\big\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant \|\, Au \,\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant (1 + k_0)\, \big\|\, \partial^2_{z\bar{z}} u \,\big\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}, \tag{1.8}$$

$$(1 - k_0)\, \big\|\, \partial^2_{z\bar{z}} u \,\big\|^2_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant \operatorname{Re} \int_Q Au\, \overline{\partial^2_{z\bar{z}} u}\, dx, \quad u \in W(Q). \tag{1.9}$$

Заметим, что выражение $\|u\|_{W(Q)} = \big\|\partial^2_{z\bar{z}} u\big\|_{L_2(Q;C)}$, $u \in W(Q)$, задает в подпространстве $W(Q)$ пространства $W_2^2(Q;\mathbb{C})$ норму, эквивалентную норме пространства $W_2^2(Q;\mathbb{C})$ (см. [7]).

2. G–компактность одного класса эллиптических операторов второго порядка с комплекснозначными коэффициентами

Здесь мы рассмотрим вопросы G–сходимости класса $A(k_0;Q)$ эллиптических операторов второго порядка с комплекснозначными коэффициентами.

Определение 2. Скажем, что последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $A(k_0,Q)$ G–сходится в области Q к $A \in A(k_0;Q)$ (и будем писать G-$\lim A_k = A$, $A_k \xrightarrow{G} A$) , если последовательность $\{A_k^{-1}\}$ слабо сходится к A^{-1}, где A_k и A операторы краевых задач Пуанкаре: $A_k u_k = f \in L_2(Q;\mathbb{C})$, $u_k \in W_0(Q)$, $Au = f \in L_2(Q;\mathbb{C})$, $u \in W_0(Q)$.

Имеет место следующая

Теорема 6. *Класс $A\,(k_0;Q)$ G–компактен, то есть из любой последовательности операторов из $A\,(k_0;Q)$ можно выделить G–сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{A_k\}$ – последовательность из класса $A\,(k_0;Q)$. Рассмотрим задачу Пуанкаре:

$$\left\{\begin{array}{l} A_k u_k = f \in L_2(Q;C), \\ u_k \in W(Q). \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Она согласно предыдущей теореме 5, однозначно разрешима. Пусть $v_k = \partial_z u_k$, согласно определению пространств $W(Q)$ и $W_0(Q)$ имеем: $v_k \in W_0(Q)$, и, согласно (2.1), v_k есть решение задачи Римана–Гильберта (Р–Г)

$$\left\{\begin{array}{l} B_k v_k \equiv \partial_{\bar z} v_k + \mu_k \partial_z v_k + v_k \partial_{\bar z} \bar v_k = f \in L_2(Q;C), \\ v_k \in W_0(Q) \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Из оценок (1.8), (1.9) следует, что оператор B_k принадлежит классу $B(k_0;Q)$. Так как этот класс G–компактен (см. [6]), то найдется подпоследовательность $\{D_{k'}\} \subset \{D_k\}$, которая G–сходится к оператору $B \in \mathscr{B}(k_0;Q)$. Значит, решение $v_{k'}$ задачи Р–Г (2.2) с $k = k'$ слабо в $W_0(Q)$ сходится к решению G–предельной задачи:

$$\left\{\begin{array}{l} Bv \equiv \partial_{\bar z} v + \mu \partial_z v + v \partial_{\bar z} \bar v = f \in L_2(Q;C), \\ v \in W_0(Q). \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Из левой части оценок (1.8) для $A = A_{k'}$ получим, что

$$\left\| \partial^2_{\bar z z} u_{k'} \right\|_{L_2(Q;C)} \leqslant (1-k_0)^{-1} \left\| f \right\|_{L_2(Q;C)}.$$

Следовательно, $\{u_{k'}\}$– ограничена в $W(Q)$, значит, последовательность $\{v_{k'}\} = \{\partial_z u_{k'}\}$ – ограничена в $W_0(Q)$. С другой стороны, так как G-$\lim B_{k'} = B$ в Q, то v_k, слабо сходится к v в $W_0(Q)$, где v решение задачи (2.3). Отсюда следует, что $\{u_{k'}\}$слабо сходится в $W(Q)$ к $u \in W(Q)$, $\partial_z u = v$. Подставив v в (2.3), получим, что последовательность $A_{k'}$ G–сходится к оператору A, определенному соотношением $Au = B\,\partial_z u$:

$$A\,u \equiv \partial^2_{z\bar z} u + \mu\,\partial^2_{zz} u + \nu\,\partial^2_{z\bar z} \bar u = f, \quad u \in W(Q),$$

коэффициенты μ и ν удовлетворяют оценке (1.2), ввиду G–компактности класса $\mathscr{B}(k_0;Q)$ (см. [6]).

