УДК 517.538

И. И. Шарапудинов

Полиномы, ортогональные на сетках из единичной окружности и числовой оси

Исследованы асимптотические свойства полиномов, ортогональных на произвольных (не обязательно равномерных) сетках единичной окружности и отрезка $[-1,1]$. В случае, когда сетка узлов $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_0}, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{N-1}}\right\}$ расположена на единичной окружности $|w| = 1$, рассматриваются полиномы $\varphi_{0,N}(w), \varphi_{1,N}(w), \dots, \varphi_{N-1,N}(w)$, образующие ортонормированную систему в следующем мысле:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{n,N}(e^{i\theta})\overline{\varphi_{m,N}(e^{i\theta})}\, d\sigma_N(\theta) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})\overline{\varphi_{m,N}(e^{i\theta_j})}\Delta\sigma_N(\theta_j) = \delta_{nm},$$

где $\Delta\sigma_N(\theta_j) = \sigma_N(\theta_{j+1}) - \sigma_N(\theta_j), j = 0, \dots, N-1$, для которых установлены асимптотические формулы в том случае, когда $\Delta\sigma_N(\theta_j) = h(\theta_j)\Delta\theta_j$, которые, в свою очередь используются для изучения асимптотических свойств полиномов, ортогональных на сетках отрезка $[-1,1]$.

Библиография: 39 названий.

Polynomials, orthogonal on grids from unit circle and number axis are considered in present paper. An asymptotics of polynomial, orthogonal on arbitrary grids of unit circle are investigated. In case, when the grid of knots $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_0}, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{N-1}}\right\}$ belong to unit circle $|w| = 1$ we consider polynomials $\varphi_{0,N}(w), \varphi_{1,N}(w), \dots, \varphi_{N-1,N}(w)$, orthogonal in the following sense

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{n,N}(e^{i\theta})\overline{\varphi_{m,N}(e^{i\theta})}\, d\sigma_N(\theta) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})\overline{\varphi_{m,N}(e^{i\theta_j})}\Delta\sigma_N(\theta_j) = \delta_{nm},$$

where $\Delta\sigma_N(\theta_j) = \sigma_N(\theta_{j+1}) - \sigma_N(\theta_j), j = 0, \dots, N-1$. In case when $\Delta\sigma_N(\theta_j) = h(\theta_j)\Delta\theta_j$ for $\varphi_{n,N}(w)$ the asymptotic formula is established. Similar results are obtained for polynomials, orthogonal on grids from a number axis

Bibliography:39 items.

Ключевые слова: единичная окружность, числовая ось, полиномы, ортогональные на сетках, асимптотические формулы.

Keywords: unit circle, number axis, polynomials orthogonal on grids, asymptotics.

Введение

Полиномы, ортогональные на конечных сетках числовой оси впервые были рассмотрены в целом ряде работ П.Л.Чебышева в связи задачами математической статистики. Им были установлены трехчленные рекуррентные формулы для этих полиномов и получены некоторые важные следствия из них такие, как формула Кристоффеля-Дарбу и выражения для коэффициентов разложения дискретной функции по базису полиномов, ортогональных на рассматриваемой сетке. Особенно подробно П.Л.Чебышев исследовал [1] свойства полиномов, ортогональных на конечных равномерных сетках с некоторыми, как теперь говорят, классическими весами. В этом случае им была разработана разностная теория рассматриваемых полиномов, вполне аналогичная дифференциальной теории классических полиномов Лежандра и Якоби. В частности, в работе [1] для полиномов, ортогональных на равномерных сетках с классическими весами, получены аналоги формулы Родрига для полиномов Лежандра и обобщенной формулы Родрига для полиномов Якоби. Дальнейшее развитие теории и приложений этих полиномов связано с именами Шарлье [2], Кравчука [3], Мейкснера [4], Хана [5], Вебер и Эрдейи [6], Карлина и МоГригора [7]. В шестидесятые и семидесятые годы прошлого века наметился новый всплеск интереса к теории полиномов, ортогональных на дискретных сетках с классическими весами и он со временем не ослабевает (см.[8] – [33]). Были найдены многочисленные новые приложения этих полиномов в таких областях, как квантовая механика [12], [15] теория кодирования [8], [13],[17] теория вероятностей [25], [29], теория дискретных систем автоматического регулирования и управления [29], теория случайных матриц [33], обработка и сжатие изображений [32], некоторые проблемы вычислительной математики [16],[29] и других. Некоторые вопросы теории полиномов, ортогональных на сетках изложены в таких широко известных монографиях, как [34] – [36]. Стали появляться специальные монографии, посвященные теории и приложениям этих полиномов (см.,например, [15],[29]). Подавляющее большинство указанных приложений полиномов, ортогональных на сетках связано с тем, что в каждом конкретном приложении возникает пространство векторов достаточно большой размерности N, которых можно истолковывать, как дискретные функции $f = f(x)$, заданные на рассматриваемой сетке $\Omega_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$. Множество всех таких функций можно рассматривать как N – мерное пространство над полем действительных чисел. Одним из базисов этого пространства является конечная система степеней $1, x, \dots, x^{N-1}$ и,следовательно, каждую функцию $f = f(x)$, заданную на $\Omega_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k, \quad x \in \Omega_N, \tag{0.1}$$

Но для приложений более удобными являются базисы, получаемые путем ортогонализации системы $1, x, \dots, x^{N-1}$. С этой целью рассматривается скалярное произведение вида

$$< f, g >_\rho = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)g(x_j)\rho(x_j), \tag{0.2}$$

где весовая функция $\rho = \rho(x) > 0$ выбирается из тех или иных соображений, к обсуждению которых мы еще вернемся ниже. Ортогонализуя указанную систему степеней по методу Грамма-Шмидта, мы придем к конечной системе полиномов $\{P_{n,N}(x)\}_{n=0}^{N-1}$, образующих ортонормированную систему относительно скалярного произведения (0.2), т.е. $(\rho_j = \rho(x_j))$

$$\sum_{j=0}^{N-1} P_{n,N}(x_j)P_{m,N}(x_j)\rho_j = \delta_{nm}. \tag{0.3}$$

Обозначим через $l^2_\rho(\Omega_N)$ пространство дискретных функций $f = f(x)$, заданных на сетке Ω_N, в котором определено скалярное произведение (0.2). Система $\{P_{n,N}(x)\}_{n=0}^{N-1}$ является полной в $l^2_\rho(\Omega_N)$ и поэтому произвольная функция $f \in l^2_\rho(\Omega_N)$ допускает представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k P_{k,N}(x), \quad x \in \Omega_N, \tag{0.4}$$

где в силу ортонормированности системы $\{P_{n,N}(x)\}_{n=0}^{N-1}$

$$\hat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)P_{k,N}(x_j)(x_j)\rho_j \tag{0.5}$$

представляют собой k – тый коэффициент Фурье элемента $f \in l^2_\rho(\Omega_N)$ по системе $\{P_{n,N}(x)\}_{n=0}^{N-1}$. Одной из причин того, что на практике предпочтение отдается базису $\{P_{n,N}(x)\}_{n=0}^{N-1}$ перед
$\{1, x, \ldots, x^{N-1}\}$ является то, что коэффициенты в разложении (0.4) выражаются явными и простыми формулами (0.5), в то время, как нахождение коэффициентов a_k в разложении (0.1) весьма проблематично как формально, так и численно. Чтобы убедиться в этом достаточно рассмотреть разложение по базису $\{1, x, \ldots, x^{N-1}\}$ функции

$$f(x) = \cos((N-1)\arccos x) =$$

$$\frac{N-1}{2} \sum_{m=0}^{[(N-1)/2]} \frac{(-1)^m 2^{N-1-2m}(N-m-2)!}{m!(N-1-2m)!} x^{N-1-2m}. \tag{0.6}$$

Коэффициенты

$$a_{N-1-2m} = \frac{(-1)^m 2^{N-1-2m}(N-m-2)!}{m!(N-1-2m)!}\frac{N-1}{2}$$

в разложении (0.6), чередуясь по знаку, при $N \to \infty$ растут по абсолютной величине с скоростью $2^{N-1-2m}\left(\frac{N}{m}\right)^m$. Это означает, что пользуясь формулой (0.6) не возможно найти численные значения функции $f(x) = \cos((N-1)\arccos x)$ (счет является неустойчивым). В то же время для коэффициентов $\hat{f}_k$ в разложении (0.4) имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{j=0}^{N-1} f^2(x_j)\rho_j = \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{f}_k)^2,$$

поэтому все коэффициенты $\hat{f}_k$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$ равномерно ограничены сверху нормой $\|f\| = \sqrt{<f,f>_\rho}$.

И тем не менее, вопрос об устойчивости счета по формуле (0.4) нельзя считать решенным, так как эта формула содержит ортогональные полиномы $P_{n,N}(x)(0 \leqslant n \leqslant N-1)$, значения которых требуется вычислять как при нахождении коэффициентов $\hat{f}_k$ по формуле (0.5), так и при численной реализации правой части (0.4). Этот вопрос непосредственно приводит к задаче об исследовании асимптотических свойств полиномов $P_{n,N}(x)$ при $N, n \to \infty$. Другая важная причина, которая приводит к вопросу об асимптотических свойствах полиномов $P_{n,N}(x)$ при $N, n \to \infty$ в связи с разложением (0.4) заключается в следующем. Дело в том, что в приложениях редко пользуются полным разложением (0.4), а заменяют его приближенным равенством

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k P_{k,N}(x) = S_n(f,x), \tag{0.7}$$

где $S_n(f,x)$ – частичная сумма порядка n от правой части равенства (0.4). Тогда непосредственно возникает задача об оценке погрешности $|f(x) - S_n(f,x)|$. Хорошо известно [29], [34] – [37] что эта задача, в свою очередь, тесно связана с асимптотическим поведением полиномов $P_{n,N}(x)$ при $N, n \to \infty$. Более подробное обсуждение некоторых дальнейших вопросов численного анализа, которые непосредственно приводят к задаче об асимптотических свойствах полиномов, ортогональных на сетках мы отложим до заключительной части настоящей статьи (см. пункт 4).

В случае, когда $P_{n,N}(x)(0 \leqslant n \leqslant N-1)$ представляет собой систему полиномов, ортогональных на равномерной сетке с одним из классических весов, задача об их асимптотических свойствах детально исследована (см.цитированную литературу, в частности, монографию [29]). Были разработаны методы, с помощью которых исследованы асимптотические свойства классических полиномов Чебышева (Хана), Кравчука, Мейкснера, Шарлье. При этом доказательства асимптотических формул существенно опирается на специфических свойствах именно классических полиномов, ортогональных на равномерных сетках (производящие функции, разностные уравнения, разностные формулы типа Родрига, формула суммирования Эйлера-Маклорена и т.д.). Поэтому эти методы не могут быть непосредственно перенесены на случай полиномов, ортогональных на неравномерных сетках.

В настоящей работе найдены некоторые подходы, которые позволяют продвинуться в решении поставленной задачи в случае, когда рассматриваемая сетка узлов $\Omega_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ и весовая функция $\rho(x)$ связаны между собой определенным образом, а именно, мы рассматриваем здесь весовые функции вида

$\rho(x_j) = h(x_j)\Delta t_j$, где $-1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$, $t_j \leqslant x_j \leqslant t_{j+1}$ $(j = 0, \ldots, N-1)$, $h(x)$ – положительная непрерывная функция, заданная на $[-1, 1]$. Как и следовало ожидать, в этой ситуации асимптотическая формула для $P_{n,N}(x)$ имеют вид

$$P_{n,N}(x) = P_n(x) + v_{n,N}(x), \tag{0.8}$$

где $P_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ – последовательность полиномов, образующих ортонормированную систему на $[-1, 1]$ с весом $h(x)$, т.е.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)h(x)dx = \delta_{nk}. \tag{0.9}$$

Основная задача, которая ставится в связи с формулой (0.8) состоит в том, чтобы при $N \to \infty$ найти условия на рост степени $n = n(N)$ полинома $P_{n,N}(x)$, при соблюдении которых равенство (0.8) будет представлять собой асимптотическую формулу, главная часть которой совпадает с $P_n(x)$. Эта задача для классических полиномов Чебышева $\tau_{n,N}(x)$, образующих ортонормированную систему на равномерной сетке $\Omega_N = \{-1 + \frac{2j}{N-1}\}_{j=0}^{N-1}$ с весом $\rho(x) = \frac{2}{N}$ была окончательно решена в работах [24], [26](см.также [29]). Было показано, что ограничение $n = O(N^{1/2})$ является своего рода водоразделом для асимптотического поведения полиномов $\tau_{n,N}(x)$ в том смысле, что имеет место асимптотическая формула $\tau_{n,N}(x) = \hat{P}_n(x) + V_{n,N}(x)$, в которой $\hat{P}_n(x)$ – нормированные полиномы Лежандра, а для остаточного члена $V_{n,N}(x)$ установлена весовая оценка, которая показывает, что при $n = O(N^{1/2})$ асимптотическое поведение полиномов $\tau_{n,N}(x)$ в определенном смысле совпадает с асимптотическим поведением полиномов Лежандра $\hat{P}_n(x)$. В частности, при $n = O(N^{1/2})$ имеет место оценка $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\tau_{n,N}(x)|n^{-1/2} \asymp 1$. Такая же оценка верна для нормированных полиномов Лежандра: $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\hat{P}_n(x)|n^{-1/2} \asymp 1$. Если же условие $n = O(N^{1/2})$ не соблюдено, т.е. $\frac{n^2}{N} \to \infty$, то $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\tau_{n,N}(x)|n^{-1/2} \geqslant c_1 \exp\left(c_2\frac{n^2}{N}\right)$, где c_1 и c_2 положительные постоянные. Этот результат может послужит своего рода ориентиром при рассмотрении вопроса о нахождении минимальных ограничений на рост степени $n = n(N)$ вместе с ростом N, при соблюдении которых равенство (0.8) будет являться асимптотической формулой для $P_{n,N}(x)$ с главной частью $P_n(x)$ и остаточным членом $v_{n,N}(x)$.

Основная идея, которая используется в настоящей работе для решения поставленных задач заключается в следующем. Предварительно ставятся и решаются аналогичные задачи для полиномов $\varphi_{n,N}(z)$, ортогональных на произвольных(не обязательно равномерных) конечных сетках из единичной окружности. Установливается связь между полиномами $\varphi_{n,N}(z)$ и $P_{n,N}(x)$. После этого асимптотические формулы для полиномов $P_{n,N}(x)$ выводятся из соответствующих формул для $\varphi_{n,N}(z)$.

1. Полиномы, ортогональные на сетках из единичной окружности и их общие свойства

Пусть $\mathbb{D}$ — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\{w : |w| = 1\} = \mathfrak{d}\mathbb{D}$ — его граница (единичная окружность) в $\mathbb{C}$. Мы параметризуем $\mathfrak{d}\mathbb{D}$, полагая $w = e^{i\theta}$ $(\theta \in [-\pi, \pi))$. Через $\sigma = \sigma(\theta)$ обозначим неубывающую непрерывную слева функцию, заданную на $[-\pi, \pi]$. Функция $\sigma(\theta)$ порождает на $[-\pi, \pi]$ меру Лебега-Стилтьеса μ такую, что для $-\pi \leqslant a \leqslant b \leqslant \pi$ $\mu((a, b]) = \sigma(b+0)-\sigma(a+0)$, $\mu((a, b)) = \sigma(b) - \sigma(a + 0)$, $\mu([a, b]) = \sigma(b + 0) - \sigma(a)$, $\mu([a, b)) = \sigma(b) - \sigma(a)$. Пространство $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ состоит из μ-измеримых функций $f : \mathfrak{d}\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ таких, что $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta) < \infty$. Скалярное произведение двух функций $f, g \in L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ определяется равенством

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\sigma(\theta). \tag{1.1}$$

Размерность пространства $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ зависит от мощности множества точек роста функции $\sigma(\theta)$ на $[-\pi, \pi]$. ($\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ называется точкой роста функции $\sigma(\theta)$), если $\limsup_{\Delta\theta\to 0} \frac{\sigma(\theta_0+\Delta\theta)-\sigma(\theta_0-\Delta\theta)}{\Delta\theta} = \gamma > 0$). Если множество точек роста функции $\sigma(\theta)$ на $[-\pi, \pi]$ бесконечно, то пространство $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ бесконечномерно, если же функция $\sigma(\theta)$ имеет конечное число точек роста $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{N-1} \leqslant 2\pi$, то размерность пространства $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ равна N.

Если пространство $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ бесконечномерно, то система степеней $\{w^n\}_{n=0}^\infty$ в нем линейно независима и тогда путем ее ортогонализации мы получим последовательность алгебраических полиномов $\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^\infty$, образующих ортонормированную систему в $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\, d\sigma(\theta) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m; \\ 1, & \text{если } n = m. \end{cases} \tag{1.2}$$

Принято говорить, что система $\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^\infty$ ортонормирована на окружности $\mathfrak{d}\mathbb{D} = \{w : |w| = 1\}$ относительно меры μ или, если функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, то система $\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^\infty$ ортонормирована на окружности с весом $h(\theta) = \sigma'(\theta)$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}h(\theta)\, d\theta = \delta_{nm}. \tag{1.3}$$

Если функция $\sigma = \sigma_N = \sigma_N(\theta)$ имеет всего конечное число N точек роста

$$-\pi \leqslant \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{N-2} < \theta_{N-1} \leqslant \pi, \tag{1.4}$$

то мы положим $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_0}, e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_{N-1}}\right\}$, $l^2_{\sigma_N}(\Omega^T_N) = L^2_{\sigma_N}(\mathfrak{d}\mathbb{D})$. В конечномерном пространстве $l^2_{\sigma_N}(\Omega^T_N)$ линейно-независимую систему образуют функции $1, w, \ldots, w^{N-1}$. Применяя к системе $\{w^k\}_{n=0}^{N-1}$ процесс ортогонализации Грама-Шмидта, мы получим ортонормированную систему полиномов

$$\varphi_{0,N}(w), \varphi_{1,N}(w), \ldots, \varphi_{N-1,N}(w), \tag{1.5}$$

т.е. $(0 \leqslant n, m \leqslant N-1)$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_{n,N}(e^{i\theta})\overline{\varphi_{m,N}(e^{i\theta})}\, d\sigma_N(\theta) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})\overline{\varphi_{m,N}(e^{i\theta_j})}\Delta\sigma_N(\theta_j) = \delta_{nm}, \tag{1.6}$$

где $\theta_N = \pi$, $\Delta\sigma_N(\theta_j) = \sigma_N(\theta_{j+1}) - \sigma_N(\theta_j)$, $j = 0, \ldots, N-1$. Рассматривая для каждого $N = 1, 2, \ldots$ конечное число полиномов (1.5), мы получим треугольную матрицу

$$\begin{array}{llll} \varphi_{0,1}(w) & & & \\ \varphi_{0,2}(w) & \varphi_{1,2}(w) & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_{0,N}(w) & \varphi_{1,N}(w) & \ldots & \varphi_{N-1,N}(w) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{array} \tag{1.7}$$

Мы положим $\varphi_{n,N}(z) = \kappa_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ и будем считать, что старший коэффициент $\kappa_n = \kappa_n^{n,N} > 0$. Если $\psi_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_0$, то мы полагаем $\overline{\psi}_n(z) = \overline{\alpha}_n z^n + \overline{\alpha}_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \overline{\alpha}_0$. Рассмотрим некоторые алгебраические свойства полиномов $\varphi_{n,N}(z)$, необходимые для дальнейшего. Следует отметить, что основные идеи доказательств, приводимых ниже свойств А – С для $\varphi_{n,N}(z)$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$, за исключением равенств (1.15) – (1.19), нами заимствованы из монографии [37], в которой аналогичные свойства доказаны для полиномов $\varphi_n(z)$ $(0 \leqslant n < \infty)$, образующим ортонормированную систему на окружности относительно скалярного произведения (1.2) в том случае, когда функция $\sigma(\theta)$ имеет имеет на $[-\pi, \pi]$ бесконечно много точек роста.

