УДК 517.538

И. И. Шарапудинов

Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву

Рассмотрены некоторые специальные ряды по полиномам Лагерра и исследованы их аппроксимативные свойства. В частности, получена верхняя оценка для функции Лебега частичных сумм введённого специального ряда по полиномам Лагерра. Введены и исследованы полиномы $l_{r,k}^{\alpha}(x)$ ($k = 0, 1, \ldots$), ортонормированные по Соболеву относительно скалярного произведения

$$< f, g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) g^{(\nu)}(0) + \int_0^{\infty} f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) t^{\alpha} e^{-t} dt,$$

порожденные классическими ортогональными многочленами Лагерра $L_k^{\alpha}(x)$ ($k = 0, 1, \ldots$). Получены представления полиномов $l_{r,k}^{\alpha}(x)$ в виде некоторых выражений, содержащих многочлены Лагерра $L_n^{\alpha-r}(x)$. Установлен явный вид полиномов $l_{r,k+r}^{\alpha}(x)$, представляющий собой разложение по степеням x^{r+l} с $l = 0, \ldots, k$. Эти результаты могут быть использованы при исследовании асимптотических свойств полиномов $l_{r,k}^{\alpha}(x)$ при $k \to \infty$ и аппроксимативных свойств частичных сумм рядов Фурье по этим полиномам. Показано, что ряд Фурье по полиномам $l_{r,k}^{\alpha}(x)$ совпадает со смешанным рядом по полиномам Лагерра, введенным и исследованным автором ранее. Кроме того показано, что если $\alpha = 0$, то смешанные ряды по полиномам Лагерра и, как следствие, ряд Фурье по полиномам $l_{r,k}^{0}(x)$ представляют собой частные случаи специальных рядов, введенных в настоящей работе.

Библиография: 18 названий.

Some special series on Laguerre polynomials are considered and their approximative properties are investigated. In particular, the upper estimate for the Lebesgue function of introduced special series on Laguerre polynomials is obtained. The polynomials $l_{r,k}^{\alpha}(x)$ ($k = 0, 1, \ldots$) orthonormal with respect to the Sobolev-type inner product

$$< f, g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) g^{(\nu)}(0) + \int_0^{\infty} f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) t^{\alpha} e^{-t} dt,$$

generated by classical orthogonal Laguerre polynomials $L_k^{\alpha}(x)$ ($k = 0, 1, \ldots$) are introduced and investigated. The representations of polynomials in the form of certain expressions containing Laguerre polynomials $L_n^{\alpha-r}(x)$ are obtained. An explicit form of the polynomials $l_{r,k+r}^{\alpha}(x)$ that represents an expansion in powers of x^{r+l} with $l = 0, \ldots, k$ is established. These results can be used in the study of asymptotic properties of polynomials $l_{r,k}^{\alpha}(x)$ when $k \to \infty$ and in the study of approximative properties of partial sums of Fourier series on these polynomials. It is shown the Fourier series on polynomials

$l_{r,k}^{\alpha}(x)$ coincides with the mixed series on Laguerre polynomials introduced and studied earlier by the author. Besides it is shown if $\alpha = 0$, then mixed series on Laguerre polynomials and, as a corollary, the Fourier series on polynomials $l_{r,k}^{0}(x)$ represents the particular cases of special series, introduced in present paper.

Bibliography: 18 items.

Ключевые слова: полиномы Лагерра, смешанные ряды по полиномам Лагерра, специальные ряды, преобразование Лапласа, ортогональные по Соболеву полиномы, неравенство Лебега.

Keywords: Laguerre polynomials, mixed series on Laguerre polynomials, special series, Laplas transform, Sobolev orthogonal polynomials, Lebesgue inequality.

1. Введение

В последние годы интенсивное развитие получила (см.[1]–[6] и цитированную там литературу) теория полиномов, ортогональных относительно различных скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Были достаточно подробно исследованы различные особенности полиномов, ортогональных по Соболеву. При этом заметим, что асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву исследованы только в отдельных частных случаях. В связи с этой проблемой отметим работу [7], в которой, используя идеи и технику А.А.Гончара [8], исследована задача о сравнительной асимптотике полиномов, ортогональных относительно скалярного произведения типа Соболева с дискретными массами. Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые (массы), которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в заданной системе точек. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале (a, b), могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах отрезка $[a, b]$ со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a, b) весом полиномы этим важным свойством не обладают.

С другой стороны отметим, что в ряде работ автора [9] – [14] были введены, так называемые *смешанные ряды* по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых также обладают свойством совпадения их значений в концах области ортогональности со значениями исходной функции. В работах [9] – [14] были подробно исследованы аппроксимативные свойства смешанных рядов для функций из различных функциональных пространств и классов. В частности, было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. Можно показать, что смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, введенные и исследованные в работах [9] – [14], по существу представляют собой ряды Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву и порожденным соответствующими классическими ортогональными полиномами. В настоящей статье мы это проверим для смешанных рядов по полиномам Лагерра и рядов Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву относительно скалярного произведения

$$< f,g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^{\infty} f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)t^{\alpha}e^{-t}dt \tag{1.1}$$

и порожденным полиномами Лагерра.

2. Некоторые сведения о полиномах Лагерра

При исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм новых специальных рядов, введенных в настоящей работе, нам понадобится ряд свойств полиномов Лагерра $L_n^{\alpha}(t)$, которые мы соберем в данном параграфе.

Пусть α – произвольное действительное число. Тогда для полиномов Лагерра имеют место [15]:

Формула Родрига

$$L_n^{\alpha}(t) = \frac{1}{n!}t^{-\alpha}e^{t}\left\{t^{n+\alpha}e^{-t}\right\}^{(n)}; \tag{2.1}$$

Явный вид

$$L_n^{\alpha}(t) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\frac{(-x)^{\nu}}{\nu!}; \tag{2.2}$$

Соотношение ортогональности

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}L_n^{\alpha}(t)L_m^{\alpha}(t)dt = \delta_{nm}h_n^{\alpha} \quad (\alpha > -1), \tag{2.3}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера,

$$h_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n}\Gamma(\alpha+1); \tag{2.4}$$

В частности, для $L_n(t) = L_n^0(t)$ имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-t}L_n(t)L_m(t)dt = \delta_{nm};$$

Формула Кристоффеля – Дарбу

$$\mathcal{K}_n^{\alpha}(t,\tau) = \sum_{k=0}^{n}\frac{L_{\nu}^{\alpha}(t)L_{\nu}^{\alpha}(\tau)}{h_{\nu}^{\alpha}} = \frac{n+1}{h_n^{\alpha}}\frac{L_n^{\alpha}(t)L_{n+1}^{\alpha}(\tau) - L_n^{\alpha}(\tau)L_{n+1}^{\alpha}(t)}{t-\tau}; \tag{2.5}$$

Свертка

$$\int_0^t L_n(t-\tau)L_m(\tau)d\tau = L_{n+m}(t) - L_{n+m+1}(t). \tag{2.6}$$

Далее отметим следующие равенства

$$\frac{d}{dt}L_n^\alpha(t) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(t), \tag{2.7}$$

$$\frac{d^r}{dt^r}L_{k+r}^{\alpha-r}(t) = (-1)^r L_k^\alpha(t), \tag{2.8}$$

$$L_k^{-r}(t) = \frac{(-t)^r}{k^{[r]}}L_{k-r}^r(t), \tag{2.9}$$

где $k^{[r]} = k(k-1)\dots(k-r+1)$,

$$L_n^{\alpha+1}(t) - L_{n-1}^{\alpha+1}(t) = L_n^\alpha(t), \tag{2.10}$$

$$(n+\alpha)L_n^{\alpha-1}(t) = \alpha L_n^\alpha(t) - xL_{n-1}^{\alpha+1}(t), \tag{2.11}$$

весовая оценка [16]

$$e^{-\frac{t}{2}}|L_n^\alpha(t)| \leqslant c(\alpha)B_n^\alpha(t), \quad \alpha > -1, \tag{2.12}$$

где здесь и далее $c, c(\alpha), c(\alpha,\dots,\beta)$ – положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров,

$$B_n^\alpha(t) = \begin{cases} \theta^\alpha, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\theta}, \\ \theta^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\,t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < t \leqslant \frac{\theta}{2}, \\ \Big[\theta(\theta^{\frac{1}{3}} + |t-\theta|)\Big]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < t \leqslant \frac{3\theta}{2}, \\ e^{-\frac{t}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < t, \end{cases}$$

где $\theta = \theta_n = \theta_n(\alpha) = 4n + 2\alpha + 2$.