Следствие 2. *Пусть* G-$\lim A_k = A$ *в области* Q*;* $A_k,\ A \in A\,(k_0; Q)$*;* $\mu_k,\ \nu_k,\ \mu,\ \nu$ *– коэффициенты* $A_k,\ A$*. Тогда:*

1. *если* $\nu_k = e^{i\alpha}\mu_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$ *где* $\alpha \in [-\pi, \pi)$ *– фиксированное число, то* $\nu = e^{i\alpha}\mu$*;*
2. *если* $\nu_k = e^{i\alpha}\overline{\mu_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$ *то* $\nu = e^{i\alpha}\bar{\mu}$*.*

В частности, при $\nu_k = \mu_k$ имеем $\nu = \mu$, при $\nu_k = \overline{\mu_k}$ имеем $\nu = \bar{\mu}$. Черта над функцией означает переход к комплексно–сопряженной функции.

Следствие доказывается аналогично теореме используя следствие 1.

Аналогично, используя теоремы 7, 8, доказываются следующие утверждения

Теорема 7. *Пусть* $A_k \xrightarrow{G} A$ *в области* Q *и* $Q_1 \subseteq Q$ *— любая (класса* $C^{2+\alpha}$*) подобласть. Тогда* $A_k \xrightarrow{G} A$ *и в области* Q_1*.*

G–сходимости $A_k \xrightarrow{G} A$ достаточно для сходимости и других решений из $W_2^1(Q; \mathbb{C})$. Точнее, имеет место

Теорема 8. *Пусть* $A_k u_k = f_k,\ f_k \to f$ *в* $L_2(Q; \mathbb{C})$*,* $u_k \rightharpoonup u$ *в* $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ *и пусть* G–$\lim A_k = A$*. Тогда* $Au = f$*.*

3. Усреднение эллиптического оператора с комплекснозначными периодическими коэффициентами

Вопрос об усреднении дифференциальных операторов с частными производными и связанный с ним более общий вопрос о G-сходимости последовательности операторов возник в связи с задачами математической физики. В частности, физические процессы, рассматриваемые в сильно неоднородных средах, описываются дифференциальными уравнениями с частными производными, причем сильная неоднородность этих сред приводит к изучению уравнений с быстро меняющимися коэффициентами. Такие задачи возникают в теории упругости, в теории гетерогенных сред и композитных материалов.

3.1. Понятие усреднения. Рассмотрим семейство операторов $\{A_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leqslant 1}$, действующих из $W(Q)$ в $L_2(Q; C)$ и определенных формулой

$$A_\varepsilon u \equiv \partial^2_{z\bar{z}} u + \mu^\varepsilon \partial^2_{zz} u + \nu^\varepsilon \partial^2_{\bar{z}\bar{z}} \bar{u} = f \in L_2(\Omega; C), \quad u \in W(Q), \tag{3.1}$$

где $0 < \varepsilon \leqslant 1$ — малый параметр; $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$, а μ и ν — измеримые периодические функции, удовлетворяющие следующему условию

$$\operatorname*{vrai\ sup}_{x\in \mathrm{R}^2} \left(|\mu(x)| + |\nu(x)| \right) \leqslant k_0 < 1. \tag{3.2}$$

Определение 3. Скажем, что для семейства $\{A_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leqslant 1}$ имеет место усреднение, если найдется $A_0 \in A(k_0; Q)$ такой, что $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A_0$ в области Q при $\varepsilon \to 0$. При этом A_0 называется усредненным оператором (а соответствующее уравнение – усредненным уравнением).

3.2. Неравенство острого угла. Рассмотрим периодическую краевую задачу

$$Au \equiv \partial^2_{z\bar z}u + \mu\partial^2_{zz}u + \nu\partial^2_{\bar z\bar z}\bar u = f \in L_2(\Omega; C), u \in H^2(\Omega; C), \tag{3.3}$$

где $\mu = \mu(x)$, $\nu = \nu(x)$ — периодические на всей плоскости функции, удовлетворяющие условию (3.2). Справедлива следующая

Лемма 1. *Для задачи* (3.3) *имеет место неравенство острого угла*

$$(1-k_0)\left\langle \left|\partial^2_{z\bar z}u\right|^2 \right\rangle \leqslant \operatorname{Re}\left\langle Au\overline{\partial^2_{z\bar z}u}\right\rangle, \quad u \in H^2(\Omega; C), \tag{3.4}$$

где $\langle g\rangle = |\Omega|^{-1}\int_\Omega g(x)dx$ *— среднее значение* g.