А. *Имеют место равенства*

$$\kappa_n\varphi_{n+1,N}(z) = \kappa_{n+1}z\varphi_{n,N}(z) + \varphi_{n+1,N}(0)\varphi^*_{n,N}(z), \tag{1.8}$$

$$\kappa_n\varphi^*_{n+1,N}(z) = \kappa_{n+1}\varphi^*_{n,N}(z) + \overline{\varphi_{n+1,N}(0)}z\varphi_{n,N}(z), \tag{1.9}$$

где

$$\varphi^*_{n,N}(z) = z^n\overline{\varphi}_{n,N}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \varphi^*_{n,N}(0) = \kappa_n. \tag{1.10}$$

Рассмотрим равенство

$$\frac{\varphi_{n,N}(z) - \kappa_n z^n}{z^{n-1}} = \sum_{l=0}^{n-1} \mu_l^n \overline{\varphi}_{l,N}\left(\frac{1}{z}\right),$$

где μ_l^n $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$ – коэффициенты разложения. Умножим это равенство на $\varphi_{k,N}(z)$, положим $z = e^{i\theta_j}$ и суммируем обе части полученного равенства. Это дает для $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})\frac{\varphi_{k,N}(e^{i\theta_j})}{e^{i(n-1)\theta_j}}\Delta\sigma_N(\theta_j) - \frac{\kappa_n}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{k,N}(e^{i\theta_j})e^{i\theta_j}\Delta\sigma_N(\theta_j) = \mu_k^n. \tag{1.11}$$

Положим

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\varphi_{k,N}(e^{i\theta_j})e^{i\theta_j}\Delta\sigma_N(\theta_j) \quad (k=0,1,\ldots,N-1), \tag{1.12}$$

тогда из (1.11) имеем $\mu_k^n = -\kappa_n\lambda_k$, поэтому

$$\frac{\varphi_{n,N}(z)}{\kappa_n} = z^n - z^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\overline{\varphi}_{k,N}\left(\frac{1}{z}\right),$$

отсюда

$$\frac{\varphi_{n+1,N}(z)}{\kappa_{n+1}} - \frac{z\varphi_{n,N}(z)}{\kappa_n} = -\lambda_n\varphi^*_{n,N}(z). \tag{1.13}$$

Чтобы найти λ_n положим $z=0$:

$$\frac{\varphi_{n+1,N}(0)}{\kappa_{n+1}} = -\lambda_n\kappa_n, \quad \lambda_n = -\frac{\varphi_{n+1,N}(0)}{\kappa_n\kappa_{n+1}}. \tag{1.14}$$

Сопоставляя (1.3) и (1.14), приходим к утверждению (1.8). Что касается утверждения (1.9), то оно получается из (1.8), заменяя в нем z на $\frac{1}{z}$ и переходя к сопряженным величинам.

Введем в рассмотрение полиномы $\phi_{n,N}(z) = \frac{\varphi_{n,N}(z)}{\kappa_n}$ $(n=0,1,\ldots,N-1)$. Тогда равенство (1.8) приобретает следующий вид

$$\phi_{n+1,N}(z) = z\phi_{n,N}(z) + \phi_{n+1,N}(0)\phi^*_{n,N}(z), \tag{1.15}$$

где

$$\phi^*_{n,N}(z) = z^n\overline{\phi}_{n,N}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{1.16}$$

Чтобы найти значение $\phi_{n+1,N}(0)$ положим $z=e^{i\theta}$ и умножим обе части равенства (1.15) скалярно на $\phi_{n,N}(e^{i\theta})$, тогда

$$0 = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}e^{i\theta_j}|\phi_{n,N}(e^{i\theta_j})|^2\Delta\sigma(\theta_j) + \phi_{n+1,N}(0)\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}e^{in\theta_j}\overline{\phi^2_{n,N}(e^{i\theta_j})}\Delta\sigma(\theta_j),$$

отсюда

$$a_n = a_{n,N} = \phi_{n+1,N}(0) = -\frac{\sum_{j=0}^{N-1}e^{i\theta_j}|\phi_{n,N}(e^{i\theta_j})|^2\Delta\sigma(\theta_j)}{\sum_{j=0}^{N-1}e^{in\theta_j}\overline{\phi^2_{n,N}(e^{i\theta_j})}\Delta\sigma(\theta_j)}. \tag{1.17}$$

Отметим, что равенства (1.15) и (1.17) позволяют найти численные значения полиномов $\phi_{n,N}(z)$ при $n=1,2,\ldots,N-1$ рекуррентно, а именно,

$$\phi_{0,N}(z)\equiv 1, \quad \phi_{1,N}(z) = z+a_0, \quad \ldots, \quad \phi_{n+1,N}(z) = z\phi_{n,N}(z)+a_n\phi^*_{n,N}(z), \quad \ldots. \tag{1.18}$$

Поскольку, очевидно,

$$\kappa_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}|\phi_{n,N}(e^{i\theta_j})|^2\Delta\sigma(\theta_j)}}, \tag{1.19}$$

то тем самым мы получаем численный метод для нахождения значений полиномов $\varphi_{n,N}(z) = \kappa_n \phi_{n,N}(z)$ $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$.

B. *Имеет место формула Кристоффеля-Дарбу*

$$\mathcal{K}_{n,N}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{k,N}(x)\overline{\varphi_{k,N}(y)} = \frac{\varphi^*_{n,N}(x)\overline{\varphi^*_{n,N}(y)} - x\overline{y}\varphi_{n,N}(x)\overline{\varphi_{n,N}(y)}}{1 - x\overline{y}}. \quad (1.20)$$

Доказательство этой формулы легко следует из рекуррентной формулы (1.8)(см. [37]).

C. *Имеют место равенства*

$$\kappa_n^{n,N} \varphi^*_{n,N}(z) = \mathcal{K}_{n,N}(z,0) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{k,N}(z)\overline{\varphi_{k,N}(0)}, \quad (1.21)$$

в частности,

$$\left(\kappa_n^{n,N}\right)^2 = \mathcal{K}_{n,N}(0,0) = \sum_{k=0}^{n} |\varphi_{k,N}(0)|^2. \quad (1.22)$$

Доказательство непосредственно вытекает из (1.20), если положить $x = z$, $y = 0$.

2. Полиномы, ортогональные на конечных сетках отрезка $[-1,1]$ и их связь с полиномами $\varphi_{n,N}(z)$

Пусть $-1 < x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-2} < x_{N-1} < x_N = 1$, $\Omega_N^A = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ и

$$\rho : \Omega_N^A \to (0; \infty), \ \ \rho_j = \rho(x_j) > 0, \ \ j = 0, \ldots, N-1.$$

Для определенности будем считать, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} \rho_j = 1. \quad (2.1)$$

Мы напомним здесь некоторые обозначения из введения. Через $l^2_\rho(\Omega_N^A)$ обозначим N-мерное евклидово пространство функций $f : \Omega_N^A \to \mathbb{R}$, в котором скалярное произведение для $f, g \in l^2_\rho(\Omega_N^A)$ определено равенством

$$< f, g >= \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) g(x_j) \rho_j. \quad (2.2)$$

Система степеней $\{x^k\}_{k=0}^{N-1}$ линейно независима в $l^2_\rho(\Omega_N^A)$ и поэтому к ней можно применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта. В результате мы получим систему полиномов $\{P_{n,N}(x)\}_{n=0}^{N-1}$, ортонормированную на Ω_N^A с весом ρ, т.е.

$$\sum_{j=0}^{N-1} P_{n,N}(x_j) P_{m,N}(x_j) \rho_j = \delta_{nm}. \quad (2.3)$$

Определим на отрезке [-1,1] ступенчатую неубывающую функцию $\alpha(x)$ следующим образом

$$\alpha(x) = \sum_{x_j<x} \rho(x_j) \tag{2.4}$$

Из (2.4) непосредственно имеем

$$\rho_j = \rho(x_j) = \alpha(x_{j+1}) - \alpha(x_j) = \Delta\alpha(x_j),$$

поэтому соотношение ортонормированности (2.3) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{N-1} P_{n,N}(x_j)P_{m,N}(x_j)\Delta\alpha(x_j) = \int_{-1}^{1} P_{n,N}(x)P_{m,N}(x)\,d\alpha(x) = \delta_{nm}. \tag{2.5}$$

Отобразим комплексную плоскость w в комплексную плоскость $z = x + iy$ с помощью формулы

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right). \tag{2.6}$$

Тогда, полагая $w = e^{i\theta}$, получим $z = x = \cos\theta$. Пусть

$$\theta_{2N-1-j} = \arccos x_j, \quad \theta_j = -\theta_{2N-1-j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N-1, \tag{2.7}$$

$$\Omega_{2N}^T = \left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{2N-1}. \tag{2.8}$$

Нетрудно заметить, что точки θ_j $(0 \leqslant j \leqslant 2N-1)$ расположены симметрично относительно нуля на отрезке $[-\pi, \pi]$, т.е.

$$\theta_j = -\theta_{2N-1-j} \qquad (0 \leqslant j \leqslant 2N-1). \tag{2.9}$$

Далее, положим

$$\tau_{N+j} = \pi\rho_{N-1-j}, \quad \tau_j = \tau_{2N-1-j} \quad (0 \leqslant j \leqslant N-1) \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) нетрудно заметить, что если функция $\psi(\theta)$ нечетная, то

$$\sum_{j=0}^{2N-1} \psi(\theta_j)\tau_j = 0. \tag{2.11}$$

В самом деле, имеем

$$\sum_{j=0}^{2N-1} \psi(\theta_j)\tau_j = (\sum_{j=0}^{N-1} + \sum_{j=N}^{2N-1})\psi(\theta_j)\tau_j = \sum_{j=0}^{N-1} \psi(\theta_j)\tau_j + \sum_{j=0}^{N-1} \psi(\theta_{N+j})\tau_{N+j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \psi(\theta_j)\tau_j + \sum_{j=0}^{N-1} \psi(\theta_{2N-j-1})\tau_{2N-j-1} = \sum_{j=0}^{N-1} [\psi(\theta_j) - \psi(\theta_j)]\tau_j = 0.$$

Введем теперь ступенчатую неубывающую на $[-\pi, \pi]$ функцию $\sigma_{2N}(\theta)$ следующим образом:

$$\sigma_{2N}(\theta) = \sum_{\theta_j<\theta} \tau_j. \tag{2.12}$$

Из (2.1), (2.10) и (2.12) следует, что $\sigma_{2N}(\pi) = 2\pi$, $\sigma_{2N}(-\pi) = 0$, $\mu([-\pi,\pi]) = \sigma_{2N}(\pi) - \sigma_{2N}(-\pi) = 2\pi$.

Рассмотрим полиномы $\varphi_{n,2N}(w)\,(0 \leqslant n \leqslant 2N-1)$, образующие ОНС в $l^2_{\sigma_{2N}}(\Omega^T_{2N})$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_{n,2N}(e^{i\theta})\overline{\varphi_{m,2N}(e^{i\theta})}\,d\sigma_{2N}(\theta)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1} \varphi_{n,2N}(e^{i\theta_j})\overline{\varphi_{m,2N}(e^{i\theta_j})}\Delta\sigma_{2N}(\theta_j) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1} \varphi_{n,2N}(e^{i\theta_j})\overline{\varphi_{m,2N}(e^{i\theta_j})}\tau_j = \delta_{nm}, \tag{2.13}$$

где $\theta_{2N} = \pi$. Нам понадобятся некоторые свойства полиномов $\varphi_{n,2N}(w)\,(0 \leqslant n \leqslant 2N-1)$. С этой целью введем моменты

$$c_n = c_{n,2N} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\,d\sigma_{2N}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1} e^{-in\theta_j}\Delta\sigma_{2N}(\theta_j) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1} e^{-in\theta_j}\tau_j, \quad n = 0, \pm 1, \ldots \tag{2.14}$$

Положим $D_{-1,2N} = 1$,

$$D_{n,2N} = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{-n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n-1} & \ldots & c_0 \end{vmatrix}, \quad G_{n,2N}(w) = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{-n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_{-1} \\ 1 & w & \ldots & w^n \end{vmatrix}. \tag{2.15}$$

Тогда нетрудно проверить, что

$$\varphi_{n,2N}(w) = \frac{G_{n,2N}(w)}{\sqrt{D_{n-1,2N}D_{n,2N}}}, \quad 0 \leqslant n \leqslant 2N-1. \tag{2.16}$$

Отсюда старший коэффициент полинома $\varphi_{n,2N}$ определяется равенством

$$\kappa_n = \kappa_n^{n,2N} = \sqrt{\frac{D_{n-1,2N}}{D_{n,2N}}}, \quad n = 1, 2, \ldots, 2N-1, \tag{2.17}$$

из которого, в частности, следует, что $\kappa_n > 0$.

Кроме того из равенства (2.11), справедливого для нечетной функции $\psi(\theta)$ следует, что моменты c_n, определенные в (2.14), представляют собой действительные числа, стало быть, все коэффициенты $\kappa_k^n = \kappa_k^{n,2N}\,(0 \leqslant k \leqslant n)$ полинома

$$\varphi_{n,2N}(w) = \kappa_n w^n + \kappa_{n-1}^n w^{n-1} + \ldots + \kappa_1^n w + \kappa_0^n \tag{2.18}$$

являются действительными.

Следуя известному методу Сеге, введем в рассмотрение выражение

$$H_n(x) = w^{-n}\varphi_{2n,2N}(w) + w^n\varphi_{2n,2N}\left(\frac{1}{w}\right), \quad w = e^{i\theta} \tag{2.19}$$

и покажем, что оно представляет собой алгебраический полином степени n. В самом деле, для $w = e^{i\theta}$ имеем из (2.18)

$$e^{-in\theta}\varphi_{2n,2N}(e^{i\theta}) + e^{in\theta}\varphi_{2n,2N}(e^{-i\theta}) =$$

$$e^{-in\theta}\sum_{k=0}^{2n}\kappa_k^{2n}e^{ik\theta} + e^{in\theta}\sum_{k=0}^{2n}\kappa_k^{2n}e^{-ik\theta} = \sum_{k=0}^{2n}\kappa_k^{2n}[e^{-in\theta+ik\theta} + e^{in\theta-ik\theta}] =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{2n}\kappa_k^{2n}\cos(n-k)\theta = 2\sum_{k=0}^{n-1}\kappa_k^{2n}\cos(n-k)\theta +$$

$$2\kappa_n^{2n} + 2\sum_{k=n+1}^{2n}\kappa_k^{2n}\cos(n-k)\theta = 2\kappa_n^{2n} + 2\sum_{k=0}^{n-1}(\kappa_k^{2n} + \kappa_{2n-k}^{2n})T_{n-k}(x),$$

где $T_m(x) = \cos(m\arccos x)$ — полином Чебышева 1-го рода. Тем самым доказано, что $H_n(x)$ является полиномом степени не выше n. Покажем, что он ортогонален ко всем полиномам младших степеней относительно скалярного произведения (2.2). В самом деле в силу (2.7), (2.9), (2.10) при $k < n$ имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} H_n(x_j)T_k(x_j)\rho_j =$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1} H_n(\cos\theta_{2N-1-j})\cos k\theta_{2N-1-j}\tau_{2N-1-j} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1} H_n(\cos\theta_j)e^{ik\theta_j}\tau_j =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1}[e^{-in\theta_j}\varphi_{2n,2N}(e^{i\theta_j}) + e^{in\theta_j}\varphi_{2n,2N}(e^{-i\theta_j})]e^{ik\theta_j}\tau_j =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1} \overline{e^{i(n-k)\theta_j}}\varphi_{2n,2N}(e^{i\theta_j})\tau_j + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1} e^{i(n+k)\theta_j}\overline{\varphi_{2n,2N}(e^{i\theta_j})}\tau_j = 0,$$

так как $n-k < 2n$, $n+k < 2n$.

Найдем норму полинома $H_n(x)$. Имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} H_n^2(x_j)\rho_j = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1} H_n^2(\cos\theta_{2N-j-1})\tau_{2N-j-1} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1} H_n^2(\cos\theta_j)\tau_j =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1}\left|e^{-in\theta_j}\varphi_{2n,2N}(e^{i\theta_j}) + e^{in\theta_j}\varphi_{2n,2N}(e^{-i\theta_j})\right|^2\tau_j =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{2N-1} \left|\varphi_{2n,2N}(e^{i\theta_j})\right|^2 \tau_j + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{2N-1} \left|\varphi_{2n,2N}(e^{-i\theta_j})\right|^2 \tau_j +$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{2N-1} e^{-2in\theta_j} \varphi_{2n,2N}(e^{i\theta_j}) \varphi_{2n,2N}(e^{i\theta_j}) \tau_j =$$

$$= 2 + 2\frac{\varphi_{2n,2N}(0)}{\kappa_{2n}} = d_{n,N}. \tag{2.20}$$

Из (2.20) следует, что n-ый ортонормированный на сетке Ω_N с весом $\rho = \rho(x_j)$ полином $P_{n,N}(x)$ допускает представление

$$P_{n,N}(x) = d_{n,N}^{-\frac{1}{2}} H_n(x) = d_{n,N}^{-\frac{1}{2}} \left[w^{-n} \varphi_{2n,2N}(w) + w^n \varphi_{2n,2N}\left(\frac{1}{w}\right) \right], \quad w = e^{i\theta}. \tag{2.21}$$

Отсюда, как следствие, мы можем записать

$$P_{n,N}(z) = d_{n,N}^{-\frac{1}{2}} \left[w^{-n} \varphi_{2n,2N}(w) + w^n \varphi_{2n,2N}\left(\frac{1}{w}\right) \right], \tag{2.22}$$

где $z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$.

3. Об асимптотике полиномов $\varphi_{n,N}(w)$ в некоторых отдельных случаях выбора узлов θ_j и весов τ_j

Рассмотрим задачу об асимптотических свойствах полиномов $\varphi_{n,N}(w)$, составляющих матрицу (1.7) при $n, N \to \infty$, $z \in \mathbb{C}$. Подобная задача для случая, когда функция $\sigma(\theta)$ имеет бесконечное число точек роста и удовлетворяет условию Сеге

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \sigma'(\theta)\, d\theta > -\infty,$$

исследована достаточно глубоко. По этому поводу мы отсылаем к монографиям [96]- [101] и цитированной там литературе.

Что касается задачи об асимптотике полиномов $\varphi_{n,N}(z)$, составляющих матрицу (1.7), следует заметить, что на каждой N-ой строке этой матрицы фигурируют полиномы $\varphi_{0,N}(z), \varphi_{1,N}(z), \ldots,\ \varphi_{N-1,N}(z)$, образующие ортонормированную систему относительно функции $\sigma(\theta) = \sigma_N(\theta)$, для которой не только не выполняется Сеге, но также его локальный вариант

$$\frac{1}{2\pi} \int_{a}^{b} \ln \sigma'(\theta)\, d\theta > -\infty,$$

ни при каких $a, b \in [-\pi, \pi]$. Это обстоятельство не позволяет использовать при решении поставленной задачи методы и подходы, с помощью которых были исследованы асимптотические свойства полиномов $\varphi_n(z)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, образующих ортонормированную систему (ОНС) относительно функции $\sigma(\theta)$, подчиняющейся условию Сеге.