Для нормированных полиномов Лагерра

$$l_n^\alpha(t) = \Big\{h_n^\alpha\Big\}^{-\frac{1}{2}}L_n^\alpha(t) \tag{2.13}$$

имеет место оценка [16]

$$e^{-\frac{t}{2}}\Big|\hat{L}_{n+1}^\alpha(t) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(t)\Big| \leqslant \begin{cases} \theta^{\frac{\alpha}{2}-1}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\theta}, \\ \theta^{-\frac{3}{4}}\,t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < t \leqslant \frac{\theta}{2}, \\ t^{-\frac{\alpha}{2}}\,\theta^{-\frac{3}{4}}\Big[\theta^{\frac{1}{3}} + |t-\theta|\Big]^{\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < t \leqslant \frac{3\theta}{2}, \\ e^{-\frac{t}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < t. \end{cases} \tag{2.14}$$

Поскольку $h_n^\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \asymp n^\alpha$, то из (2.12) и (2.13) следует, что

$$e^{-\frac{t}{2}}|\hat{L}_n^\alpha(t)| \leqslant c(\alpha)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}B_n^\alpha(t), \quad t \geqslant 0. \tag{2.15}$$

3. Смешанные ряды по полиномам Лагерра

Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам были впервые введены в работах автора [9]–[14], как альтернативный рядам Фурье по тем же полиномам аппарат для одновременного приближения функций и их производных. Не является исключением и смешанные ряды по полиномам Лагерра [11]. В настоящем параграфе мы напомним определение этих рядов, следуя работе [11]. Пусть $-1<\alpha<1$, $L_n^\alpha(x)$ соответствующие классические ортогональные полинома Лагерра, $\rho=\rho(x)=x^\alpha e^{-x}$, $1\leqslant p<\infty$, $\mathcal{L}^p_\rho$ – пространство измеримых функций, определенных на полуоси $[0,\infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p_\rho}=\left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p\rho(x)dx\right)^{1/p}<\infty.$$

Через $W^r_{\mathcal{L}^p_\rho}(0,\infty)$ обозначим подкласс функций $f=f(x)$ из $\mathcal{L}^p_\rho$, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a,b]\subset[0,\infty)$, а $f^{(r)}\in\mathcal{L}^p_\rho$. Тогда мы можем рассмотреть коэффициенты Фурье-Лагерра функции $f^{(r)}(x)$ по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$:

$$f^\alpha_{r,k}=\frac{1}{h^\alpha_k}\int\limits_0^\infty \rho(t)f^{(r)}(t)L^\alpha_k(t)dt \tag{3.1}$$

Соответствующий ряд Фурье-Лагерра функции $f^{(r)}$ имеет вид

$$f^{(r)}\sim\sum_{k=0}^\infty f^\alpha_{r,k}L^\alpha_k(x). \tag{3.2}$$

Рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x)=Q_{r-1}(f,x)+\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt, \tag{3.3}$$

где

$$Q_{r-1}(f,x)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{f^{(r)}(0)}{\nu!}x^\nu$$

полином Тейлора и выполним формальную подстановку в (3.3) вместо $f^{(r)}(t)$ ряда Фурье-Лагерра (3.2). Если эта операция законна, то мы придем к следующему равенству

$$f(x)=Q_{r-1}(f,x)+\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=0}^\infty f^\alpha_{r,k}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}L^\alpha_k(t)dt$$

$$=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{f^{(r)}(0)}{\nu!}x^\nu+\sum_{k=0}^\infty\frac{\tilde f^\alpha_{r,k}}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}l^\alpha_k(t)dt, \tag{3.4}$$

где $\tilde{f}^{\alpha}_{r,k} = (h^{\alpha}_k)^{\frac{1}{2}} f^{\alpha}_{r,k} = \int_0^{\infty} \rho(t) f^{(r)}(t) l^{\alpha}_k(t)dt$. Воспользуемся равенством (2.8), тогда

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} L^{\alpha}_k(t)dt = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}\frac{d^r}{dt^r} L^{\alpha-r}_{k+r}(t)dt$$

$$= (-1)^r L^{\alpha-r}_{k+r}(x) - (-1)^r \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{x^{\nu}}{\nu!}\{L^{\alpha-r}_{k+r}(t)\}^{(\nu)}_{t=0}. \tag{3.5}$$

Далее

$$\{L^{\alpha-r}_{k+r}(t)\}^{(\nu)} = (-1)^{\nu} L^{\alpha-r+\nu}_{k+r-\nu}(t), \tag{3.6}$$

а в силу (2.2)

$$L^{\alpha-r+\nu}_{k+r-\nu}(0) = \binom{k+\alpha}{k+r-\nu} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \tag{3.7}$$

Сопоставляя (3.6) и (3.7), имеем

$$\{L^{\alpha-r}_{k+r}(t)\}^{(\nu)}_{t=0} = (-1)^{\nu}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \tag{3.8}$$

Из (3.5) и (3.8) находим

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} L^{\alpha}_k(t)dt =$$

$$(-1)^r L^{\alpha-r}_{k+r}(x) - (-1)^r \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)(-x)^{\nu}}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!\nu!}. \tag{3.9}$$

Из (3.9) мы заключаем, что ряд (3.4) можно переписать следующим образом

$$f(x) = E^{\alpha}_{r-1}(f,x) + J^{\alpha}_r(f,x), \tag{3.10}$$

где

$$E^{\alpha}_{r-1}(f,x) =$$

$$\sum_{\nu=0}^{r-1}\left[f^{(\nu)}(0) - \frac{(-1)^{r-\nu}}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} f^{\alpha}_{r,k}\right]\frac{x^{\nu}}{\nu!}, \tag{3.11}$$

$$J^{\alpha}_r(f,x) = (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} f^{\alpha}_{r,k} L^{\alpha-r}_{k+r}(x). \tag{3.12}$$

Ряд (3.10) или, что то же, ряд (3.4) будем, следуя [11] называть *смешанным* рядом по полиномам Лагерра $L^{\alpha}_k(x)$. Смешанный ряд содержит коэффициенты Фурье $f^{\alpha}_{r,k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ r-той производной функции $f(x)$ по полиномам Лагерра $L^{\alpha}_k(x)$, умноженные на полиномы Лагерра вида $L^{\alpha-r}_{k+r}(x)$. В этом заключается принципиальное отличие смешанного ряда (3.10) по полиномам Лагерра $L^{\alpha}_k(x)$ от ряда Фурье по этим же полиномам.