Доказательство. Неравенство (3.4) достаточно доказать для всюду плотного в $H^2(\Omega;\mathbb{C})$ множества гладких (бесконечно дифференцируемых) периодических функций. Умножим $f = Au$ на $\overline{\partial^2_{z\bar z}u}$, интегрируем по квадрату периодов Ω и находим реальную часть. Тогда, с учетом (3.2) легко получим:

$$\left\langle|\partial^2_{z\bar z}u|^2\right\rangle - k_0\left\langle|\partial^2_{zz}u|^2\right\rangle^{\frac12}\left\langle|\partial^2_{z\bar z}u|^2\right\rangle^{\frac12} \leqslant \left\langle Au\,\overline{\partial^2_{z\bar z}u}\right\rangle.$$

Из этой оценки следует (3.4) если мы покажем, что

$$\left\langle|\partial^2_{zz}u|^2\right\rangle = \left\langle|\partial^2_{z\bar z}u|^2\right\rangle. \tag{3.5}$$

Положим $v = \partial_z u = v_1 + iv_2$.Тогда (3.5) эквивалентно

$$\left\langle|\partial_z v|^2\right\rangle = \left\langle|\partial_{\bar z} v|^2\right\rangle. \tag{3.6}$$

Имеем:

$$|\Omega|\left\langle|\partial_z v|^2\right\rangle = \int_\Omega |\partial_z v|^2 dx = \frac14\sum_{j=1}^2 \|\nabla v_j\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C})} - \frac{J}{2},$$

$$|\Omega|\left\langle|\partial_{\bar z} v|^2\right\rangle = \int_\Omega |\partial_{\bar z} v|^2 dx = \frac14\sum_{j=1}^2 \|\nabla v_j\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C})} + \frac{J}{2},$$

$$J = \int_\Omega \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right).$$

Покажем, что здесь J равняется нулю, тем самым равенство (3.6) будет установлено. При помощи интегрирования по частям перебросим производные с v_1 на v_2. Тогда получим

$$J = \int_\Omega \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}v_1\cos(\measuredangle nx_1) - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}v_1\cos(\measuredangle nx_2)\right)ds,$$

где n –– внешняя нормаль к границе, $\measuredangle nx_j$ —- угол между Ox_j и n, $j = 1, 2$. Так как Ω — квадрат периодов, то на противоположных сторонах квадрата нормали противоположно направлены. С учетом этого и периодичности v_1, v_2, получим, что J равняется нулю. Лемма доказана.

3.3. Ядро сопряженного оператора. Важную роль при усреднении играет ядро оператора $A^* : L_2(\Omega; C) \to H^{-2}$, сопряженного оператору периодической краевой задачи:

$$Au \equiv \partial^2_{z\bar{z}} u + \mu \partial^2_{zz} u + \nu \partial^2_{\bar{z}\bar{z}} \bar{u} = f \in L_2(\Omega; C), \quad u \in H^2(\Omega; C), \tag{3.7}$$

где $\mu = \mu(x)$, $\nu = \nu(x)$ — периодические на всей плоскости функции, удовлетворяющие условию (3.2). Имеет место

Теорема 9. *Ядро оператора $A^* : L_2(\Omega; C) \to H^{-2}(\Omega; C)$ — двухмерное подпространство $L_2(\Omega; C)$, причем один из базисов ядра $\{p_1, p_2\}$ удовлетворяет условиям*

$$\langle p_1 \rangle = 1, \langle p_2 \rangle = i. \tag{3.8}$$

Кроме того, в случае $\nu = 0$ базисные векторы можно выбрать так, что

$$p_2 = ip_1. \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть

$$\widehat{H} = \{u \in \mathcal{H}^2(\Omega; \mathbb{C}) \mid \langle u \rangle = 0\} \subset H^2(\Omega; \mathbb{C}.$$

Обозначим через

$$P : L_2(\Omega; \mathbb{C}) \to \widehat{L} = \{f \in L_2(\Omega; \mathbb{C}) \mid \langle f \rangle = 0\}$$

— ортопроектор на подпространство $\widehat{L}$. Привлечением рядов Фурье легко убедиться, что $\partial^2_{z\bar{z}} : \widehat{H} \to \widehat{L}$ есть изоморфизм. Тогда из (3.4) получим

$$(1 - k_{0)} \|f\|^2_{L_2(\Omega; \mathbb{C})} \leqslant (P \circ A \circ (\partial^2_{z\bar{z}})^{-1} f, f)_{L_2(\Omega; \mathbb{C})} \quad f \in \widehat{L},$$