Рассмотрим задачу об асимптотических свойствах полиномов $\varphi_{n,N}(w)$ при $|w| = 1$, в случае, когда $\sigma(\theta_j) = \frac{\theta_j}{2\pi}$, $(0 \leqslant j \leqslant N)$, где $\theta_N = \pi$, а узлы $\theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{N-1}$ распределены на $[-\pi, \pi]$ произвольно. Следовательно, $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ — произвольная N-точечная сетка из единичной окружности $|w| = 1$. Заметим, что в этом случае соотношение ортогональности (1.6) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{n,N}(e^{i\theta_j}) \overline{\varphi_{m,N}(e^{i\theta_j})} \Delta\theta_j = \delta_{nm}. \tag{3.1}$$

Нас интересует поведение ортогональных полиномов $\varphi_{n,N}$ на окружности $|w| = 1$ при $n, N \to \infty$.

Заметим, что если

$$\theta_j = \frac{2\pi j}{N} \quad (0 \leqslant j < N-1), \tag{3.2}$$

то, как нетрудно доказать,

$$\varphi_{n,N}(w) = w^n \quad (0 \leqslant n \leqslant N-1). \tag{3.3}$$

Поэтому возникает идея сравнивать $\varphi_{n,N}(w)$ с w^n в случае, когда в скалярном произведении (3.1) узлы $\theta_j \in [-\pi, \pi]$ $(0 \leqslant j \leqslant N)$ выбраны произвольно, соблюдая лишь свойство их монотонности. Другая причина в пользу сравнения полиномов $\varphi_{n,N}(w)$ со степенями w^n заключается в том, что система $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной на единичной окружности относительно скалярного произведения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w^n \overline{w^m}\, d\theta, \tag{3.4}$$

а (3.1) является квадратурной формулой для интеграла (3.4), отвечающей выбору узлов $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$. Эти наблюдения приводят к следующей задаче. Пусть нам задана матрица полиномов (1.7), N-ая строка которой содержит полиномы $\varphi_{0,N}(w), \ldots, \varphi_{N-1,N}(w)$, образующие ОНС на сетке $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ относительно скалярного произведения (3.1). Требуется найти условие на рост степени n полинома $\varphi_{n,N}(w)$, в зависимости от N, при соблюдении которого равенство

$$\varphi_{n,N}(w) = w^n + r_{n,N}(w) \tag{3.5}$$

могло бы служить асимптотической формулой для $\varphi_{n,N}(w)$ на окружности $|w| = 1$. Еще более конкретно: нужно изучить поведение остаточного члена $r_{n,N}(w)$ при $n, N \to \infty$ и получить для $|r_{n,N}(w)|$ оценку сверху, зависящую от условий на рост параметра n, в зависимости от роста N. Например, требуется оценить $|r_{n,N}(w)|$ при $|w| = 1$, $n, N \to \infty$. В настоящем пункте предпринимается попытка решить поставленную задачу в том случае, когда при $N \to \infty$ имеет место соотношение

$$\lambda_N = \max_{0 \leqslant j \leqslant N-1} \Delta\theta_j \to 0. \tag{3.6}$$

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть система полиномов* $\{\varphi_k(w)\}_{k=0}^n$ *ортонормирована на окружности* $|w| = 1$ *относительно меры* μ, *порожденной функцией* $\sigma = \sigma(\theta)$ *(см. (0.2)). Если* $Q_n(w)$ *— алгебраический полином степени* n, *для которого*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Q_n(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta) \leqslant \gamma, \tag{3.7}$$

то

$$|Q_n(w)|^2 \leqslant \gamma \sum_{k=0}^{n} |\varphi_n(w)|^2, \quad w \in \mathbb{C}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Мы имеем $Q_n(w) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(w)$. Отсюда

$$|Q_n(w)|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2 \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(w)|^2. \tag{3.9}$$

С другой стороны, в силу равенства Парсеваля и условия леммы

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |Q_n(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta) \leqslant \gamma. \tag{3.10}$$

Сопоставляя (3.9) и (3.10), приходим к утверждению леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $\{\varphi_k(w)\}_{k=0}^n$ *— ОНС полиномов относительно меры* μ, *порожденной функцией* $\sigma(\theta)$, κ_n *— старший коэффициент полинома* $\varphi_n(w)$. *Тогда* $(w = e^{i\theta})$

$$\inf_{Q_{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} |w^n + Q_{n-1}(w)|^2 d\sigma(\theta) = \frac{1}{|\kappa_n|^2}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $Q_{n-1}(w)$ *степени* $n-1$.

Доказательство. Имеем

$$w^n + Q_{n-1}(w) = \frac{1}{\kappa_n}\varphi_n(w) + \alpha_{n-1}\varphi_{n-1}(w) + \ldots + \alpha_1\varphi_1(w) + \alpha_0\varphi_0(w),$$

где α_k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ — некоторые числа. Поэтому

$$\int_{\pi}^{\pi} |w^n + Q_{n-1}(w)|^2 \, d\sigma(\theta) = \frac{1}{|\kappa_n|^2} + \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2 \, .$$

Ясно, что нижняя грань правой части этого равенства достигается, если $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$. Лемма 2 доказана.

Из доказательства леммы 2 видно, что экстремальный полином $w^n + Q_{n-1}(w) = \frac{1}{\kappa_n}\varphi_n(w)$. Это означает, что решение экстремальной задачи

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|w^n + Q_{n-1}(w)\right|^2 d\sigma(\theta) \to \inf \tag{3.11}$$

реализует полином $\varphi_n(w)/\kappa_n$.

Лемма 3. *Пусть $f(\theta)$ абсолютно непрерывна на $[-\pi,\pi]$, $-\pi = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{N-2} < \theta_{N-1} < \theta_N = \pi$, $\lambda_N = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta\theta_j$. Тогда*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = \sum_{j=0}^{N-1} f(\theta_j)\Delta\theta_j + r_N(f), \tag{3.12}$$

где

$$r_N(f) \leqslant \lambda_N \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f^{'}(\theta)\right|\,d\theta. \tag{3.13}$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} f(\theta)\,d\theta. \tag{3.14}$$

Далее, воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница, запишем

$$f(\theta) = f(\theta_j) + \int\limits_{\theta_j}^{\theta} f^{'}(\tau)\,d\tau. \tag{3.15}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} f(\theta)\,d\theta = f(\theta_j)\Delta\theta_j + \int\limits_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} d\theta \int\limits_{\theta_j}^{\theta} f^{'}(\tau)\,d\tau =$$

$$f(\theta_j)\Delta\theta_j + \int\limits_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} f^{'}(\tau)\,d\tau \int\limits_{\tau}^{\theta_{j+1}} d\theta = f(\theta_j)\Delta\theta_j + \int\limits_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} (\theta_{j+1}-\tau)f^{'}(\tau)\,d\tau, \tag{3.16}$$

где

$$\left|\int\limits_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} (\theta_{j+1}-\tau)f^{'}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \Delta\theta_j \int\limits_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \left|f^{'}(\tau)\right|\,d\tau. \tag{3.17}$$

Сопоставляя (3.14) и (3.16), имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = \sum_{j=0}^{N-1} f(\theta_j)\Delta\theta_j + r_N(f), \tag{3.18}$$

где

$$r_N(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} (\theta_{j+1} - \tau) f'(\tau) d\tau. \tag{3.19}$$

Отсюда, с учетом оценки (3.17) находим

$$|r_N(f)| \leqslant \max_{0 \leqslant j \leqslant N-1} \Delta\theta_j \int_{-\pi}^{\pi} \left| f'(\tau) \right| d\tau.$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant N$ — *натуральное число,* $-\pi = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{N-2} < \theta_{N-1} < \theta_N = \pi$, $\lambda_N = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant N-1} \Delta\theta_j$, $\{\varphi_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ — *ортонормированная система полиномов на сетке* $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ *относительно скалярного произведения* (3.1)*. Тогда имеет место следующая асимптотическая формула*

$$\varphi_{n,N}(w) = w^n + v_{n,N}(w), \tag{3.20}$$

в которой при $n < \frac{1}{\lambda_N}$ *для остаточного члена* $v_{n,N}(w)$ *имеет место оценка*

$$|v_{n,N}(w)| \leqslant \sqrt{\frac{n(n+1)\lambda_N}{1 - n\lambda_N}}, \quad |w| = 1. \tag{3.21}$$

Доказательство. Оценим следующий интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |w^n - \varphi_{n,N}(w)|^2 \, d\theta. \tag{3.22}$$

Имеем ($w = e^{i\theta}$)

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |w^n|^2 \, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{n,N}(w)|^2 \, d\theta - 2\,\mathrm{Re}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w^n \overline{\varphi_{n,N}(w)} \, d\theta = \tag{3.23}$$

$$I_1 + I_2 - 2\,\mathrm{Re}\, I_3, \tag{3.24}$$

где

$$I_1 = 1, \; I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w^n \overline{\varphi_{n,N}(w)} \, d\theta = \kappa_n^N, \tag{3.25}$$

κ_n^N — старший коэффициент полинома $\varphi_{n,N}(w)$.

В силу леммы 2 и (3.25) находим

$$I_3^2 = (\kappa_n^N)^2 = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \sum\limits_{j=0}^{N-1} \left| \frac{\varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})}{\kappa_n^N} \right|^2 \Delta\theta_j} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \sum\limits_{j=0}^{N-1} \left| e^{i\theta_j} \right|^2 \Delta\theta_j} = 1. \tag{3.26}$$

Займемся интегралом I_2. Для этого заметим, что функция $\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 = \varphi_{n,N}(e^{i\theta})\overline{\varphi_{n,N}(e^{i\theta})}$ по переменной θ представляет собой тригонометрический полином порядка n с действительными коэффициентами, поэтому к ней применима лемма 3, в силу которой

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1} \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\theta_j + r_{n,N}, \tag{3.27}$$

где

$$|r_{n,N}| \leqslant \lambda_N \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\left(\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2\right)'\right| d\theta, \quad \lambda_N = \max_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta\theta_j. \tag{3.28}$$

Чтобы оценить интеграл в правой части, мы применим неравенство Бернштейна-Зигмунда об оценке интеграла от производной тригонометрического полинома (см.[39]). Это даст

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\left(\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2\right)'\right| d\theta \leqslant \frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta. \tag{3.29}$$

Сопоставляя (3.27)-(3.29), имеем

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = 1 + r_{n,N}, \tag{3.30}$$

причем

$$|r_{n,N}| \leqslant n\lambda_N \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta. \tag{3.31}$$

Из (3.30) и (3.31), в свою очередь, находим

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \leqslant \frac{1}{1-n\lambda_N} = 1 + \frac{n\lambda_N}{1-n\lambda_N}. \tag{3.32}$$

Из (3.22), (3.26) и (3.32) с учетом того, что $I_1 = 1$, находим

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|w^n - \varphi_{n,N}(w)\right|^2 d\theta \leqslant \frac{n\lambda_N}{1-n\lambda_N} = \gamma. \tag{3.33}$$

Теперь обратимся к лемме 1. Тогда из (3.8) получаем ($w = e^{i\theta}$)

$$\left|w^n - \varphi_{n,N}(w)\right|^2 \leqslant \frac{n\lambda_N}{1-n\lambda_N}\sum_{k=0}^{n} \left|w^k\right|^2 = \frac{n(n+1)\lambda_N}{1-n\lambda_N}. \tag{3.34}$$

Полагая $v_{n,N}(w) = w^n - \varphi_{n,N}(w)$, находим

$$\varphi_{n,N}(w) = w^n + v_{n,N}(w), \tag{3.35}$$

$$|v_{n,N}(w)| \leqslant \sqrt{\frac{n(n+1)\lambda_N}{1-n\lambda_N}}. \tag{3.36}$$

Теорема 1 доказана.

Перейдем к рассмотрению несколько иной ситуации. Пусть

$$-\pi = \eta_0 < \eta_1 < \cdots < \eta_{N-1} < \eta_N = \pi, \quad \theta_j = \frac{\eta_j + \eta_{j+1}}{2} \quad (0 \leqslant j \leqslant N-1), \tag{3.37}$$

$$\tau_j = \Delta\eta_j = \eta_{j+1} - \eta_j \quad (0 \leqslant j \leqslant N-1). \tag{3.38}$$

Рассмотрим задачу об асимптотических свойствах полиномов $\varphi_{n,N}(w)(0 \leqslant n \leqslant N-1)$, образующих ортонормированную систему относительно скалярного поведения

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})\overline{\varphi_{m,N}(e^{i\theta_j})}\tau_j = \delta_{nm}. \tag{3.39}$$

Нас снова интересует поведение ортогональных полиномов $\varphi_{n,N}(w)$ на окружности $|w| = 1$ при $n, N \to \infty$. Ниже нам понадобится следующая

Лемма 4. *Пусть $f(\theta)$ такова, что $f'(\theta)$ абсолютно непрерывна на каждом из интервалов (η_j, η_{j+1}) $(j = 0, 1, \dots, N-1)$, $\lambda_N = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta\eta_j$. Тогда*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = \sum_{j=0}^{N-1} f(\theta_j)\Delta\eta_j + r_N(f), \tag{3.40}$$

где

$$|r_N(f)| \leqslant \frac{\lambda_N^2}{8}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f''(\theta)\right|\,d\theta. \tag{3.41}$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = \sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} f(\theta)\,d\theta. \tag{3.42}$$

Далее, воспользовавшись формулой Тейлора, запишем

$$f(\theta) = f(\theta_j) + f'(\theta_j)(\theta - \theta_j) + \int\limits_{\theta_j}^{\theta}(\theta - \tau)f''(\tau)\,d\tau. \tag{3.43}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} f(\theta)\,d\theta = f(\theta_j)\Delta\eta_j + \int\limits_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} d\theta\int\limits_{\theta_j}^{\theta}(\theta-\tau)f''(\tau)\,d\tau =$$

$$f(\theta_j)\Delta\eta_j+\int\limits_{\eta_j}^{\theta_j}d\theta\int\limits_{\theta_j}^{\theta}(\theta-\tau)f^{''}(\tau)\,d\tau+\int\limits_{\theta_j}^{\eta_{j+1}}d\theta\int\limits_{\theta_j}^{\theta}(\theta-\tau)f^{''}(\tau)\,d\tau=$$

$$f(\theta_j)\Delta\eta_j+\int\limits_{\eta_j}^{\theta_j}d\theta\int\limits_{\theta}^{\theta_j}(\tau-\theta)f^{''}(\tau)\,d\tau+\int\limits_{\theta_j}^{\eta_{j+1}}d\theta\int\limits_{\theta_j}^{\theta}(\theta-\tau)f^{''}(\tau)\,d\tau=$$

$$f(\theta_j)\Delta\eta_j+\int\limits_{\eta_j}^{\theta_j}f^{''}(\tau)d\tau\int\limits_{\eta_j}^{\tau}(\tau-\theta)\,d\theta+\int\limits_{\theta_j}^{\eta_{j+1}}f^{''}(\tau)d\tau\int\limits_{\tau}^{\eta_{j+1}}(\theta-\tau)\,d\theta.$$

Отсюда и из (3.42) вытекает справедливость утверждения леммы 4.

Теорема 2. *Пусть $1\leqslant N$ — натуральное число, системы узлов $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$ и весов $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$ определены равенствами* (3.37) *и* (3.38). $\lambda_N=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta\eta_j$, *$\{\varphi_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ – ортонормированная система полиномов на сетке $\Omega_N^T=\left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ относительно скалярного произведения* (3.39)*. Тогда имеет место следующая асимптотическая формула*

$$\varphi_{n,N}(w)=w^n+v_{n,N}(w),\tag{3.44}$$

в которой при $n\lambda_N<1$ для остаточного члена $v_{n,N}(w)$ имеет место оценка

$$|v_{n,N}(w)|\leqslant\sqrt{\frac{(n+1)n^2\lambda_N^2}{1-(n\lambda_N)^2}},\quad |w|=1.\tag{3.45}$$

Доказательство. Оценим следующий интеграл

$$J=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|w^n-\varphi_{n,N}(w)|^2\,d\theta.\tag{3.46}$$

Имеем ($w=e^{i\theta}$)

$$J=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|w^n|^2\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi_{n,N}(w)|^2\,d\theta-2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}w^n\overline{\varphi_{n,N}(w)}\,d\theta=\tag{3.47}$$

$$J_1+J_2-2\,\mathrm{Re}\,J_3,\tag{3.48}$$

где

$$J_1=1,\ J_3=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}w^n\overline{\varphi_{n,N}(w)}\,d\theta=\kappa_n^N,\tag{3.49}$$

κ_n^N — старший коэффициент полинома $\varphi_{n,N}(w)$.

В силу леммы 2 и (3.49) находим

$$J_3^2=(\kappa_n^N)^2=\frac{1}{\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\left|\frac{\varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})}{\kappa_n^N}\right|^2\Delta\eta_j}\geqslant\frac{1}{\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{j=0}^{N-1}|e^{i\theta_j}|^2\,\Delta\eta_j}=1.\tag{3.50}$$

Займемся интегралом J_2. Для этого заметим, что функция $\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 = \varphi_{n,N}(e^{i\theta})\overline{\varphi_{n,N}(e^{i\theta})}$ по переменной θ представляет собой тригонометрический полином порядка n с действительными коэффициентами, поэтому к ней применима лемма 4, в силу которой

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1}\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j + r_{n,N}, \tag{3.51}$$

где

$$|r_{n,N}| \leqslant \frac{\lambda_N^2}{8}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2\right)''\right| d\theta, \quad \lambda_N = \max_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta\eta_j. \tag{3.52}$$

Чтобы оценить интеграл в правой части, мы применим неравенство Бернштейна-Зигмунда. Это даст

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2\right)''\right| d\theta \leqslant \frac{n^2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta. \tag{3.53}$$

Сопоставляя (3.51)-(3.53), имеем

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = 1 + r_{n,N}, \tag{3.54}$$

причем

$$|r_{n,N}| \leqslant n^2\lambda_N^2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta. \tag{3.55}$$

Из (3.54) и (3.55), в свою очередь, находим

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \leqslant \frac{1}{1-(n\lambda_N)^2} = 1 + \frac{(n\lambda_N)^2}{1-(n\lambda_N)^2}. \tag{3.56}$$

Из (3.47), (3.49) и (3.56) находим

$$J = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|w^n - \varphi_{n,N}(w)\right|^2 d\theta \leqslant \frac{(n\lambda_N)^2}{1-(n\lambda_N)^2} = \gamma. \tag{3.57}$$

Теперь обратимся к лемме 1, согласно которой получаем ($w = e^{i\theta}$)

$$\left|w^n - \varphi_{n,N}(w)\right|^2 \leqslant \frac{(n\lambda_N)^2}{1-(n\lambda_N)^2}\sum_{k=0}^{n}\left|w^k\right|^2 = \frac{(n+1)n^2\lambda_N^2}{1-(n\lambda_N)^2}. \tag{3.58}$$

Полагая $v_{n,N}(w) = w^n - \varphi_{n,N}(w)$, находим

$$\varphi_{n,N}(w) = w^n + v_{n,N}(w),$$

$$|v_{n,N}(w)| \leqslant \sqrt{\frac{(n+1)n^2\lambda_N^2}{1-(n\lambda_N)^2}}.$$

Теорема 2 доказана.

Перейдем к случаю, когда $|w|<1$. Мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $1 \leqslant N$ — натуральное число, системы узлов $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$ и весов $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$ определены равенствами* (3.37) *и* (3.38). *$\lambda_N = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta\eta_j$, $\{\varphi_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ — ортонормированная система полиномов на сетке $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ относительно скалярного произведения* (3.39). *Тогда имеет место следующая асимптотическая формула*

$$\varphi_{n,N}(w) = w^n + v_{n,N}(w), \tag{3.59}$$

в которой при $n\lambda_N < 1$ для остаточного члена $v_{n,N}(w)$ справедлива оценка

$$|v_{n,N}(w)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-|w|}}\frac{n\lambda_N}{\sqrt{1-(n\lambda_N)^2}}, \quad |w|<1. \tag{3.60}$$

Доказательство этой теоремы получается буквальным повторением доказательства теоремы 2 с той лишь разницей, что при применении леммы 1 мы теперь учитываем оценку

$$|w^n - \varphi_{n,N}(w)|^2 \leqslant \gamma \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(w)|^2 = \gamma \sum_{k=0}^{n} |w^k|^2 < \frac{\gamma}{1-|w|}, \quad |w|<1.$$

Отсюда мы приходим к оценке (3.60).