Если в (3.11) и(3.12) мы положим $\alpha = 0$, то равенство (3.10) принимает следующий вид

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} f^0_{r,k} L^{-r}_{k+r}(x). \tag{3.13}$$

Если, кроме того, воспользуемся равенством (2.9), то отсюда получим

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + x^r \sum_{k=0}^{\infty} f^0_{r,k} \frac{L^r_k(x)}{(k+r)^{[r]}}. \tag{3.14}$$

В дальнейшем будет показано, что (3.13) представляет собой ряд Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения (1.1), а (3.14) есть не что иное, как специальный ряд по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$ с $\alpha = r$, где $1 \leqslant r$ – целое.

Перейдем к рассмотрению достаточных условий на функцию $f(x)$, обеспечивающих сходимость рядов $J_r^\alpha(f,x)$ и справедливость равенства (3.10).

Теорема 1. *Пусть* $-1 < \alpha < 1$, $r \geqslant 1$, $A > 0$, $f \in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$. *Тогда ряд* $J_r^\alpha(f,x)$ *сходится равномерно относительно* $x \in [0, A]$ *и для произвольного* $x \in [0,\infty)$ *имеет место равенство* (3.10).

Доказательство. Мы начнем с оценки полинома $L^{\alpha-r}_{k+r}(x)$ при $\alpha > -1$, $r \geqslant 1$ и $x \in [0, A]$. Если $\alpha - r > -1$, то пользуясь оценкой (2.12), мы можем записать ($\theta = 4k + 2r - 2\alpha + 2$)

$$|L^{\alpha-r}_{k+r}(x)| \leqslant c(\alpha, r) e^{x/2} B^{\alpha-r}_{k+r}(x). \tag{3.15}$$

Если же $\alpha - r \leqslant -1$, то, пользуясь равенством (2.11), имеем

$$L^{\alpha-r}_{k+r}(x) = \frac{\alpha - r + 1}{k + \alpha} L^{\alpha-r+1}_{k+r}(x) - \frac{x}{k+\alpha} L^{\alpha-r+2}_{k+r-1}(x). \tag{3.16}$$

С другой стороны, из определения функции $B^\alpha_n(x)$ (см.(2.12)) нетрудно увидеть, что при $\alpha > -1$, $k \geqslant 1$, $x \in [0, A]$

$$\frac{1}{k+\alpha} B^{\alpha-r+1}_{k+r}(x) \leqslant c(\alpha, r) B^{\alpha-r}_{k+r}(x), \tag{3.17}$$

$$\frac{x}{k+\alpha} B^{\alpha-r+2}_{k+r-1}(x) \leqslant c(\alpha, r, A) B^{\alpha-r}_{k+r}(x). \tag{3.18}$$

Далее заметим, что если для $x \in [0, A]$ справедливы оценки

$$|L^{\alpha-r+1}_{k+r}(x)| \leqslant c(\alpha, r, A) e^{\frac{x}{2}} B^{\alpha-r+1}_{k+r}(x), \tag{3.19}$$

$$|L^{\alpha-r+2}_{k+r-1}(x)| \leqslant c(\alpha, r, A) e^{\frac{x}{2}} B^{\alpha-r+2}_{k+r-1}(x), \tag{3.20}$$

то из (3.16) –(3.20) вытекает оценка (3.15). Но если $r = 1$, то $\alpha - r + 1 = \alpha > -1$, $\alpha - r + 2 = \alpha + 1 > 0$ и поэтому оценки (3.19) и (3.20) вытекают из (2.12). Тем самым, оценка (3.15) для $r = 1$ доказана. Предположим теперь, что оценка (3.15) верна для $1 \leqslant r \leqslant n$. Тогда из (3.16) –(3.18) следует справедливость оценки (3.15) для $r = n+1$. Тем самым доказана справедливость оценки (3.15) для произвольного целого $r \geqslant 1$. Оценим теперь остаточный член ряда (3.12), который равен

$$R_n^\alpha(f,x) = (-1)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x). \tag{3.21}$$

Имеем

$$|R_n^\alpha(f,x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_{r,k}^\alpha||L_{k+r}^{\alpha-r}(x)| =$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (h_k^\alpha)^{1/2}|f_{r,k}^\alpha|(h_k^\alpha)^{-1/2}|L_{k+r}^{\alpha-r}(x)| \leqslant \eta_n\gamma_n(x), \tag{3.22}$$

где

$$\eta_n = \left(\sum_{n+1}^{\infty} h_k^\alpha (f_{r,k}^\alpha)^2\right)^{1/2}, \quad \gamma_n(x) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (L_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2/h_k^\alpha\right)^{1/2}.$$

Если $f^{(r)} \in \mathcal{L}_\rho^2$, то

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0. \tag{3.23}$$

Что касается величины $\gamma_n(x)$, то, используя оценку (3.15) и соотношение

$$h_k^\alpha = \Gamma(\alpha+1)\binom{k+\alpha}{k} \asymp k^\alpha (k = 1, 2, \ldots),$$

мы находим

$$\gamma_n(x) \leqslant c(\alpha, r, A)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha}(B_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2\right)^{1/2}. \tag{3.24}$$

Пусть $0 \leqslant x \leqslant A$, тогда из (2.12) следует, что для произвольного действительного β имеет место оценка

$$B_m^\beta(x) \leqslant c(\beta, A)m^\beta(1+mx)^{-\beta/2-1/4} \quad (0 \leqslant x \leqslant A). \tag{3.25}$$

Полагая здесь $\beta = \alpha - r$, мы можем записать

$$B_{k+r}^{\alpha-r} \leqslant c(\alpha, r, A)(k+r)^{\alpha-r}(1+(k+r)x)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}.$$

Отсюда имеем $(0 \leqslant x \leqslant A)$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha}(B_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2 \leqslant$$

$$c(\alpha, r, A)\sum_{k=n+1}^{\infty} (k+r)^{\alpha-2r}(1+(k+r)x)^{r-\alpha-1/2} =$$

$$c(\alpha, r, A)\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+r)^{r+1/2}}\left(\frac{1}{k+r}+x\right)^{r-\alpha-1/2}. \tag{3.26}$$

Заметим, что при $k > n$

$$\left(\frac{1}{k+r}+x\right)^{r-\alpha-1/2} \leqslant \begin{cases} \left(\frac{1}{n+r}+x\right)^{r-\alpha-1/2}, & r-\alpha \geqslant 1/2, \\ (k+r)^{\alpha+1/2-r}, & r-\alpha < 1/2, \end{cases}$$

поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+r)^{r+1/2}} \left(\frac{1}{k+r}+x\right)^{r-\alpha-1/2} \leqslant$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n+r}+x\right)^{r-\alpha-1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+r)^{-r-1/2}, & r-\alpha \geqslant 1/2, \\ \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+r)^{-2r+\alpha}, & r-\alpha < 1/2, \end{cases} \tag{3.27}$$

Сопоставляя (3.24), (3.26) и (3.27), мы находим

$$\gamma_n^2(x) \leqslant c(\alpha, r, A) \begin{cases} n^{\frac{1}{2}-r}\left(\frac{1}{n}+x\right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}, & r-\alpha \geqslant \frac{1}{2}, \\ n^{-2r+\alpha+1}, & r-\alpha < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.28}$$

Из оценки (3.28) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n(x) = 0, \tag{3.29}$$

причем сходимость равномерна относительно $x \in [0, A]$. Сопоставляя (3.22), (3.23) и (3.24), приходим к первому утверждению теоремы 1 о равномерной сходимости на $[0, A]$ ряда (3.12). Остается доказать, что имеет место равенство (3.10). Если $f \in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$, то $f^{(r)} \in \mathcal{L}^2_\rho$ и, следовательно, в метрике пространства $\mathcal{L}^2_\rho$ имеет место равенство

