УДК 517.538

И. И. Шарапудинов

Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву

Рассмотрены ряды Фурье по полиномам Лагерра $L_k^{-r}(x)$ $(k = r, r+1, \ldots)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида

$$< f, g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)e^{-t}dt.$$

Показано, что такие ряды представляют собой частный случай смешанных рядов по полиномам Лагерра $L_k^{\alpha}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, рассмотренным автором ранее. Введены некоторые новые специальные ряды по полиномам Лагерра, которые в частном случае также совпадают с рядом Фурье по полиномам Лагерра $L_k^{-r}(x)$ $(k = r, r+1, \ldots)$. Исследованы вопросы сходимости смешанных рядов и аппроксимативные свойства специальных рядов по полиномам Лагерра.

Библиография: 16 названий.

The Fourier series on Laguerre polynomials $L_k^{-r}(x)$ $(k = r, r+1, \ldots)$ orthogonal with respect to the Sobolev-type inner product of the form

$$< f, g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)e^{-t}dt$$

are considered. It is shown such series represent the special case of the mixed series on Laguerre polynomials $L_k^{\alpha}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ examined earlier by the author. Some new special series on Laguerre polynomials which coincide with Fourier series on Laguerre polynomials $L_k^{-r}(x)$ $(k = r, r+1, \ldots)$ in special case are introduced. The convergence problems and approximative properties of special series on Laguerre polynomials are examined.

Bibliography: 16 items.

Ключевые слова: полиномы Лагерра, смешанные ряды по полиномам Лагерра, специальные ряды, преобразование Лапласа, ортогональные по Соболеву полиномы, неравенство Лебега.

Keywords: Laguerre polynomials, mixed series on Laguerre polynomials, special series, Laplas transform, Sobolev orthogonal polynomials, Lebesgue inequality.

1. Введение

В последние годы интенсивное развитие получила (см.[1]–[6] и цитированную там литературу) теория полиномов, ортогональных относительно различных скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые, которые "контролируют" поведение соответствующих ортогональных полиномов на границе области ортогональности. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на отрезке $[a, b]$, могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого отрезка. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах отрезка $[a, b]$ со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на $[a, b]$ весом полиномы этим важным свойством не обладают.

С другой стороны отметим, что в ряде работ автора [7] – [12] были введены, так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых также обладают свойством совпадения их значений в концах области ортогональности со со значениями исходной функции. В работах [7] – [12] были подробно исследованы аппроксимативные свойства смешанных рядов для функций из различных функциональных пространств и классов. В частности, было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномами, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. Кроме того отметим, что в тех случаях, когда для целого $r \geqslant 1$ классические полиномы Якоби $P_n^{\alpha-r,\beta-r}(x)$ и Лагерра $L_n^{\alpha-r}(x)$ образуют ортогональные системы в смысле Соболева, то ряды Фурье по этим системам являются частным случаем смешанных рядов по соответствующим полиномам Якоби и Лагерра.

В настоящей статье эти вопросы рассмотрены для классических полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$. В частности, показано, что ряд Фурье по ортогональным полиномам Лагерра-Соболева являются частным случаем смешанных рядов по полиномам Лагерра (см. п. 3). Это, в свою очередь, позволяет (см. п. 5) применить к исследованию аппроксимативных свойств рядов Фурье по полиномам Лагерра-Соболева методы и подходы, разработанные нами ранее [7] – [12] для решения аналогичной задачи для смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам. В п. 4 введен некоторый новый специальный ряд по классическим ортогональным полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$ с $\alpha > -1$, который в случае натурально $\alpha = r$ совпадает с соответствующим смешанным рядом по полиномам Лагерра $L_n^0(x)$, а также с рядом Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева

$$< f, g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)e^{-t}dt. \tag{1.1}$$

Таким образом, в случае натурально $\alpha = r$ для полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ все три понятия – смешанный ряд по полиномам Лагерра, специальный ряд по полиномам Лагерра и ряд Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева (1.1), совпадают.

Изложение материала настоящей статьи разбито на параграфы. В п. 2 собраны некоторые необходимые сведения о полиномах Лагерра, в п. 3 приводится определение смешанных рядов по полиномам Лагерра, в п. 4 введены новые специальные ряды по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$, ортогональным в классическом смысле, в п. 5 вводятся ряды Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева (1.1), в п. 6 выводится неравенство типа Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра и сформулирована теорема, содержащая поточечную оценку соответствующей функции Лебега, в п. 7 изложено доказательство этой теоремы.

2. Некоторые сведения о полиномах Лагерра

При исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм новых специальных рядов, введенных в настоящей работе, нам понадобится ряд свойств полиномов Лагерра $L_n^\alpha(t)$, которые мы соберем в данном параграфе.

Пусть α – произвольное действительное число. Тогда для полиномов Лагерра имеют место [13]:

Формула Родрига

$$L_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!} t^{-\alpha} e^t \left\{t^{n+\alpha} e^{-t}\right\}^{(n)}; \tag{2.1}$$

Явный вид

$$L_n^\alpha(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^\nu}{\nu!}; \tag{2.2}$$

Соотношение ортогональности

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} L_n^\alpha(t) L_m^\alpha(t) dt = \delta_{nm} h_n^\alpha \quad (\alpha > -1), \tag{2.3}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера,

$$h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1); \tag{2.4}$$

В частности, для $L_n(t) = L_n^0(t)$ имеет место равенство

$$\int_0^\infty e^{-t} L_n(t) L_m(t) dt = \delta_{nm};$$

Формула Кристоффеля – Дарбу

$$\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau) = \sum_{k=0}^{n} \frac{L_\nu^\alpha(t) L_\nu^\alpha(\tau)}{h_\nu^\alpha} = \frac{n+1}{h_n^\alpha} \frac{L_n^\alpha(t) L_{n+1}^\alpha(\tau) - L_n^\alpha(\tau) L_{n+1}^\alpha(t)}{t-\tau}; \tag{2.5}$$

Свертка

$$\int_0^t L_n(t-\tau)L_m(\tau)d\tau = L_{n+m}(t) - L_{n+m+1}(t). \tag{2.6}$$

Далее отметим следующие равенства

$$\frac{d}{dt}L_n^\alpha(t) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(t), \tag{2.7}$$

$$\frac{d^r}{dt^r}L_{k+r}^{\alpha-r}(t) = (-1)^r L_k^\alpha(t), \tag{2.8}$$

$$L_k^{-r}(t) = \frac{(-t)^r}{k^{[r]}}L_{k-r}^r(t), \tag{2.9}$$

где $k^{[r]} = k(k-1)\dots(k-r+1)$,

$$L_n^{\alpha+1}(t) - L_{n-1}^{\alpha+1}(t) = L_n^\alpha(t), \tag{2.10}$$

$$(n+\alpha)L_n^{\alpha-1}(t) = \alpha L_n^\alpha(t) - xL_{n-1}^{\alpha+1}(t), \tag{2.11}$$

весовая оценка [14]

$$e^{-\frac{t}{2}}|L_n^\alpha(t)| \leqslant c(\alpha)B_n^\alpha(t), \quad \alpha > -1, \tag{2.12}$$

где здесь и далее $c, c(\alpha), c(\alpha,\dots,\beta)$ – положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров,

$$B_n^\alpha(t) = \begin{cases} \theta^\alpha, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\theta}, \\ \theta^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\, t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < t \leqslant \frac{\theta}{2}, \\ \left[\theta(\theta^{\frac{1}{3}} + |t-\theta|)\right]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < t \leqslant \frac{3\theta}{2}, \\ e^{-\frac{t}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < t, \end{cases}$$

где $\theta = \theta_n = \theta_n(\alpha) = 4n + 2\alpha + 2$.

Для нормированных полиномов Лагерра

$$\hat{L}_n^\alpha(t) = \left\{h_n^\alpha\right\}^{-\frac{1}{2}} L_n^\alpha(t) \tag{2.13}$$

имеет место оценка [14]

$$e^{-\frac{t}{2}}\left|\hat{L}_{n+1}^\alpha(t) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(t)\right| \leqslant \begin{cases} \theta^{\frac{\alpha}{2}-1}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\theta}, \\ \theta^{-\frac{3}{4}}\, t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < t \leqslant \frac{\theta}{2}, \\ t^{-\frac{\alpha}{2}}\,\theta^{-\frac{3}{4}}\left[\theta^{\frac{1}{3}} + |t-\theta|\right]^{\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < t \leqslant \frac{3\theta}{2}, \\ e^{-\frac{t}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < t. \end{cases} \tag{2.14}$$

Поскольку $h_n^\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \asymp n^\alpha$, то из (2.12) и (2.13) следует, что

$$e^{-\frac{t}{2}}|\hat{L}_n^\alpha(t)| \leqslant c(\alpha)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}} B_n^\alpha(t), \quad t \geqslant 0. \tag{2.15}$$

3. Смешанные ряды по полиномам Лагерра

Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам были впервые введены в работах автора [7]–[12], как альтернативный рядам Фурье по тем же полиномам аппарат для одновременного приближения функций и их производных. Не является исключением и смешанные ряды по полиномам Лагерра [9]. В настоящем параграфе мы напомним определение этих рядов, следуя работе [9]. Пусть $-1 < \alpha < 1$, $L_n^\alpha(x)$ соответствующие классические ортогональные полинома Лагерра, $\rho = \rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, $1 \leqslant p < \infty$, $\mathcal{L}_{p,\rho}$ – пространство измеримых функций, определенных на полуоси $[0, \infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\rho}} = \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p \rho(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Через $W^r_{\mathcal{L}_{p,\rho}}(0, \infty)$ обозначим подкласс функций $f = f(x)$ из $\mathcal{L}_{p,\rho}$, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a, b] \subset [0, \infty)$, а $f^{(r)} \in \mathcal{L}_{p,\rho}$. Тогда мы можем рассмотреть коэффициенты Фурье-Лагерра функции $f^{(r)}(x)$ по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$:

$$f_{r,k}^\alpha = \frac{1}{h_k^\alpha} \int\limits_0^\infty \rho(t) f^{(r)}(t) L_k^\alpha(t) dt \tag{3.1}$$

Соответствующий ряд Фурье-Лагерра функции $f^{(r)}$ имеет вид

$$f^{(r)} \sim \sum_{k=0}^\infty f_{r,k}^\alpha L_k^\alpha(x). \tag{3.2}$$

Рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x) = Q_{r-1}(f, x) + \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt, \tag{3.3}$$

где

$$Q_{r-1}(f, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(r)}(0)}{\nu!} (1+x)^\nu$$

полином Тейлора и выполним формальную подстановку в (3.3) вместо $f^{(r)}(t)$ ряда Фурье-Лагерра (3.2). Если эта операция законна, то мы придем к следующему равенству

$$f(x) = Q_{r-1}(f, x) + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^\infty f_{r,k}^\alpha \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} L_k^\alpha(t) dt. \tag{3.4}$$

Воспользуемся равенством (2.8), тогда

$$\frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} L_k^\alpha(t) dt = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} L_{k+r}^{\alpha-r}(t) dt$$

$$= (-1)^r L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - (-1)^r \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{x^\nu}{\nu!} \{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)}. \quad (3.5)$$

Далее

$$\{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}^{(\nu)} = (-1)^\nu L_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(t), \quad (3.6)$$

а в силу (2.2)

$$L_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(0) = \binom{k+\alpha}{k+r-\nu} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \quad (3.7)$$

Сопоставляя (3.6) и (3.7), имеем

$$\{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)} = (-1)^\nu \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \quad (3.8)$$

Из (3.5) и (3.8) находим

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} L_k^\alpha(t) dt =$$

$$(-1)^r L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - (-1)^r \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)(-x)^\nu}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!\nu!}. \quad (3.9)$$

Из (3.4) и (3.9) получаем

$$f(x) = E_{r-1}^\alpha(f,x) + J_r^\alpha(f,x), \quad (3.10)$$

где

$$E_{r-1}^\alpha(f,x) =$$

$$\sum_{\nu=0}^{r-1} \left[f^{(\nu)}(0) - \frac{(-1)^{r-\nu}}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} f_{r,k}^\alpha \right] \frac{x^\nu}{\nu!}, \quad (3.11)$$

$$J_r^\alpha(f,x) = (-1)^r \sum_{k=0}^\infty f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x) \quad (3.12)$$

Ряд $J_r^\alpha(f,x)$ будем называть *смешанным* рядом по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$, этим же термином мы обозначим правую часть равенства (3.10). Смешанный ряд содержит коэффициенты $f_{r,k}^\alpha$ $(k = 0, 1, \ldots)$ r-той производной функции $f(x)$ по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$, умноженные на полиномы Лагерра вида $L_{k+r}^{\alpha-r}(x)$. В этом заключается принципиальное отличие смешанного ряда (3.12) по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$ от ряда Фурье по этим же полиномам.