Рассмотрим более общий случай полиномов $\varphi_{n,N}(w)$ $(n=0,1,\ldots,N-1)$, ортогональных на сетке $\Omega_N^T = \{e^{i\theta_j}\}_{j=0}^{N-1}$ относительно скалярного произведения

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})\overline{\varphi_{m,N}(e^{i\theta_j})}h(\theta_j)\Delta\eta_j = \delta_{nm}, \tag{3.61}$$

где $h(\theta)$ – некоторый неотрицательный тригонометрический полином порядка ν. Через $\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ обозначим бесконечную последовательность полиномов, образующих на единичной окружности $|w|=1$ ортонормированную с весом $h(\theta)$ систему относительно скалярного произведения (1.3). Будем предполагать, что старшие коэффициенты полиномов $\varphi_{n,N}(w)$, $\varphi_n(w)$ положительны.

Теорема 4. *Пусть $1 \leqslant N$ – натуральное число, система узлов $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$ определена в* (3.37), *$\lambda_N = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta\eta_j$, $\{\varphi_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ — ортонормированная система полиномов на сетке $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ относительно скалярного произведения* (3.61), *$w \in \mathbb{C}$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\varphi_{n,N}(w) = \varphi_n(w) + v_{n,N}(w), \tag{3.62}$$

в которой при $(n+\nu)\lambda_N < 1$ *для остаточного члена* $v_{n,N}(w)$ *справедлива оценка*

$$|v_{n,N}(w)| \leqslant \frac{\sqrt{2}(n+\nu)\lambda_N}{\sqrt{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(w)|^2}. \tag{3.63}$$

Доказательство. Оценим интеграл

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\,|\varphi_n(w)-\varphi_{n,N}(w)|^2\,d\theta. \tag{3.64}$$

Имеем ($w=e^{i\theta}$)

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\varphi_n(w)|^2 d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\varphi_{n,N}(w)|^2 d\theta - 2\,\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\varphi_n(w)\overline{\varphi_{n,N}(w)}\,d\theta =$$

$$J_1+J_2-2J_3, \tag{3.65}$$

где

$$J_1 = 1, \quad J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\varphi_{n,N}(w)|^2 d\theta, \tag{3.66}$$

$$J_3 = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\varphi_n(w)\overline{\varphi_{n,N}(w)}\,d\theta = \frac{\kappa_n^N}{\kappa_n}, \tag{3.67}$$

κ_n,κ_n^N — старшие коэффициенты полиномов $\varphi_n(w)$ и $\varphi_{n,N}(w)$, соответственно.

В силу леммы 2 и (3.67) находим

$$J_3^2 = (\kappa_n^N/k_n)^2 = \frac{1}{k_n^2\sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\frac{\varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})}{\kappa_n^N}\right|^2\Delta\eta_j} \geqslant$$

$$\frac{1}{k_n^2\sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\frac{\varphi_n(e^{i\theta_j})}{\kappa_n}\right|^2\Delta\eta_j} = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2\Delta\eta_j}. \tag{3.68}$$

Выражение $h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2$ представляет собой тригонометрический полином порядка $n+\nu$, поэтому к нему можно применить лемму 4 и записать

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2\Delta\eta_j = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 d\theta + R_N, \tag{3.69}$$

где

$$|R_N| \leqslant \frac{\lambda_N^2}{8}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2\right)''\right|\,d\theta. \tag{3.70}$$

Если мы воспользуемся неравенством Бернштейна-Зигмунда об оценке интеграла от производной тригонометрического полинома, то получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(h(\theta) \left| \varphi_n(e^{i\theta}) \right|^2 \right)'' \right| d\theta \leqslant (n+\nu)^2 \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left| \varphi_n(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = (n+\nu)^2. \tag{3.71}$$

Сопоставляя (3.69) – (3.70), приходим к равенству

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j) \left| \varphi_n(e^{i\theta_j}) \right|^2 \Delta\eta_j = 1 + R_N, \tag{3.72}$$

в котором для R_N справедлива оценка

$$|R_N| \leqslant \frac{1}{8}((n+\nu)\lambda_N)^2.$$

Из (3.72) и (3.68), находим

$$J_3^2 \geqslant 1 - \frac{R_N}{1+R_N} = 1 + q_N \geqslant 1 - |q_n|,$$

стало бть,

$$J_3 \geqslant \sqrt{1 - |q_N|} \geqslant 1 - |q_N|, \tag{3.73}$$

где

$$|q_N| \leqslant \frac{((n+\nu)\lambda_N)^2}{8 - ((n+\nu)\lambda_N)^2}.$$

Займемся интегралом J_2. Для этого заметим, что функция $h(\theta) \left| \varphi_{n,N}(e^{i\theta}) \right|^2 = h(\theta)\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\overline{\varphi_{n,N}(e^{i\theta})}$ по переменной θ представляет собой тригонометрический полином порядка $n+\nu$ с действительными коэффициентами, поэтому к ней применима лемма 4, в силу которой из (3.66) имеем

$$J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left| \varphi_{n,N}(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \sum_{j=0}^{N-1} h(\theta) \left| \varphi_{n,N}(e^{i\theta_j}) \right|^2 \Delta\eta_j + r_{n,N}, \tag{3.74}$$

где

$$|r_{n,N}| \leqslant \frac{\lambda_N^2}{8} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(h(\theta) \left| \varphi_{n,N}(e^{i\theta}) \right|^2 \right)'' \right| d\theta, \quad \lambda_N = \max_{0 \leqslant j \leqslant N-1} \Delta\eta_j. \tag{3.75}$$

Чтобы оценить интеграл в правой части, мы применим неравенство Бернштейна-Зигмунда. Это даст

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(h(\theta) \left| \varphi_{n,N}(e^{i\theta}) \right|^2 \right)'' \right| d\theta \leqslant (n+\nu)^2 \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left| \varphi_{n,N}(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta. \tag{3.76}$$

Сопоставляя (3.74)-(3.76), имеем

$$J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left| \varphi_{n,N}(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = 1 + r_{n,N}, \tag{3.77}$$

причем
$$|r_{n,N}| \leqslant \frac{((n+\nu)\lambda_N)^2}{8} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta. \tag{3.78}$$

Из (3.77) и (3.78), в свою очередь, находим
$$J_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \leqslant \frac{8}{8-((n+\nu)\lambda_N)^2} = 1 + \frac{((n+\nu)\lambda_N)^2}{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}. \tag{3.79}$$

Из (3.66), (3.67) и (3.79) находим
$$J = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left|\varphi_n(w) - \varphi_{n,N}(w)\right|^2 d\theta \leqslant \frac{2((n+\nu)\lambda_N)^2}{8-((n+\nu)\lambda_N)^2} = \gamma. \tag{3.80}$$

Теперь обратимся к лемме 1, согласно которой получаем ($w = e^{i\theta}$)
$$\left|\varphi_n(w) - \varphi_{n,N}(w)\right|^2 \leqslant \frac{2((n+\nu)\lambda_N)^2}{8-((n+\nu)\lambda_N)^2} \sum_{k=0}^{n} \left|\varphi_k(w)\right|^2.$$

Полагая $v_{n,N}(w) = \varphi_n(w) - \varphi_{n,N}(w)$, находим
$$\varphi_{n,N}(w) = \varphi_n(w) + v_{n,N}(w),$$
$$|v_{n,N}(w)| \leqslant \frac{\sqrt{2}(n+\nu)\lambda_N}{\sqrt{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left|\varphi_k(w)\right|^2}.$$

Теорема 4 доказана.

Следствие 1. Пусть $h(\theta)$ – тригонометрический полином степени ν, для которого $\min\limits_{-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi} h(\theta) \geqslant \delta > 0$, $1 \leqslant N$ — натуральное число, система узлов $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$ определена в (3.37), $\lambda_N = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta\eta_j$, $\{\varphi_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ — ортонормированная система полиномов на сетке $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ относительно скалярного произведения (3.61), $w \in \mathbb{C}$. Тогда имеет место асимптотическая формула
$$\varphi_{n,N}(w) = \varphi_n(w) + v_{n,N}(w),$$
в которой при $(n+\nu)\lambda_N < 1$ для остаточного члена $v_{n,N}(w)$ справедлива оценка
$$|v_{n,N}(w)| \leqslant \frac{c(\delta)(n+\nu)^{3/2}\lambda_N}{\sqrt{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}}, \quad |w| = 1, \tag{3.81}$$
где $c(\delta)$ – положительное число, зависящее лишь от δ.

Доказательство. Известно(см.[36]), что если достаточно гладкая весовая функция $h(\theta) \geqslant \delta > 0$, то ортонормированная с весом $h(\theta)$ система $\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена равномерно относительно $\{w : |w| = 1\}$. Поэтому, утверждение следствия 1 непосредственно вытекает из теоремы 4.

Теперь мы перейдем к рассмотрению случая, когда весовая функция $h(\theta)$ представляет собой положительную непрерывную 2π - периодическую функцию. Нам понадобятся некоторые понятия и результаты из теории приближения функций. Через $\mathbb{T}^m$ обозначим пространство тригонометрических полиномов порядка m. Пусть

$$E_m(f)=\inf_{t_m\in\mathbb{T}^m}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-t_m(x)| \tag{3.82}$$

- наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами в равномерной метрике,

$$E_m^-(f)=\inf_{\substack{t_m\in\mathbb{T}^m\\ t_m(x)\leqslant f(x),x\in\mathbb{R}}}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-t_m(x)| \tag{3.83}$$

- наилучшее одностороннее приближение снизу функции f тригонометрическими полиномами в равномерной метрике. Очевидно, что имеют место неравенства

$$E_m(f)\leqslant E_m^-(f)\leqslant 2E_m(f). \tag{3.84}$$

Далее, пусть $W^r_{2\pi}(M)$ – класс r-раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций, для которых $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(r)}(x)|\leqslant M$. Хорошо известно, что если $f\in W^r_{2\pi}(M)$, то

$$E_m(f)\leqslant M\frac{\mathcal{K}_r}{m^r},\quad m=1,2,\dots,\quad \mathcal{K}_r=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Положим еще $h_-=\min_{\theta\in[0,2\pi]}h(\theta)$. Теперь мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 5. *Пусть* $1\leqslant N$, *система узлов* $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$ *определена в* (3.37), $\lambda_N=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta\eta_j$, $\{\varphi_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ *– ортонормированная система полиномов на сетке* $\Omega_N^T=\left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ *относительно скалярного произведения* (3.61), *в котором* $0<h(\theta)$ *– непрерывная* 2π *– периодическая функция. Через* $\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ *обозначим бесконечную последовательность полиномов, образующих на единичной окружности* $|w|=1$ *ортонормированную с весом* $h(\theta)$ *систему относительно скалярного произведения* (1.3). *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\varphi_{n,N}(w)=\varphi_n(w)+v_{n,N}(w), \tag{3.85}$$

где для остаточного члена $v_{n,N}(w)$ *справедлива оценка*

$$|v_{n,N}(w)|^2\leqslant$$

$$\left(\frac{E_m^-(h)/h_-}{1-E_m^-(h)/h_-}\left(1+\frac{((n+m)\lambda_N)^2}{8-((n+m)\lambda_N)^2}\right)+\frac{3((n+m)\lambda_N)^2+8E_m^-(h)/h_-}{8-((n+m)\lambda_N)^2}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(w)|^2, \tag{3.86}$$

в которой m *–произвольное натуральное число, для которого* $((n+m)\lambda_N)^2<8$, $E_m^-(h)<h_-$, w *–произвольное комплексное число.*

Доказательство. Оценим интеграл

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left|\varphi_n(w) - \varphi_{n,N}(w)\right|^2 d\theta. \tag{3.87}$$

Имеем $(w = e^{i\theta})$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\varphi_n(w)|^2 d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\varphi_{n,N}(w)|^2 d\theta - 2\,\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\varphi_n(w)\overline{\varphi_{n,N}(w)}\, d\theta =$$

$$J_1 + J_2 - 2J_3, \tag{3.88}$$

где $J_1 = 1$,

$$J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\varphi_{n,N}(w)|^2 d\theta, \tag{3.89}$$

$$J_3 = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\varphi_n(w)\overline{\varphi_{n,N}(w)}\, d\theta = \frac{\kappa_n^N}{\kappa_n}, \tag{3.90}$$

κ_n,κ_n^N — старшие коэффициенты полиномов $\varphi_n(w)$ и $\varphi_{n,N}(w)$, соответственно.

В силу леммы 2 и (3.90) находим

$$J_3^2 = (\kappa_n^N/k_n)^2 = \frac{1}{k_n^2 \sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j) \left|\frac{\varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})}{\kappa_n^N}\right|^2 \Delta\eta_j} \geqslant$$

$$\frac{1}{k_n^2 \sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j) \left|\frac{\varphi_n(e^{i\theta_j})}{\kappa_n}\right|^2 \Delta\eta_j} = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j) \left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j}. \tag{3.91}$$

Для произвольного натурального m через $h_m(\theta)$ обозначим тригонометрический полином порядка m наилучшего одностороннего приближения снизу функции $h(\theta)$ в равномерной метрике. Тогда мы можем записать

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j) \left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j =$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} h_m(\theta_j) \left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h(\theta_j) - h_m(\theta_j)}{h(\theta_j)} h(\theta_j) \left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{3.92}$$

где

$$\Sigma_2 \leqslant \frac{E_m^-(h)}{h_-} \sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j) \left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j.$$

С учетом последнего неравенства из (3.92) выводим

$$\left(1 - \frac{E_m^-(h)}{h_-}\right) \sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j) \left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j \leqslant \Sigma_1. \tag{3.93}$$

Теперь займемся суммой Σ_1. С этой целью обратимся к лемме 4, согласно которой

$$\Sigma_1 = \sum_{j=0}^{N-1} h_m(\theta_j) \left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j = \int_{-\pi}^{\pi} h_m(\theta)|\varphi_n(w)|^2 d\theta + R_N, \tag{3.94}$$

причем

$$|R_N| \leqslant \frac{\lambda_N^2}{8} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(h_m(\theta) \left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 \right)'' \right| d\theta$$

Если мы воспользуемся неравенством Бернштейна-Зигмунда об оценке интеграла от производной тригонометрического полинома, то получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(h_m(\theta) \left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 \right)'' \right| d\theta \leqslant$$

$$(n+m)^2 \int_{-\pi}^{\pi} h_m(\theta) \left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \leqslant (n+m)^2 \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = (n+m)^2. \tag{3.95}$$

Сопоставляя (3.94) с (3.95), приходим к неравенству

$$\Sigma_1 \leqslant 1 + R_N, \tag{3.96}$$

в котором для R_N справедлива оценка

$$|R_N| \leqslant \frac{1}{8}((n+m)\lambda_N)^2.$$

Оценки (3.93) и (3.96) дают

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j) \left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j \leqslant \frac{1+R_N}{1-\frac{E_m^-(h)}{h_-}}. \tag{3.97}$$

Из (3.91)и (3.97) находим

$$J_3^2 \geqslant \frac{1-\frac{E_m^-(h)}{h_-}}{1+R_N} = 1 - \frac{R_N + \frac{E_m^-(h)}{h_-}}{1+R_N} = 1 - q_N \geqslant 1 - |q_N|,$$

стало быть,

$$J_3 \geqslant \sqrt{1-|q_N|} \geqslant 1 - |q_N|, \tag{3.98}$$

где

$$|q_N| \leqslant \frac{((n+m)\lambda_N)^2 + 8E_m^-(h)/h_-}{8-((n+m)\lambda_N)^2}.$$

Займемся интегралом J_2. Имеем

$$J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} h_m(\theta) \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(\theta)-h_m(\theta)}{h(\theta)} h(\theta) \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = I_1 + I_2, \quad (3.99)$$

где

$$I_2 \leqslant \frac{E_m^-(h)}{h_-} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta.$$

С учетом последнего неравенства из (3.99) выводим

$$\left(1 - \frac{E_m^-(h)}{h_-}\right) J_2 \leqslant I_1. \quad (3.100)$$

Теперь займемся суммой I_1. С этой целью обратимся к лемме 4, согласно которой

$$I_1 = \sum_{j=0}^{N-1} h_m(\theta_j) \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j + R_N, \quad (3.101)$$

причем

$$|R_N| \leqslant \frac{\lambda_N^2}{8} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(h_m(\theta) \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2\right)'' \right| d\theta$$

Если мы снова воспользуемся неравенством Бернштейна-Зигмунда об оценке интеграла от производной тригонометрического полинома, то получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(h_m(\theta) \left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2\right)'' \right| d\theta \leqslant (n+m)^2 I_1. \quad (3.102)$$

Сопоставляя (3.101) с (3.102), приходим к неравенству

$$I_1 \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{8}((n+m)\lambda_N)^2} = 1 + \frac{((n+m)\lambda_N)^2}{8 - ((n+m)\lambda_N)^2}, \quad (3.103)$$

Оценки (3.100) и (3.103) дают

$$J_2 \leqslant \frac{I}{1 - \frac{E_m^-(h)}{h_-}} \leqslant \left(1 + \frac{E_m^-(h)/h_-}{1 - E_m^-(h)/h_-}\right) \left(1 + \frac{((n+m)\lambda_N)^2}{8 - ((n+m)\lambda_N)^2}\right). \quad (3.104)$$

Сопоставляя (3.88) с (3.97) и (3.104), находим

$$J \leqslant -1 + \left(1 + \frac{E_m^-(h)/h_-}{1 - E_m^-(h)/h_-}\right) \left(1 + \frac{((n+m)\lambda_N)^2}{8 - ((n+m)\lambda_N)^2}\right) +$$

$$\frac{2((n+m)\lambda_N)^2 + 8E_m^-(h)/h_-}{8 - ((n+m)\lambda_N)^2} =$$

$$\frac{E_m^-(h)/h_-}{1 - E_m^-(h)/h_-} \left(1 + \frac{((n+m)\lambda_N)^2}{8 - ((n+m)\lambda_N)^2}\right) + \frac{3((n+m)\lambda_N)^2 + 8E_m^-(h)/h_-}{8 - ((n+m)\lambda_N)^2}.$$

Отсюда и (3.87), обратившись к лемме 1, находим

$$|\varphi_n(w)-\varphi_{n,N}(w)|^2 \leqslant$$

$$\left(\frac{E_m^-(h)/h_-}{1-E_m^-(h)/h_-}\left(1+\frac{((n+m)\lambda_N)^2}{8-((n+m)\lambda_N)^2}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{3((n+m)\lambda_N)^2+8E_m^-(h)/h_-}{8-((n+m)\lambda_N)^2}\right)\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(w)|^2 .$$

Отсюда, полагая $v_{n,N}(w)=\varphi_n(w)-\varphi_{n,N}(w)$, приходим к утверждению теоремы 5.