Это означает, что оператор $\mathcal{B} = P \circ A \circ (\partial^2_{z\bar{z}})^{-1} : \widehat{\mathcal{L}} \to \widehat{\mathcal{L}}$ — коэрцитивный и следовательно, по лемме Лакса – Мильграма [1; гл. 1, § 1], отображение $\mathcal{B} : \widehat{L} \to \widehat{L}$ — изоморфизм. Тогда и отображение $P \circ A : \widehat{H} \to \widehat{L}$ — изоморфизм. Отсюда следует, что сужение P на образ A — $\operatorname{Im} A$ устанавливает изоморфизм между подпространствами $\operatorname{Im} A$ и $\widehat{L}$. (Замкнутость $\operatorname{Im} A$ есть следствие (3.4)). Действительно, если f_1, $f_2 \in \operatorname{Im} A$, $f_1 \neq f_2$ и $Pf_1 = Pf_2$, то из (3.4) для $u = u_1 - u_2$, где u_1, u_2 такие, что $Au_1 = f_1$, $Au_2 = f_2$, получим $\|u\| = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. Тогда $Au_1 = Au_2 = f_1 = f_2$.

У изоморфных подпространств одинаковые коразмерности. Так как $\widehat{L}$ коразмерности два (напомним, мы рассматриваем пространства над полем $\mathbb{R}$), то образ $\operatorname{Im} A$ также коразмерности два.

Для завершения доказательства теоремы 9 осталось показать, что один из базисов ядра A^* имеет структуру, отмеченную в теореме 9.

Пусть $\{p_1, p_2\}$ — базис $\operatorname{Ker} A^*$, *тогда средние $\langle p_1 \rangle$, $\langle p_2 \rangle$ одновременно не равны нулю.* Иначе, периодическая задача $Au = 1$, $u \in H^2(\Omega; \mathbb{C})$ разрешима. И тогда из (3.4) получим $u = \text{const}$, что невозможно, так как $Au = 1$.

Пусть $\{p_1, p_2\}$ — базис $\operatorname{Ker} A^*$, тогда *произведение* $\langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle \neq 0$. Пусть это не так, $\langle p_1 \rangle = 0$, $\langle p_2 \rangle = a + ib \neq 0$. Положим константу c равной $-b + ia$. Тогда периодическая задача $Au = c$, $u \in \mathcal{H}^1(\Omega;\mathbb{C})$ разрешима, так как $\operatorname{Re}\langle c\overline{p_1}\,\rangle = \operatorname{Re}\langle c\overline{p_2}\,\rangle = 0$, но это невозможно в силу (3.4).

Средние значения базисных векторов p_1, p_2 одновременно не могут быть действительными (мнимыми) числами. Иначе, рассмотрим базис $\{q_1, q_2\}$, $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2 - \langle p_2\rangle\langle p_1\rangle^{-1} p_1$. Тогда $\langle q_2\rangle = 0$, что противоречит предыдущему.

Таким образом, любой из базисов $\{p_1, p_2\}$ удовлетворяет условиям: произведение $\langle p_1\rangle\langle p_2\rangle \neq 0$, $\langle p_1\rangle = a_1 + ib_1$, $\langle p_2\rangle = a_2 + ib_2$, a_1 или a_2 не нуль и b_1 или b_2 не нуль. Если $a_1 \neq 0$, то для базиса $\{q_1, q_2\}$, $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2 - a_2a_1^{-1}p_1$ имеем $\operatorname{Re}\langle q_1\rangle = a_1 \neq 0$, $\operatorname{Re}\langle q_2\rangle = 0$. Так что можно считать, с самого начала $\langle p_2\rangle = ib_2 \neq 0$. Аналогично можно считать, что $b_1 = 0$.

Итак, существует базис $\{q_1, q_2\}$ со свойствами: $\langle q_1\rangle = a$, $\langle q_2\rangle = ib$, $ab \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Заменив его на $p_1 = a^{-1}q_1$, $p_2 = b^{-1}q_2$ получим требуемый базис: $\langle p_1\rangle = 1$, $\langle p_2\rangle = i$.

Пусть теперь A — оператор Бельтрами ($\nu = 0$). Тогда, в силу линейности A и A^* над полем $\mathbb{C}$, вместе с вектором p_1 и вектор $\widetilde{p}_2 = ip_1$ принадлежит ядру $\operatorname{Ker} A^*$. Осталось заметить, что p_1 и ip_1 линейно независимы над полем $\mathbb{R}$. Теорема доказана.

3.4. Об одном интегральном тождестве. В силу того, что $(\varphi, \psi) = \operatorname{Re}\int\limits_\Omega \varphi\bar\psi dx$, φ, $\psi \in L_2(\Omega, \mathbb{C})$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega, \mathbb{C})$, имеем

$$\langle A^*p,\, u\rangle = (Au,\, p) = \operatorname{Re}\int\limits_\Omega Au\,\bar p\,dx =$$

$$= \operatorname{Re}\int\limits_\Omega \left(\partial^2_{z\bar z}u + \mu\partial^2_{zz}u + \nu\partial^2_{\bar z\bar z}\bar u\right)\bar p\,dx = \left\langle \partial^2_{z\bar z}p + \partial^2_{\bar z\bar z}(\bar\mu p + \nu\bar p),\, u\right\rangle, \tag{3.10}$$

где $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ — значение функционала; производные понимаются в смысле (периодических) распределений.