Если в (3.11) и(3.12) мы положим $\alpha = 0$, то равенство (3.10) принимает следующий вид

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + (-1)^r \sum_{k=0}^\infty f_{r,k}^0 L_{k+r}^{-r}(x). \quad (3.13)$$

Если, кроме того, воспользуемся равенством (2.9), то отсюда получим

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^{\nu}+x^{r}\sum_{k=0}^{\infty}f_{r,k}^{0}\frac{L_{k}^{r}(x)}{(k+r)^{[r]}}. \tag{3.14}$$

В дальнейшем будет показано (см. п. 5 и п. 4), что (3.13) представляет собой ряд Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения (1.1), а (3.14) есть не что иное, как специальный ряд по полиномам Лагерра $L_k^{\alpha}(x)$ с $\alpha=r$, где $1\leqslant r$ – целое.

Перейдем к рассмотрению достаточных условий на функцию $f(x)$, обеспечивающих сходимость смешанных рядов $J_r^{\alpha}(f,x)$ и справедливость равенства (3.10).

Теорема 1. *Пусть $-1<\alpha<1$, $r\geqslant 1$, $A>0$, $f\in W^r_{\mathcal{L}_{2,\rho}}$. Тогда смешанный ряд $J_r^{\alpha}(f,x)$ сходится равномерно относительно $x\in[0,A]$ и для произвольного $x\in[0,\infty)$ имеет место равенство* (3.10).

Доказательство. Мы начнем с оценки полинома $L_{k+r}^{\alpha-r}(x)$ при $\alpha>-1$, $r\geqslant 1$ и $x\in[0,A]$. Если $\alpha-r>-1$, то пользуясь оценкой (2.12), мы можем записать ($\theta=4k+2r-2\alpha+2$)

$$|L_{k+r}^{\alpha-r}(x)|\leqslant c(\alpha,r)e^{x/2}B_{k+r}^{\alpha-r}(x). \tag{3.15}$$

Если же $\alpha-r\leqslant -1$, то, пользуясь равенством (2.11), имеем

$$L_{k+r}^{\alpha-r}(x)=\frac{\alpha-r+1}{k+\alpha}L_{k+r}^{\alpha-r+1}(x)-\frac{x}{k+\alpha}L_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x). \tag{3.16}$$

С другой стороны, из определения функции $B_n^{\alpha}(x)$ (см.(2.12)) нетрудно увидеть, что при $\alpha>-1$, $k\geqslant 1$, $x\in[0,A]$

$$\frac{1}{k+\alpha}B_{k+r}^{\alpha-r+1}(x)\leqslant c(\alpha,r)B_{k+r}^{\alpha-r}(x), \tag{3.17}$$

$$\frac{x}{k+\alpha}B_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x)\leqslant c(\alpha,r,A)B_{k+r}^{\alpha-r}(x). \tag{3.18}$$

Далее заметим, что если для $x\in[0,A]$ справедливы оценки

$$|L_{k+r}^{\alpha-r+1}(x)|\leqslant c(\alpha,r,A)e^{\frac{x}{2}}B_{k+r}^{\alpha-r+1}(x), \tag{3.19}$$

$$|L_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x)|\leqslant c(\alpha,r,A)e^{\frac{x}{2}}B_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x), \tag{3.20}$$

то из (3.16) –(3.20) вытекает оценка (3.15). Но если $r=1$, то $\alpha-r+1=\alpha>-1$, $\alpha-r+2=\alpha+1>0$ и поэтому оценки (3.19) и (3.20) вытекают из (2.12). Тем самым, оценка (3.15) для $r=1$ доказана. Предположим теперь, что оценка (3.15) верна для $1\leqslant r\leqslant n$. Тогда из (3.16) –(3.18) следует справедливость оценки (3.15) для $r=n+1$. Тем самым доказана справедливость оценки (3.15) для произвольного целого $r\geqslant 1$. Оценим теперь остаточный член смешанного ряда (3.12), который равен

$$R_n^{\alpha}(f,x)=(-1)^r\sum_{k=n+1}^{\infty}f_{r,k}^{\alpha}L_{k+r}^{\alpha-r}(x). \tag{3.21}$$

Имеем

$$|R_n^\alpha(f,x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_{r,k}^\alpha||L_{k+r}^{\alpha-r}(x)| =$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (h_k^\alpha)^{1/2}|f_{r,k}^\alpha|(h_k^\alpha)^{-1/2}|L_{k+r}^{\alpha-r}(x)| \leqslant \eta_n\gamma_n(x), \tag{3.22}$$

где

$$\eta_n = \left(\sum_{n+1}^{\infty} h_k^\alpha (f_{r,k}^\alpha)^2\right)^{1/2}, \quad \gamma_n(x) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (L_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2/h_k^\alpha\right)^{1/2}.$$

Если $f^{(r)} \in \mathcal{L}_{2,\rho}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0. \tag{3.23}$$

Что касается величины $\gamma_n(x)$, то, используя оценку (3.15) и соотношение

$$h_k^\alpha = \Gamma(\alpha+1)\binom{k+\alpha}{k} \asymp k^\alpha (k=1,2,\ldots),$$

мы находим

$$\gamma_n(x) \leqslant c(\alpha,r,A)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha}(B_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2\right)^{1/2}. \tag{3.24}$$

Пусть $0 \leqslant x \leqslant A$, тогда из (2.12) следует, что для произвольного действительного β имеет место оценка

$$B_m^\beta(x) \leqslant c(\beta,A)m^\beta(1+mx)^{-\beta/2-1/4} \quad (0 \leqslant x \leqslant A). \tag{3.25}$$

Полагая здесь $\beta = \alpha - r$, мы можем записать

$$B_{k+r}^{\alpha-r} \leqslant c(\alpha,r,A)(k+r)^{\alpha-r}(1+(k+r)x)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}.$$

Отсюда имеем $(0 \leqslant x \leqslant A)$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha}(B_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2 \leqslant$$

$$c(\alpha,r,A)\sum_{k=n+1}^{\infty} (k+r)^{\alpha-2r}(1+(k+r)x)^{r-\alpha-1/2} =$$

$$c(\alpha,r,A)\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+r)^{r+1/2}}\left(\frac{1}{k+r}+x\right)^{r-\alpha-1/2}. \tag{3.26}$$

Заметим, что при $k > n$

$$\left(\frac{1}{k+r}+x\right)^{r-\alpha-1/2} \leqslant \begin{cases} \left(\frac{1}{n+r}+x\right)^{r-\alpha-1/2}, & r-\alpha \geqslant 1/2, \\ (k+r)^{\alpha+1/2-r}, & r-\alpha < 1/2, \end{cases}$$

поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+r)^{r+1/2}} \left(\frac{1}{k+r} + x\right)^{r-\alpha-1/2} \leqslant$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n+r} + x\right)^{r-\alpha-1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+r)^{-r-1/2}, & r-\alpha \geqslant 1/2, \\ \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+r)^{-2r+\alpha}, & r-\alpha < 1/2, \end{cases} \tag{3.27}$$

Сопоставляя (3.24), (3.26) и (3.27), мы находим

$$\gamma_n^2(x) \leqslant c(\alpha, r, A) \begin{cases} n^{\frac{1}{2}-r} \left(\frac{1}{n} + x\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}, & r-\alpha \geqslant \frac{1}{2}, \\ n^{-2r+\alpha+1}, & r-\alpha < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.28}$$

Из оценки (3.28) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n(x) = 0, \tag{3.29}$$

причем сходимость равномерна относительно $x \in [0, A]$. Сопоставляя (3.22), (3.23) и (3.24), приходим к первому утверждению теоремы 1 о равномерной сходимости на $[0, A]$ смешанного ряда (3.12). Остается доказать, что имеет место равенство (3.10). Если $f \in W^r_{\mathcal{L}_{2,\rho}}$, то $f^{(r)} \in \mathcal{L}_{2,\rho}$ и, следовательно, в метрике пространства $\mathcal{L}_{2,\rho}$ имеет место равенство

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha} L_k^{\alpha}(x). \tag{3.30}$$

Пусть

$$S_{r,n}^{\alpha}(f) = S_{r,n}^{\alpha}(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f_{r,k}^{\alpha} L_k^{\alpha}(x)$$

частичная сумма порядка n ряда (3.2) . Мы имеем

$$\left| \int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt - \int_0^x (x-t)^{r-1} S_{r,n}^{\alpha}(f,t)dt \right| \leqslant$$

$$\int_0^x (x-t)^{r-1} |f^{(r)}(t) - S_{r,n}^{\alpha}(f,x)|dt \leqslant x^{r-1} \int_0^x |f^{(r)}(t) - S_{r,n}^{\alpha}(f,t)|dt =$$

$$x^{r-1} \int_0^x t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{t/2} t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-t/2} |f^{(r)}(t) - S_{r,n}^{\alpha}(f,t)|dt \leqslant$$

$$x^{r-1} \left(\int_0^x t^{-\alpha} e^t dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x t^{\alpha} e^{-t} (f^{(r)}(t) - S_{r,n}^{\alpha}(f,t))^2 dt \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\left(\frac{e^x x^{2r-\alpha-1}}{1-\alpha} \right)^{1/2} \|f^{(r)} - S_{r,n}^{\alpha}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}}. \tag{3.31}$$

Поскольку в силу (3.30) $\|f^{(r)} - S^{\alpha}_{r,n}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}} \to 0$ $(n \to \infty)$, то из (3.31) находим

$$\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} f^{\alpha}_{r,k} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} L^{\alpha}_k(t)dt. \tag{3.32}$$

Сопоставляя (3.3) и (3.32), заключаем, что справедливо (3.4). Убедимся теперь в законности рассуждений, которые привели к равенству (3.10), исходя из (3.4). Имея ввиду (3.9), для этого достаточно проверить сходимость рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} f^{\alpha}_{r,k} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant r-1),$$

фигурирующих (3.11). Но если $f \in W^r_{\mathcal{L}_{2,\rho}}$, то $f^{(r)} \in \mathcal{L}_{2,\rho}$ и, стало быть,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} |f^{\alpha}_{r,k}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} (h^{\alpha}_k)^{-1/2} (h^{\alpha}_k)^{1/2} |f^{\alpha}_{r,k}| \leqslant$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}\right)^2 \frac{1}{h^{\alpha}_k}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} h^{\alpha}_k (f^{\alpha}_{r,k})^2\right)^{1/2} =$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)}{(\Gamma(k+r-\nu+1))^2}\right)^{1/2} \|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}} \leqslant$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)\Gamma(k+2)}\right)^{1/2} \|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}} \leqslant c(\alpha) \|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}} \quad (-1 < \alpha < 1).$$

Тем самым равенство (3.10) и вместе с ним теорема 1 доказаны.

Покажем, что смешанные ряды вида (3.14) возникают в различных прикладных задачах.