Следствие 2. Пусть $1 \leqslant N$, система узлов $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$ определена в (3.37), $\lambda_N=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta\eta_j$, $\{\varphi_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ – ортонормированная система полиномов на сетке $\Omega_N^T=\left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ относительно скалярного произведения (3.61), в котором $0<h(\theta)$ – непрерывная 2π – периодическая функция, удовлетворяющая при $|\theta_1-\theta_2|\leqslant\frac{1}{2}$, $\gamma>1$ условию $|h(\theta_1)-h(\theta_2)|\leqslant c_1\left(\ln\frac{1}{|\theta_1-\theta_2|}\right)^{-\gamma}$. Тогда для $|w|=1$ имеет место асимптотическая формула

$$\varphi_{n,N}(w)=\varphi_n(w)+v_{n,N}(w),$$

в которой для остаточного члена $v_{n,N}(w)$ справедлива оценка

$$|v_{n,N}(w)|^2 \leqslant$$

$$c_2(n+1)\left(\frac{E_m^-(h)/h_-}{1-E_m^-(h)/h_-}\left(1+\frac{((n+m)\lambda_N)^2}{8-((n+m)\lambda_N)^2}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{3((n+m)\lambda_N)^2+8E_m^-(h)/h_-}{8-((n+m)\lambda_N)^2}\right),$$

где m — произвольное натуральное число, для которого $((n+m)\lambda_N)^2<8$, $E_m^-(h)<h_-$, c_k — положительные постоянные.

Доказательство. Известно(см.[36], что если весовая функция $h=h(\theta)\geqslant\delta>0$ при $|\theta_1-\theta_2|\leqslant\frac{1}{2}$, $\gamma>1$ удовлетворяет условию $|h(\theta_1)-h(\theta_2)|\leqslant\left(\ln\frac{1}{|\theta_1-\theta_2|}\right)^{-\gamma}$, то ортонормированная с весом $h(\theta)$ система $\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена равномерно относительно $\{w:|w|=1\}$. Поэтому, утверждение следствия 2 непосредственно вытекает из теоремы 5.

Рассмотрим случай, когда весовая функция $h(\theta)=|t(\theta)|$, где $t(\theta)$ представляет собой произвольный тригонометрический полином (не обязательно неотрицательный). Такой случай возникает, например, тогда, когда в соответствии с равенством (2.22) осуществляется связь между полиномами $\{P_{n,N}(x)\}_{n=0}^{N-1}$, ортогональными на сетках $\Omega_N^A=\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ из отрезка $[-1,1]$ с весом $\rho=\rho(x_j)=\rho_j$ и соответствующими полиномами $\{\varphi_{k,2N}(w)\}_{k=0}^{2N-1}$, ортогональными на $\Omega_{2N}^T=\{e^{i\theta_j}\}_{j=0}^{2N-1}$ из единичной окружности с весом $\tau=\tau(\theta_j)=\tau_j$. Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 5. *Пусть* $t_n(\theta)$ *произвольный нетривиальный тригонометрический полином с вещественными коэффициентами,* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\||t_n|'\|_p = \left(\int_0^{2\pi} ||t_n(\theta)|'|^p d\theta\right)^{1/p} \leqslant n\|t_n\|_p.$$

Доказательство. Поскольку, очевидно,

$$|t_n(\theta)|' = \begin{cases} t_n'(\theta), & \text{если } t_n(\theta) > 0, \\ -t_n'(\theta) & \text{если } t_n(\theta) < 0, \end{cases}$$

то утверждение леммы 5 вытекает из неравенства Бернштейна – Зигмунда.

Лемма 6. *Пусть* $(0 \leqslant j \leqslant N-1)$

$$-\pi = \eta_0 < \eta_1 < \cdots < \eta_{N-1} < \eta_N = \pi, \quad \eta_j \leqslant \theta_j < \eta_{j+1} \quad (0 \leqslant j \leqslant N-1), \tag{3.105}$$

$$\tau_j = \Delta\eta_j = \eta_{j+1} - \eta_j, \tag{3.106}$$

$f(\theta)$ *абсолютно непрерывна на* $[-\pi, \pi]$, $\lambda_N = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant N-1} \Delta\eta_j$. *Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = \sum_{j=0}^{N-1} f(\theta_j)\Delta\eta_j + r_N(f),$$

где

$$|r_N(f)| \leqslant \lambda_N \int_{-\pi}^{\pi} |f'(\theta)|\, d\theta. \tag{3.107}$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} f(\theta)\, d\theta. \tag{3.108}$$

Далее, воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница, запишем

$$f(\theta) = f(\theta_j) + \int_{\theta_j}^{\theta} f'(\tau)\, d\tau,$$

поэтому

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} f(\theta)\, d\theta = f(\theta_j)\Delta\eta_j + \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} d\theta \int_{\theta_j}^{\theta} f'(\tau)\, d\tau =$$

$$f(\theta_j)\Delta\eta_j + \int_{\eta_j}^{\theta_j} d\theta \int_{\theta_j}^{\theta} f'(\tau)\, d\tau + \int_{\theta_j}^{\eta_{j+1}} d\theta \int_{\theta_j}^{\theta} f'(\tau)\, d\tau =$$

$$f(\theta_j)\Delta\eta_j - \int\limits_{\eta_j}^{\theta_j} d\theta \int\limits_{\theta}^{\theta_j} f'(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\theta_j}^{\eta_{j+1}} d\theta \int\limits_{\theta_j}^{\theta} f'(\tau)\,d\tau =$$

$$f(\theta_j)\Delta\eta_j - \int\limits_{\eta_j}^{\theta_j} f'(\tau)d\tau \int\limits_{\eta_j}^{\tau} d\theta + \int\limits_{\theta_j}^{\eta_{j+1}} f'(\tau)d\tau \int\limits_{\tau}^{\eta_{j+1}} d\theta. \tag{3.109}$$

Далее,

$$|r_{N,j}| = \left| - \int\limits_{\eta_j}^{\theta_j} f'(\tau)d\tau \int\limits_{\eta_j}^{\tau} d\theta + \int\limits_{\theta_j}^{\eta_{j+1}} f'(\tau)d\tau \int\limits_{\tau}^{\eta_{j+1}} d\theta \right| \leqslant$$

$$(\theta_j - \eta_j) \int\limits_{\eta_j}^{\theta_j} |f'(\tau)|d\tau + (\eta_{j+1} - \theta_j) \int\limits_{\theta_j}^{\eta_{j+1}} |f'(\tau)|d\tau. \tag{3.110}$$

Утверждение леммы 6 вытекает из (3.108)–(3.110).

Перейдем к вопросу об асимптотических свойствах полиномов $\varphi_{n,N}(w)$ $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$, ортогональных на сетке $\Omega_N^T = \{e^{i\theta_j}\}_{j=0}^{N-1}$ относительно скалярного произведения (3.61), в котором $h(\theta) = |t_\nu(\theta)|$, где $t_\nu(\theta)$– некоторый нетривиальный тригонометрический полином порядка ν. Через $\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ обозначим бесконечную последовательность полиномов, образующих на единичной окружности $|w| = 1$ ортонормированную с весом $h(\theta)$ систему относительно скалярного произведения (0.3).

Теорема 6. *Пусть* $1 \leqslant N$ *— натуральное число, система узлов* $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$ *определена в* (3.105), $\lambda_N = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta\eta_j$, $\{\varphi_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ *— ортонормированная система полиномов на сетке* $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ *относительно скалярного произведения* (3.61), *в котором* $h(\theta) = |t_\nu(\theta)|$, *где* $t_\nu(\theta)$*– некоторый нетривиальный тригонометрический полином порядка* ν. *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\varphi_{n,N}(w) = \varphi_n(w) + v_{n,N}(w), \quad w \in \mathbb{C}, \tag{3.111}$$

в которой при $(n+\nu)\lambda_N < 1$ *для остаточного члена* $v_{n,N}(w)$ *справедлива оценка*

$$|v_{n,N}(w)| \leqslant \sqrt{\frac{2(n+\nu)\lambda_N}{1-(n+\nu)\lambda_N} \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(w)|^2}. \tag{3.112}$$

Доказательство. Следуя технике, которая применялась при доказательстве теоремы 4, оценим интеграл

$$J = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\, |\varphi_n(w) - \varphi_{n,N}(w)|^2\, d\theta. \tag{3.113}$$

Имеем $(w = e^{i\theta})$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\varphi_n(w)|^2 d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\varphi_{n,N}(w)|^2 d\theta - 2\,\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\varphi_n(w)\overline{\varphi_{n,N}(w)}\,d\theta =$$

$$J_1 + J_2 - 2J_3, \tag{3.114}$$

где

$$J_1 = 1,\; J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\varphi_{n,N}(w)|^2 d\theta\; J_3 = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\varphi_n(w)\overline{\varphi_{n,N}(w)}\,d\theta = \frac{\kappa_n^N}{\kappa_n}, \tag{3.115}$$

κ_n,κ_n^N — старшие коэффициенты полиномов $\varphi_n(w)$ и $\varphi_{n,N}(w)$, соответственно.

В силу леммы 2 и (3.67) находим

$$J_3^2 = (\kappa_n^N/k_n)^2 = \frac{1}{k_n^2\sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\frac{\varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})}{\kappa_n^N}\right|^2\Delta\eta_j} \geqslant$$

$$\frac{1}{k_n^2\sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\frac{\varphi_{n}(e^{i\theta_j})}{\kappa_n}\right|^2\Delta\eta_j} = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2\Delta\eta_j}. \tag{3.116}$$

Имеем $h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 = \left|t_\nu(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2\right|$, а $t_\nu(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2$ представляет собой тригонометрический полином порядка $n+\nu$, поэтому к функции $f(\theta) = h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2$ можно применить лемму 6 и записать

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2\Delta\eta_j = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 d\theta + R_N, \tag{3.117}$$

где

$$|R_N| \leqslant \lambda_N \int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2\right)'\right| d\theta. \tag{3.118}$$

Если мы воспользуемся леммой 5, то получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2\right)'\right| d\theta \leqslant (n+\nu)\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = n+\nu. \tag{3.119}$$

Сопоставляя (3.117) – (3.119), приходим к равенству

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2\Delta\eta_j = 1 + R_N, \tag{3.120}$$

в котором для R_N справедлива оценка $|R_N| \leqslant (n+\nu)\lambda_N$. Из (3.116) и (3.120), находим

$$J_3^2 \geqslant 1 - \frac{R_N}{1+R_N} = 1 + q_N \geqslant 1 - |q_n|,$$

стало бть,

$$J_3 \geqslant \sqrt{1-|q_N|} \geqslant 1-|q_N|, \tag{3.121}$$

где

$$|q_N| \leqslant \frac{(n+\nu)\lambda_N}{1-(n+\nu)\lambda_N}.$$

Займемся интегралом J_2. Имеем $h(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 = \left|t_\nu(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2\right|$, а $t_\nu(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2$ представляет собой тригонометрический полином порядка $n+\nu$, поэтому к функции $g(\theta) = h(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2$ можно применить лемму 3.6 и записать

$$J_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j + r_{n,N}, \tag{3.122}$$

где

$$|r_{n,N}| \leqslant \lambda_N \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\left(h(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2\right)'\right| d\theta, \quad \lambda_N = \max_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta\eta_j. \tag{3.123}$$

Чтобы оценить интеграл в правой части, мы применим лемму 5. Это даст

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\left(h(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2\right)'\right| d\theta \leqslant (n+\nu)\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta. \tag{3.124}$$

Сопоставляя (3.122)-(3.124), имеем

$$J_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = 1 + r_{n,N}, \tag{3.125}$$

причем

$$|r_{n,N}| \leqslant (n+\nu)\lambda_N \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta. \tag{3.126}$$

Из (3.125) и (3.126), в свою очередь, находим

$$J_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \leqslant \frac{1}{1-(n+\nu)\lambda_N} = 1 + \frac{(n+\nu)\lambda_N}{1-(n+\nu)\lambda_N}. \tag{3.127}$$

Из (3.114), (3.121) и (3.127) находим

$$J = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_n(w) - \varphi_{n,N}(w)\right|^2 d\theta \leqslant \frac{2(n+\nu)\lambda_N}{1-(n+\nu)\lambda_N} = \gamma.$$

Теперь обратимся к лемме 1, согласно которой получаем ($w = e^{i\theta}$)

$$|\varphi_n(w)-\varphi_{n,N}(w)|^2 \leqslant \frac{2(n+\nu)\lambda_N}{1-(n+\nu)\lambda_N}\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(w)|^2 .$$

Полагая $v_{n,N}(w)=\varphi_n(w)-\varphi_{n,N}(w)$, находим

$$\varphi_{n,N}(w)=\varphi_n(w)+v_{n,N}(w),$$

$$|v_{n,N}(w)| \leqslant \sqrt{\frac{2(n+\nu)\lambda_N}{1-(n+\nu)\lambda_N}\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(w)|^2}.$$

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Пусть* $1 \leqslant N$ *— натуральное число, система узлов* $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$ *определена в* (3.37), $\lambda_N = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta\eta_j$, $\{\varphi_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ *— ортонормированная система полиномов на сетке* $\Omega_N^T=\left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ *относительно скалярного произведения* (3.61), *в котором* $h(\theta)=|t_\nu(\theta)|$, *где* $t_\nu(\theta)$*– такой нетривиальный тригонометрический полином порядка* ν, *что каждая точка, в которой он меняет свой знак содержится среди узлов* $\{\eta_j\}_{j=0}^{N-1}$. *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\varphi_{n,N}(w)=\varphi_n(w)+v_{n,N}(w), \quad w\in\mathbb{C}$$

в которой при $(n+\nu)\lambda_N<1$ *для остаточного члена* $v_{n,N}(w)$ *справедлива оценка*

$$|v_{n,N}(w)| \leqslant \frac{\sqrt{2}(n+\nu)\lambda_N}{\sqrt{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(w)|^2}.$$

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 4 только тем, что вместо неравенства Бернштейна-Зигмунда используется лемма 5.

Мы теперь изменим скалярное произведение (3.61), полагая

$$2\sum_{j=0}^{N-1}\tilde{\varphi}_{n,N}(e^{i\theta_j})\overline{\tilde{\varphi}_{m,N}(e^{i\theta_j})}h(\theta_j)\sin\frac{\Delta\eta_j}{2}=\delta_{nm}, \tag{3.128}$$

где узлы θ_j $(0\leqslant j\leqslant N-1)$ определены в (3.37). Тем самым мы определили конечную последовательность $\{\tilde{\varphi}_{n,N}(z)\}_{n=0}^{N-1}$ полиномов, образующих ортонормированную систему на единичной окружности относительно скалярного произведения (3.128).

Теорема 8. *Пусть* $1 \leqslant N$ *— натуральное число, система узлов* $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$ *определена в* (3.37), $\lambda_N = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta\eta_j$, $\{\tilde{\varphi}_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ *— ортонормированная система полиномов на сетке* $\Omega_N^T=\left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ *относительно скалярного произведения* (3.128), *в котором* $h(\theta)=|t_\nu(\theta)|$, *где* $t_\nu(\theta)$*– такой нетривиальный тригонометрический полином порядка* ν, *что каждая точка, в которой он меняет свой знак содержится среди узлов* $\{\eta_j\}_{j=0}^{N-1}$. *Далее, пусть*

$\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ *—ортонормированная система полиномов относительно скалярного произведения* (1.3). *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\tilde{\varphi}_{n,N}(w) = \varphi_n(w) + \tilde{v}_{n,N}(w), \quad w \in \mathbb{C}$$

в которой при $(n+\nu)\lambda_N < 1$ *для остаточного члена* $\tilde{v}_{n,N}(w)$ *справедлива оценка*

$$|\tilde{v}_{n,N}(w)| \leqslant \lambda_N \sqrt{\left(\frac{1}{24-\lambda_N^2} + \frac{2((n+\nu)\lambda_N)^2}{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}\right)\sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(w)|^2}.$$

Доказательство. Оценим интеграл

$$J = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_n(w) - \tilde{\varphi}_{n,N}(w)\right|^2 d\theta =$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\varphi_n(w)|^2 d\theta + \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\tilde{\varphi}_{n,N}(w)|^2 d\theta - 2\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\varphi_n(w)\overline{\tilde{\varphi}_{n,N}(w)}\, d\theta =$$

$$J_1 + J_2 - 2J_3, \tag{3.129}$$

где

$$J_1 = 1,\ J_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)|\tilde{\varphi}_{n,N}(w)|^2 d\theta,\ J_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\varphi_n(w)\overline{\tilde{\varphi}_{n,N}(w)}\, d\theta = \frac{\tilde{\kappa}_n^N}{\kappa_n}, \tag{3.130}$$

κ_n,$\tilde{\kappa}_n^N$ — старшие коэффициенты полиномов $\varphi_n(w)$ и $\tilde{\varphi}_{n,N}(w)$, соответственно. В силу леммы 2 и (3.130) находим

$$J_3^2 = (\tilde{\kappa}_n^N/k_n)^2 = \frac{1}{2k_n^2\sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\frac{\tilde{\varphi}_{n,N}(e^{i\theta_j})}{\tilde{\kappa}_n^N}\right|^2 \sin\frac{\Delta\eta_j}{2}}$$

$$\geqslant \frac{1}{k_n^2\sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\frac{\varphi_n(e^{i\theta_j})}{\kappa_n}\right|^2 2\sin\frac{\Delta\eta_j}{2}} \geqslant \frac{1}{k_n^2\sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\frac{\varphi_n(e^{i\theta_j})}{\kappa_n}\right|^2 \Delta\eta_j}$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j}.$$

Имеем $h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 = \left|t_\nu(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2\right|$, а $t_\nu(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2$ представляет собой тригонометрический полином порядка $n+\nu$, сохраняющий свой знак на каждом из интервалов (η_j, η_{j+1}), поэтому к функции $f(\theta) = h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2$ можно применить лемму 4 и записать

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j)\left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 d\theta + R_N,$$

где
$$|R_N| \leqslant \frac{\lambda_N^2}{8} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \left(h(\theta) \left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 \right)'' \right| \, d\theta.$$

Если мы воспользуемся леммой 5, то получим
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \left(h(\theta) \left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 \right)'' \right| \, d\theta \leqslant (n+\nu)^2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 \, d\theta = (n+\nu)^2.$$

Сопоставляя эти соотношения, приходим к равенству
$$\sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j) \left|\varphi_n(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j = 1 + R_N,$$

в котором для R_N справедлива оценка
$$|R_N| \leqslant \frac{1}{8}((n+\nu)\lambda_N)^2.$$

Тем самым, мы находим
$$J_3^2 \geqslant 1 - \frac{R_N}{1+R_N} = 1 + q_N \geqslant 1 - |q_n|,$$

стало бть,
$$J_3 \geqslant \sqrt{1 - |q_N|} \geqslant 1 - |q_N|, \tag{3.131}$$

где
$$|q_N| \leqslant \frac{((n+\nu)\lambda_N)^2}{8 - ((n+\nu)\lambda_N)^2}.$$

Рассмотрим J_2. Применяя рассуждения, совершенно аналогичные тем, которые привели нас к оценке (3.79), из (3.130) можно показать, что
$$J_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left|\tilde{\varphi}_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \leqslant$$
$$\sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j) \left|\tilde{\varphi}_{n,N}(e^{i\theta_j})\right|^2 \Delta\eta_j + \frac{((n+\nu)\lambda_N)^2}{8 - ((n+\nu)\lambda_N)^2}. \tag{3.132}$$

Далее положим $\frac{x}{\sin x} = 1 + c(x)$ и заметим, что при $|x| \leqslant \pi/2$ справедливо неравенство $|c(x)| \leqslant \frac{x^2}{6-x^2}$. Поэтому, для $\Delta\eta_j \leqslant \lambda_N < \pi$ мы можем записать
$$\Delta\eta_j \leqslant \left(1 + \frac{\lambda_N^2}{24 - \lambda_N^2} \right) 2 \sin \frac{\Delta\eta_j}{2}.$$

С учетом этого неравенства из (3.132) мы выводим
$$J_2 \leqslant \left(1 + \frac{\lambda_N^2}{24 - \lambda_N^2} \right) \sum_{j=0}^{N-1} h(\theta_j) \left|\tilde{\varphi}_{n,N}(e^{i\theta_j})\right|^2 2 \sin \frac{\Delta\eta_j}{2} + \frac{((n+\nu)\lambda_N)^2}{8 - ((n+\nu)\lambda_N)^2} =$$

$$1+\frac{\lambda_N^2}{24-\lambda_N^2}+\frac{((n+\nu)\lambda_N)^2}{8-((n+\nu)\lambda_N)^2} \tag{3.133}$$

Сопоставляя (3.129)–(3.133), получаем

$$J\leqslant\frac{\lambda_N^2}{24-\lambda_N^2}+\frac{2((n+\nu)\lambda_N)^2}{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}.$$

Нам остается воспользоваться леммой 1. Теорема 8 доказана.

