УДК 517.956.4

М. М. Зайнулабидов, З. М. Зайнулабидова

О некоторых математических моделях волновых процессов с сильными нелинейностями

Исследованы уравнения типа Кортевега – де Фриза (КдФ) с сильными нелинейностями и их эллиптико-гиперболические аналоги с операторами эллиптико-гиперболического типа вместо оператора типа Фурье.
Библиография: 2 названия.

Korteweg – de Vries equations with strong nonlinearities and their elliptic-hyperbolic analogues with the elliptic-hyperbolic operators instead of Fourier type operators are investigated.
Bibliography: 2 items.

Ключевые слова: уравнение Кортевега – де Фриза, слабые и сильные нелинейности.
Keywords: Korteweg – de Vries equation, weak and strong nonlinearities.

Введение

Как известно, [1, с. 312 – 327] при математическом моделировании волновых процессов во многих задачах физики плазмы, физики твердого тела, гидродинамики, квантовой теории поля, биофизики, химической кинетики, волоконной оптики и др., с учетом дисперсии получается уравнение КдФ

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \tag{0.1}$$

со слабой нелинейностью uu_x.

Решение (0.1) представимое в виде нелинейной волны, неизменной формы, называемое уединенной волной или солитоном, имеет как теоретическое, так и прикладное значение в общей теории нелинейных уравнений математической физики.

Настоящая статья посвящена исследованию некоторых нелинейных уравнений типа КдФ с сильными нелинейностями, решения которых могут быть получены в виде солитонов.

1. Постановка задачи и результаты

Рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t + \beta u_{xxx}) + 6[b(u)u_{xx}^2 + b'(u)u_x^2 u_{xx}] + \frac{\beta b''(u) - b'(u)b(u)}{\beta}u_x^4 = 0, \tag{1.1}$$

$$u_t + \beta u_{xxx} + 3b(u)u_x u_x x + \frac{\beta b'(u) - b^2(u)}{\beta} u_x^3 - 3\delta b(u) u_x^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{b(u)u_x}{\beta}\right] = 0, \quad (1.2)$$

где β, δ – действительные параметры, $b(u)$ – дважды дифференцируемая заданная функция, в которых линейная часть оператора КдФ сохранена, а слабая нелинейность заменена сильными нелинейностями.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Решения $u(x,t)$ уравнений (1.1), (1.2) представимы в виде $u = y[x,t]$, где $y(\varphi)$ - решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения*

$$\beta y''(\varphi) + b[y(\varphi)]y'^2(\varphi) = 0, \quad (1.3)$$

а $\varphi(x,t)$ - решение нелинейных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}[y'(\varphi_t + \beta\varphi_{xxx})] - 3\beta y''(\varphi_{xx}^2 - \varphi_x\varphi_{xxx}) = 0, \quad (1.4)$$

$$y'(\varphi_t + \beta\varphi_{xxx}) - 3\delta\beta y''(\varphi_{xx}^2 - \varphi_{xx}^2 - \varphi_x\varphi_{xxx}) = 0, \quad (1.5)$$

соответственно.

Доказательство. В (1.1) и (1.2) введем замену

$$u(x,t) = y[\varphi(x,t)]. \quad (1.6)$$

С учетом $u_t = y'\varphi_t$, $u_x = y'\varphi_x$, $u_{xx} = y''\varphi_x^2 + y'\varphi_{xx}$, $u_{xxx} = y'''\varphi_x^3 + 3y''\varphi_x\varphi_{xx} + y'\varphi_{xxx}$ уравнения (1.1), (1.2) могут быть переписаны соответственно в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}[y'(\varphi_t + \beta\varphi_{xxx}) + 3\beta y''(\varphi_x^2 x + \varphi_x\varphi_{xxx}) + 6b(y)y'^2\varphi_{xx}^2 +$$

$$+ \varphi_x^4\left\{\psi''(y) - \frac{2b(y)y'}{\beta}\psi'(y) + \frac{4b(y)y'' + b'(y)y'^2}{\beta}\psi(y)\right\} + 6\varphi_x^2\varphi_{xx}\psi'(y) = 0, \quad (1.7)$$

$$y'(\varphi_t + \beta\varphi_{xxx}) + 3\delta\beta y''(\varphi_x\varphi_{xxx} - \varphi_{xx}^2) + 3\varphi_x\varphi_{xx}\psi(y) + \varphi_x^3\left\{\psi'(y) + \frac{b(y)y'}{\beta}\right\} -$$

$$- 3\delta\beta(y)y^2\varphi_x^2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\psi(y)\frac{\varphi_x}{\beta y'}\right\} = 0, \quad (1.8)$$

где $\psi(y) = \beta y'' + b(y)y'^2$.