3.1. Решение задачи Коши посредством смешанных рядов по полиномам Лагерра. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$x^{(r)}(t) + a_{r-1}x^{(r-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = y(t) \tag{3.33}$$

с начальными условиями

$$x_k = x^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, \ldots, r-1 \tag{3.34}$$

и представим наивысшую производную $x^{(r)}(t)$ её решения, встречающейся в рассматриваемом уравнении, в виде ряда Фурье - Лагерра по полиномам Лагерра $L_n(t) = L^{\alpha}_n(t)$ с $\alpha = 0$. Смешанный ряд, о котором идет речь, возникает путем повторного (r-кратного) интегрирования указанного представления. В результате возникает следующее представление для решения уравнения (3.33)

$$x(t) = P_{r-1}(t) + t^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{x}_{r,k} L^r_k(t)}{(k+1)_r}, \tag{3.35}$$

где

$$P_{r-1}(t) = P_{r-1}(x,t) = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{x_s}{s!} t^s$$

– полином Тейлора, $(k+1)_r = (k+1)\cdots(k+r)$,

$$\hat{x}_{r,k} = \int_0^\infty x^{(r)}(\tau) L_k(\tau) e^{-\tau} d\tau \quad (k = 1, 2, \dots)$$

– коэффициенты Фурье-Лагерра функции $x^{(r)}(t)$. Заметим, что если мы положим $f(t) = x(t)$, то ряд (3.35) совпадает со смешанным рядом (3.14). При этом *важно отметить*, что уникальные свойства, присущие только полиномам Лагерра $L_n(t)$, позволяют вывести для коэффициентов $\hat{x}_{r,k}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ следующие рекуррентные соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\left(\hat{Q}_{r-1,0} + 1\right) \hat{x}_{r,0} = \hat{\tilde{y}}_0, \\ \sum_{l=0}^{k-1} &\left(\hat{Q}_{r-1,k-l} - \hat{Q}_{r-1,k-l+1}\right) \hat{x}_{r,l} + (1 + \hat{Q}_{r-1,0}) \hat{x}_{r,k} = \hat{\tilde{y}}_k, \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

в которых через $\hat{Q}_{r-1,k}$ и $\hat{\tilde{y}}_k$ обозначены коэффициенты Фурье-Лагерра заданных(известных) функций

$$Q_{r-1}(t) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k \frac{t^{r-k-1}}{(r-k-1)!} \tag{3.37}$$

и

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{r-1} a_k P_{r-k-1}(t), \tag{3.38}$$

соответственно. Неизвестные коэффициенты Фурье-Лагерра $\hat{x}_{r,k}$ функции $x^{(r)}(t)$ с $k = 0, 1, \dots, n$ могут быть найдены из рекуррентных соотношений (3.36) для любого натурального n. Тогда вместо точного равенства (3.35) мы получим приближенное равенство $x(t) \approx \mathfrak{L}_{n+r}(t)$, где

$$\mathfrak{L}_{n+r}(t) = \mathfrak{L}_{n+r}(x,t) = P_{r-1}(t) + t^r \sum_{k=0}^{n} \frac{\hat{x}_{r,k} L_k^r(t)}{(k+1)_r}$$

частичная сумма смешанного ряда (3.35). Тем самым $\mathfrak{L}_{n+r}(t)$ является приближенным решением задачи Коши (3.33) – (3.34), представляющего собой алгебраический полином степени $n + r$. Естественно возникает вопрос о том, сходится ли приближенное решение $\mathfrak{L}_{n+r}(t)$ задачи Коши (3.33) – (3.34) к ее точному решению $x(t)$ при $t \in [0, \infty)$ и $n \to \infty$ и если это так, то какова величина погрешности замены точного решения $x(t)$ задачи Коши (3.33) – (3.34) ее приближенным решением $\mathfrak{L}_{n+r}(t)$. В настоящей работе исследованы эти задачи в более общем случае для специальных рядов по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(t)$, для которых ряды, фигурирующие в правой части равенства (3.14) являются частным случаем.

3.2. Обращение преобразование Лапласа посредством смешанных рядов по полиномам Лагерра. Пусть задано преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt.$$

Предположим, что функция $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{-\alpha} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

где $\alpha > -1$. Рассмотрим следующее разложение функции $g(t) = t^{-\alpha} f(t)$ по полиномам Лагерра:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{h_k^\alpha} L_k^\alpha(t). \tag{3.39}$$

В [16] найдено следующее выражение для коэффициентов a_k:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left\{ \frac{1}{z^{\alpha+1}} F\left(\frac{1}{z}\right) \right\}_{z=1}. \tag{3.40}$$

Поскольку $F(p)$ – заданная функция, то коэффициенты a_k в разложении (3.39) могут быть найдены с помощью равенства (3.40). Если $\alpha = r$ – целое, то равенство (3.39) можно переписать в виде

$$f(t) = t^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(k+1)_r} L_k^r(t), \tag{3.41}$$

так как $h_k^r = (k+1)_r$. Ряд (3.41) представляет собой частный случай смешанного ряда вида (3.14). При этом заметим, что с помощью формулы (3.40) мы можем найти лишь конечное число коэффициентов a_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, поэтому вместо точного равенства (3.41) мы получим приближенное

$$f(t) \approx \mathcal{L}_{n+r}(t) = t^r \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)_r} L_k^r(t). \tag{3.42}$$

И снова мы пришли к задаче об оценке отклонения частичной суммы $\mathcal{L}_{n+r}(t)$ смешанного ряда (3.14) от функции $f(t)$.

4. Специальные ряды по полиномам Лагерра

Пусть $1 \leqslant r$ – целое, $f(t)$ – $r-1$ раз дифференцируемая в точке $t = 0$,

$$P_{r-1}(f) = P_{r-1}(f)(t) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} t^i, \tag{4.1}$$

$$f_r(t) = \frac{1}{t^r}[f(t) - P_{r-1}(f)(t)]. \tag{4.2}$$

Предположим, что для функции $f_r(t)$, определенной равенством (4.2) существуют коэффициенты Фурье-Лагерра

$$\hat{f}^{\alpha}_{r,k} = \frac{1}{h^{\alpha}_k}\int\limits_0^{\infty} f_r(\tau)t^{\alpha}e^{-t}L^{\alpha}_k(t)dt =$$

$$\frac{1}{h^{\alpha}_k}\int\limits_0^{\infty}[f(t)-P_{r-1}(f)(t)]t^{\alpha-r}e^{-t}L^{\alpha}_k(t)dt, \tag{4.3}$$

где $h^{\alpha}_n = \Gamma(n+\alpha+1)/n!$. Тогда мы можем рассмотреть ряд Фурье-Лагерра функции $f_r(t)$

$$f_r(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}^{\alpha}_{r,k}L^{\alpha}_k(t). \tag{4.4}$$

Если ряд (4.4) сходится к $f_r(t)$, то с учетом (4.2) мы можем записать

$$f(t) = P_{r-1}(f)(t) + t^r\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}^{\alpha}_{r,k}L^{\alpha}_k(t). \tag{4.5}$$

Это и есть *специальный ряд по полиномам Лагерра.* Нетрудно показать, что если $\alpha = r$, то ряд (4.5) совпадает с рядом (3.14). В самом деле, в силу (2.1), (3.1) и (2.9) имеем

$$f^0_{r,k} = \int\limits_0^{\infty} f^{(r)}(\tau)e^{-\tau}L_k(\tau)d\tau = \frac{1}{k!}\int\limits_0^{\infty}(f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau))^{(r)}(e^{-\tau}\tau^k)^{(k)}d\tau =$$

$$\frac{(-1)^r}{k!}\int\limits_0^{\infty}(f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau))(e^{-\tau}\tau^k)^{(k+r)}d\tau =$$

$$\frac{(-1)^r}{k!}\int\limits_0^{\infty}(f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau))\tau^{-r}e^{-\tau}L^{-r}_{k+r}(\tau)(k+r)!d\tau =$$

$$\frac{(k+r)!}{k!}(-1)^r\int\limits_0^{\infty}\frac{(f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau))}{\tau^r}e^{-\tau}\frac{(-\tau)^r}{(k+r)^{[r]}}L^r_k(\tau)d\tau =$$

$$\int\limits_0^{\infty}(f(t)-P_{r-1}(f)(t))e^{-\tau}L^r_k(\tau)d\tau = h^r_k\hat{f}^r_{r,k}. \tag{4.6}$$

В силу (4.6) ряд (3.14) приобретает вид

$$f(t) = P_{r-1}(f)(t) + t^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^r_k\hat{f}^r_{r,k}L^r_k(t)}{(k+1)_r} =$$

$$P_{r-1}(f)(t) + t^r\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}^r_{r,k}L^r_k(t),$$

так как $h^r_k = (k+1)_r$. Таким образом, в случае $\alpha = r$ ряды (3.14) и (4.5) совпадают.

5. Ряды Фурье по полиномам Лагерра $L_k^{-r}(t)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева

Для $\rho = \rho(x) = e^{-t}$ положим $W^r[0,\infty) = W^r_{\mathcal{L}_{2,\rho}}$, другими словами, $W^r[0,\infty)$ представляет собой пространство функций $f = f(t)$, заданных и непрерывно дифференцируемых на полуоси $[0,\infty)$ $(r-1)$-раз, причем $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a,b] \subset [0,\infty)$ и

$$\int_0^\infty |f^{(r)}(t)|^2 e^{-t} dt < \infty. \tag{5.1}$$

Рассмотрим систему функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^\infty$, в которой

$$\varphi_k(t) = \frac{t^k}{k!}, \quad 0 \leqslant k \leqslant r-1, \tag{5.2}$$

$$\varphi_k(t) = L_k^{-r}(t), \quad r \leqslant k. \tag{5.3}$$

Теорема 2. *Функции $\varphi_k(t)\,(k = 0,2,\ldots)$, определенные равенствами (5.2) и (5.3), образуют полную в $W^r[0,\infty)$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (1.1).*

Доказательство. Из равенств (2.8) и (2.9) следует, что если $r \leqslant k$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $\left(L_k^{-r}(t)\right)^{(\nu)}_{t=0} = 0$. Кроме того $\left(L_k^{-r}(t)\right)^{(r)} = (-1)^r L^0_{k-r}(t)$. Поэтому в силу (1.1) для $\varphi_k(t) = L_k^{-r}(t)$ и $\varphi_l(t) = L_l^{-r}(t)$ с $k,l \geqslant r$ имеем

$$< \varphi_k, \varphi_l >= \int_0^\infty L^0_{k-r}(x) L^0_{l-r}(x) e^{-x} dxt = \delta_{kl}. \tag{5.4}$$

Это означает, что функции $\varphi_k(t)\,(k = r, r+1, \ldots)$ образуют в $W^r[0,\infty)$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (1.1). Справедливость равенства $< \varphi_k, \varphi_l >= \delta_{kl}$ в случаях, когда $k,l \leqslant r-1$ и $k \leqslant r-1, l \geqslant r$ очевидна. Итак, система $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^\infty$ ортонормирована в $W^r[0,\infty)$ относительно скалярного произведения (1.1). Остается убедиться в ее полноте в $W^r[0,\infty)$. С этой целью покажем, что если некоторой функции $f = f(x) \in W^r[0,\infty)$ и для всех $k = 0,1,\ldots$ справедливы равенства $< f, \varphi_k >= 0$, то $f(x) \equiv 0$. В самом деле, если $k \leqslant r-1$, то $< f, \varphi_k >= f^{(k)}(0)$, поэтому с учетом того, что $< f, \varphi_k >= 0$, для нашей функции $f(x)$ формула Тейлора (3.3) приобретает вид

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt. \tag{5.5}$$

С другой стороны, для всех $k \geqslant r$ имеем

$$0 =< f, \varphi_k >= \int_0^\infty e^{-x} f^{(r)}(x) \frac{d^r}{dx^r} L_k^{-r}(x) dx = (-1)^r \int_0^\infty L^0_{k-r}(x) f^{(r)}(x) e^{-x} dx.$$

Отсюда и из того, что полиномы Лагерра $L^0_m(x)$ $(m = 0,1,\ldots)$ образуют в $\mathcal{L}_{2,\rho}$ полную ортонормированную систему, имеем $f^{(r)}(x) = 0$ почти всюду на $[0,\infty)$. Поэтому, в силе (5.5) $f(x) \equiv 0$. Теорема 1 доказана.