4. Об асимптотике полиномов $p_{n,N}(x)$ в некоторых специальных выборах узлов x_j и весов ρ_j

Разобьем отрезок $[-1,1]$ точками t_j следующим образом $-1=t_0<t_1<\ldots<t_{N-1}<t_N=1$ и положим

$$t_j=\cos\eta_{2N-j}\quad(j=0,1,\ldots,N), \tag{4.1}$$

$$\eta_j=-\eta_{2N-j}\quad(j=0,1,\ldots,N), \tag{4.2}$$

$$\theta_j=\frac{\eta_j+\eta_{j+1}}{2}\quad,\tau_j=\Delta\eta_j=\eta_{j+1}-\eta_j\quad(j=0,1,\ldots,2N-1), \tag{4.3}$$

$$x_j=\cos\theta_{2N-j-1},\quad\rho_j=\frac{1}{\pi}\tau_{2N-1-j}\quad(j=0,1,\ldots,N-1), \tag{4.4}$$

Пусть $\{P_{n,N}(x)\}_{n=0}^{N-1}$ – конечная последовательность полиномов, образующих ортонормированную систему на сетке $\Omega_N^A=\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ с весом $\rho=\rho(x_j)=\rho_j$, а $\{\varphi_{k,2N}(w)\}_{k=0}^{2N-1}$ – соответствующая последовательность полиномов, образующих ортонормированную систему на сетке $\Omega_{2N}^T=\{e^{i\theta_j}\}_{j=0}^{2N-1}$ с весом $\tau=\tau(\theta_j)=\tau_j$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1}\varphi_{n,2N}(e^{i\theta_j})\overline{\varphi_{m,2N}(e^{i\theta_j})}\tau_j=\delta_{nm}. \tag{4.5}$$

Рассмотрим пример. Пусть $N\geqslant1$,

$$\eta_j=\frac{2\pi(j-N)}{2N}\quad(j=0,1,\ldots,2N),$$

$$t_j=\cos\eta_{2N-j}\quad(j=0,1,\ldots,N).$$

Тогда

$$\theta_j=\frac{\eta_j+\eta_{j+1}}{2}=\frac{(2(j-N)+1)\pi}{2N}\quad(j=0,1,\ldots,2N-1),$$

$$x_j=\cos\theta_{2N-j-1}=\cos\frac{(2(N-j)-1)\pi}{2N}\quad(j=0,1,\ldots,N-1). \tag{4.6}$$

Таким образом, в этом примере x_j $(j=0,1,\ldots,N-1)$ – узлы Чебышева (нули полинома Чебышева $T_N(x)=\cos(N\arccos x)$). Кроме того заметим, что $\tau_j=\eta_j=\frac{\pi}{N}$, $\rho_j=\frac{1}{\pi}\eta_j=\frac{1}{N}$. Следовательно, ортонормированную систему на сетке $\Omega_N^A=\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ с весом $\rho=\rho(x_j)=\rho_j$ образуют полиномы Чебышева $1,\sqrt{2}T_1(x),\ldots,\sqrt{2}T_{N-1}(x)$. Другими словами, $P_{0,N}(x)=1$, $P_{n,N}(x)=$

$\sqrt{2}T_n(x)$ $(n = 1, \ldots, N-1)$. Заметим также, что в рассматриваемом случае ортонормированную систему на соответствующей сетке $\Omega_{2N}^T = \{e^{i\theta_j}\}_{j=0}^{2N-1}$ относительно скалярного произведения (4.5) образуют степени $\varphi_{n,N}(w) = w^n$ $(n = 0, 1, \ldots, 2N-1)$.

Из соотношений (4.1) – (4.5) нетрудно заметить, что узлы $\{\theta_j\}$ и веса $\{\tau_j\}$ удовлетворяют условиям теоремы 2, поэтому имеет место асимптотическая формула

$$\varphi_{2n,2N}(w) = w^n + v_{2n,2N}(w), \tag{4.7}$$

в которой для остаточного члена при $2n\lambda_{2N} < 1$ справедлива оценка

$$|v_{2n,2N}(w)| \leqslant \sqrt{\frac{(2n+1)(2n)^2\lambda_{2N}^2}{1-(2n\lambda_{2N})^2}}, \quad |w| = 1, \tag{4.8}$$

где $\lambda_{2N} = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant 2N-1} \Delta\eta_j$. Сопоставляя (4.7) с (2.22), имеем

$$\begin{gathered}P_{n,N}(z) = d_{n,N}^{-\frac{1}{2}}\left[w^{-n}\varphi_{2n,2N}(w) + w^n\varphi_{2n,2N}(w^{-1})\right] = \\ d_{n,N}^{-\frac{1}{2}}\left[w^{-n}(w^{2n} + v_{2n,2N}(w)) + w^n\left(w^{-2n} + v_{2n,2N}(w^{-1})\right)\right] = \\ d_{n,N}^{-\frac{1}{2}}\left[w^n + w^{-n} + w^{-n}v_{2n,2N}(w) + w^n v_{2n,2N}(w^{-1})\right],\end{gathered} \tag{4.9}$$

где

$$d_{n,N} = 2\left(1 + \frac{\varphi_{2n,2N}(0)}{\kappa_{2n}}\right), \tag{4.10}$$

$\kappa_{2n} = \kappa_{2n}^{2n,2N}$ – старший коэффициент полинома $\varphi_{2n,2N}(w)$. Полагая в (4.9) $z = x = \cos\theta$, $w = e^{i\theta}$, получаем

$$P_{n,N}(x) = d_{n,N}^{-\frac{1}{2}}\left[2T_n(x) + w^{-n}v_{2n,2N}(w) + w^n v_{2n,2N}(w^{-1})\right], \tag{4.11}$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ – полином Чебышева. Рассмотрим отдельно асимптотическое поведение величины $d_{n,N}$, фигурирующей в (4.11) и определенной равенством (4.10). С этой целью обратимся сначала к теореме 3, согласно которой

$$|\varphi_{2n,2N}(0)| = |v_{2n,2N}(0)| \leqslant \frac{2n\lambda_{2N}}{\sqrt{1-(2n\lambda_{2N})^2}}. \tag{4.12}$$

С другой стороны, в силу леммы 2,

$$\frac{1}{\kappa_{2n}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1}|e^{i\theta_j}|\tau_j} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2N-1}|e^{i\theta_j}|\Delta\eta_j} = 1. \tag{4.13}$$

Сопоставляя (4.12) и (4.13) с (4.10), мы замечаем, что

$$d_n = d_{n,N} = 2(1 + y_{2n,2N}),$$

где

$$|y_{2n,2N}| = \frac{|\varphi_{2n,2N}(0)|}{\kappa_{2n}} \leqslant \frac{2n\lambda_{2N}}{\sqrt{1-(2n\lambda_{2N})^2}}, \tag{4.14}$$

следовательно, если при $N \to \infty$ будет, например, $n\lambda_N = o(1)$, то

$$d_{n,N}^{-1/2} = 2^{-1/2}(1 + y_{2n,2N})^{-1/2} = 2^{-1/2}(1 + \delta_{n,N}), \quad \delta_{n,N} = O(n\lambda_N). \tag{4.15}$$

Из (4.11) и (4.15) имеем

$$P_{n,N}(x) = \sqrt{2}T_n(x) + V_{n,N}(x), \tag{4.16}$$

где

$$V_{n,N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(w^{-n}v_{2n,2N}(w) + w^n v_{2n,2N}(w^{-1}) +$$

$$\delta_{n,N}\left[2T_n(x) + w^{-n}v_{2n,2N}(w) + w^n v_{2n,2N}(w^{-1})\right]\Big) \tag{4.17}$$

Величину $V_{n,N}(x)$ при $x = \cos\theta$ ($w = e^{i\theta}$) мы можем оценить с помощью неравенства (4.8) и оценки (4.15), что дает

$$|V_{n,N}(x)| \leqslant \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{(2n+1)(2n)^2\lambda_{2N}^2}{1-(2n\lambda_{2N})^2}} + \delta_{n,N}\left(1 + \sqrt{\frac{(2n+1)(2n)^2\lambda_{2N}^2}{1-(2n\lambda_{2N})^2}}\right)\right). \tag{4.18}$$

В качестве непосредственного следствия неравенства (4.18) мы можем теперь сформулировать следующий результат.

Теорема 9. *Пусть $1 \leqslant N$ – натуральное число, $-1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$. Точки x_j и веса ρ_j $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ определены равенствами (4.1) – (4.4). Далее, пусть $\{P_{n,N}(x)\}_{n=0}^{N-1}$ – конечная последовательность полиномов, образующих ортонормированную систему на сетке $\Omega_N^A = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ с весом $\rho = \rho(x_j) = \rho_j$ относительно скалярного произведения (2.2), $0 < a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда имеет место асимптотическая формула (4.16), в которой для остаточного члена $V_{n,N}(x)$ равномерно относительно $x \in [-1, 1]$, n, N таких, что $0 \leqslant n^{\frac{3}{2}}\lambda_N \leqslant a_N$, $N = 1, 2, \ldots$ имеет место оценка $V_{n,N}(x) = O(n^{3/2}\lambda_N)$.*

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 7. *Пусть $1 \leqslant N$ — натуральное число, система узлов $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$ определена в (3.37), $\lambda_N = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta\eta_j$, $\{\varphi_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ — ортонормированная система полиномов на сетке $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ относительно скалярного произведения (3.61), в котором $h(\theta) = |t_\nu(\theta)|$, где $t_\nu(\theta)$– такой нетривиальный тригонометрический полином порядка ν, что каждая точка, в которой он меняет свой знак содержится, среди узлов $\{\eta_j\}_{j=0}^{N-1}$. Далее, пусть $\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ — бесконечная система полиномов, образующих ортонормированную систему на единичной окружности относительно скалярного произведения (1.3). Через $\kappa_{n,N}$ и κ_n обозначим, как и прежде, старшие коэффициенты полиномов $\varphi_{n,N}(w)$ и $\varphi_n(w)$, соответственно. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\frac{1}{\kappa_{n,N}} = \frac{1}{\kappa_n} + \varepsilon_{n,N},$$

в которой для остаточного члена $\varepsilon_{n,N}$ имеет место оценка $|\varepsilon_{n,N}| \leqslant \frac{1}{8\kappa_n}((n+\nu)\lambda_N)^2$.

Доказательство. Имеем (лемма 2)

$$\frac{1}{\kappa_{n,N}} = \left(\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{\varphi_{n,N}(\theta_j)}{\kappa_{n,N}}\right)^2 h(\theta_j)\Delta\eta_j\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\left(\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{\varphi_{n}(\theta_j)}{\kappa_{n}}\right)^2 h(\theta_j)\Delta\eta_j\right)^{1/2} =$$

$$\frac{1}{\kappa_n}\left(\sum_{j=0}^{N-1}\left(\varphi_{n}(\theta_j)\right)^2 h(\theta_j)\Delta\eta_j\right)^{1/2} =$$

$$\frac{1}{\kappa_n}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\varphi_{n}(\theta)\right)^2 h(\theta)d\theta + R_{n,N}\right)^{1/2} =$$

$$\frac{1}{\kappa_n}(1+R_{n,N})^{\frac12} < \frac{1}{\kappa_n}(1+|R_{n,N}|)^{\frac12} < \frac{1}{\kappa_n}(1+|R_{n,N}|), \tag{4.19}$$

где для остаточного члена $R_{n,N}$ справедлива оценка

$$|R_{n,N}| \leqslant \frac{1}{8}((n+\nu)\lambda_N)^2. \tag{4.20}$$

Далее, аналогично, имеем

$$\frac{1}{\kappa_n} = \frac{1}{\kappa_n}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\varphi_{n}(\theta)\right)^2 h(\theta)d\theta\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\kappa_{n,N}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\varphi_{n,N}(\theta)\right)^2 h(\theta)d\theta\right)^{1/2}. \tag{4.21}$$

С другой стороны, совершенно аналогично тому, как была получена оценка (3.79) (используя вместо неравенства Бернштейна-Зигмунда лемму 3.5), мы находим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left|\varphi_{n,N}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \leqslant 1 + \frac{((n+\nu)\lambda_N)^2}{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}. \tag{4.22}$$

Из (4.21) и (4.22) имеем

$$\frac{1}{\kappa_n} \leqslant \frac{1}{\kappa_{n,N}}\left(1 + \frac{((n+\nu)\lambda_N)^2}{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}\right). \tag{4.23}$$

Сопоставляя (4.19), (4.20) с (4.23), мы можем записать

$$\left(1-\frac{1}{8}((n+\nu)\lambda_N)^2\right)\frac{1}{\kappa_n} \leqslant \frac{1}{\kappa_{n,N}} \leqslant \left(1+\frac{1}{8}((n+\nu)\lambda_N)^2\right)\frac{1}{\kappa_n}.$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть* $1 \leqslant N$ — *натуральное число, система узлов* $\{\theta_j\}_{j=0}^{N-1}$ *определена в* (3.37), $\lambda_N = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta\eta_j$, $\{\varphi_{n,N}(w)\}_{n=0}^{N-1}$ — *ортонормированная система полиномов на сетке* $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_j}\right\}_{j=0}^{N-1}$ *относительно скалярного произведения* (3.61), *в котором* $h(\theta) = |t_\nu(\theta)|$, *где* $t_\nu(\theta)$– *такой нетривиальный тригонометрический полином порядка* ν, *что каждая точка, в которой он меняет свой знак содержится, среди узлов* $\{\eta_j\}_{j=0}^{N-1}$. *Далее, пусть* $\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ — *бесконечная система полиномов, образующих ортонормированную систему на единичной окружности относительно скалярного произведения* (1.3). *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\frac{|\varphi_{n,N}(0)|}{\kappa_{n,N}} = \frac{|\varphi_n(0)|}{\kappa_n} + \hat{\varepsilon}_{n,N},$$

в которой для остаточного члена $\hat{\varepsilon}_{n,N}$ *имеет место оценка*

$$|\hat{\varepsilon}_{n,N}| \leqslant \frac{|\varphi_n(0)|}{8\kappa_n}((n+\nu)\lambda_N)^2 + \frac{\sqrt{2}(8+((n+\nu)\lambda_N)^2)(n+\nu)\lambda_N}{8\sqrt{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}}.$$

Доказательство. Воспользовавшись обозначениями из леммы 7, мы можем записать

$$\frac{|\varphi_{n,N}(0)|}{\kappa_{n,N}} = [|\varphi_n(0)| + (|\varphi_{n,N}(0)| - |\varphi_n(0)|)]\left(\frac{1}{\kappa_n} + \varepsilon_{n,N}\right) =$$

$$\frac{|\varphi_n(0)|}{\kappa_n} + \hat{\varepsilon}_{n,N}, \tag{4.24}$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{n,N} = \varepsilon_{n,N}|\varphi_n(0)| + (|\varphi_{n,N}(0)| - |\varphi_n(0)|)\left(\frac{1}{\kappa_n} + \varepsilon_{n,N}\right).$$

Отсюда имеем

$$|\hat{\varepsilon}_{n,N}| \leqslant |\varepsilon_{n,N}||\varphi_n(0)| + |\varphi_{n,N}(0) - \varphi_n(0)|\left(\frac{1}{\kappa_n} + |\varepsilon_{n,N}|\right) =$$

$$|\varepsilon_{n,N}||\varphi_n(0)| + |v_{n,N}(0)|\left(\frac{1}{\kappa_n} + |\varepsilon_{n,N}|\right).$$

Оценивая $|v_{n,N}(0)|$ с помощью теоремы 7, а $|\varepsilon_{n,N}|$ посредством леммы 7, находим

$$|\hat{\varepsilon}_{n,N}| \leqslant \frac{1}{8\kappa_n}((n+\nu)\lambda_N)^2|\varphi_n(0)| +$$

$$\frac{\sqrt{2}(n+\nu)\lambda_N}{\sqrt{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(0)|^2}\left(\frac{1}{\kappa_n} + \frac{1}{8\kappa_n}((n+\nu)\lambda_N)^2\right) =$$

$$\frac{1}{8\kappa_n}((n+\nu)\lambda_N)^2|\varphi_n(0)| + \frac{\sqrt{2}\left(8+((n+\nu)\lambda_N)^2\right)(n+\nu)\lambda_N}{8\kappa_n\sqrt{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(0)|^2}.$$

Если мы теперь воспользуемся свойством полиномов $\varphi_n(z)$, аналогичным (1.22) [6] , то можем записать

$$|\hat{\varepsilon}_{n,N}| \leqslant \frac{1}{8\kappa_n}((n+\nu)\lambda_N)^2|\varphi_n(0)| + \frac{\sqrt{2}(8+((n+\nu)\lambda_N)^2)(n+\nu)\lambda_N}{8\sqrt{8-((n+\nu)\lambda_N)^2}}.$$

Лемма 8 доказана.