Из соотношения (3.10) стандартной процедурой, использующей разбиение единицы, получим равенство

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\partial^2_{z\,\bar z}\varphi + \mu\partial^2_{zz}\varphi + \nu\partial^2_{\bar z\bar z}\bar\varphi\right)\bar p\,dx = 0, \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \tag{3.11}$$

где p — любой элемент ядра оператора A^*.

Действительно, пусть носитель функции φ есть подмножество ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^2$. Покроем Q конечным числом областей Q_j, $j = 1, \ldots, n$, замыкание каждой из которых принадлежит квадрату периодов Ω_j. И пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — разбиение единицы, соответствующее этому покрытию, т. е. $\psi_j \in C_0^\infty(Q_j;\mathbb{C})$, $0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$, $\sum\limits_{j=1}^n \psi_j(x) = 1$, $\forall\, x \in Q$. Обозначим выражение слева в (3.11) через I. Тогда имеем

$$I = \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\partial^2_{z\,\bar z}\sum_{j=1}^n(\varphi\psi_j(x)) + \mu\partial^2_{z\,z}\sum_{j=1}^n(\varphi\psi_j(x)) + \nu\partial^2_{z\,z}\overline{\sum_{j=1}^n(\varphi\psi_j(x))}\right)\bar p\,dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} \int\limits_{\Omega_j} \left(\partial^2_{z\bar z}\Theta_j + \mu\partial^2_{zz}\Theta_j + \nu\overline{\partial^2_{zz}\Theta_j}\right)\bar p\,dx,$$

где $\Theta_j = \varphi\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j;\mathbb{C})$. Функцию Θ_j, $j = 1,\dots,n$, периодически продолжим на всю плоскость. Тогда в силу (3.10) и $p \in \operatorname{Ker} A^*$ имеем

$$I = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} \int\limits_{\Omega_j} \bar p A\Theta_j\,dx = \sum_{j=1}^{n} |\Omega_j| \operatorname{Re}\langle \bar p A\Theta_j\rangle = 0.$$

Соотношение (3.11) доказано.

Отсюда следует, что сопряженное однородное уравнение дается равенством

$$-A^*p \equiv \partial^2_{z\bar z}p + \partial^2_{\bar z\bar z}(\bar\mu p + \nu\bar p) = 0, \tag{3.12}$$

где производные понимаются в смысле обычных распределений.

3.5. Усреднение. Сформулируем теперь теорему об усреднении.

Теорема 10. *Для семейства (3.1) имеет место усреднение, причем коэффициенты усредненного оператора*

$$A_0u \equiv \partial^2_{z\bar z}u + \mu^0\partial^2_{zz}u + \nu^0\partial^2_{\bar z\bar z}\bar u, \quad u \in \mathcal{W}(Q),$$

постоянные и даются равенствами

$$\mu^0 = \langle \mu\mathcal{L} + \bar\nu\mathcal{P}\rangle, \quad \nu^0 = \langle \bar\mu\mathcal{P} + \nu\mathcal{L}\rangle,$$

где

$$\mathcal{P} = 2^{-1}(p_1 + ip_2), \quad \mathcal{L} = 2^{-1}(\bar p_1 + \bar p_2),$$

p_1, p_2 *— базисные векторы из теоремы 9.*

При $\nu = 0$ коэффициент ν^0 усредненного оператора также равен нулю, а $\mu^0 = \langle \mu\bar p_1\rangle$.

Доказательство. Пусть $\widehat{A} \in \mathcal{B}_2(k_0;\,Q)$ любой из G-предельных в области операторов семейства $\{A_\varepsilon\}$, т. е. $A_{\varepsilon_k} \xrightarrow{G} \widehat{A}$. Достаточно показать, что $\widehat{A} = A_0$. С этой целью рассмотрим задачу Пуанкаре

$$\partial^2_{z\bar z}u + \mu^\varepsilon\partial^2_{zz}u + \nu^\varepsilon\partial^2_{\bar z\bar z}\bar u = f \in L_2(Q;\,\mathbb{C}), \quad u_\varepsilon \in W(Q), \tag{3.13}$$

где $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Пусть u_ε — решение этой задачи. Умножим равенство (3.13) на функцию

$$\overline{p_1^\varepsilon(x)}\psi(x) = \overline{p_1(\varepsilon^{-1}x)}\psi(x),$$