Замечание 5.1. Соотношение ортогональности (5.4) *ранее было установлено в работе* [1]

Пусть $f(x) \in W^r[0,\infty)$. Тогда мы можем рассмотреть коэффициенты Фурье этой функции

$$\hat{f}_k =< f, \varphi_k >= f^{(k)}(0), \quad 0 \leqslant k \leqslant r-1, \tag{5.6}$$

$$\hat{f}_k =< f, \varphi_k >= \int_0^\infty e^{-x} f^{(r)}(x) \frac{d^r}{dx^r} L_k^{-r}(x)dx, \quad k \geqslant r \tag{5.7}$$

и ее ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k(t) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \hat{f}_k L_k^{-r}(t). \tag{5.8}$$

С другой стороны, из (5.7) и (3.1) с учетом $\left(L_k^{-r}(t)\right)^{(r)} = (-1)^r L_{k-r}^0(t)$ имеем

$$\hat{f}_k = \int_0^\infty e^{-x} f^{(r)}(x) L_{k-r}^0(x)dx = (-1)^r f_{r,k-r}^0 \tag{5.9}$$

Из (5.8) и (5.9) получаем

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^0 L_{k+r}^{-r}(t). \tag{5.10}$$

Сопоставляя (5.10) с (3.13), заключаем, что ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^\infty$ относительно скалярного произведения (1.1) совпадает со смешанным рядом по полиномам Лагерра $L_k^0(t)$. Это позволяет использовать при исследовании аппроксимативных свойств ряда Фурье (5.8) методы и подходы, разработанные ранее в работах автора [7] – [12] для решения аналогичной задачи для смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в том числе и по полиномам Лагерра. Например, в качестве следствия теоремы 1 может быть сформулирована

Теорема 3. *Пусть $r \geqslant 1$, $A > 0$, $f \in W^r[0,\infty)$. Тогда ряд Фурье* (5.8) *сходится равномерно относительно $x \in [0, A]$ и для произвольного $x \in [0,\infty)$ имеет место равенство*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \hat{f}_k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \hat{f}_k L_k^{-r}(t). \tag{5.11}$$

6. Неравенство Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра

Через $\mathcal{L}_n^\alpha(f) = \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$ обозначим частичную сумму специального ряда (4.5) вида

$$\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t) = P_{r-1}(f) + t^r \sum_{k=0}^{n-r} \hat{f}_{r,k}^\alpha L_k^\alpha(t).$$

Заметим, что если $f(t) = q_n(t)$ представляет собой алгебраический полином степени n, то при $\alpha > -1$

$$\mathcal{L}_n^\alpha(q_n)(t) \equiv q_n(t),$$

другими словами, оператор $\mathcal{L}_n^\alpha(f)$ является проектором на подпространство H^n, состоящем из алгебраических полиномов степени n. Это свойство частичных сумм $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$ играет важную роль при решении задачи об оценке отклонения $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$ от исходной функции $f = f(t)$. Эта задача является одной из основных в настоящей работе.

Пусть $f(t)$ – непрерывная функция, заданная на полуоси $[0, \infty)$ и такая, что в точке $t = 0$ существуют производные $f^{(\nu)}(0)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, r-1)$. Кроме того будем считать, что для всех $k = 0, 1, \ldots$ существуют коэффициенты $\hat{f}_{r,k}^\alpha$, определяемые равенством (4.3). Тогда мы можем определить специальный ряд (4.5) и его частичную сумму $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$. В настоящем параграфе рассмотрены некоторые вопросы, которые касаются сходимости $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$ к $f(x)$ при $n \to \infty$. В первую очередь рассмотрим задачу об оценке величины

$$R_{n,r}^\alpha(f)(t) = |f(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)| t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}}. \tag{6.1}$$

Весовой множитель $t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}$, фигурирующий в правой части равенства (6.1), связан с тем обстоятельством, что разность $|f(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)|$ стремится к нулю вместе с t со скоростью, не меньшей, чем $t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}$. Обозначим через $q_n(t)$ - алгебраический полином степени n, для которого

$$f^{(\nu)}(0) = q_n^{(\nu)}(0) \ (\nu = 0, 1, \ldots, r-1). \tag{6.2}$$

Тогда

$$f(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t) = f(t) - q_n(t) + q_n(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t) =$$

$$f(t) - q_n(t) + \mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t), \tag{6.3}$$

поэтому в силу (6.1) и (6.3)

$$|R_{n,r}(f)(t)| \leqslant |f(t) - q_n(t)| t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} + |\mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t)| t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}}. \tag{6.4}$$

С другой стороны, в силу (6.2) $P_{r-1}(q_n - f) \equiv 0$, поэтому имеем

$$\mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t) = t^r \sum_{k=0}^{n-r} (\widehat{q_n - f})_{r,k} L_k^\alpha(t) =$$

$$t^r \sum_{k=0}^{n-r} \frac{1}{h_k^\alpha} \int\limits_0^\infty (q_n(\tau) - f(\tau)) \tau^{\alpha-r} e^{-\tau} L_k^\alpha(\tau) L_k^\alpha(t) d\tau.$$

Отсюда

$$e^{-\frac{t}{2}} t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t) =$$

$$e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_0^\infty (q_n(\tau) - f(\tau)) e^{-\tau} \tau^{\alpha-r} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{L_k^\alpha(t) L_k^\alpha(\tau)}{h_k^\alpha} d\tau. \tag{6.5}$$

Положим
$$E_n^r(f) = \inf_{q_n} \sup_{t>0} |q_n(t) - f(t)| e^{-\frac{t}{2}} t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}, \tag{6.6}$$
где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_n(t)$ степени n для которых $f^{(\nu)}(0) = q_n^{(\nu)}(0)$ $(\nu = 0, \dots, r-1)$. Тогда из (6.5) находим
$$e^{-\frac{t}{2}} t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} |\mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t)| \leqslant E_n^r(f) \lambda_{r,n}^\alpha(t), \tag{6.7}$$
где
$$\lambda_{r,n}^\alpha(t) = t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau+t}{2}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} |\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)| d\tau, \tag{6.8}$$
а ядро $\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)$ определяется равенством (2.5). Из (6.4), (6.6) – (6.8) выводим следующее неравенство типа Лебега
$$|R_{n,r}^\alpha(f)(t)| \leqslant E_n^r(f)(1 + \lambda_{r,n}^\alpha(t)). \tag{6.9}$$
В связи с неравенством (6.9) возникает задача об оценке функции Лебега $\lambda_{r,n}^\alpha(t)$, определяемой равенством (6.8). С этой целью мы введем следующие обозначения: $G_1 = [0, \frac{3}{\theta_n}]$, $G_2 = [\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}]$, $G_3 = [\frac{\theta_n}{2}, \frac{3\theta_n}{2}]$, $G_4 = [\frac{3\theta_n}{2}, \infty]$. Мы будем оценивать $\lambda_{r,n}^\alpha(t)$ для $t \in G_s$ $(s = 1, 2, 3, 4)$.

Теорема 4. *Пусть* $1 \leqslant r$ *– целое,* $r - \frac{1}{2} < \alpha < r + \frac{1}{2}$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$. *Тогда имеют место следующие оценки:*

1) если $t \in G_1 = [0, \frac{3}{\theta_n}]$, *то*
$$\lambda_{r,n}^\alpha(t) \leqslant c(\alpha, r)[\ln(n+1) + n^{\alpha-r}]; \tag{6.10}$$
2) если $t \in G_2 = [\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}]$, *то*
$$\lambda_{r,n}^\alpha(t) \leqslant c(\alpha, r) \left[\ln(n+1) + \left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right]; \tag{6.11}$$
3) если $t \in G_3 = [\frac{\theta_n}{2}, \frac{3\theta_n}{2}]$, *то*
$$\lambda_{r,n}^\alpha(t) \leqslant c(\alpha, r) \left[\ln(n+1) + \left(\frac{t}{\theta_n^{\frac{1}{3}} + |t - \theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right]; \tag{6.12}$$
4) если $t \in G_4 = [\frac{3\theta_n}{2}, \infty)$, *то*
$$\lambda_{r,n}^\alpha(t) \leqslant c(\alpha, r) n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}} t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{4}}. \tag{6.13}$$

7. Доказательство теоремы 4

Нам понадобятся некоторые преобразования для ядер $\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau)$, определенных равенством (2.8). Пользуясь равенством (2.11) мы можем записать
$$\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau) = \frac{\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{\tau - t} \left[\hat{L}_{n+1}^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau) - \hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_{n+1}^\alpha(\tau)\right], \tag{7.1}$$

откуда, полагая $\alpha_n = \sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}$, имеем

$$\frac{1}{\alpha_n}\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau) = \frac{1}{\tau - t}\left[\hat{L}_{n+1}^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau) - \hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_{n+1}^\alpha(\tau)\right] \tag{7.2}$$

$$\frac{1}{\alpha_{n-1}}\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau) = \frac{1}{\tau - t}\left[\hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_{n-1}^\alpha(\tau) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau)\right] + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau). \tag{7.3}$$

Складывая правые и левые части равенств (7.2) и (7.3), имеем

$$\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau) = \frac{1}{\alpha_{n-1}}\hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau) +$$
$$\frac{1}{\tau - t}\left[\hat{L}_n^\alpha(\tau)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(t) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(t)\right) - \hat{L}_n^\alpha(t)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(\tau) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(\tau)\right)\right],$$

стало быть,

$$\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n-1}}\hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau) +$$
$$\frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{(\alpha_n + \alpha_{n-1})(\tau - t)}\left[\hat{L}_n^\alpha(\tau)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(t) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(t)\right) - \hat{L}_n^\alpha(t)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(\tau) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(\tau)\right)\right]. \tag{7.4}$$

Перейдем к доказательству оценки (6.10). Пусть $t \in G_1$,

$$I_1(t) = t^{r/2+1/4}\int_0^{4/\theta_n} e^{-\frac{\tau+t}{2}}\tau^{\alpha - r/2 - 1/4}\left|\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)\right| d\tau, \tag{7.5}$$

$$I_2(t) = t^{r/2+1/4}\int_{4/\theta_n}^{\infty} e^{-\frac{\tau+t}{2}}\tau^{\alpha - r/2 - 1/4}\left|\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)\right| d\tau. \tag{7.6}$$

Тогда из (6.8) имеем

$$\lambda_{r,n}^\alpha(t) \leqslant I_1(t) + I_2(t). \tag{7.7}$$

Оценим $I_1(t)$. Из (2.5), (2.12) – (2.15) имеем

$$|\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)| \leqslant c(\alpha)\sum_{k=0}^{n-r}\frac{B_k^\alpha(t)B_k^\alpha(\tau)}{\theta_k^\alpha} \leqslant c(\alpha)\sum_{k=0}^{n-r}\theta_k^\alpha \leqslant c(\alpha)\theta_n^{\alpha+1}.$$

Поэтому из (7.5) находим

$$I_1(t) \leqslant c(\alpha)\theta_n^{-r/2-1/4}\int_0^{4/\theta_n}\tau^{\alpha - r/2 - 1/4}\theta_n^{\alpha+1}dt \leqslant$$
$$c(\alpha)\theta_n^{\alpha - r/2 + 3/4}\left(\frac{4}{\theta_n}\right)^{\alpha - r/2 + 3/4} \leqslant c(\alpha). \tag{7.8}$$