Из (1.7), (1.8) при $\psi(y) \equiv 0$ получаем (1.4), (1.5) соответственно, что в силу (1.3), и доказывает теорему.

Общее решение нелинейного уравнения (1.3) в неявной записи имеет вид

$$\varphi = c_1 \int\limits_0^{y(\varphi)} e^{\frac{1}{\beta}\int\limits_0^{\tau} b(t)dt} d\tau + c_2, \quad (1.9)$$

где c_1 и c_2 - произвольные постоянные.

В том случае, когда из (1.9) можно явно определить $y(\varphi)$, при условии, что $y'(\varphi) \neq 0$, для определения $\varphi(x,t)$ получаем нелинейные уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x}[y'(\varphi_t + \beta\varphi_{xxx})] + 3b(y)y'^2(\varphi_{xx}^2 - \varphi_x\varphi_{xxx}) = 0, \quad (1.10)$$

$$\varphi_t + \beta\varphi_{xxx} + 3\delta b(y)y'^2(\varphi_{xx}^2 - \varphi_x\varphi_{xxx}) = 0, \quad (1.11)$$

характерной особенностью которой является наличие в них линейного оператора $\varphi_t + \beta\varphi_{xxx}$ и нелинейного оператора $\varphi_{xx}^2 - \varphi_x\varphi_{xxx}$.

Это обстоятельство позволяет определить достаточно широкий класс решений уравнений (1.10), (1.11) как фукнцию $\varphi(x,t)$, которая одновременно является решением линейного уравнения

$$\varphi_t + \beta\varphi_{xxx} = 0 \tag{1.12}$$

и нелинейного уравнения

$$\varphi_{xx}^2 - \varphi_x\varphi_{xxx} = 0. \tag{1.13}$$

Легко показать, что общее решение $\varphi(x,t)$ уравнения (1.13) имеет вид

$$\varphi(x,t) = c_1(t)e^{c_2(t)x} + c_3(t), \tag{1.14}$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные функции только от t.

Подбирая функции c_1, c_2, c_3 так, чтобы (1.14) было решением (1.12), получим, что функция

$$\varphi(x,t) = ae^{\alpha(x-\beta\alpha^2 t)} + b, \tag{1.15}$$

где a, b, α – произвольные постоянные, определяет достаточно широкий класс решений (1.10), (1.11) .

Подставляя (1.15) в (1.9) с учетом (1.6) получим представление решений $u(x,t)$ уравнений (1.1), (1.2) в неявном виде

$$e^{\alpha(x-\beta\alpha^2 t)} = A\int\limits_0^{u(x,t)} e^{\frac{1}{\beta}\int\limits_0^{\tau} b(t)dt} d\tau + B, \tag{1.16}$$

где $A \neq 0$ и B – произвольные постоянные.

Можно указать достаточно широкий класс функций $b(t)$, для которых из (1.16) получается явное представление для $u(x,t)$.

В самом деле, пусть $b(t) = \frac{g''(t)}{g'(t)}$, где $g(t)$ – любая дважды дифференцируемая и однозначно обратимая функция, для которой $g'(t) > 0$.

Тогда (1.16) примет вид уравнения

$$g'(0)(e^{\alpha(x-\beta\alpha^2 t)} - B) + Ag(0) = Ag(u) \tag{1.17}$$

однозначно разрешимого относительно $u(x,t)$.

Следует обратить внимание на то, что уравнения (1.1) и (1.2) четвертого и третьего порядков соответственно, в силу чего единое представление их решений $u(x,t)$ в виде одной формулы (1.16) вполне допустимо. Тем более, что (1.16) не охватывает всех решений.

В случаях $b(u) = 1$, $b(u) = \frac{1}{u}$, рассмотренных в [2], когда $\delta = 0$ уравнение (1.17) будет иметь соответственно вид

$$e^{\alpha(x-\beta\alpha^2 t)} = A\beta e^{\left(\frac{u}{\beta}\right)} - A\beta + B,$$

$$e^{\alpha(\beta\alpha^2 t)} = A\frac{\beta}{\beta+1}\left(\frac{1}{\tau_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} u^{\frac{1+\beta}{\beta}} + B,$$

где

$$t \geqslant \tau_0 > 0, \frac{1+\beta}{\beta} > 0.$$

Отсюда получаем решения $u(x,t)$ уравнений (1.1) и (1.2), соответствующие этим случаем в явном виде

$$u(x,t) = \beta \ln \frac{e^{\alpha(x-\beta\alpha^2 t)} + A\beta - B}{A\beta},$$

$$u(x,t)=\left\{\frac{e^{\alpha(x-\beta\alpha^2t)}-B}{A}\cdot\frac{\beta+1}{\beta}\tau_0^{\frac{1}{\beta}}\right\}^{\frac{\beta}{1+\beta}}.$$