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^\alpha_{r,k} L^\alpha_k(x). \tag{3.30}$$

Пусть

$$S^\alpha_{r,n}(f) = S^\alpha_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f^\alpha_{r,k} L^\alpha_k(x)$$

частичная сумма порядка n ряда (3.2) . Мы имеем

$$\left|\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt - \int_0^x (x-t)^{r-1} S^\alpha_{r,n}(f,t)dt\right| \leqslant$$

$$\int_0^x (x-t)^{r-1}|f^{(r)}(t) - S^\alpha_{r,n}(f,x)|dt \leqslant x^{r-1}\int_0^x |f^{(r)}(t) - S^\alpha_{r,n}(f,t)|dt =$$

$$x^{r-1}\int_0^x t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{t/2} t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-t/2} |f^{(r)}(t) - S^\alpha_{r,n}(f,t)|dt \leqslant$$

$$x^{r-1}\left(\int\limits_0^x t^{-\alpha}e^t dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^x t^{\alpha}e^{-t}(f^{(r)}(t)-S_{r,n}^{\alpha}(f,t))^2dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\left(\frac{e^x x^{2r-\alpha-1}}{1-\alpha}\right)^{1/2}\|f^{(r)}-S_{r,n}^{\alpha}\|_{\mathcal{L}^2_\rho}. \tag{3.31}$$

Поскольку в силу (3.30) $\|f^{(r)}-S_{r,n}^{\alpha}\|_{\mathcal{L}^2_\rho}\to 0$ $(n\to\infty)$, то из (3.31) находим

$$\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt=\sum_{k=0}^{\infty}f_{r,k}^{\alpha}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}L_k^{\alpha}(t)dt. \tag{3.32}$$

Сопоставляя (3.3) и (3.32), заключаем, что справедливо (3.4). Убедимся теперь в законности рассуждений, которые привели к равенству (3.10), исходя из (3.4). Имея ввиду (3.9), для этого достаточно проверить сходимость рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}f_{r,k}^{\alpha}\quad (0\leqslant\nu\leqslant r-1),$$

фигурирующих (3.11). Но если $f\in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$, то $f^{(r)}\in\mathcal{L}^2_\rho$ и, стало быть,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}|f_{r,k}^{\alpha}|=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}(h_k^{\alpha})^{-1/2}(h_k^{\alpha})^{1/2}|f_{r,k}^{\alpha}|\leqslant$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}\right)^2\frac{1}{h_k^{\alpha}}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}h_k^{\alpha}(f_{r,k}^{\alpha})^2\right)^{1/2}=$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)}{(\Gamma(k+r-\nu+1))^2}\right)^{1/2}\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}^2_\rho}\leqslant$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)\Gamma(k+2)}\right)^{1/2}\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}^2_\rho}\leqslant c(\alpha)\|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}^2_\rho}\quad(-1<\alpha<1).$$

Тем самым равенство (3.10) и вместе с ним теорема 1 доказаны.

Покажем, что смешанные ряды вида (3.14) возникают в различных прикладных задачах.

3.1. Решение задачи Коши посредством смешанных рядов по полиномам Лагерра. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$x^{(r)}(t)+a_{r-1}x^{(r-1)}(t)+\ldots+a_1x'(t)+a_0x(t)=y(t) \tag{3.33}$$

с начальными условиями

$$x_k=x^{(k)}(0),\quad k=0,1,\ldots,r-1 \tag{3.34}$$

и представим наивысшую производную $x^{(r)}(t)$ её решения, встречающейся в рассматриваемом уравнении, в виде ряда Фурье - Лагерра по полиномам Лагерра $L_n(t) = L_n^\alpha(t)$ с $\alpha = 0$. Смешанный ряд, о котором идет речь, возникает путем повторного (r-кратного) интегрирования указанного представления. В результате возникает следующее представление для решения уравнения (3.33)

$$x(t) = P_{r-1}(t) + t^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{x}_{r,k} L_k^r(t)}{(k+1)_r}, \tag{3.35}$$

где

$$P_{r-1}(t) = P_{r-1}(x,t) = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{x_s}{s!} t^s$$

– полином Тейлора, $(k+1)_r = (k+1)\cdots(k+r)$,

$$\hat{x}_{r,k} = \int_0^\infty x^{(r)}(\tau) L_k(\tau) e^{-\tau} d\tau \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

– коэффициенты Фурье-Лагерра функции $x^{(r)}(t)$. Заметим, что если мы положим $f(t) = x(t)$, то ряд (3.35) совпадает со смешанным рядом (3.14). При этом *важно отметить*, что уникальные свойства, присущие только полиномам Лагерра $L_n(t)$, позволяют вывести для коэффициентов $\hat{x}_{r,k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ следующие рекуррентные соотношения

$$\left.\begin{aligned} \left(\hat{Q}_{r-1,0} + 1\right) \hat{x}_{r,0} = \hat{\tilde{y}}_0, \\ \sum_{l=0}^{k-1} \left(\hat{Q}_{r-1,k-l} - \hat{Q}_{r-1,k-l+1}\right) \hat{x}_{r,l} + (1 + \hat{Q}_{r-1,0}) \hat{x}_{r,k} = \hat{\tilde{y}}_k, \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

в которых через $\hat{Q}_{r-1,k}$ и $\hat{\tilde{y}}_k$ обозначены коэффициенты Фурье-Лагерра заданных(известных) функций

$$Q_{r-1}(t) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k \frac{t^{r-k-1}}{(r-k-1)!} \tag{3.37}$$

и

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{r-1} a_k P_{r-k-1}(t), \tag{3.38}$$

соответственно. Неизвестные коэффициенты Фурье-Лагерра $\hat{x}_{r,k}$ функции $x^{(r)}(t)$ с $k = 0, 1, \ldots, n$ могут быть найдены из рекуррентных соотношений (3.36) для любого натурального n. Тогда вместо точного равенства (3.35) мы получим приближенное равенство $x(t) \approx \mathfrak{L}_{n+r}(t)$, где

$$\mathfrak{L}_{n+r}(t) = \mathfrak{L}_{n+r}(x,t) = P_{r-1}(t) + t^r \sum_{k=0}^{n} \frac{\hat{x}_{r,k} L_k^r(t)}{(k+1)_r}$$

частичная сумма смешанного ряда (3.35). Тем самым $\mathfrak{L}_{n+r}(t)$ является приближенным решением задачи Коши (3.33) – (3.34), представляющего собой алгебраический полином степени $n + r$. Естественно возникает вопрос о том, сходится ли приближенное решение $\mathfrak{L}_{n+r}(t)$ задачи Коши (3.33) – (3.34) к ее точному решению $x(t)$ при $t \in [0, \infty)$ и $n \to \infty$ и если это так, то какова величина погрешности замены точного решения $x(t)$ задачи Коши (3.33) – (3.34) ее приближенным решением $\mathfrak{L}_{n+r}(t)$. В настоящей работе исследованы эти задачи в более общем случае для специальных рядов по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(t)$, для которых ряды, фигурирующие в правой части равенства (3.14) являются частным случаем.