Оценим $I_2(t)$. С этой целью обратимся к формуле (7.4) и запишем

$$I_2(t) \leqslant I_{21} + I_{22} + I_{23}, \tag{7.9}$$

где

$$I_{21} = \frac{\alpha_n e^{-\frac{t}{2}}}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} |\hat{L}_n^\alpha(t)| t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_{4/\theta_n}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{2}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} |\hat{L}_n^\alpha(\tau)| d\tau,$$

$$I_{22} = \frac{\alpha_n \alpha_{n-1} e^{-\frac{t}{2}}}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} |\hat{L}_{n+1}^\alpha(t) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(t)| t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_{4/\theta_n}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\tau}{2}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} |\hat{L}_n^\alpha(\tau)|}{\tau - t} d\tau,$$

$$I_{23} = \frac{\alpha_n \alpha_{n-1} e^{-\frac{t}{2}}}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} |\hat{L}_n^\alpha(t)| t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_{4/\theta_n}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\tau}{2}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} |\hat{L}_{n+1}^\alpha(\tau) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(\tau)|}{\tau - t} d\tau.$$

Положим

$$W = \int\limits_{4/\theta_n}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{2}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} |\hat{L}_n^\alpha(\tau)| d\tau = W_1 + W_2, \tag{7.10}$$

где

$$W_1 = \int\limits_{4/\theta_n}^{3\theta_n/2} e^{-\tau/2} \tau^{\alpha-r/2-1/4} |\hat{L}_n^\alpha(\tau)| d\tau, \tag{7.11}$$

$$W_2 = \int\limits_{3\theta_n/2}^{\infty} e^{-\tau/2} \tau^{\alpha-r/2-1/4} |\hat{L}_n^\alpha(\tau)| d\tau. \tag{7.12}$$

Пользуясь неравенством Коши-Шварца имеем:

$$W_1 \leqslant \left(\int\limits_{4/\theta_n}^{3\theta_{n/2}} \tau^{\alpha-r-1/2} d\tau \right)^{1/2} \left(\int\limits_{4/\theta_n}^{3\theta_n/2} \tau^\alpha e^{-\tau} (\hat{L}_n^\alpha(\tau))^2 \right)^{1/2} <$$
$$\left[\frac{1}{\alpha - r + \frac{1}{2}} \left(\left(\frac{3\theta_n}{2} \right)^{\alpha-r+1/2} - \left(\frac{4}{\theta_n} \right)^{\alpha-r+1/2} \right) \right]^{1/2} \leqslant c(\alpha, r) \theta_n^{\frac{\alpha-r+1/2}{2}}. \tag{7.13}$$

Далее, в силу (7.12) с учетом (2.12) и (2.13) имеем

$$W_2 \leqslant c(\alpha, r) \int\limits_{3\theta_n/2}^{\infty} \tau^{\alpha-r/2-1/4} e^{-\tau/4} d\tau =$$
$$c(\alpha, r) \int\limits_{\frac{3}{2}(4n+2\alpha+r)}^{\infty} \tau^{\alpha-r/2-1/4} e^{-\tau/4} d\tau \leqslant c(\alpha, r) e^{-n}. \tag{7.14}$$

Из (7.10)-(7.14) находим

$$W \leqslant c(\alpha, r)\theta_n^{\frac{\alpha-r+1/2}{2}}.$$

Отсюда и из (2.13) следует, что если $r-\frac{1}{2}<\alpha\leqslant r+\frac{1}{2}$, то

$$I_{21} \leqslant c(\alpha,r)\theta_n^{\alpha/2}\theta_n^{-r/2-1/4}\theta_n^{\frac{\alpha-r+1/2}{2}} = c(\alpha,r)\theta_n^{\alpha-r} \leqslant c(\alpha,r)n^{\alpha-r}. \tag{7.15}$$

Оценим I_{22}. В силу (2.12) – (2.14)

$$I_{22} \leqslant c(\alpha)nt^{r/2+1/4}\left|\hat{L}_{n+1}^\alpha(t)-\hat{L}_{n-1}^\alpha(t)\right|\int\limits_{4/\theta_n}^{\infty}\frac{\theta_n^{-\alpha/2}B_n^\alpha(\tau)\tau^{\alpha-r/2-1/4}}{\tau-t}d\tau \leqslant$$

$$c(\alpha)\theta_n^{-r/2-1/4+1}\theta_n^{\alpha/2-1}\theta_n^{-\alpha/2}\int\limits_{4/\theta_n}^{\infty}\frac{B_n^\alpha(\tau)\tau^{\alpha-r/2-1/4}}{\tau-t}d\tau =$$

$$\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{r/2+1/4}}\int\limits_{4/\theta_n}^{\infty}\frac{B_n^\alpha(\tau)\tau^{\alpha-r/2-1/4}}{\tau-t}d\tau = I'_{22}+I''_{22}+I'''_{22}, \tag{7.16}$$

где

$$I'_{22} = \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{r/2+1/4}}\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_n/2}\frac{B_n^\alpha(\tau)\tau^{\alpha-r/2-1/4}}{\tau-t}d\tau,$$

$$I''_{22} = \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{r/2+1/4}}\int\limits_{\theta_n/2}^{3\theta_n/2}\frac{B_n^\alpha(\tau)\tau^{\alpha-r/2-1/4}}{\tau-t}d\tau,$$

$$I'''_{22} = \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{3\theta_{n/2}}^{\infty}\frac{B_n^\alpha(r)\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau.$$

Пользуясь определением функции $B_n^\alpha(t)$ (см. (2.12)) имеем

$$I'_{22} \leqslant \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_{n/2}}\frac{\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau =$$

$$\frac{c(\alpha)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_{n/2}}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{\tau-t}d\tau \leqslant c(\alpha)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}\int\limits_{4/\theta}^{\theta_{n/2}}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{3}{2}}d\tau \leqslant$$

$$c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}\theta_n^{-\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}} = c(\alpha,r), \tag{7.17}$$

$$I''_{22} \leqslant \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{\theta_{n/2}}^{3\theta_{n/2}}\frac{[\theta_n(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)]^{-\frac{1}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau \leqslant$$

$$\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\theta_{n/2}}^{3\theta_{n/2}}(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)^{-\frac{1}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}d\tau\leqslant$$

$$\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\theta_{n/2}}^{3\theta_{n/2}}(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)^{-\frac{1}{4}}\theta_n^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha)\theta_n^{\alpha-r-\frac{3}{4}}\theta_n^{\frac{3}{4}}=c(\alpha)\theta_n^{\alpha-r}. \tag{7.18}$$

Далее, для I_{22}''' из (7.19) имеем

$$I_{22}'''\leqslant\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{3\theta_{n/2}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\tau}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau\leqslant\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{3\theta_{n/2}}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha,r)n^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-n}. \tag{7.19}$$

Собирая оценки (7.17) – (7.19) и сопоставляя их с (7.16), выводим

$$I_{22}\leqslant c(\alpha,r)(1+\theta_n^{\alpha-r}). \tag{7.20}$$

Перейдем к оценке I_{23} при $t\in G_1$. Используя оценки (2.12) – (2.14), мы можем записать

$$I_{23}\leqslant c(\alpha)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{\alpha}\theta_n^{-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}[H_1+H_2+H_3]=c(\alpha)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{3}{4}}[H_1+H_2+H_3], \tag{7.21}$$

где

$$H_1=\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_{n/2}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{3}{4}}\tau^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{\tau-t}=$$

$$\theta_n^{-\frac{3}{4}}\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_{n/2}}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-1}d\tau\leqslant\theta_n^{-\frac{3}{4}}\begin{cases}2\ln\theta_n-3\ln 2, & \alpha=r,\\ \dfrac{2}{\alpha-r}\left[\left(\dfrac{\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}}{2}\right)-\left(\dfrac{4}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right], & \alpha\neq r,\end{cases} \tag{7.22}$$

$$H_2=\theta_n^{-\frac{3}{4}}\int\limits_{\theta_{n/2}}^{3\theta_{n/2}}\frac{\tau^{-\frac{\alpha}{2}}(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)^{\frac{1}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau\leqslant$$

$$\theta_n^{-\frac{3}{4}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{5}{4}}\int\limits_{\theta_{n/2}}^{3\theta_{n/2}}(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)^{\frac{1}{4}}d\tau\leqslant c\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-2}\theta_n^{\frac{5}{4}}\leqslant c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{3}{4}}, \tag{7.23}$$

$$H_3=\int\limits_{3\theta_{n/2}}^{\infty}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{4}}}{\tau-t}d\tau<\int\limits_{3\theta_{n/2}}^{\infty}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}e^{-\frac{\tau}{4}}d\tau\leqslant c(\alpha,r)e^{-n}. \tag{7.24}$$

Из (7.22) – (7.24) имеем

$$I_{23}\leqslant c(\alpha,r)\theta_n^{\alpha-r}. \tag{7.25}$$

Из оценок (7.9), (7.15), (7.16), (7.20) и (7.25) выводим

$$I_2(t) \leqslant c(\alpha, r) \begin{cases} \ln n, & \text{если } \alpha = r, \\ n^{\alpha - r}, & \text{если } \alpha \neq r. \end{cases} \tag{7.26}$$

А из (7.7), (7.8) и (7.26) имеем

$$l_{r,n}^{\alpha}(t) \leqslant c(\alpha, r) \begin{cases} \ln n, & \text{если } \alpha = r, \\ n^{\alpha - r}, & \text{если } \alpha \neq r. \end{cases}$$

Тем самым оценка (6.10) доказана.

Перейдем к доказательству оценки (6.11). Пусть $t \in G_2 = \left[\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}\right]$. Тогда мы можем записать $(0, \infty) = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, где

$$Q_1 = [0, t - \sqrt{t/\theta_n}], Q_2 = [t - \sqrt{t/\theta_n}, t + \sqrt{t/\theta_n}], Q_3 = [t + \sqrt{t/\theta_n}, \infty).$$

Используя эти обозначения, из (6.8) имеем

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t) = J_1 + J_2 + J_3, \tag{7.27}$$

где

$$J_k = t^{\frac{r}{2} + \frac{1}{4}} \int\limits_{Q_k} e^{-\frac{\tau + t}{2}} \tau^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}} |\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t, \tau)| d\tau \quad (1 \leqslant k \leqslant 3). \tag{7.28}$$

Оценим J_2. Для этого сначала заметим, что в силу неравенства Коши-Шварца

$$|\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t, \tau)| \leqslant (\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t, t))^{1/2} (\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau, \tau))^{1/2}. \tag{7.29}$$

Далее, если $3/\theta_n \leqslant t \leqslant 3\theta_n/2$, то $t - \sqrt{t/\theta_n} \geqslant 1/\theta_n$, кроме того для $\tau \in [t - \sqrt{t/\theta_n}, t + \sqrt{t/\theta_n}]$ имеем $c_1 t \leqslant \tau \leqslant c_2 t$. Поэтому из (7.28) и (7.29) имеем

$$J_2 = \int\limits_{Q_2} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{r/2 + 1/4} \tau^{\alpha} e^{-\frac{\tau + t}{2}} |\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t, \tau)| d\tau \leqslant$$

$$c \int\limits_{Q_2} \tau^{\alpha} e^{-\frac{\tau + t}{2}} (\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t, t))^{1/2} (\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau, \tau))^{1/2} d\tau \leqslant$$

$$c (e^{-t} \mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t, t))^{1/2} \int\limits_{Q_2} \tau^{\alpha} (e^{-\tau} \mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau, \tau))^{1/2} d\tau. \tag{7.30}$$

Неравенство (7.30) приводит, в свою очередь, к задаче об оценке для $e^{-\tau} \mathcal{K}_n^{\alpha}(\tau, \tau)$ при $3/\theta_n \leqslant \tau \leqslant 3\theta_n/2$. Следующее утверждение дает ответ на этот вопрос.