где $p_1 = p_1(x)$, $\langle p_1\rangle = 1$ — первый из базисных элементов ядра $\operatorname{Ker} A^*$ (см. теорему 9), $\psi \in C_0^\infty(Q)$ — действительная функция. Тогда после интегрирования по Q в силу равенства $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}\bar z$ легко получим

$$\operatorname{Re} \int\limits_{Q} \left(\partial^2_{z\bar z}(u_\varepsilon\psi) + \mu^\varepsilon\partial^2_{zz}(u_\varepsilon\psi) + \nu^\varepsilon\partial^2_{\bar z\bar z}(\bar u_\varepsilon\psi)\right)\overline{p_1^\varepsilon}\,dx -$$

$$
\begin{gathered}
-\operatorname{Re}\int\limits_Q \big(\overline{p_1^\varepsilon}u_\varepsilon\partial_{z\bar z}\psi+\overline{p_1^\varepsilon}\partial_z u_\varepsilon\partial_{\bar z}\psi+\overline{p_1^\varepsilon}\partial_z\psi\partial^2_{\bar z}u_\varepsilon+\\
+\overline{p_1^\varepsilon}\mu^\varepsilon u_\varepsilon\partial^2_{zz}\psi+\overline{p_1^\varepsilon}\mu^\varepsilon\partial_z u_\varepsilon\partial_z\psi+\overline{p_1^\varepsilon}\mu^\varepsilon\partial_z\psi\partial_z u_\varepsilon+\\
+p_1^\varepsilon\overline{\nu^\varepsilon}u_\varepsilon\partial_{z\,z}\psi+p_1^\varepsilon\overline{\nu^\varepsilon}\partial_z u_\varepsilon\partial_z\psi+p_1^\varepsilon\overline{\nu^\varepsilon}\partial_z\psi\partial_z u_\varepsilon\,dx=\\
=\operatorname{Re}\int\limits_Q p_1^\varepsilon\psi f\,dx. \qquad (3.14)
\end{gathered}
$$

Покажем, что первое слагаемое слева равняется нулю. Положим в равенстве (3.11) $\phi(x)=\psi(\varepsilon x)$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, где $\psi(x)$ — финитная функция. Тогда после замены переменной $\varepsilon x\mapsto x$ легко получим

$$
\operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\big(\partial^2_{z\,\bar z}\psi+\mu(\varepsilon^{-1}x)\,\partial^2_{z\,z}+\nu(\varepsilon^{-1}x)\,\partial^2_{\bar z\,\bar z}\bar\psi\big)\,\overline{p(\varepsilon^{-1}x)}dx=0, \qquad (3.15)
$$

где ψ — любая финитная, бесконечно дифференцируемая функция.

Соотношение (3.15) имеет место и для любой финитной функции $\psi\in W_2^2(Q;\mathbb{C})$, так как в множестве таких функций плотно множество $C_0^\infty(Q;\mathbb{C})$. Теперь заменим в (3.15) ψ на $u_\varepsilon\psi$ и получим, что первое слагаемое в (3.14) равняется нулю.

Отсюда, так как $u_{\varepsilon_k}\to u$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$, $\partial_z u_{\varepsilon_k}\longrightarrow\partial_z u$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$, $\partial_{\bar z}u_{\varepsilon_k}\longrightarrow\partial_{\bar z}u$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$, где u — решение G-предельной задачи $\widehat{A}u=f$, $u\in\mathcal{W}(Q;\mathbb{C})$; $\mu^{\varepsilon_k}\overline{p_1^{\varepsilon_k}}\rightharpoonup\langle\mu\overline{p_1}\rangle$, $\overline{\nu^{\varepsilon_k}}p_1^{\varepsilon_k}\rightharpoonup\langle\bar\nu p_1\rangle$, $\overline{p_1^{\varepsilon_k}}\rightharpoonup\langle\overline{p_1}\rangle$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$ после предельного перехода по последовательности $\varepsilon_k\longrightarrow 0$ получим

$$
\begin{gathered}
-\operatorname{Re}\int\limits_Q (u\partial_{z\,\bar z}\psi+\partial_z u\partial_{\bar z}\psi+\partial_z\psi\partial_{\bar z}u+\\
+\langle\overline{p_1}\mu\rangle\,u\partial^2_{z\,z}\psi+\langle\overline{p_1}\mu\rangle\,\partial_z u\partial_z\psi+\langle\overline{p_1}\mu\rangle\,\partial_z\psi\partial_z u+\\
+\langle p_1\overline{\nu}\rangle\,u\partial^2_{z\,z}\psi+\langle p_1\overline{\nu}\rangle\,\partial_z u\partial_z\psi+\langle p_1\overline{\nu}\rangle\,\partial_z\psi\partial_z u\big)\,dx=\\
=\operatorname{Re}\int\limits_Q\psi f dx.
\end{gathered}
$$