3.2. Обращение преобразование Лапласа посредством смешанных рядов по полиномам Лагерра. Пусть задано преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Предположим, что функция $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{-\alpha} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

где $\alpha > -1$. Рассмотрим следующее разложение функции $g(t) = t^{-\alpha} f(t)$ по полиномам Лагерра:

$$g(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{h_k^\alpha} L_k^\alpha(t). \tag{3.39}$$

В [18] найдено следующее выражение для коэффициентов a_k:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left\{ \frac{1}{z^{\alpha+1}} F\left(\frac{1}{z}\right) \right\}_{z=1}. \tag{3.40}$$

Поскольку $F(p)$ – заданная функция, то коэффициенты a_k в разложении (3.39) могут быть найдены с помощью равенства (3.40). Если $\alpha = r$ – целое, то равенство (3.39) можно переписать в виде

$$f(t) = t^r \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{(k+1)_r} L_k^r(t), \tag{3.41}$$

так как $h_k^r = (k+1)_r$. Ряд (3.41) представляет собой частный случай смешанного ряда вида (3.14). При этом заметим, что с помощью формулы (3.40) мы можем найти лишь конечное число коэффициентов a_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, поэтому вместо точного равенства (3.41) мы получим приближенное

$$f(t) \approx \mathcal{L}_{n+r}(t) = t^r \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)_r} L_k^r(t). \tag{3.42}$$

И снова мы пришли к задаче об оценке отклонения частичной суммы $\mathcal{L}_{n+r}(t)$ смешанного ряда (3.14) от функции $f(t)$.

4. Специальные ряды по полиномам Лагерра

Пусть $1 \leqslant r$ – целое, $f(t)$ – $r-1$ раз дифференцируемая в точке $t=0$,

$$P_{r-1}(f)=P_{r-1}(f)(t)=\sum_{i=0}^{r-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}t^i, \tag{4.1}$$

$$f_r(t)=\frac{1}{t^r}[f(t)-P_{r-1}(f)(t)]. \tag{4.2}$$

Предположим, что для функции $f_r(t)$, определенной равенством (4.2) существуют коэффициенты Фурье-Лагерра

$$\hat f^{\alpha}_{r,k}=\frac{1}{h^{\alpha}_k}\int_0^\infty f_r(\tau)t^\alpha e^{-t}L^\alpha_k(t)dt=$$

$$\frac{1}{h^{\alpha}_k}\int_0^\infty [f(t)-P_{r-1}(f)(t)]t^{\alpha-r}e^{-t}L^\alpha_k(t)dt, \tag{4.3}$$

где $h^\alpha_n=\Gamma(n+\alpha+1)/n!$. Тогда мы можем рассмотреть ряд Фурье-Лагерра функции $f_r(t)$

$$f_r(t)\sim\sum_{k=0}^\infty \hat f^{\alpha}_{r,k}L^\alpha_k(t). \tag{4.4}$$

Если ряд (4.4) сходится к $f_r(t)$, то с учетом (4.2) мы можем записать

$$f(t)=P_{r-1}(f)(t)+t^r\sum_{k=0}^\infty \hat f^{\alpha}_{r,k}L^\alpha_k(t). \tag{4.5}$$

Это и есть *специальный ряд по полиномам Лагерра.* Нетрудно показать, что если $\alpha=r$, то специальный ряд (4.5) совпадает со смешанным рядом (3.14). В самом деле, в силу (2.1), (3.1) и (2.9) имеем

$$f^0_{r,k}=\int_0^\infty f^{(r)}(\tau)e^{-\tau}L_k(\tau)d\tau=\frac{1}{k!}\int_0^\infty (f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau))^{(r)}(e^{-\tau}\tau^k)^{(k)}d\tau=$$

$$\frac{(-1)^r}{k!}\int_0^\infty (f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau))(e^{-\tau}\tau^k)^{(k+r)}d\tau=$$

$$\frac{(-1)^r}{k!}\int_0^\infty (f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau))\tau^{-r}e^{-\tau}L^{-r}_{k+r}(\tau)(k+r)!d\tau=$$

$$\frac{(k+r)!}{k!}(-1)^r\int_0^\infty \frac{(f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau))}{\tau^r}e^{-\tau}\frac{(-\tau)^r}{(k+r)^{[r]}}L^r_k(\tau)d\tau=$$

$$\int_0^\infty (f(t) - P_{r-1}(f)(t))e^{-\tau} L_k^r(\tau)d\tau = h_k^r \hat{f}_{r,k}^r. \tag{4.6}$$

В силу (4.6) ряд (3.14) приобретает вид

$$f(t) = P_{r-1}(f)(t) + t^r \sum_{k=0}^\infty \frac{h_k^r \hat{f}_{r,k}^r L_k^r(t)}{(k+1)_r} =$$

$$P_{r-1}(f)(t) + t^r \sum_{k=0}^\infty \hat{f}_{r,k}^r L_k^r(t),$$

так как $h_k^r = (k+1)_r$. Таким образом, в случае $\alpha = r$ ряды (3.14) и (4.5) совпадают.

5. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные полиномами Лагерра

Из равенства (2.3) следует, что если $\alpha > -1$, то полиномы $l_n^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ (см.(2.13)) образуют ортонормированную в $\mathcal{L}_\rho^2$ систему. Как хорошо известно [15], система полиномов Лагерра (2.13) полна в $\mathcal{L}_\rho^2$. Эта система порождает на $[0, \infty)$ систему полиномов $l_{r,k}^\alpha(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, определенных равенствами

$$l_{r,k}^\alpha(x) = \frac{x^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{5.1}$$

$$l_{r,r+k}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} l_k^\alpha(t)dt, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{5.2}$$

В $W_{\mathcal{L}_\rho^2}^r$ мы введем скалярное произведение (1.1), которое превращает $W_{\mathcal{L}_\rho^2}^r$ в гильбертово пространство. Мы покажем, что система полиномов $\{l_{r,k}^\alpha(x)\}_{k=0}^\infty$ является полной и ортонормированной в $W_{\mathcal{L}_\rho^2}^r$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > -1$. Тогда система полиномов $\{l_{r,k}^\alpha(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой ортонормированных полиномов Лагерра* (2.13) *посредством равенств* (5.1) *и* (5.2)*, полна в $W_{\mathcal{L}_\rho^2}^r$ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (1.1).

Доказательство. Из (5.1) и (5.2) следует, что

$$(l_{r,k}^\alpha(x))^{(\nu)} = \begin{cases} l_{r-\nu,k-\nu}^\alpha(x), & \text{если } 0 \leqslant \nu \leqslant r-1,\ r \leqslant k, \\ l_{k-r}^\alpha(x), & \text{если } \nu = r \leqslant k, \\ l_{r-\nu,k-\nu}^\alpha(x), & \text{если } \nu \leqslant k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \leqslant r. \end{cases} \tag{5.3}$$

В силу первого из равенств (5.3) следует, что если $r \leqslant k$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $(l_{r,k}^\alpha(x))_{x=0}^{(\nu)} = 0$, поэтому в силу второго равенства из (5.3), имеем

$$< l_{r,k}^\alpha, l_{r,l}^\alpha >= \int_0^\infty (l_{r,k}^\alpha(x))^{(r)} (l_{r,l}^\alpha(x))^{(r)} \rho(x)dx =$$

$$\int_0^\infty l_{k-r}^\alpha(x) l_{l-r}^\alpha(x)\rho(x)dx = \delta_{kl}, \quad k,l \geqslant r, \tag{5.4}$$

а в силу третьего и четвертого из равенств (5.3) получаем

$$< l_{r,k}^\alpha, l_{r,l}^\alpha >= \sum_{\nu=0}^{r-1} (l_{r,k}^\alpha(x))^{(\nu)}|_{x=0} (l_{r,l}^\alpha(x))^{(\nu)}|_{x=0} = \delta_{kl}, \quad k,l < r. \tag{5.5}$$