Лемма 7.1. *Пусть $\alpha > -1$, $\theta_k = 4k + 2\alpha + 2$, $\tau \geqslant 3/\theta_n$. Тогда имеет место оценка*

$$e^{-\tau} \mathcal{K}_n^{\alpha}(\tau, \tau) \leqslant c(\alpha) \tau^{-\alpha - 1/2} n^{1/2}. \tag{7.31}$$

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев: a) $1/\theta_n \leqslant \tau \leqslant 1/\sqrt{2}$; b) $1/\sqrt{2} < \tau \leqslant \sqrt{3/2}$; c) $\sqrt{3/2} < \tau$. В случае a) имеем $1/\theta_n \leqslant \tau \leqslant 1/\sqrt{2}$, откуда $0 < 2\tau \leqslant 1/\tau$. Через k_1 обозначим наибольшее натуральное число, для которого $\theta_{k_1} \leqslant 1/\tau$, следовательно, $\tau \leqslant 1/\theta_k$ при $k \leqslant k_1$ и $\tau > 1/\theta_k$ при $k \geqslant k_1+1$, стало быть, $\theta_k > 1/\tau \geqslant 2\tau$. Тем самым для $k \geqslant k_1+1$ имеем $1/\theta_k < \tau < \theta_k/2$. Эти неравенства вместе с оценкой (2.13) дают

$$e^{-\tau}\mathcal{K}_n^\alpha(\tau,\tau) \leqslant \sum_{k=0}^{k_1} e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2 + \sum_{k=k_1+1}^{n} e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2 \leqslant$$

$$c(\alpha)\sum_{k=0}^{k_1}(k+1)^{-\alpha}\theta_k^{2\alpha} + c(\alpha)\sum_{k=k_1+1}^{n}(k+1)^{-\alpha}\theta_k^{\alpha-1/2}\tau^{-\alpha-1/2} \leqslant$$

$$c(\alpha)k_1^{\alpha+1} + c(\alpha)n^{\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-1/2} \leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-1} + c(\alpha)n^{\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-1/2} \leqslant$$

$$c(\alpha)(\tau^{-1/2} + n^{1/2})\tau^{-\alpha-1/2} \leqslant c(\alpha)n^{\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-1/2}. \tag{7.32}$$

Тем самым оценка (7.31) в случае a) доказана. Перейдем к случаю b): $1/\sqrt{2} < \tau \leqslant \sqrt{3/2}$. В этом случае нетрудно заметить, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место неравенство $1/\theta_k < \tau < \theta_k/2$. Действительно,

$$\frac{1}{\theta_k} \leqslant \frac{1}{\theta_1} \leqslant \frac{1}{4+2\alpha+2} < \frac{1}{4} < \tau \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2} < \frac{1}{2}(4+2\alpha+2) = \frac{1}{2}\theta_1 \leqslant \frac{1}{2}\theta_k.$$

Кроме того $\frac{1}{2} < \tau^2 < \frac{3}{2}$ и, стало быть, $\frac{2}{3}\tau < \frac{1}{\tau} < 2\tau$. Из этих неравенств и оценки (2.13) имеем

$$e^{-\tau}\mathcal{K}_n^\alpha(\tau,\tau) \leqslant e^{-\tau}(\hat{L}_0^\alpha(\tau))^2 + \sum_{k=1}^{n} e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2 \leqslant$$

$$c(\alpha)\left[e^{-\tau} + \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}\theta_k^{\alpha-1/2}\tau^{-\alpha-1/2}\right] \leqslant$$

$$c(\alpha)\left[e^{-\tau} + \sum_{k=1}^{n} \theta_k^{-1/2}\tau^{-\alpha-1/2}\right] \leqslant$$

$$c(\alpha)\left[e^{-\tau} + n^{1/2}\tau^{-\alpha-1/2}\right] \leqslant c(\alpha)n^{1/2}\tau^{-\alpha-1/2}.$$

Отсюда следует, что оценка (7.31) верна и в случае b). Перейдем к случаю c): $\sqrt{3/2} \leqslant \tau$. Нетрудно заметить, что если произвольные фиксированные числа a и b таковы, что $0 < a < b < \infty$, то для $a \leqslant \tau \leqslant b$ оценка (7.31) непосредственно вытекает из неравенства (2.13). Поэтому мы можем считать, что $b \leqslant \tau$, где b – достаточно большое фиксированное число. Обозначим через m и q натуральные числа, для которых

$$\frac{3}{2}\theta_m \leqslant \tau < \frac{3}{2}\theta_{m+1}, \quad \frac{1}{2}\theta_q \leqslant \tau < \frac{1}{2}\theta_{q+1}. \tag{7.33}$$

Тогда мы можем записать

$$e^{-\tau}\mathcal{K}_n^\alpha(\tau,\tau)=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3, \tag{7.34}$$

$$\Sigma_1=\sum_{k=0}^{m}e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2, \tag{7.35}$$

$$\Sigma_2=\sum_{k=m+1}^{q}e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2, \tag{7.36}$$

$$\Sigma_3=\sum_{k=q+1}^{n}e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2. \tag{7.37}$$

Из определения чисел m и q имеем

$$\frac{3}{2}\theta_k\leqslant\tau,\quad \text{если}\quad 1\leqslant k\leqslant m;$$

$$\frac{1}{2}\theta_k\leqslant\tau<\frac{3}{2}\theta_k,\quad \text{если}\quad m+1\leqslant k\leqslant q;$$

$$\sqrt{3/2}\leqslant\tau\leqslant\frac{1}{2}\theta_k,\quad \text{если}\quad q+1\leqslant k.$$

Это позволяет при оценке Σ_1, Σ_2, Σ_3 использовать неравенство (2.13). С учетом выбора m и q (см.(7.33)) и обозначений (7.35) – (7.37) имеем

$$\Sigma_1\leqslant c(\alpha)\sum_{k=0}^{m}\theta_k^\alpha e^{-\tau/2}\leqslant c(\alpha)\tau^\alpha e^{-\tau/2}m\leqslant c(\alpha)\tau^{\alpha+1}e^{-\tau/2}\leqslant c(\alpha), \tag{7.38}$$

$$\Sigma_2\leqslant c(\alpha)\sum_{k=m+1}^{q}\theta_k^{-\alpha}[\theta_k(\theta_k^{1/3}+|\tau-\theta_k|)]^{-1/2}$$

$$=c(\alpha)\sum_{k=m+1}^{q}\theta_k^{-\alpha-\frac{1}{2}}(\theta_k^{1/3}+|\tau-\theta_k|)^{-1/2}\leqslant$$

$$=c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=m+1}^{q}(\theta_k^{1/3}+|\tau-\theta_k|)^{-1/2}$$

$$\leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}(\theta_k^{1/3}+|\tau-\theta_k|)^{-1/2}\leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{1/2}, \tag{7.39}$$

$$\Sigma_3\leqslant c(\alpha)\sum_{k=q+1}^{n}\theta_k^{-\alpha}\theta_k^{\alpha-\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=q+1}^{n}\theta_k^{-\frac{1}{2}}\leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{1/2}. \tag{7.40}$$

Из (7.34) – (7.40) имеем

$$e^{-\tau}\mathcal{K}_n^\alpha(\tau,\tau)\leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{1/2},$$

где $\sqrt{3/2}\leqslant\tau$. Тем самым лемма 5.1 доказана полностью.

Лемма 7.2. *Пусть* $u=\sqrt{t/\theta_n}$, $\alpha>-1$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $3/\theta_n\leqslant t\leqslant 3\theta_n/2$. *Тогда имеет место оценка*

$$I=(e^{-t}\mathcal{K}_n^\alpha(t,t))^{1/2}\int_{Q_2}\tau^\alpha(e^{-\tau}\mathcal{K}_n^\alpha(\tau,\tau))^{1/2}d\tau\leqslant c(\alpha). \tag{7.41}$$

Доказательство. Из леммы 5.1 имеем (т.к. $t\asymp\tau$)

$$I\leqslant c(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}n^{1/4}\int_{t-u}^{t+u}\tau^\alpha\tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}n^{1/4}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}n^{1/2}u=c(\alpha)n^{1/2}t^{-1/2}u\leqslant c(\alpha)n^{1/2}t^{-1/2}\sqrt{t/\theta_n}\leqslant c(\alpha).$$

Лемма 5.2 доказана.

Из равенства (7.28) и леммы 5.2 выводим

$$J_2\leqslant c(\alpha). \tag{7.42}$$

Оценим J_3 при $t\in G_2$. Воспользовавшись равенствами (7.28) и (7.4) мы можем записать

$$J_3\leqslant c(\alpha)(J_{31}+J_{32}+J_{33}), \tag{7.43}$$

где

$$J_{31}=t^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-t/2}|\hat L_{n-r}^\alpha(t)|\int_{Q_3}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\tau/2}|\hat L_{n-r}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.44}$$

$$J_{32}=nt^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}|\hat L_{n-r+1}^\alpha(t)-\hat L_{n-r-1}^\alpha(t)|\int_{Q_3}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat L_{n-r}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.45}$$

$$J_{33}=nt^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}|\hat L_{n-r}^\alpha(t)|\int_{Q_3}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat L_{n-r+1}^\alpha(\tau)-\hat L_{n-r-1}^\alpha(\tau)|d\tau. \tag{7.46}$$

Чтобы оценить величину J_{31} представим ее в следующем виде

$$J_{31}=J_{31}^1+J_{31}^2+J_{31}^3, \tag{7.47}$$

в котором $(k=1,2,3)$

$$J_{31}^k=t^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-t/2}|\hat L_{n-r}^\alpha(t)|\int_{Q_{31}^k}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\tau/2}|\hat L_{n-r}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.48}$$

где $Q_{31}^1=(t+\sqrt{t/\theta_n},\theta_n/2)$, $Q_{31}^2=(\theta_n/2,3\theta_n/2)$, $Q_{31}^3=(3\theta_n/2,\infty)$. Обратимся к неравенству (2.13), тогда из (7.48) находим

$$J_{31}^1\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac12}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{31}^1}\tau^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac12}d\tau=$$

$$\frac{c(\alpha,r)}{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}n^{-\frac12}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\left[\left(\frac{\theta_n}{2}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}-\left(t+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}\right]\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}, \tag{7.49}$$

$$
\begin{aligned}
J_{31}^2 &\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{31}^2}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{4}}d\tau}{(\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|)^{1/4}}\\
&\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac{3}{4}+\frac{\alpha-r}{2}}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{31}^2}\frac{d\tau}{(\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|)^{1/4}}\\
&\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\int_{Q_{32}^2}\frac{d\tau}{(\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|)^{1/4}}\\
&\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}2n^{-\frac{3}{4}}\int_{\theta_n}^{3\theta_n/2}\frac{d\tau}{(\tau+\theta_n^{1/3}-\theta_n)^{1/4}}\\
&\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}},
\end{aligned}
\tag{7.50}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{31}^3 &\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac{1}{4}}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{31}^3}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-\tau/4}d\tau\\
&\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{31}^3}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\tau/4}d\tau\\
&\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}n^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}.
\end{aligned}
\tag{7.51}
$$

Из (7.47), (7.49) – (7.51) выводим

$$
J_{31}\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\qquad (t\in G_2, r-\frac{1}{2}<\alpha<r+\frac{1}{2}). \tag{7.52}
$$

Переходя к оценке величины J_{32}, представим ее в виде

$$
J_{32}=J_{32}^1+J_{32}^2+J_{32}^3, \tag{7.53}
$$

в котором $(k=1,2,3)$

$$
J_{32}^k=nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}|\hat{L}_{n-r+1}^\alpha(t)-\hat{L}_{n-r-1}^\alpha(t)|\int_{Q_{32}^k}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat{L}_{n-r}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.54}
$$