Пусть системы узлов $\{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ и $\{\eta_j\}_{j=0}^{2N}$ определены с помощью равенств (4.1) и (4.2), т.е. $-1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$, $t_j = \cos\eta_{2N-j}$ $(j = 0,1,\ldots,N)$, $\eta_j = -\eta_{2N-j}$ $(j = 0,1,\ldots,N)$. Далее положим $\theta_j = \frac{\eta_j+\eta_{j+1}}{2}$ и определим систему точек $\{x_j\}_{j=0}^{N-1} \subset (-1,1)$ следующим образом

$$x_j = \cos\theta_{2N-j-1}, \quad (j = 0,1,\ldots,N-1). \tag{4.25}$$

Пусть $p_\nu(x)$ – представляет собой неотрицательный на $(-1,1)$ алгебраический полином степени ν. Рассмотрим полиномы $P_{n,N}(x)$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$, образующие ортонормированную систему на сетке $\{x_j\}_{j=0}^{N-1} \subset (-1,1)$ относительно скалярного произведения

$$\sum_{j=0}^{N-1} P_{n,N}(x_j)P_{m,N}(x_j)p_\nu(x_j)\Delta t_j = \delta_{nm}, \tag{4.26}$$

где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$. Таким образом здесь $\rho_j = \rho(x_j) = p_\nu(x_j)\Delta t_j$. Отсюда для $\tau_{2N-1-j} = \pi\rho_j$ $(j = 0,1,\ldots,N-1)$ имеем $(\tau_j = \tau_{2N-1-j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N-1)$

$$\tau_{2N-j-1} = \pi p_\nu(x_j)\Delta t_j = \pi p_\nu(\cos\theta_{2N-j-1})[\cos\eta_{2N-j-1} - \cos\eta_{2N-j}] =$$

$$2\pi p_\nu(\cos\theta_{2N-j-1})\sin\frac{\eta_{2N-j-1}+\eta_{2N-j}}{2}\sin\frac{\eta_{2N-j}-\eta_{2N-j-1}}{2} =$$

$$2\pi p_\nu(\cos\theta_{2N-j-1})\sin\theta_{2N-j-1}\sin\frac{\Delta\eta_{2N-j-1}}{2}.$$

Поэтому

$$\tau_j = 2\pi p_\nu(\cos\theta_j)|\sin\theta_j|\sin\frac{\Delta\eta_j}{2} \quad (0 \leqslant j \leqslant 2N-1). \tag{4.27}$$

Для ассоциированных с $P_{n,N}(x)$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$ полиномов $\{\tilde{\varphi}_{k,2N}(w)\}_{k=0}^{2N-1}$, образующих ортонормированную систему на сетке $\Omega_{2N}^T = \{e^{i\theta_j}\}_{j=0}^{2N-1}$ с весом $\tau = \tau(\theta_j) = \tau_j$ соотношение ортогональности (4.5) приобретает следующий вид

$$2\sum_{j=0}^{2N-1} \tilde{\varphi}_{n,2N}(e^{i\theta_j})\overline{\tilde{\varphi}_{m,2N}(e^{i\theta_j})}h(\theta_j)\sin\frac{\Delta\eta_j}{2} = \delta_{nm}, \tag{4.28}$$

где $h(\theta) = \frac{1}{2}p_\nu(\cos\theta)|\sin\theta| = \frac{1}{2}|p_\nu(\cos\theta)\sin\theta|$, а тригонометрический полином $\frac{1}{2}p_\nu(\cos\theta)\sin\theta$ меняет знак только в узле $\eta_N = 0$. Следовательно мы находимся в условиях применимости теоремы 3.8. Но сначала обратимся к формуле (2.22) и запишем

$$P_{n,N}(z) = \tilde{d}_{n,N}^{-\frac{1}{2}}\left[w^{-n}\tilde{\varphi}_{2n,2N}(w) + w^n\tilde{\varphi}_{2n,2N}\left(\frac{1}{w}\right)\right], \quad z = \frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right), \tag{4.29}$$

где $\tilde{d}_{n,N} = 2\left(1+\frac{\tilde{\varphi}_{2n,2N}(0)}{\tilde{\kappa}_{2n}^{2N}}\right)$, $\tilde{\kappa}_{2n}^{2N}$ – старший коэффициент полинома $\tilde{\varphi}_{2n,2N}(z)$. В силу теоремы 3.8 мы имеем

$$w^{-n}\tilde{\varphi}_{2n,2N}(w) = w^{-n}\varphi_{2n}(w) + w^{-n}\tilde{v}_{2n,2N}(w), \quad w\in\mathbb{C},$$

$$w^{n}\tilde{\varphi}_{2n,2N}(\frac{1}{w}) = w^{n}\varphi_{2n}(\frac{1}{w}) + w^{n}\tilde{v}_{2n,2N}(\frac{1}{w}), \quad w\in\mathbb{C},$$

стало быть,

$$w^{-n}\tilde{\varphi}_{2n,2N}(w) + w^{n}\tilde{\varphi}_{2n,2N}\left(\frac{1}{w}\right) = w^{-n}\varphi_{2n}(w) + w^{n}\varphi_{2n}(\frac{1}{w}) + X_{n,N}(w), \quad (4.30)$$

где

$$X_{n,N}(w) = w^{-n}\tilde{v}_{2n,2N}(w) + w^{n}\tilde{v}_{2n,2N}(\frac{1}{w}). \quad (4.31)$$

Комбинируя (4.29) и (4.30), имеем

$$P_{n,N}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\tilde{\varphi}_{2n,2N}(0)}{\tilde{\kappa}_{2n}^{2N}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[w^{-n}\varphi_{2n}(w) + w^{n}\varphi_{2n}(\frac{1}{w})\right]$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\tilde{\varphi}_{2n,2N}(0)}{\tilde{\kappa}_{2n}^{2N}}\right)^{-\frac{1}{2}} X_{n,N}(w). \quad (4.32)$$

Теперь обратимся к лемме 2, тогда (4.32) принимает вид следующей асимптотической формулы

$$P_{n,N}(z) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{|\varphi_{2n}(0)|}{\kappa_{2n}}+\hat{\varepsilon}_{2n,2N}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[w^{-n}\varphi_{2n}(w) + w^{n}\varphi_{2n}(w^{-1})\right] + Y_{n,N}(w), \quad (4.33)$$

в которой $z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$,

$$Y_{n,N}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{|\varphi_{2n}(0)|}{\kappa_{2n}}+\hat{\varepsilon}_{2n,2N}\right)^{-\frac{1}{2}} X_{n,N}(w)$$

представляет собой остаточный член, а для $\hat{\varepsilon}_{2n,2N}$ справедлива оценка

$$|\hat{\varepsilon}_{2n,2N}| \leqslant \frac{|\varphi_{2n}(0)|}{8\kappa_{2n}}((2n+\nu)\lambda_{2N})^2 + \frac{\sqrt{2}(8+((2n+\nu)\lambda_{2N})^2)(2n+\nu)\lambda_{2N}}{8\sqrt{8-((2n+\nu)\lambda_{2N})^2}}. \quad (4.34)$$

Кроме того, из теоремы 3.8 и равенства (4.31) для $|X_{n,N}(w)|$ вытекает оценка

$$|X_{n,N}(w)| \leqslant \lambda_{2N}|w^n|\sqrt{\frac{1}{24-\lambda_{2N}^2}+\frac{2(2n+\nu)^2}{8-((2n+\nu)\lambda_{2N})^2}\sum_{k=0}^{2n}|\varphi_k(w)|^2}+$$
$$\lambda_{2N}|w^{-n}|\sqrt{\frac{1}{24-\lambda_{2N}^2}+\frac{2(2n+\nu)^2}{8-((2n+\nu)\lambda_{2N})^2}\sum_{k=0}^{2n}|\varphi_k(w^{-1})|^2}.$$

Отметим, что в асимптотической формуле (4.33) главной частью является выражение

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[w^{-n}\varphi_{2n}(w)+w^{n}\varphi_{2n}(\frac{1}{w})\right]$, в котором фигурируют полиномы $\varphi_k(w)$ ($k = 0,1,\ldots$), образующие ортонормированную систему на единичной окружности с весом $h(\theta) = \frac{1}{2}p_\nu(\cos\theta)|\sin\theta|$. Асимптотические свойства таких полиномов достаточно хорошо исследованы (см., например, [96], [99]–[101]). В частности, если $p_\nu(x)$ тождественно совпадает с константой, то выражение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[w^{-n}\varphi_{2n}(w)+w^{n}\varphi_{2n}(\frac{1}{w})\right]$$

с точностью до постоянного множителя представляет собой классический полином Лежандра $P_n(z)$.

5. О некоторых новых приложениях полиномов, ортогональных на сетках

Как уже отмечалось, полиномы, ортогональные на сетках были введены П.Л.Чебышевым в связи задачей обработки наблюдений методом наименьших квадратов. В дальнейшем были обнаружены многочисленные связи полиномов, ортогональных на сетках с задачами, возникающими в самых различных областях таких, как квантовая механика, математическая биология, теория кодирования, теория случайных матриц, численный анализ, теория автоматического регулирования и управления и другие. Мы здесь получим некоторые новые (для нас неожиданные) приложения полиномов, ортогональных на *неравномерных* сетках единичной окружности и числовой оси.

Начнем с полиномов, ортогональных на сетках из единичной окружности. В приложениях часто встречается уравнение

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k h_{n-k}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{5.1}$$

в котором $x = (x_0, x_1, \ldots)$ и $y = (y_0, y_1, \ldots)$ трактуются, соответственно, как входной и выходной сигналы, а $h = (h_0, h_1, \ldots)$ – характеристика рассматриваемой управляемой (регулируемой) системы. Требуется по заданному выходному сигналу y найти соответствующий входной сигнал x. При этом характеристика системы h также считается известной. Непосредственное нахождение входного сигнала x из уравнения (5.1) считается, по разным причинам, неэффективным (задача (5.1) некорректна). Кроме того в приложениях, как правило, встречается "урезанный" вариант уравнения (5.1), когда заданы всего $M+1$ значений $y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k h_{n-k}, \quad n = 0,1,\ldots,M$ и $m+1$ значений h_k при $k = 0,1,\ldots,m$. Требуется найти $l+1$ значений x_k при $k = 0,1,\ldots,l$, причем $m \leqslant l$, $M = l+m$. Другими словами, вместо уравнения (5.1) требуется решить приближенное уравнение

$$y'_n = \sum_{k=0}^{n} x'_k h'_{n-k}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{5.2}$$

где

$$x' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_l, 0, 0, \ldots) = (x_0, x_1, \ldots, x_l, 0, 0, \ldots),$$

$$y' = (y'_0, y'_1, \ldots, y'_M, 0, 0, \ldots) = (y_0, y_1, \ldots, y_M, 0, 0, \ldots),$$

$$h' = (h'_0, h'_1, \ldots, h'_m, 0, 0, \ldots) = (h_0, h_1, \ldots, h_m, 0, 0, \ldots),$$

которое в развернутой записи приобретает следующий вид
$y_0 = h_0 x_0$
$y_1 = h_0 x_1 + h_1 x_0$
. . . .
$y_m = h_0 x_m + h_1 x_{m-1} + \ldots + h_m x_0$
. . . .
$y_l = h_0 x_l + h_1 x_{l-1} + \ldots + h_m x_{l-m}$
$y_{l+1} = h_1 x_l + \ldots + h_m x_{l-m+1}$
. . . .
$y_{l+m-1} = h_{m-1} x_l + h_m x_{l-1}$
$y_{l+m} = h_m x_l.$

Число уравнений в этой системе равно $M + 1 = l + m + 1$, а число неизвестных x_j $(j = 0, 1, \ldots l)$ всего $l + 1$, поэтому система разрешима не для любого вектора левых частей $\tilde{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_M)$ и, следовательно, возникает задача о приближенном решении указанной системы. С этой целью обозначим через $\mathcal{Y}^{M+1}$ множество левых частей рассматриваемой системы, для которых решение $\hat{x} \in \mathbb{R}^{l+1}$ существует. Пусть $\hat{y} = (\hat{y}_0, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_M) \in \mathcal{Y}^{M+1}$ и $\hat{x} \in \mathbb{R}^{l+1}$ соответствующее решение рассматриваемой системы с левой частью $\hat{y}$. Будем считать $\hat{x}$ приближенным решением рассматриваемой системы, если в левой ее части фигурирует $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{M+1} \setminus \mathcal{Y}^{M+1}$. Возникает вопрос о том, какое из приближенных решений $\hat{x} \in \mathbb{R}^{l+1}$ является для заданного $\tilde{y}$ наилучшим. Для того, чтобы сформулировать эту задачу более точно, требуется ввести в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^{M+1}$ $M + 1$–мерных векторов $\tilde{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_M)$ одну из эквивалентных норм. С этой целью мы обратимся к методу производящих функций (что то же, методу $\mathcal{Z}$–преобразований), в соответствии с которым мы введем полиномы

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k z^k = \sum_{k=0}^{l} x_k z^k = X_l(z),$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y'_k z^k = \sum_{k=0}^{M} y_k z^k = Y_M(z),$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h'_k z^k = \sum_{k=0}^{m} h_k z^k = H_m(z).$$

Хорошо известно, что если сигналы x', y' и h' связаны сверткой (5.2), то имеет место равенство

$$Y_M(z) = H_m(z) X_l(z). \tag{5.3}$$

Но, как уже отмечалось, если $(y_0, \ldots, y_M) \notin \mathcal{Y}^M$, то для $y' = (y_0, \ldots, y_M, 0, 0, \ldots)$ не найдется $x = (x_0, \ldots, x_l, 0, 0, \ldots)$, для которого справедливо равенство (5.2), следовательно, для такого вектора $(y_0, \dots, y_M)$ равенство (5.3) также не справедливо. Если же мы возьмем $(\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_M) \in \mathcal{Y}^M$, то по самому определению множества $\mathcal{Y}^M$ существует такое $\hat{x} \in \mathbb{R}^{l+1}$, что $y' = (\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_M, 0, 0, \dots)$ и $x' = (\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_l, 0, 0, \dots)$ связаны между собой сверткой (5.2) и, стало быть, имеет место равенство

$$\hat{Y}_M(z) = H_m(z)\hat{X}_l(z), \tag{5.4}$$

где

$$\hat{X}_l(z) = \sum_{k=0}^{l} \hat{x}_k z^k, \quad \hat{Y}_M(z) = \sum_{k=0}^{M} \hat{y}_k z^k.$$

Для заданного вектора $(y_0, \dots, y_M) \in \mathbb{R}^{M+1}$ введем разность

$$R(z) = Y_M(z) - \hat{Y}_M(z) = Y_M(z) - H_m(z)\hat{X}_l(z), \tag{5.5}$$

которую мы можем трактовать как погрешность "приближенного решения" $\hat{x}$ для рассматриваемой системы уравнений. Величина нормы этой погрешности зависит, очевидно, от того, какую норму $\|\cdot\|$ мы зададим в пространстве алгебраических полиномов $Q_M(z)$ степени M. Будем считать, что решение $\hat{x}$ тем точнее, чем меньше величина выбранной нормы $\|R\|$. Поставленная здесь задача о выборе подходящей нормы в пространстве алгебраических полиномов $R(z)$ в связи с приближенным решением рассмотренной выше переполненной системы уравнений не является новой. В литературе встречается (см., например,[35] подход, основанный на выборе нормы вида

$$\|R\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |R(e^{i\theta}|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Y_M(e^{i\theta}) - H_m(e^{i\theta})\hat{X}_l(e^{i\theta})|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |H_m(e^{i\theta})|^2 \left|\frac{Y_M(e^{i\theta})}{H_m(e^{i\theta})} - \hat{X}_l(e^{i\theta})\right|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.6}$$

и наилучшим считается то приближенное решение $\hat{x} = (\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_l)$ рассматриваемой системы, для которого полином $\hat{X}_l(z) = \sum_{k=0}^{l} \hat{x}_k z^k$ минимизирует интеграл в правой части равенства (5.6). Его можно представить в виде суммы Фурье порядка n функции $f(z) = \frac{Y_M(z)}{H_m(z)}$ по полиномам $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{l}$, образующим ортонормированную систему на окружности $|z| = 1$ с весом $h(\theta) = |H_m(e^{i\theta})|^2$. А именно, имеет место представление

$$\hat{X}_l(z) = \sum_{k=0}^{l} c_k \varphi_k(z), \tag{5.7}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta) f(e^{i\theta}) \overline{\varphi_k(e^{i\theta})} d\theta \quad (k = 0, 1, \dots, l)$$

– коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{l}$. Однако, фактическое нахождение полинома $\hat{X}_l(z)$ численными методами, исходя из равенства (5.7) связано с преодолением ряда трудностей. Одна из этих трудностей связана с численным построением самых ортогональных полиномов $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{l}$, образующим ортонормированную систему на окружности $|z|=1$ с весом $h(\theta)=|H_m(e^{i\theta})|^2$. Дело в том, что эта задача сопряжена с численным нахождением значений большого числа интегралов вида

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(\theta)e^{i\theta}|\phi_k(e^{i\theta})|^2 d\theta, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(\theta)e^{ik\theta}\overline{\phi_k^2(e^{i\theta})}d\theta \quad (k=1,\dots,l),$$

где $\phi_k(z)=\frac{1}{\kappa_k}\varphi_k(z)$, κ_k – старший коэффициент полинома $\varphi_k(z)$. Такие интегралы входят в выражения, определяющие трехчленные рекуррентные формулы для полиномов $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{l}$. Кроме того, если весовая функция $h(\theta)=|H_m(e^{i\theta})|^2$ обращается в нуль в одной или нескольких точках $\theta_j\in[0,2\pi)$, то рациональная функция $f(z)=\frac{Y_M(z)}{H_m(z)}$, для которой мы конструируем суммы Фурье вида (5.7), имеет на единичной окружности столько же полюсов, сколько нулей z_j имеет на ней полином $H_m(z)$, если только в точках z_j не обращается в нуль полином $Y_M(z)$. Это создает дополнительные трудности для численного нахождения полинома $\hat{X}_l(z)$. В связи с этим возникает идея, согласно которой при выборе подходящей нормы $\|\cdot\|$ в пространстве алгебраических полиномов, с помощью которого будет исследоваться поведение погрешности приближенного решения $\hat{X}_l(z)$ рассматриваемой переполненной системы уравнений, учитывать свойства производящей функции (полинома) $H_m(z)$. В частности, требуется предварительно исследовать поведение нулей этого полинома. Более гибкий способ учета особенностей полинома $H_m(z)$ при выборе упомянутой нормы, с нашей точки зрения, состоит в том, чтобы вместо интегральной нормы (5.6) ввести дискретную ному

$$\|R\|_N=\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}|R(e^{i\theta_j}|^2\Delta\theta_j\right)^{\frac12} =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}|Y_M(e^{i\theta_j})-H_m(e^{i\theta_j})\hat{X}_l(e^{i\theta_j})|^2\Delta\theta_j\right)^{\frac12} =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}|H_m(e^{i\theta_j})|^2\left|\frac{Y_M(e^{i\theta_j})}{H_m(e^{i\theta_j})}-\hat{X}_l(e^{i\theta_j})\right|^2\Delta\theta_j\right)^{\frac12}, \tag{5.8}$$

в которой углы $-\pi\leqslant\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_{N-1}\leqslant\pi$ мы можем выбрать по своему усмотрению так, чтобы точки $e^{i\theta_j}$ $(j=0,\dots,N-1)$ не совпадали с нулями полинома $H_m(z)$. Теперь наилучшим считается то приближенное решение $\hat{x}=(\hat{x}_0,\dots,\hat{x}_l)$ рассматриваемой системы, для которого полином $\hat{X}_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\hat{x}_k z^k$ минимизирует сумму в правой части равенства (5.8). Его можно представить в виде суммы Фурье порядка n функции $f(z)=\frac{Y_M(z)}{H_m(z)}$ по полиномам $\{\varphi_{k,N}(z)\}_{k=0}^{l}$, образующим ортонормированную систему на сетке $\Omega_N^T = \{e^{i\theta_j}\}_{j=0}^{N-1}$ с весом $h = h(\theta_j) = |H_m(e^{i\theta_j})|^2$. А именно, имеет место представление

$$\hat{X}_l(z) = \sum_{k=0}^{l} c_{k,N}\varphi_{k,N}(z), \tag{5.9}$$

где

$$c_{k,N} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}(\theta_j)f(e^{i\theta_j})\overline{\varphi_{k,N}(e^{i\theta_j})}\Delta\theta_j \quad (k = 0, 1, \ldots, l). \tag{5.10}$$

Но теперь возникает вопрос об устойчивости вычислений, которых нужно осуществить в связи с представлением (5.9) и выражениями (5.10). Этот вопрос тесно связан с асимптотическим поведением полиномов $\varphi_{k,N}(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ при $k, N \to \infty$. *Таким образом, конкретная задача, возникающая в приложениях непосредственно приводит к вопросу об асимптотических свойствах полиномов, ортогональных на дискретных сетках единичной окружности.*

С дугой стороны, во многих областях приложений встречаются, как отмечалось выше, полиномы, ортогональные на сетках числовой оси. Указанные приложения, в свою очередь, приводят к вопросу об асимптотических свойствах соответствующих полиномов, ортогональных на сетках числовой оси. Как было показано, этот вопрос сводится к задаче, об асимптотических свойствах полиномов, ортогональных на сетках единичной окружности. Тем самым, косвенно обнаруживаем целый ряд приложений полиномов, ортогональных на сетках единичной окружности в самых разных областях.