Очевидно также, что

$$< l_{r,k}^\alpha, l_{r,l}^\alpha >= 0, \quad \text{если} \quad k < r \leqslant l \quad \text{или} \quad l < r \leqslant k. \tag{5.6}$$

Равенства (5.4) – (5.6) означают, что функции $l_{r,k}^\alpha(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ образуют в $W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (1.1). Остается убедиться в ее полноте в $W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$. С этой целью покажем, что если для некоторой функции $f = f(x) \in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ и для всех $k = 0, 1, \ldots$ справедливы равенства $< f, l_k^\alpha >= 0$, то $f(x) \equiv 0$. В самом деле, если $k \leqslant r-1$, то $< f, l_{r,k}^\alpha >= f^{(k)}(0)$, поэтому с учетом того, что $< f, l_{r,k}^\alpha >= 0$, для нашей функции $f(x)$ формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt$$

приобретает вид

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt. \tag{5.7}$$

С другой стороны, для всех $k \geqslant r$ имеем

$$0 =< f, l_{r,k}^\alpha >= \int_0^\infty f^{(r)}(x)(l_{r,k}^\alpha(x))^{(r)}\rho(x)dx = \int_0^\infty f^{(r)}(x) l_{k-r}^\alpha(x)\rho(x)dx.$$

Отсюда и из того, что $l_m^\alpha(x)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ образуют в $\mathcal{L}^2_\rho$ полную ортонормированную систему имеем $f^{(r)}(x) = 0$ почти всюду на $[0, \infty)$. Поэтому из (5.7) следует, что $f(x) \equiv 0$. Теорема 2 доказана.

Ряд Фурье функции $f \in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ по системе $\{l_{r,k}^\alpha(x)\}_{k=0}^\infty$ мы можем записать в виде

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^\infty < f, l_{r,k}^\alpha > l_{r,k}^\alpha(x), \tag{5.8}$$

где

$$< f, l_{r,k}^\alpha >= f^{(k)}(0), \quad k = 0, \ldots, r-1, \tag{5.9}$$

$$< f, l_{r,k}^\alpha >= \int_0^\infty f^{(r)}(t) l_{k-r}^\alpha(t) e^{-t} t^\alpha dt = \tilde{f}_{r,k}^\alpha, \quad k = r, r+1, \ldots. \tag{5.10}$$

В силу (5.9) и (5.10) мы можем ряд Фурье (5.8) переписать еще так

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^\infty \tilde{f}_{r,k}^\alpha l_{r,k}^\alpha(x). \tag{5.11}$$

Сопоставляя равенство (5.11) с (5.2) и (3.4), замечаем, что смешанный ряд (3.4) представляет собой ряд Фурье по полиномам $l_{r,k}^{\alpha}(x)$, ортогональным по Соболеву, порожденным полиномами Лагерра.

Из теоремы 2 следует, что если $f \in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$, то ряд (5.11), будучи рядом Фурье по системе $\{l_{r,k}^{\alpha}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, сходится к f в метрике гильбертова пространства $W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ со скалярным произведением (1.1), другими словами, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}(\tilde f_{r,k}^{\alpha})^2 = 0.$$

Однако, это не означает, что ряд Фурье (5.11) сходится к $f(x)$ в заданной точке $x \in [0,\infty)$. При исследовании этой задачи существенную роль играют асимптотические свойства полиномов $l_{r,k}^{\alpha}(x)$ при $k\to\infty$. С целью изучения асимптотических свойств полиномов $l_{r,k}^{\alpha}(x)$ мы получим некоторые их представления, содержащие классические полиномы Лагерра $L_m^{\alpha}(x)$, а также представление $l_{r,k}^{\alpha}(x)$ в явном виде.

Итак, мы перейдем к получению некоторых важных представлений для полиномов $l_{r,r+k}^{\alpha}(x)$ при $k \geqslant 0$. С этой целью обратимся к свойству (2.8) и запишем

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}L_k^{\alpha}(t)dt = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}\frac{d^r}{dt^r}L_{k+r}^{\alpha-r}(t)dt$$

$$= (-1)^r L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - (-1)^r\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{x^\nu}{\nu!}\{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)}. \tag{5.12}$$

Далее

$$\{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}^{(\nu)} = (-1)^\nu L_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(t), \tag{5.13}$$

а в силу (2.2)

$$L_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(0) = \binom{k+\alpha}{k+r-\nu} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \tag{5.14}$$

Сопоставляя (5.13) и (5.14), имеем

$$B_{k,\nu}^{\alpha} = \{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)} = \frac{(-1)^\nu\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \tag{5.15}$$

Из (5.12) и (5.15) находим

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}L_k^{\alpha}(t)dt =$$

$$(-1)^r L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - (-1)^r\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{B_{k,\nu}^{\alpha}x^\nu}{\nu!}. \tag{5.16}$$

С другой стороны, в силу определения (5.2) и равенства (2.13) имеем

$$l_{r,r+k}^{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_k^{\alpha}}(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}L_k^{\alpha}(t)dt, \quad k=0,1,\ldots. \tag{5.17}$$

Сопоставляя (5.16) с (5.17) мы приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть $\alpha > -1$, $k \geqslant 0$. Тогда имеет место равенство*

$$l_{r,r+k}^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^r}{\sqrt{h_k^{\alpha}}}\left[L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{B_{k,\nu}^{\alpha}x^{\nu}}{\nu!}\right], \tag{5.18}$$

в котором

$$B_{k,\nu}^{\alpha} = \frac{(-1)^{\nu}\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}.$$

Следствие 1. *Пусть $k \geqslant 0$. Тогда*

$$l_{r,r+k}^{0}(x) = (-1)^r L_{k+r}^{-r}(x) = \frac{x^r L_k^r(x)}{(k+r)^{[r]}}.$$

Доказательство. Из (5.15) следует, что если $\alpha = 0$, то $B_{k,\nu}^{\alpha} = 0$ для всех $\nu = 0, 1, \ldots, r-1$ и, как следствие, в этом случае равенство (5.18) принимает вид

$$l_{r,r+k}^{0}(x) = (-1)^r L_{k+r}^{-r}(x), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{5.19}$$

Поскольку в силу равенства (2.7)

$$L_{k+r}^{-r}(t) = \frac{(-t)^r}{(k+r)^{[r]}}L_k^r(t),$$

то утверждения следствия 1 вытекает из (5.19).

Еще одно важное представление для полиномов $l_{r,n+r}^{\alpha}(x)$ можно получить если мы обратимся к равенствам (2.2) и (2.13) и запишем

$$l_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{(h_n^{\alpha})^{1/2}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\frac{(-x)^{\nu}}{\nu!}. \tag{5.20}$$

Поскольку, очевидно,

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1}t^{\nu}dt = \frac{x^{\nu+r}}{(\nu+r)^{[r]}},$$

то из (5.20) и (5.2) выводим следующий рнезультат.

Теорема 4. *Для произвольного $\alpha > -1$ имеет место равенство*

$$l_{r,n+r}^{\alpha}(x) = \frac{1}{(h_n^{\alpha})^{1/2}}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\frac{x^{\nu+r}}{\nu!(\nu+r)^{[r]}} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{5.21}$$

6. Неравенство Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра

Через $\mathcal{L}_n^{\alpha}(f) = \mathcal{L}_n^{\alpha}(f)(t)$ обозначим частичную сумму специального ряда (4.5) вида

$$\mathcal{L}_n^{\alpha}(f)(t) = P_{r-1}(f) + t^r\sum_{k=0}^{n-r}\hat{f}_{r,k}^{\alpha}L_k^{\alpha}(t).$$

Заметим, что если $f(t) = q_n(t)$ представляет собой алгебраический полином степени n, то при $\alpha > -1$

$$\mathcal{L}_n^\alpha(q_n)(t) \equiv q_n(t),$$

другими словами, оператор $\mathcal{L}_n^\alpha(f)$ является проектором на подпространство H^n, состоящем из алгебраических полиномов степени n. Это свойство частичных сумм $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$ играет важную роль при решении задачи об оценке отклонения $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$ от исходной функции $f = f(t)$. Эта задача является одной из основных в настоящей работе.