где $Q_{32}^1=(t+\sqrt{t/\theta_n},\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n})$, $Q_{32}^2=(\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n},3\theta_n/2)$, $Q_{32}^3=(3\theta_n/2,\infty)$. Обратимся к неравенству (2.13), тогда из (7.48) находим

$$
J_{32}^1\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\int_{Q_{32}^1}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{\tau-t}d\tau\leqslant
$$

$$
c(\alpha,r)\int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{2t}\frac{d\tau}{\tau-t}+c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{2t}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{3}{2}}d\tau\leqslant
$$

$$
c(\alpha,r)\ln\frac{t}{\sqrt{t/\theta_n}}+\frac{c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}}}{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}-(2t)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}\right]
$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\ln\sqrt{\frac{\theta_n}{t}}+c(\alpha,r)\left[1-\left(\frac{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}\right]$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\ln\sqrt{\frac{\theta_n}{t}}, \tag{7.55}$$

$$J_{32}^2\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac r2+\frac14}\theta_n^{-\frac34}t^{-\frac\alpha2+\frac14}\int_{Q_{32}^2}\theta_n^{-\frac14}(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|)^{-\frac14}\frac{\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}d\tau}{\theta_n^{\frac\alpha2}(\tau-t)}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}\int_{Q_{32}^2}(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|)^{-\frac14}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}\left[\int\limits_{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n-\theta_n^{1/3}}+\int\limits_{\theta_n-\theta_n^{1/3}}^{3\theta_n/2}\right](\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|)^{-\frac14}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac nt\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\left(\ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}-1}+1\right)$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac nt\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}-1}, \tag{7.56}$$

$$J_{32}^3\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac r2+\frac14}\theta_n^{-\frac34}t^{-\frac\alpha2+\frac14}\int_{Q_{32}^3}e^{-\tau/4}\theta_n^{-\frac\alpha2}\tau^{\alpha-\frac r2-\frac54}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}n^{-\frac\alpha2+\frac14}\int_{Q_{32}^3}e^{-\tau/4}\tau^{\alpha-\frac r2-\frac54}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)e^{-3\theta_n/8}. \tag{7.57}$$

Из (7.53) – (7.57) выводим оценку

$$J_{32}\leqslant c(\alpha,r)\left[\ln\frac{\theta_n}{t}+\left(\frac nt\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}-1+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}}\right]. \tag{7.58}$$

Оценим J_{33} по той же схеме, что и J_{32}. Имеем представление

$$J_{33}=J_{33}^1+J_{33}^2+J_{33}^3, \tag{7.59}$$

в котором $(k=1,2,3)$

$$J_{33}^k=nt^{\frac r2+\frac14}e^{-\frac t2}|\hat L_{n-r}^\alpha(t)|\int_{Q_{33}^k}\frac{\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}e^{-\frac\tau2}}{\tau-t}|\hat L_{n-r+1}^\alpha(\tau)-\hat L_{n-r-1}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.60}$$

где $Q_{33}^1=(t+\sqrt{t/\theta_n},\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n})$, $Q_{33}^2=(\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n},3\theta_n/2)$, $Q_{33}^3=(3\theta_n/2,\infty)$. Обратимся к неравенству (2.13), тогда из (7.60) находим

$$J_{33}^1\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{33}^1}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}}}{\tau-t}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{2t}\frac{d\tau}{\tau-t}+c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{2t}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-1}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\left(\ln\sqrt{t\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right),\tag{7.61}$$

$$J_{33}^2\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac14}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\int_{Q_{33}^2}\theta_n^{-\frac34}(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|)^{\frac14}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}d\tau}{\tau-t}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{32}^2}\left(\frac{\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|}{\tau}\right)^{\frac14}\frac{\tau^{\frac{r-\alpha}{2}}d\tau}{\tau-t}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}\int\limits_{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n}\frac{(\theta_n^{\frac13}+\theta_n-\tau)^{1/4}}{\tau^{1/4}}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$+c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}\int\limits_{\theta_n}^{\frac{3\theta_n}{2}}\frac{(\theta_n^{\frac13}-\theta_n+\tau)^{1/4}}{\theta_n^{1+1/4}}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)(t/n)^{\frac{r-\alpha}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n-t}{\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}-t}\right)$$

$$=c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n/t-1}{\theta_n/(2t)+\sqrt{1/(t\theta_n)}-1}\right),\tag{7.62}$$

$$J_{33}^3\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac14}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\int_{Q_{33}^3}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{4}}d\tau}{\tau-t}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)n^{\frac34}\int_{Q_{33}^3}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac54}e^{-\frac{\tau}{4}}d\tau}{\tau-t}$$

$$=c(\alpha,r)e^{-\frac{3\theta_n}{8}}\leqslant c(\alpha,r)e^{-\frac{3n}{2}}.\tag{7.63}$$

Из (7.59) – (7.63) находим

$$J_{33}\leqslant c(\alpha,r)\leqslant\left[\ln\sqrt{t\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n/t-1}{\theta_n/(2t)+\sqrt{1/(t\theta_n)}-1}\right)\right],\tag{7.64}$$

а из (7.52), (7.58) и (7.64), в свою очередь, получаем

$$J_3\leqslant c(\alpha,r)\left[\ln\sqrt{t\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\ln\frac{\theta_n/t-1}{\theta_n/(2t)+\sqrt{1/(t\theta_n)}-1}\right].\tag{7.65}$$

Оценим J_1 при $t \in G_2$. Воспользовавшись равенствами (7.28) и (7.4) мы можем записать

$$J_1 \leqslant c(\alpha)(J_{11} + J_{12} + J_{13}), \tag{7.66}$$

где

$$J_{11} = t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-t/2} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(t)| \int_{Q_1} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\tau/2} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(\tau)| d\tau, \tag{7.67}$$

$$J_{12} = nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} |\hat{L}_{n-r+1}^{\alpha}(t) - \hat{L}_{n-r-1}^{\alpha}(t)| \int_{Q_1} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau - t} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(\tau)| d\tau \tag{7.68}$$

$$J_{13} = nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(t)| \int_{Q_1} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau - t} |\hat{L}_{n-r+1}^{\alpha}(\tau) - \hat{L}_{n-r-1}^{\alpha}(\tau)| d\tau. \tag{7.69}$$

Чтобы оценить величину J_{11} представим ее в следующем виде

$$J_{11} = J_{11}^1 + J_{11}^2, \tag{7.70}$$

в котором $(k = 1, 2)$

$$J_{11}^k = t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-t/2} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(t)| \int_{Q_1^k} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\tau/2} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(\tau)| d\tau, \tag{7.71}$$

где $Q_1^1 = (0, 1/\theta_n)$, $Q_1^2 = (1/\theta_n, t - \sqrt{t/\theta_n})$. Обратимся к к неравенству (2.13), тогда из (7.71) находим

$$\begin{gathered}
J_{11}^1 \leqslant c(\alpha, r)\theta_n^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{r-\alpha}{2}} \int_0^{1/\theta_n} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}} d\tau = \\
\frac{c(\alpha, r)}{\alpha - \frac{r}{2} + \frac{3}{4}} \theta_n^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{r-\alpha}{2}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}} \theta_n^{-\alpha+\frac{r}{2}-\frac{3}{4}} \leqslant \\
c(\alpha, r) \left(t\theta_n\right)^{\frac{r-\alpha}{2}} \theta_n^{-1} \leqslant c(\alpha, r)\theta_n^{-\frac{1}{2}},
\end{gathered} \tag{7.72}$$

$$\begin{gathered}
J_{11}^2 \leqslant c(\alpha, r)\theta_n^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{r-\alpha}{2}} \int_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{1}{4}} \tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} d\tau = \\
c(\alpha, r)\theta_n^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{r-\alpha}{2}} \int_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}} \tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}} d\tau = \\
\frac{c(\alpha, r)}{\frac{\alpha-r}{2} + \frac{1}{2}} \theta_n^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{r-\alpha}{2}} \left[\left(t - \sqrt{\frac{t}{\theta_n}} \right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{\theta_n} \right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}} \right] \leqslant \\
c(\alpha, r)(t/\theta_n)^{\frac{1}{2}},
\end{gathered} \tag{7.73}$$

Из (7.72) и (7.73) имеем

$$J_{11} \leqslant c(\alpha, r) \left[(t/\theta_n)^{\frac{1}{2}} + \theta_n^{-\frac{1}{2}} \right]. \tag{7.74}$$

Оценим J_{12}. С этой целью имеем

$$J_{12} = J_{12}^1 + J_{12}^2, \tag{7.75}$$

в котором $(k=1,2)$

$$J_{12}^k = nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}|\hat{L}_{n-r+1}^\alpha(t)-\hat{L}_{n-r-1}^\alpha(t)|\int_{Q_1^k}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat{L}_{n-r}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.76}$$

где Q_1^k имеет тот же смысл, что в (7.71). Обратимся снова к к неравенству (2.13), тогда из (7.74) выводим

$$\begin{aligned}J_{12}^1 &\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{3}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\int_0^{1/\theta_n}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{t-\tau}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}}d\tau\\ &\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\frac{1}{t}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\alpha+\frac{r}{2}-\frac{3}{4}}\\ &= c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\theta_n^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{2}} = c(\alpha,r)(t\theta_n)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{7.77}$$

$$\begin{aligned}J_{12}^2 &\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{3}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\int\limits_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{t-\tau}\theta_n^{-\frac{1}{4}}\tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}d\tau\\ &\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\int\limits_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{t-\tau}d\tau\\ &= c(\alpha,r)\int\limits_{1/(t\theta_n)}^{1-\sqrt{1/(t\theta_n)}}\frac{x^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{1-x}dx\\ &\leqslant c(\alpha,r)\int\limits_{1/(t\theta_n)}^{1/3}x^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}dx + c(\alpha,r)\int\limits_{1/3}^{1-\sqrt{1/(t\theta_n)}}\frac{dx}{1-x}dx\\ &\leqslant c(\alpha,r)\left(1+\ln\left(\frac{2}{3}\sqrt{t\theta_n}\right)\right).\end{aligned} \tag{7.78}$$

Из (7.75), (7.77) и (7.78) находим

$$J_{12} \leqslant c(\alpha,r)\left(1+\ln\left(\sqrt{t\theta_n}\right)\right). \tag{7.79}$$

Переходя к оценке J_{13}, запишем

$$J_{13} = J_{13}^1 + J_{13}^2, \tag{7.80}$$

в котором $(k=1,2)$

$$J_{13}^k = nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}|\hat{L}_{n-r}^\alpha(t)|\int_{Q_1^k}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat{L}_{n-r+1}^\alpha(\tau)-\hat{L}_{n-r-1}^\alpha(\tau)|d\tau. \tag{7.81}$$

Из (2.13) и (7.81) имеем

$$J_{13}^1 \leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\int_0^{1/\theta_n}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{t-\tau}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-1}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}\frac1t\int_0^{1/\theta_n}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)(t\theta_n)^{\frac{r-\alpha}{2}-1}, \tag{7.82}$$

$$J_{13}^2\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac14}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\int\limits_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}}{t-\tau}\theta_n^{-\frac34}\tau^{-\frac{\alpha}{2}+\frac14}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}}}{t-\tau}d\tau=c(\alpha,r)\int\limits_{1/(t\theta_n)}^{1-\sqrt{1/(t\theta_n)}}\frac{x^{\frac{\alpha-r}{2}}}{1-x}dx$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\left(1+\ln\left(\sqrt{t\theta_n}\right)\right), \tag{7.83}$$

Из (7.80) – (7.83) получаем

$$J_{13}\leqslant c(\alpha,r)\left(1+\ln\left(\sqrt{t\theta_n}\right)\right), \tag{7.84}$$

Оценки (7.66), (7.74), (7.79), (7.84), взятые вместе дают

$$J_1\leqslant c(\alpha,r)\left(1+\ln\left(t\theta_n\right)\right). \tag{7.85}$$

Собирая оценки (7.27), (7.42), (7.65) и (7.85), мы приходим к следующему неравенству

$$l_{r,n}^{\alpha}\leqslant c(\alpha,r)\left[\ln\sqrt{t\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\ln\frac{\theta_n/t-1}{\theta_n/(2t)+\sqrt{1/(t\theta_n)}-1}\right]$$

$$\leqslant c(\alpha,r)[\ln(n+1)+(n/t)^{\frac{\alpha-r}{2}}]\quad(t\in G_2). \tag{7.86}$$

Тем самым оценка (6.11) доказана.