Под интегралом слева перебросим производные с u на ψ при помощи интегрирования по частям. В результате получим

$$
\operatorname{Re}\int\limits_Q\big(\partial^2_{z\bar z}u+\langle\overline{p_1}\mu\rangle\,\partial^2_{zz}u+\langle p_1\overline{\nu}\rangle\,\partial^2_{zz}u\big)\,\psi dx=\operatorname{Re}\int\limits_Q\psi f\,dx.
$$

Ввиду того, что ψ — действительная функция, имеем

$$
\int\limits_Q\psi\operatorname{Re}\,\big(\partial^2_{z\bar z}u+\langle\mu\overline{p_1}+\overline{\nu}p_1\rangle\,\partial^2_{zz}u\big)\,dx=\int\limits_Q\psi\operatorname{Re}f dx.
$$

Отсюда в силу произвольности ψ, получим

$$
\operatorname{Re}\,\big(\partial^2_{z\bar z}u+\langle\mu\overline{p_1}+\overline{\nu}p_1\rangle\,\partial^2_{zz}u\big)=\operatorname{Re}f. \qquad (3.16)
$$

Аналогично, с учетом того, что $\langle p_2\rangle = i$, $\langle\overline{p_2}\rangle = -i$, получим еще одно соотношение

$$\mathrm{Re}\,\left(-i\partial^2_{z\bar z}u + \langle\mu\overline{p_2} + \bar\nu p_2\rangle\,\partial^2_{zz}u\right) = \mathrm{Re}\,(-if),$$

которое эквивалентно соотношению

$$\mathrm{Re}\,\left(-i(\partial^2_{z\bar z}u + i\,\langle\mu\overline{p_2} + \bar\nu p_2\rangle\,\partial^2_{zz}u)\right) = \mathrm{Re}\,(-if)$$

или что тоже самое

$$\mathrm{Im}\,\left(\partial^2_{z\bar z}u + i\,\langle\mu\overline{p_2} + \bar\nu p_2\rangle\,\partial^2_{zz}u\right) = \mathrm{Im}\,f. \tag{3.17}$$

Умножим (3.17) на i и прибавим к (3.16), тогда имеем

$$\mathrm{Re}\,\left(\partial^2_{z\bar z}u + \langle\mu\overline{p_1} + \bar\nu p_1\rangle\,\partial^2_{zz}u\right) +$$

$$+i\mathrm{Im}\,\left(\partial^2_{z\bar z}u + \langle i\overline{p_2}\mu + p_2\bar\nu\rangle\,\partial^2_{zz}u\right) = f.$$

С учетом того, что $\mathrm{Re}\,z = \frac{z+\bar z}{2}$, а $\mathrm{Im}\,z = \frac{z-\bar z}{2i}$, имеем

$$\partial^2_{z\bar z}u + \frac{1}{2}\left(\langle\mu\overline{p_1} + \bar\nu p_1\rangle\,\partial^2_{zz}u + \langle\overline{\mu}p_1 + \nu\overline{p_1}\rangle\,\partial^2_{\bar z\bar z}\bar u\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\langle i\overline{p_2}\mu + ip_2\bar\nu\rangle\,\partial^2_{z\,z}u + \langle ip_2\bar\mu + i\overline{p_2}\nu\rangle\,\partial^2_{\bar z\bar z}\bar u\right) = f.$$

Отсюда имеем:

$$\partial^2_{z\bar z}u + \left\langle\mu\frac{\overline{p_1} + i\overline{p_2}}{2} + \bar\nu\frac{p_1 + ip_2}{2}\right\rangle\partial^2_{z\,z}u +$$

$$+\left\langle\bar\mu\frac{p_1 + ip_2}{2} + \nu\frac{\overline{p_1} + i\overline{p_2}}{2}\right\rangle\partial^2_{\bar z\bar z}\bar u = f,$$

т. е.

$$\partial^2_{z\bar z}u + \mu^0\partial^2_{zz}u + \nu^0\partial^2_{\bar z\bar z}\bar u = f \in L_2(Q;\mathbb{C}).$$

Отсюда в силу единственности G-предела получим $\widehat{A} = A_0$.

Итак, любой из G-пределов семейства $\{A_\varepsilon\}$ совпадает с A_0. Отсюда легко следует, что $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A_0$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Действительно, выкинем из семейства $\{A_\varepsilon\}$ все G-сходящиеся подпоследовательности (они сходятся к A_0), в результате останется не более конечного числа элементов (иначе, если количество оставшихся элементов бесконечно, то из него, в силу G-компактности, можно выделить G-сходящуюся подпоследовательность). Конечное число элементов. естественно, не влияет на G-сходимость семейства $\{A_\varepsilon\}$.