Наряду с (1.1) и (1.2) указанным способ могут быть исследованы уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_tt+\beta u_{xxx})+\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}[b(u)u_t^2]+6[b(u)u_{xx}^2+b'(u)u_{xx}^2]+$$
$$\frac{\beta b''(u)-b'(u)b(u)}{\beta}u_x^4=0 \tag{1.18}$$

$$u_{tt}+\beta U_{xxx}+\frac{}{b}(u)\beta u_t^2+3b(u)u_xu_{xx}+\frac{\beta b'(u)-b^2(u)}{\beta}u_x^3-$$
$$3\delta b(u)u_x^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{xx}}{u_x}+\frac{b(u)u_x}{\beta}\right]=0, \tag{1.19}$$

которых можно считать эллиптико-гиперболическими аналогами этих уравнений, соответственно.

В результате замены (1.6), где $y(\varphi)$ – решение (1.3), уравнения (1.8), (1.19) сводятся к нелинейным относительно $u(x,t)$ уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x}[y'(\varphi_{tt}+\beta\varphi_{xxx})]-3\beta y''(\varphi_{xx}^2-\varphi_x\varphi_{xxx})=0, \tag{1.20}$$

$$y'(\varphi_{tt}+\beta\varphi_{xxx})-3\delta\beta y''(\varphi_{xx}^2-\varphi_x\varphi_{xxx})=0, \tag{1.21}$$

соответственно, характерной особенностью которых является наличие линейного $\varphi_{tt}+\beta\varphi_{xxx}$ и нелинейного $\varphi_{xx}^2-\varphi_x\varphi_{xxx}$ операторов.

Из общего решения (1.14) уравнения (1.13), подбирая произвольные функции $c_1(t),c_2(t),c_3(t)$ можно получить решение уравнения $\varphi_{tt}+\beta\varphi_{xxx}=0$ и достаточно широкий класс решений (1.20), (1.21), представимых в виде

$$\varphi(x,t)+At+B=\left\{\begin{array}{lll} e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\sqrt{\beta\alpha^3}t+b\sin\sqrt{\beta\alpha^3}t\right) & npu & \beta\alpha^3>0,\\ e^{\alpha x}\left(\alpha\operatorname{ch}\sqrt{-\beta\alpha^3}t+b\operatorname{sh}\sqrt{-\beta\alpha^3}t\right) & npu & \beta\alpha^3<0.\end{array}\right. \tag{1.22}$$

Таким образом установлено, что с помощью замены (1.10), где правая часть $y(\varphi)$ определяется формулой (1.22), нелинейные уравнения (1.4) – (1.9) эквивалентно сводятся к более простым (1.20) – (1.22), с вытекающими отсюда следствиями в смысле корректности постановки тех или иных краевых задач для этих уравнений.

В заключении обратим внимание на то, что достаточно широкий класс решений $\varphi(x,t)$ уравнения (1.22) при $f(t)\equiv 0$ определяет функция

$$\varphi(x,t)=\left\{\begin{array}{lll} e^{\alpha x}(a\cos\alpha\sqrt{\alpha\beta}t+b\sin\alpha\sqrt{\alpha\beta}t) & npu & \beta>0,\\ e^{\alpha x}(a\operatorname{ch}\alpha\sqrt{-\alpha\beta}t+b\operatorname{sh}\alpha\sqrt{-\alpha\beta}t) & npu & \beta<0,\end{array}\right. \tag{1.23}$$

где A,B,α,b – произвольные действительные постоянные.

Функция (1.23) может быть использована при исследовании (1.20) и (1.21) точно также, как использована функция (1.15) при исследовании уравнения КдФ в [1, с. 320-326].

В заключении отметим, что полученные в статье результаты являются следствием многократных обсуждений проблем теории нелинейных волновых процессов с генеральным конструктором САПР на Каспийском заводе «Дагдизель», академиком Алиевым Ш.Г., который умело, со знанием дела, подталкивал нас на исследование

проблем данного направления, за что выражаем ему нашу признательность и благодарность.

Список литературы

[1] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2002 г. С. 367.

[2] Зайнулабидов М.М. Зайнулабидова З.М. К теории нелинейных уравнений волновых процессов // Информационные технологии в образовании и науке (ДАГИТО-2014). Выпуск 5. г.Махачкала. 2014 г. С. 177–179.

М. М. Зайнулабидов (M. M. Zainulabidov)
Дагестанский государственный педагогический университет
E-mail: zaynulabidov.mansur@mail.ru

З. М. Зайнулабидова (Z. M. Zainulabidova)
Махачкалинский лицей №5
E-mail: zzaynulabidova@mail.ru

Поступила в редакцию
16.10.2014