Докажем (6.12). Пусть $t\in G_3=[\frac12\theta_n,\frac32\theta_n]$. Воспользуемся представлением (7.27) и оценим J_k $(1\leqslant k\leqslant 3)$. Что касается величины J_2, то для нее верна оценка (7.42). Поэтому остается оценить J_k для $k=1$ и $k=3$. Для $k=3$ мы воспользуемся оценкой (7.43). Чтобы оценить величину J_{31} представим ее в следующем виде

$$J_{31}=J_{311}+J_{312}, \tag{7.87}$$

в котором $(k=1,2)$

$$J_{31k}=t^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-t/2}|\hat L_{n-r}^{\alpha}(t)|\int_{Q_{31k}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\tau/2}|\hat L_{n-r}^{\alpha}(\tau)|d\tau, \tag{7.88}$$

где $Q_{311}=(t+\sqrt{t/\theta_n},3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n})$, $Q_{312}=(3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n},\infty)$. Обратимся к неравенству (2.13), тогда из (7.88) находим

$$J_{311}\leqslant c(\alpha,r)\frac{\theta_n^{-\frac12-\alpha}t^{\frac{r}{2}+\frac14}}{(\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|)^{1/4}}\int_{Q_{311}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}d\tau}{(\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|)^{1/4}}$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac{1}{2}}}{(\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|)^{1/4}}\int_{Q_{311}}\frac{d\tau}{(\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|)^{1/4}}$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac{1}{2}}}{(\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|)^{1/4}}\int\limits_{\theta_n}^{\frac{3}{2}\theta_n+\sqrt{t/\theta_n}}\frac{d\tau}{(\tau+\theta_n^{1/3}-\theta_n)^{1/4}}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad (7.89)$$

$$J_{312}\leqslant c(\alpha,r)\frac{\theta_n^{-\alpha}t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{(\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|)^{1/4}}\int_{Q_{312}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\tau/4}d\tau$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha,r)}{(\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|)^{1/4}}\int\limits_{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}}^{\infty}(\tau/\theta_n)^{\alpha}e^{-\tau/4}d\tau\leqslant c(\alpha,r). \qquad (7.90)$$

Из (7.87) – (7.90) выводим

$$J_{31}\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\quad (t\in G_3,\quad r-\frac{1}{2}<\alpha<r+\frac{1}{2}). \qquad (7.91)$$

Переходя к оценке величины J_{32}, представим ее в виде

$$J_{32}=J_{321}+J_{322}, \qquad (7.92)$$

в котором $(k=1,2)$

$$J_{32k}=nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}|\hat{L}_{n-r+1}^{\alpha}(t)-\hat{L}_{n-r-1}^{\alpha}(t)|\int_{Q_{31k}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(\tau)|d\tau, \qquad (7.93)$$

Обратимся к неравенству (2.14), тогда из (7.93) находим

$$J_{321}\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{3}{4}}[\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}\times$$

$$\int\limits_{Q_{311}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}[\theta_n(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)]^{-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\frac{3}{2}\theta_n+\sqrt{t/\theta_n}}\frac{[\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}{[\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t}=\leqslant c(\alpha,r)\ln(n+1). \qquad (7.94)$$

Чтобы убедиться в справедливости (7.94) покажем, что

$$A=\int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\frac{3}{2}\theta_n+\sqrt{t/\theta_n}}\frac{[\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}{[\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t}\leqslant c(\alpha)\ln(n+1).$$

С этой целью рассмотрим два случая: 1) $\theta_n/2 \leqslant t \leqslant \theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}}$; 2) $\theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}} \leqslant t \leqslant 3\theta_n/2$. Во-втором из этих случаев имеем

$$\frac{\theta_n^{1/3} + |t-\theta_n|}{\theta_n^{1/3} + |\tau-\theta_n|} \leqslant 3 \quad (\theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}} \leqslant t \leqslant \tau),$$

поэтому

$$A \leqslant 3\ln\frac{\frac{3}{2}\theta_n + \sqrt{t/\theta_n} - t}{\sqrt{t/\theta_n}} \leqslant 3\ln\left(1 + \frac{\frac{3}{2}\theta_n - t}{\sqrt{t/\theta_n}}\right) \leqslant c(\alpha)\ln(n+1).$$

Если же $\theta_n/2 \leqslant t \leqslant \theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}}$, то мы можем записать

$$A = \int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n-\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} + \int\limits_{\theta_n-\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n+\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} + \int\limits_{\theta_n+\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}} = A_1 + A_2 + A_3.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $2\theta_n^{\frac{1}{3}} \leqslant \theta_n - t$, то

$$A_2 \leqslant \int\limits_{\theta_n-\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{[\frac{3}{2}(\theta_n-t)]^{\frac{1}{4}}}{[\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{12}}\ln\frac{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}-t}{\theta_n-\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}-t} =$$

$$\left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{12}}\ln\left(1+\frac{2\theta_n^{\frac{1}{3}}}{\theta_n-\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}-t}\right)$$

$$\left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{12}}\frac{2\theta_n^{\frac{1}{3}}}{\theta_n-t-\theta^{\frac{1}{3}}} \leqslant \left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\frac{2\theta_n^{\frac{1}{4}}}{\theta_n-t-\frac{1}{2}(\theta_n-t)} =$$

$$\left(\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right)^{\frac{1}{4}}\frac{4\theta_n^{\frac{1}{4}}}{\theta_n-t} \leqslant 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\theta_n}{(\theta_n-t)^3}\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant \left(\frac{\theta_n}{(2\theta_n^{\frac{1}{3}})^3}\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant 2\sqrt{3},$$

$$A_1 \leqslant \int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{[\frac{3}{2}(\theta_n-t)]^{\frac{1}{4}}}{[\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{[\frac{3}{2}(\theta_n-t)]^{\frac{1}{4}}}{(\theta_n-\tau)^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t} \leqslant$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{-d\frac{\theta_n-\tau}{\theta_n-t}}{\left(1-\frac{\theta_n-\tau}{\theta_n-t}\right)\left(\frac{\theta_n-\tau}{\theta_n-t}\right)^{\frac{1}{4}}} =$$

$$\int\limits_{\frac{\theta_n^{\frac{1}{3}}-\sqrt{t/\theta_n}}{\theta_n-t}}^{\frac{\theta-t-\sqrt{t/\theta_n}}{\theta_n-t}} \frac{d\tau}{(1-\tau)\tau^{1/4}} \leqslant c(\alpha)\ln(n+1),$$

$$A_3 \leqslant \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{[\frac{3}{2}(\theta_n-t)]^{\frac{1}{4}}}{[\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t} \leqslant$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{(\tau-t)^{\frac{1}{4}}d\tau}{(\tau-t)(\tau-\theta_n)^{\frac{1}{4}}} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{d\tau}{(\tau-t)^{\frac{3}{4}}(\tau-\theta_n)^{\frac{1}{4}}} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{d\tau}{(\tau-\theta_n)} \leqslant c(\alpha)\ln(n+1).$$

Из полученных оценок для A_i $(i=1,2,3)$ вытекает, что $A \leqslant c(\alpha)\ln(n+1)$ и тем самым доказана справедливость оценки (7.94).

Далее из (7.93) и неравенства (2.14) имеем

$$J_{322} \leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{3}{4}}[\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}\int_{Q_{312}} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{4}}d\tau}{\theta_n^{\frac{\alpha}{2}}(\tau-t)}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{1}{4}-\alpha}[\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}} \int\limits_{\frac{3}{2}\theta_n+\sqrt{t/\theta_n}}^{\infty} \frac{\tau^{\alpha}e^{-\frac{\tau}{4}}d\tau}{\tau-t} \leqslant c(\alpha,r). \tag{7.95}$$

Из (7.92) – (7.95) мы замечаем, что

$$J_{32} = c(\alpha,r)\ln(n+1). \tag{7.96}$$

Комбинируя методы, которые привели к оценкам (7.91) и (7.96), нетрудно доказать также, что из (7.46) вытекает оценка

$$J_{33} = c(\alpha,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right] \quad (t\in G_3, \quad r-\frac{1}{2}<\alpha<r+\frac{1}{2}). \tag{7.97}$$

Сопоставляя оценки (7.91), (7.96), (7.97) с (7.43), имеем

$$J_3 = c(\alpha, r)\left[\ln(n+1) + \left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3} + |t-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right] \quad (t \in G_3, \quad -\frac{1}{2} < \alpha < r + \frac{1}{2}). \tag{7.98}$$

Наконец, почти дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к оценке (7.98), из равенства (7.28) можно доказать, что

$$J_1 = c(\alpha, r)\left[\ln(n+1) + \left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3} + |t-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right] \quad (t \in G_3, \quad -\frac{1}{2} < \alpha < r + \frac{1}{2}). \tag{7.99}$$

Объединяя оценки (7.98), (7.99), (7.42) и сопоставляя их с равенством (7.27), приходим к (6.12).

Нам осталось доказать оценку (6.13). С этой целью мы обратимся непосредственно к равенству (6.8), из которого находим

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t) \leqslant t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(e^{-t}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t,t))^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\infty} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(e^{-\tau}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau))^{\frac{1}{2}}\, d\tau.$$

Положим $(k = 1, 2, 3)$

$$I_k = \int_{E_k} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(e^{-\tau}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau))^{\frac{1}{2}}\, d\tau,$$

где $E_1 = [0, \frac{1}{\theta_n}]$, $E_2 = [\frac{1}{\theta_n}, 3\theta_n/2]$, $E_3 = [3\theta_n/2, \infty)$. Тогда

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t) \leqslant t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(e^{-t}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t,t))^{\frac{1}{2}}(I_1 + I_2 + I_3).$$

Из (2.12) и (2.13) для $t \geqslant 3\theta_n/2$ имеем

$$t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(e^{-t}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t,t))^{\frac{1}{2}} \leqslant c(\alpha, r)n^{\frac{1-\alpha}{2}} t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-t/4}.$$

Кроме того

$$I_1 = \int_{E_1} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(e^{-\tau}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau))^{\frac{1}{2}}\, d\tau \leqslant c(\alpha, r)n^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}$$

и, в силу леммы 7.1

$$I_2 = \int_{E_2} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(e^{-\tau}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau))^{\frac{1}{2}}\, d\tau \leqslant$$

$$c(\alpha, r)n^{\frac{1}{4}} \int_{E_2} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\, d\tau \leqslant c(\alpha, r)n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{3}{4}}.$$

Наконец,

$$I_3 = \int_{E_3} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(e^{-\tau}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau))^{\frac{1}{2}}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c(\alpha,r)n^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_{E_3}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\tau/4}d\tau\leqslant c(\alpha,r).$$

Собирая полученные оценки, находим

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t)\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}}t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{4}}.$$

Тем самым оценка (6.13) доказана.

Список литературы

[1] Kwon K. H., Littlejohn L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. Vol. 2. 1995. Pp. 289–303.

[2] Kwon K. H., Littlejohn L. L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. Vol. 28. 1998. Pp. 547—594.

[3] Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 48. 1993. Pp. 113—131.

[4] Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. Vol 65. 1991. Pp. 151—175.

[5] Meijer H.G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Pp. 1–16.

[6] Marcellan F., Yuan Xu. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae, Vol 33. № 3. 2015. Pp. 308-352.

[7] Шарапудинов И. И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Математический сборник. Т. 191. Вып. 5. 2000. С. 143–160.

[8] Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Математический заметки. Т. 72. Вып. 5. 2002. С. 765–795.

[9] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Издательство Дагестанского научного центра. Махачкала. 2004. С. 1–176.

[10] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математический заметки. Т. 78. Вып. 3. 2005. С. 442—465.

[11] Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Математический сборник. Т. 197. Вып. 3. 2006. С. 135—154.

[12] Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Математический заметки. Т. 84. Вып. 3. 2008. С. 452–471.

[13] Сеге Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз. Москва. 1962.

[14] Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Mathem., Vol 87. 1965. Pp. 698–708.

[15] Gasper G. Positiviti and special function // Theory and appl. Spec. Funct. Edited by Richard A. Askey. 1975. Pp. 375–433.

[16] Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. Наука. Москва. 1974.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)
Владикавказский научный центр РАН
E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию
26.09.2015