В случае, когда $\nu = 0$, то по теореме 9 $p_2 = ip_1$, поэтому $\mathcal{P} = 2^{-1}(p_1 + ip_2) = 2^{-1}(p_1 + i\cdot ip_1) = 0$, $\mathcal{L} = 2^{-1}(\overline{p_1} + i\overline{p_2}) = 2^{-1}(\overline{p_1} + \overline{p_1}) = p_1$. Значит $\mu^0 = \langle\mu\mathcal{L}\rangle = \langle\mu\overline{p_1}\rangle$, $\nu^0 = \langle\overline{\mu}\cdot 0 + 0\cdot\mathcal{L}\rangle = 0$.

Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть коэффициенты μ и νоператора (3.1) связаны одним из двух соотношений: $\nu = e^{i\alpha}\mu$, $\nu = e^{i\alpha}\bar{\mu}$, где $\alpha \in [-\pi, \pi)$ - постоянная. Тогда аналогичную структуру имеет и усредненный оператор. Подробнее:*

(i) при $\nu = e^{i\alpha}\mu$ имеем $\nu^0 = e^{i\alpha}\mu^0$;

(ii) при $\nu = e^{i\alpha}\bar{\mu}$ имеем $\nu^0 = e^{i\alpha}\overline{\mu^0}$; если при этом $\alpha \neq -\pi$, то $\mu^0 = \frac{\left\langle \mu Re(p_1 e^{-i\alpha/2}) \right\rangle}{\cos(\alpha/2)}$,

если $\alpha \neq 0$, то $\mu^0 = \frac{\left\langle \mu Re(p_2 e^{-i\alpha/2}) \right\rangle}{\sin(\alpha/2)}$, где p_1, p_2 - базисные векторы из теоремы 5.

Например, при $\alpha \neq -\pi$ имеем

$$\mu^0 = \left\langle \mu(F + e^{-ia}P) \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \mu(\bar{p}_1 + e^{-ia}p_1)\left(1 - i\frac{Req}{Imq}\right) \right\rangle = \frac{\left\langle \mu Re(p_1 e^{-i\alpha/2}) \right\rangle}{\cos(\alpha/2)}.$$

Список литературы

[1] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. –М.: Наука, 1993; англ. пер.: *V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleĭnik* Homogenization of differential operators and integral functionals, CityplaceSpringer–Verlag, StateBerlin, 1994.

[2] Жиков В. В., Сиражудинов М. М. О G–компактности одного класса недивергентных эллиптических операторов второго порядка// Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1981. –Т. 45, № 4. – С. 718–733; англ. пер.: V. V. Zhikov, M. M. Sirazhudinov. On G–compactness of a class of nondivergence elliptic operators of second order // Math.USSR–Izv., 19:1, 1982, p. 27–40.

[3] Жиков В. В., Сиражудинов М. М. Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решения задачи Коши// Матем. сб. – 1981. – Т. 116, 158:2, 10. – С. 166–186; англ. пер.: *V. V. Zhikov, M. M. Sirazhudinov* The averaging of nondivergence second order elliptic and parabolic operators and the stabilization of solutions of the Cauchy problem, Math.USSR–Sb., 44:2, 1983, p. 149–166.

[4] Сиражудинов М.М. G–сходимость и усреднение некоторых недивергентных эллиптических операторов высокого порядка// Дифференц. Уравнения. – 1983. – Т. 19, №11. – С. 1949–1956; англ. пер.: *M. M. Sirazhudinov* The G–convergence and averaging of some high–order nondivergence elliptic operators, Differential Equations, 19:11, 1983, 1429–1435.

[5] Сиражудинов М.М. О G–компактности одного класса эллиптических систем первого порядка// Дифференц. Уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 298–305; англ. пер.: *M. M. Sirazhudinov* G–compactness of a class of first–order elliptic systems", Differential Equations, 26:2, 1990, 229–235.

[6] Сиражудинов М.М. О G–сходимости и усреднении обобщенных операторов Бельтрами//Мат.сб. –2008. –Т. 199, №5. – С. 127–158.

[7] Джамалудинова С. П. Задача Пуанкаре для одного эллиптического уравнения второго порядка// Вестник ДГУ – 2013. – Вып. 1. – С. 65–67.

[8] Сиражудинов М.М., Джамалудинова С.П. О G–компактности одного класса эллиптических операторов второго порядка с комплекснозначными коэффициентами // Вестник ДГУ – 2014. – Вып. 1 – С. 77-80.

[9] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* М.: Наука. 1988.

М. М. Сиражудинов (M. M. Sirazhudinov)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: sirazhmagomed@yandex.ru

Поступила в редакцию
24.11.2014

С. П. Джамалудинова (S. P. Dzhamaludinova)
Дагестанский государственный университет