Пусть $f(t)$ – непрерывная функция, заданная на полуоси $[0, \infty)$ и такая, что в точке $t = 0$ существуют производные $f^{(\nu)}(0)$ $(\nu = 0, 1, \dots, r-1)$. Кроме того будем считать, что для всех $k = 0, 1, \dots$ существуют коэффициенты $\hat{f}_{r,k}^\alpha$, определяемые равенством (4.3). Тогда мы можем определить специальный ряд (4.5) и его частичную сумму $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$. В настоящем параграфе рассмотрены некоторые вопросы, которые касаются сходимости $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$ к $f(x)$ при $n \to \infty$. В первую очередь рассмотрим задачу об оценке величины

$$R_{n,r}^\alpha(f)(t) = |f(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)| t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}}. \tag{6.1}$$

Весовой множитель $t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}$, фигурирующий в правой части равенства (6.1), связан с тем обстоятельством, что разность $|f(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)|$ стремится к нулю вместе с t со скоростью, не меньшей, чем $t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}$. Обозначим через $q_n(t)$ - алгебраический полином степени n, для которого

$$f^{(\nu)}(0) = q_n^{(\nu)}(0) \ (\nu = 0, 1, \dots, r-1). \tag{6.2}$$

Тогда

$$f(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t) = f(t) - q_n(t) + q_n(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t) =$$
$$f(t) - q_n(t) + \mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t), \tag{6.3}$$

поэтому в силу (6.1) и (6.3)

$$|R_{n,r}(f)(t)| \leqslant |f(t) - q_n(t)| t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} + |\mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t)| t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}}. \tag{6.4}$$

С другой стороны, в силу (6.2) $P_{r-1}(q_n - f) \equiv 0$, поэтому имеем

$$\mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t) = t^r \sum_{k=0}^{n-r} (\widehat{q_n - f})_{r,k} L_k^\alpha(t) =$$

$$t^r \sum_{k=0}^{n-r} \frac{1}{h_k^\alpha} \int_0^\infty (q_n(\tau) - f(\tau)) \tau^{\alpha-r} e^{-\tau} L_k^\alpha(\tau) L_k^\alpha(t) d\tau.$$

Отсюда

$$e^{-\frac{t}{2}} t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t) =$$
$$e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int_0^\infty (q_n(\tau) - f(\tau)) e^{-\tau} \tau^{\alpha-r} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{L_k^\alpha(t) L_k^\alpha(\tau)}{h_k^\alpha} d\tau. \tag{6.5}$$

Положим
$$E_n^r(f)=\inf_{q_n}\sup_{t>0}|q_n(t)-f(t)|e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}+\frac14}, \tag{6.6}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_n(t)$ степени n для которых $f^{(\nu)}(0)=q_n^{(\nu)}(0)$ $(\nu=0,\ldots,r-1)$. Тогда из (6.5) находим
$$e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}+\frac14}|\mathcal{L}_n^\alpha(q_n-f)(t)|\leqslant E_n^r(f)\lambda_{r,n}^\alpha(t), \tag{6.7}$$

где
$$\lambda_{r,n}^\alpha(t)=t^{\frac{r}{2}+\frac14}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\tau+t}{2}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}|\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)|d\tau, \tag{6.8}$$

а ядро $\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)$ определяется равенством (2.5). Из (6.4), (6.6) – (6.8) выводим следующее неравенство типа Лебега
$$|R_{n,r}^\alpha(f)(t)|\leqslant E_n^r(f)(1+\lambda_{r,n}^\alpha(t)). \tag{6.9}$$

В связи с неравенством (6.9) возникает задача об оценке функции Лебега $\lambda_{r,n}^\alpha(t)$, определяемой равенством (6.8). С этой целью мы введем следующие обозначения: $G_1=[0,\frac{3}{\theta_n}]$, $G_2=[\frac{3}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}]$, $G_3=[\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}]$, $G_4=[\frac{3\theta_n}{2},\infty]$. Мы будем оценивать $\lambda_{r,n}^\alpha(t)$ для $t\in G_s$ $(s=1,2,3,4)$.

Теорема 5. *Пусть $1\leqslant r$ – целое, $r-\frac12<\alpha<r+\frac12$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$. Тогда имеют место следующие оценки:*

1) если $t\in G_1=[0,\frac{3}{\theta_n}]$, то
$$\lambda_{r,n}^\alpha(t)\leqslant c(\alpha,r)[\ln(n+1)+n^{\alpha-r}]; \tag{6.10}$$

2) если $t\in G_2=[\frac{3}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}]$, то
$$\lambda_{r,n}^\alpha(t)\leqslant c(\alpha,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right]; \tag{6.11}$$

3) если $t\in G_3=[\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}]$, то
$$\lambda_{r,n}^\alpha(t)\leqslant c(\alpha,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{t}{\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac14}\right]; \tag{6.12}$$

4) если $t\in G_4=[\frac{3\theta_n}{2},\infty)$, то
$$\lambda_{r,n}^\alpha(t)\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac{r}{2}+\frac54}t^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{4}}. \tag{6.13}$$

7. Доказательство теоремы 5

Нам понадобятся некоторые преобразования для ядер $\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau)$, определенных равенством (2.5). Пользуясь равенством (2.11) мы можем записать
$$\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau)=\frac{\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{\tau-t}\left[\hat{L}_{n+1}^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau)-\hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_{n+1}^\alpha(\tau)\right], \tag{7.1}$$

откуда, полагая $\alpha_n = \sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}$, имеем

$$\frac{1}{\alpha_n}\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau) = \frac{1}{\tau - t}\left[\hat{L}_{n+1}^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau) - \hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_{n+1}^\alpha(\tau)\right] \tag{7.2}$$

$$\frac{1}{\alpha_{n-1}}\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau) = \frac{1}{\tau - t}\left[\hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_{n-1}^\alpha(\tau) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau)\right] + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau). \tag{7.3}$$

Складывая правые и левые части равенств (7.2) и (7.3), имеем

$$\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau) = \frac{1}{\alpha_{n-1}}\hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau) +$$
$$\frac{1}{\tau - t}\left[\hat{L}_n^\alpha(\tau)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(t) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(t)\right) - \hat{L}_n^\alpha(t)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(\tau) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(\tau)\right)\right],$$

стало быть,

$$\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n-1}}\hat{L}_n^\alpha(t)\hat{L}_n^\alpha(\tau) +$$
$$\frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{(\alpha_n + \alpha_{n-1})(\tau - t)}\left[\hat{L}_n^\alpha(\tau)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(t) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(t)\right) - \hat{L}_n^\alpha(t)\left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(\tau) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(\tau)\right)\right]. \tag{7.4}$$

Перейдем к доказательству оценки (6.10). Пусть $t \in G_1$,

$$I_1(t) = t^{r/2+1/4}\int_0^{4/\theta_n} e^{-\frac{\tau+t}{2}}\tau^{\alpha - r/2 - 1/4}\left|\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)\right| d\tau, \tag{7.5}$$

$$I_2(t) = t^{r/2+1/4}\int_{4/\theta_n}^{\infty} e^{-\frac{\tau+t}{2}}\tau^{\alpha - r/2 - 1/4}\left|\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)\right| d\tau. \tag{7.6}$$