Мы рассмотрим здесь некоторые дальнейшие приложения полиномов, ортогональных на неравномерных сетках числовой оси. Эти приложения касаются некоторых "пограничных" задач численного анализа и теории приближения функций. Рассмотрим сначала задачу, связанную с численным дифференцированием функции $f(x)$, значения которой заданы в узлах равномерной сетки. Для определенности будем считать, что функция $f(x)$ определена на $[-1, 1]$ и заданы ее значения $y_j = f(x_j)$ в узлах равномерной сетки $x_j = -1 + 2j/(N-1)$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$. Ставится задача о приближенном нахождении одной или нескольких производных функции $f(x)$ в точке $x \in [-1, 1]$, исходя из дискретной информации $y_j = f(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$. При решении этой задачи часто поступают следующим образом: используя заданные значения $y_j = f(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ тем или иным способом конструируют приближающую функцию $Q(x)$ и в качестве приближенного значения искомой производной $f^{(l)}(x)$ принимают $Q^{(l)}(x)$. В качестве приближающей функции, в зависимости от степени гладкости функции $f(x)$ полиномиальные сплайны, алгебраические или тригонометрические полиномы, а также(особенно в последние годы) вейвлеты. Если функция $f(x)$ обладает высокой гладкостью, например, аналитична в некотором эллипсе, содержащем отрезок $[-1, 1]$, то наиболее естественным аппаратом ее приближения являются алгебраические полиномы и мы рассмотрим здесь этот случай. Итак, пусть $Q(x) = Q_n(x)$ – алгебраический полином, построенный по значениям $y_j = f(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$, который в каком то смысле хорошо приближает в узлах сетки $\Omega_N = \{x_j = -1 + 2j/(N-1)\}_{j=0}^{N-1}$ не только саму функцию $f(x)$ посредством $Q(x) = Q_n(x)$, а также ее конечные разности $\Delta_h^l f(x_j)$ с шагом $h = 2/(N-1)$ посредством $\Delta_h^l Q(x_j)$ при $l = 1, 2, \dots, r-1$. Подобные ситуации часто возникают при решении дифференциальных уравнений сеточными методами. Спрашивается: будет ли хорошо приближать производная $Q^{(l)}(x)$ производную $f^{(l)}(x)$ при $l = 1, \dots, r-1$ и как оценить погрешность $|f^{(l)}(x) - Q^{(l)}(x)|$, возникающая в результате замены искомого значения $f^{(l)}(x)$ приближенным зачением $Q^{(l)}(x)$ при $x \in [-1, 1]$? Мы покажем ниже, что для решения этой задачи могут быть использованы полиномы, ортогональные на неравномерных сетках из отрезка $[-1, 1]$. Для фиксированного $1 \leqslant l \leqslant r-1$ рассмотрим разность $\Delta_h^l f(x_j) - \Delta_h^l Q(x_j) = \Delta_h^l [f(x_j) - Q(x_j)]$. Хорошо известно, что найдется такая точка t_j, что $\Delta_h^l [f(x_j) - Q(x_j)] = [f(t_j) - Q(t_j)]^{(l)}$, $x_j < t_j < x_{j+l}$ $(j = 0, 1, \dots, N-l-1)$. Обозначим через Ω_N^l новую сетку, состоящую из точек t_j, т.е. $\Omega_N^l = \{t_j\}_{j=0}^{N-l-1}$. Следует сразу отметить, что некоторые из точек t_j и t_k могут оказаться совпавшими и в этом случае будем включать в $\Omega_N^l = \{t_j\}_{j=0}^{N-l-1}$ только одну из них. Для определенности будем считать, что все точки t_j $(j = 0, 1, \dots, N-l-1)$ различны. Тогда мы можем на сетке $\Omega_N^l = \{t_j\}_{j=0}^{N-l-1}$ построить ортонормированную с некоторым весом $\rho = \rho(t_j) = \rho_N(t_j)$ систему полиномов $\{P_{k,N-l}(x)\}_{k=0}^{N-l-1}$. Для функции $g = g(x)$, значения которой нам заданы в узлах t_j $(j = 0, 1, \dots, N-l-1)$ сетки $\Omega_N^l = \{t_j\}_{j=0}^{N-l-1}$ мы можем составить сумму Фурье $S_n(g, x)$ функции $g(x)$ по системе $\Omega_N^l = \{t_j\}_{j=0}^{N-l-1}$, т.е.

$$S_n(g, x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{g}_k P_{k,N-l}(x), \quad \hat{g}_k = \sum_{j=0}^{N-l-1} g(t_j) P_{k,N-l}(t_j) \rho(t_j). \tag{5.11}$$

Далее, пусть

$$V_{n,N}(g, x) = \frac{1}{n+1} [S_n(g, x) + S_{n+1}(g, x) + \dots + S_{2n}(g, x)] \tag{5.12}$$

суммы Валле-Пуссена функции $g(x)$ по системе $\{P_{k,N-l}(x)\}_{k=0}^{2n}$. Тогда, сопоставляя (5.11) и (5.12), мы получаем

$$V_{n,N}(g, x) = \sum_{j=0}^{N-l-1} g(t_j) \rho(t_j) \sum_{\nu=n}^{2n} \mathcal{K}_\nu(x, t_j), \tag{5.13}$$

где

$$\mathcal{K}_\nu(x, t_j) = \sum_{\mu=0}^{\nu} P_\mu(x) P_\mu(t_j) \tag{5.14}$$

ядро Кристоффеля-Дарбу по системе $\{P_{k,N-l}(x)\}_{k=0}^{\nu}$. Оценим теперь разность $|g(x) - Q_n(x)|$. Из (5.11) и (5.12) непосредственно следует, что если $Q_n(x)$ – произвольный алгебраический полином степени $n < N - l$, то $V_{n,N}(Q_n, x)$ тождественно совпадает с $Q_n(x)$, поэтому

$$|g(x) - Q_n(x)| \leqslant |g(x) - V_{n,N}(g, x)| + |V_{n,N}(g, x) - Q_n(x)| =$$

$$|g(x) - V_{n,N}(g, x)| + |V_{n,N}(g - Q_n, x)|, \tag{5.15}$$

где для величины

$$V_{n,N}(g - Q_n, x) = \sum_{j=0}^{N-l-1} (g(t_j) - Q_n(t_j))\rho(t_j) \sum_{\nu=n}^{2n} \mathcal{K}_\nu(x, t_j)$$

справедливо неравенство

$$|V_{n,N}(g - Q_n, x)| \leqslant$$
$$\sum_{j=0}^{N-l-1} |g(t_j) - Q_n(t_j)|\rho(t_j) \left|\sum_{\nu=n}^{2n} \mathcal{K}_\nu(x, t_j)\right| \leqslant \varepsilon_{n,N}\|V_{n,N}(x)\|, \tag{5.16}$$

в котором

$$\varepsilon_{n,N} = \max_{0\leqslant j\leqslant N-l-1} |g(t_j) - Q_n(t_j)|, \tag{5.17}$$

$$\|V_{n,N}(x)\| = \sum_{j=0}^{N-l-1} \rho(t_j) \left|\sum_{\nu=n}^{2n} \mathcal{K}_\nu(x, t_j)\right| \tag{5.18}$$

норма функционала $V_{n,N}(g) = V_{n,N}(g, x)$, определенного равенством (5.13). Величину $\varepsilon_{n,N}$ будем считать заданной, тогда, сопоставляя (5.16) и (5.18) с (5.15), отметим, что задача об оценке для $|g(x) - Q_n(x)|$ (в частности, и для разности $|f^{(l)}(x) - Q^{(l)}(x)|$, о которой шла речь выше), сводится к задаче об оценке величин $|g(x) - V_{n,N}(g, x)|$ и $\|V_{n,N}(x)\|$. Эта задача непосредственно приводит к вопросу об асимптотических свойствах полиномов $P_{k,N-l}(x)$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $k, N \to \infty$, исследованных нами для некоторых типов весовых функций $\rho_N = \rho_N(x)$ выше. Однако, в настоящей работе мы не остановимся на рассмотрении вопросов, связанных выводом оценок для величин $|g(x)-V_{n,N}(g, x)|$ и $\|V_{n,N}(x)\|$.

Рассмотрим некоторые более общие ситуации, которые приводят к тем же вопросам, что и предыдущая задача. Обозначим через $C[-1, 1]$ обычное пространство непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f = f(x)$. Пусть $\Omega_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ – произвольная сетка из $[-1, 1]$. Положим для $f \in C[-1, 1]$

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : \quad -1 \leqslant x \leqslant 1\}, \quad \|f\|_N = \max\{|f(x_j)| : \quad 0 \leqslant j \leqslant N - 1\},$$

где $x_j \in \Omega_N$, $(j = 0, 1, \ldots, N - 1)$. Пусть $f \in C[-1, 1]$. Приблизим функцию f на сетке $\Omega_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ алгебраическим многочленом $p_n(x)$. Будем считать величину $\|f - p_n\|_N$ известной. Оценим сверху $\|f - p_n\|$ через $\|f - p_n\|_N$. Пусть $p^*_n = p^*_n(x)$ – алгебраический многочлен степени n наилучшего приближения функции f в $C[-1, 1]$. Тогда

$$\|f - p_n\| \leqslant \|f - p^*_n\| + \|p^*_n - p_n\|, \tag{5.19}$$

$$\|p^*_n - p_n\|_N \leqslant \|f - p^*_n\| + \|f - p_n\|_N. \tag{5.20}$$

Положим

$$\gamma = \gamma(n, N) = \sup_{q_n\neq 0} \frac{\|q_n\|}{\|q_n\|_N}, \tag{5.21}$$

где верхняя грань берется по всем алгебраическим многочленам q_n степени $n \leqslant N-1$, не равным нулю тождественно. Имеем:

$$\begin{aligned}\|f-p_n\| &\leqslant \|f-p_n^*\| + \gamma\|p_n^*-p_n\|_N \\ &\leqslant (1+\gamma)\|f-p_n^*\| + \gamma\|f-p_n\|_N. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Таким образом, мы пришли к задаче об исследовании поведения величины $\gamma=\gamma(n,N)$ при $n,N\to\infty$. Воспользуемся системой полиномов $\{P_{k,N}(x)\}_{k=0}^{N-1}$, образующих ортонормированную систему на множестве $\Omega_N=\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ с весом $\rho(x_j)$. Сумму Фурье порядка $n \leqslant N-1$ функции $f\in C[-1,1]$ по системе $\{P_{k,N}(x)\}$ запишем в виде

$$S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \hat f_k P_{k,N}(x), \tag{5.23}$$

где

$$\hat f_k = \sum_{j=0}^{N-1} \rho(x_j) f(x_j) P_{k,N}(x_j). \tag{5.24}$$

Средние Валле-Пуссена для сумм $S_{m,N}(f),\ldots,S_{m+n,N}(f)$ имеют вид

$$V_{m,n}^N(f) = V_{m,n}^N(f,x) = \frac{1}{n+1}\left[S_{m,N}(f,x)+\ldots+S_{m+n,N}(f,x)\right], \tag{5.25}$$

где $n+m\leqslant N-1$. Положим

$$I_\nu^N(x,y) = \sum_{l=0}^{\nu} \mathcal{K}_{l,N}(x,y). \tag{5.26}$$

Тогда (5.25) может быть переписано в следующем виде:

$$V_{m,n}^N(f,x) = \sum_{j=0}^{N-1} \rho(x_j) f(x_j) d_{m,n}^N(x,x_j), \tag{5.27}$$

где

$$d_{n,m}^N(x,y) = \frac{1}{n+1}\left[I_{n+m}^N(x,y) - I_{m-1}^N(x,y)\right]. \tag{5.28}$$

Из (5.27) имеем:

$$|V_{m,n}^N(f,x)| \leqslant \|f\|_N \sum_{j=0}^{N-1} \rho(x_j)|d_{m,n}^N(x,x_j)|. \tag{5.29}$$

Пусть $p_m=p_m(x)$ произвольный алгебраический многочлен степени m, $n+m\leqslant N-1$. Тогда $V_{m,n}^N(p_m,x)=p_m(x)$, поэтому

$$\|p_m\| \leqslant \|p_m\|_N \|v_{m,n}^N\|, \tag{5.30}$$

где

$$\|V_{m,n}^N\| = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} \sum_{j=0}^{N-1} \rho(x_j)|d_{n,m}^N(x,x_j)|. \tag{5.31}$$

Таким образом мы замечаем, что

$$1 \leqslant \gamma(n, N) \leqslant \|V_{n,n}^N\|, \tag{5.32}$$

величина $\|V_{n,n}^N\|$ дает верхнюю оценку для $\gamma(n, N)$ и может быть использована в неравенстве (5.22) вместо γ. Отсюда приходим к задаче об изучении поведения величины $\|V_{m,n}^N\|$ при $m, n \to \infty$, которая в частном случае для $V_{n,N}(f, x) = V_{n,n}^N$ уже встречалась выше. Эта задача снова приводит к вопросу об исследовании асимптотических свойств полиномов $P_{k,N}(x)$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $k, N \to \infty$

В тех же обозначениях рассмотрим следующую задачу, частный случай которой нам уже встречалась выше. Пусть $f(x)$ дифференцируема на $[-1, 1]$. Приблизим функцию f на сетке $\Omega_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ алгебраическим многочленом $p_n(x)$. Если значения $f(x_j)$ и $p(x_j)$ $0 \leqslant j \leqslant N-1$ заданы, то мы можем найти $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, $\Delta f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j)$, $\Delta p_n(x_j) = p_n(x_{j+1}) - p_n(x_j)$. В силу теоремы Лагранжа

$$\frac{\Delta f(x_j)}{\Delta x_j} - \frac{\Delta p_n(x_j)}{\Delta x_j} = \frac{\Delta[f(x_j) - p_n(x_j)]}{\Delta x_j} =$$

$$f'(t_j) - p_n'(t_j) \quad (x_j < t_j < x_{j+1}, j = 0, \ldots, N-2). \tag{5.33}$$

Из (5.33) следует, что если $p_n(x_j)$ приближает $f(x_j)$ на сетке $\Omega_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ хорошо настолько, что величины

$$\frac{\Delta f(x_j)}{\Delta x_j} - \frac{\Delta p_n(x_j)}{\Delta x_j}$$

достаточно малы при всех $j = 0, \ldots, N-2$, то будут также малы и разности $f'(t_j) - p_n'(t_j)$ при всех $j = 0, \ldots, N-2$. Спрашивается: будет ли мала разность $f'(x) - p_n'(x)$ при любом $x \in [-1, 1]$? Мы пришли к той же проблеме, которая встречалась выше в случае, когда сетка $\Omega_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ являлась равномерной. Как и выше, нетрудно показать связь этой проблемы с задачей об асимптотических свойствах полиномов, ортогональных на сетке $\hat{\Omega}_{N-1} = \{t_j\}_{j=0}^{N-2}$.

Список литературы

[1] Чебышев П.Л. Об интерполировании величин равноотстоящих (1875) // Полн. собр. соч. Т.3. М.: Изд. АН СССР. 1948. С. 66–87.

[2] Charlier C.V.L. Arkiv for math. astron. o. fysik. 1905/06.2. $\mathcal{N}$. 20.

[3] Krawtchouk M.F. Sur une generalisation des polynomes d Hermite // Comptes Rendus de l Acad. des. Sc. 189. Paris. P. 620-622.

[4] Meixner J. Orthogonale Polynom systeme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Function // Journ. of the London Mathematical Sociate 9 (1934). P. 6–13.

[5] Hahn W. Uber orthogonalpolynomsisteme, die q–Differenzengleihungen genugen // Math.Nachr. 2 (1949). P. 4–34.

[6] Weber M., Erdeleyi A. On the finite difference analogue of Rodrigues formula // Amer. Math. Month. 59 (1952). P. 163–168.

[7] Karlin S., McGregor J.L. The Hahn polnomials, formulas and an application // Scripta Math. 26:1. P. 33–46.

[8] Дельсарт Ф. Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир. 1976.

[9] Dunkl C. A Krawtchouk Polynomials Addition Theorem and Treath Products of Simmetric Grups // Indiana Univ. Math. J. 25 (1976). P. 335–358.

[10] Askey R., Wilson J.A. A set of orthogonal polynomials that generalyze the Racach coefficients or 6j-symbols // SIAM J. Math. Anal. 10 (1979). P. 1008–1016.

[11] Stanton D. Some q–Krawtchouk Polynomials on Shevalley Grups // Amer. J. Math. 102 (1980). P. 625–662.

[12] Koornwinder T.H. Clebsh-Gordan coefficients for SU(2) and Hahn polynomials // Niew arch. wisk. 29 (1981). P. 140–155.

[13] Левенштейн В.И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 40 (1983). С. 43–110.

[14] Sharapudinov I.I. On the Hahn polynomials application for the optimal tabulation of functions // Constructive theory of functions. Proc. of the Int. conf. on const. theory of functions. Varna. May 27 – june 2. 1984. P. 782–787.

[15] Никифоров А.Ф., Суслов С.К.,Уваров В.Б. Классические ортогональные многочлены дискретной переменной. М. Наука. 1985.

[16] Бахвалов Н.С., Кобельков Г.М., Носков Ю.В. О практическом вычислении значений ортогональных многочленов непрерывного и дискретного аргумента // Препринт Отдела выч.мат. АН СССР. Вып. 158. М. 1987.

[17] Банаи Э., Ито Т. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. М., Мир. 1987.

[18] Van Assche W. Asimptotics for orthogonal polynomials // Lect. Notes Math. 1265 (1987). P. 1–201.

[19] Sharapudinov I.I. Asimptotic Formula Having no Remainder Term for the Orthogonal Hahn Polynomials of Discrete Variable // Mathematica Bolkanica. New Seris. 2:4 (1988). P. 314–318.

[20] Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства полиномов Кравчука // Матем.заметки. 44:2 (1988). С. 682–693.

[21] Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства ортогональных многочленов Хана дискретной переменной // Матем.сборник. 180:9 (1989). С. 1259–1277.

[22] Минко А.А., Петунин Ю.И. Сходимость метода наименьших квадратов в равномерной метрике // Сиб. Мат. Ж. 31:2 (1990). С. 111–122

[23] Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства и весовые оценки многочленов Чебышева–Хана // Матем.сборник. 183:3 (1991). С. 408–420.

[24] Шарапудинов И.И. Некоторые вопросы теории ортогональных систем. Докторская диссертация. М.: МИАН им.В.А.Стеклова. 1991.

[25] Feinsilver P. and Schott R. Krawtchouk polynomials and finite probability theory // Probability measures on groups, X (Oberwolfach, 1990) Plenum. New York. 1991. P. 129-135.

[26] Шарапудинов И.И. Об асимптотике многочленов Чебышева, ортогональных на конечной системе точек // Вестник МГУ. Серия 1. 1 (1992). С. 29–35.

[27] Шарапудинов И.И. О сходимости метода наименьших квадратов // Матем.заметки. 53:3 (1993). С. 131–143.

[28] Krasikov I. and Litsyn S. On integral zeros of Krawtchouk polynomials // J. Combin. Theory Ser. A. 74:1 (1996). P. 71–99.

[29] Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала, Изд-во Даг.гос.пед. ун-та. 1997.

[30] Джамалов А.Ш. Об асимптотике полиномов Мейкснера // Матем.заметки. 62:4 (1997). С. 624–625.

[31] H.Ismail M. E., Simeonov P. Strong asymptotics for Krawtchouk polynomials // J. Comput. Appl.Math. 100:2 (1998). P. 121-144.

[32] Mukundan R., Ramakrishnan K.R. Moment functions in image analysis: theory and applications. World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd. 1998.

[33] Deift P. Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann-Hilbert approach. NYU lectures. AMS. 2000. 261 p.

[34] Г.Сеге. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз. 1962.

[35] П.К.Суетин, Классические ортогональные многочлены. М., Наука. 1979.

[36] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. М., Наука. 1974.

[37] Геронимус Я.Л. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М., Физматгиз. 1958.

[38] Simon B. Orthogonal Polynomials on the unit circle. Part 1, Part 2, American Mathematical Society. Colloquium publications. Volume 54. 2004.

[39] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М., Мир. 1965.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)
Дагестанский научный центр РАН,
Владикавказский научный центр РАН
E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию
25.10.2013