Тогда из (6.8) имеем

$$\lambda_{r,n}^\alpha(t) \leqslant I_1(t) + I_2(t). \tag{7.7}$$

Оценим $I_1(t)$. Из (2.5), (2.12) – (2.15) имеем

$$|\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)| \leqslant c(\alpha)\sum_{k=0}^{n-r}\frac{B_k^\alpha(t)B_k^\alpha(\tau)}{\theta_k^\alpha} \leqslant c(\alpha)\sum_{k=0}^{n-r}\theta_k^\alpha \leqslant c(\alpha)\theta_n^{\alpha+1}.$$

Поэтому из (7.5) находим

$$I_1(t) \leqslant c(\alpha)\theta_n^{-r/2-1/4}\int_0^{4/\theta_n}\tau^{\alpha - r/2 - 1/4}\theta_n^{\alpha+1}dt \leqslant$$
$$c(\alpha)\theta_n^{\alpha - r/2 + 3/4}\left(\frac{4}{\theta_n}\right)^{\alpha - r/2 + 3/4} \leqslant c(\alpha). \tag{7.8}$$

Оценим $I_2(t)$. С этой целью обратимся к формуле (7.4) и запишем

$$I_2(t) \leqslant I_{21} + I_{22} + I_{23}, \tag{7.9}$$

где

$$I_{21} = \frac{\alpha_n e^{-\frac{t}{2}}}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} |\hat{L}_n^\alpha(t)| t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_{4/\theta_n}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{2}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} |\hat{L}_n^\alpha(\tau)| d\tau,$$

$$I_{22} = \frac{\alpha_n \alpha_{n-1} e^{-\frac{t}{2}}}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} |\hat{L}_{n+1}^\alpha(t) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(t)| t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_{4/\theta_n}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\tau}{2}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} |\hat{L}_n^\alpha(\tau)|}{\tau - t} d\tau,$$

$$I_{23} = \frac{\alpha_n \alpha_{n-1} e^{-\frac{t}{2}}}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} |\hat{L}_n^\alpha(t)| t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_{4/\theta_n}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\tau}{2}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} |\hat{L}_{n+1}^\alpha(\tau) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(\tau)|}{\tau - t} d\tau.$$

Положим

$$W = \int\limits_{4/\theta_n}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{2}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} |\hat{L}_n^\alpha(\tau)| d\tau = W_1 + W_2, \tag{7.10}$$

где

$$W_1 = \int\limits_{4/\theta_n}^{3\theta_n/2} e^{-\tau/2} \tau^{\alpha-r/2-1/4} |\hat{L}_n^\alpha(\tau)| d\tau, \tag{7.11}$$

$$W_2 = \int\limits_{3\theta_n/2}^{\infty} e^{-\tau/2} \tau^{\alpha-r/2-1/4} |\hat{L}_n^\alpha(\tau)| d\tau. \tag{7.12}$$

Пользуясь неравенством Коши-Шварца имеем:

$$W_1 \leqslant \left(\int\limits_{4/\theta_n}^{3\theta_{n/2}} \tau^{\alpha-r-1/2} d\tau \right)^{1/2} \left(\int\limits_{4/\theta_n}^{3\theta_n/2} \tau^\alpha e^{-\tau} (\hat{L}_n^\alpha(\tau))^2 \right)^{1/2} <$$
$$\left[\frac{1}{\alpha - r + \frac{1}{2}} \left(\left(\frac{3\theta_n}{2} \right)^{\alpha-r+1/2} - \left(\frac{4}{\theta_n} \right)^{\alpha-r+1/2} \right) \right]^{1/2} \leqslant c(\alpha,r) \theta_n^{\frac{\alpha-r+1/2}{2}}. \tag{7.13}$$

Далее, в силу (7.12) с учетом (2.12) и (2.13) имеем

$$W_2 \leqslant c(\alpha,r) \int\limits_{3\theta_n/2}^{\infty} \tau^{\alpha-r/2-1/4} e^{-\tau/4} d\tau =$$
$$c(\alpha,r) \int\limits_{\frac{3}{2}(4n+2\alpha+r)}^{\infty} \tau^{\alpha-r/2-1/4} e^{-\tau/4} d\tau \leqslant c(\alpha,r) e^{-n}. \tag{7.14}$$

Из (7.10)-(7.14) находим

$$W \leqslant c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r+1/2}{2}}.$$

Отсюда и из (2.13) следует, что если $r-\frac{1}{2}<\alpha\leqslant r+\frac{1}{2}$, то

$$I_{21}\leqslant c(\alpha,r)\theta_n^{\alpha/2}\theta_n^{-r/2-1/4}\theta_n^{\frac{\alpha-r+1/2}{2}}=c(\alpha,r)\theta_n^{\alpha-r}\leqslant c(\alpha,r)n^{\alpha-r}. \tag{7.15}$$

Оценим I_{22}. В силу (2.12) – (2.14)

$$I_{22}\leqslant c(\alpha)nt^{r/2+1/4}\left|\hat{L}_{n+1}^{\alpha}(t)-\hat{L}_{n-1}^{\alpha}(t)\right|\int\limits_{4/\theta_n}^{\infty}\frac{\theta_n^{-\alpha/2}B_n^{\alpha}(\tau)\tau^{\alpha-r/2-1/4}}{\tau-t}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha)\theta_n^{-r/2-1/4+1}\theta_n^{\alpha/2-1}\theta_n^{-\alpha/2}\int\limits_{4/\theta_n}^{\infty}\frac{B_n^{\alpha}(\tau)\tau^{\alpha-r/2-1/4}}{\tau-t}d\tau=$$

$$\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{r/2+1/4}}\int\limits_{4/\theta_n}^{\infty}\frac{B_n^{\alpha}(\tau)\tau^{\alpha-r/2-1/4}}{\tau-t}d\tau=I'_{22}+I''_{22}+I'''_{22}, \tag{7.16}$$

где

$$I'_{22}=\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{r/2+1/4}}\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_n/2}\frac{B_n^{\alpha}(\tau)\tau^{\alpha-r/2-1/4}}{\tau-t}d\tau,$$

$$I''_{22}=\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{r/2+1/4}}\int\limits_{\theta_n/2}^{3\theta_n/2}\frac{B_n^{\alpha}(\tau)\tau^{\alpha-r/2-1/4}}{\tau-t}d\tau,$$

$$I'''_{22}=\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{3\theta_{n/2}}^{\infty}\frac{B_n^{\alpha}(r)\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau.$$

Пользуясь определением функции $B_n^{\alpha}(t)$ (см. (2.12)) имеем

$$I'_{22}\leqslant\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_{n/2}}\frac{\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau=$$

$$\frac{c(\alpha)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_{n/2}}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{\tau-t}d\tau\leqslant c(\alpha)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}\int\limits_{4/\theta}^{\theta_{n/2}}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{3}{2}}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}\theta_n^{-\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}}=c(\alpha,r), \tag{7.17}$$

$$I''_{22}\leqslant\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{\theta_{n/2}}^{3\theta_{n/2}}\frac{[\theta_n(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)]^{-\frac{1}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau\leqslant$$

$$\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\theta_{n/2}}^{3\theta_{n/2}}(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)^{-\frac{1}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}d\tau\leqslant$$

$$\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\theta_{n/2}}^{3\theta_{n/2}}(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)^{-\frac{1}{4}}\theta_n^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha)\theta_n^{\alpha-r-\frac{3}{4}}\theta_n^{\frac{3}{4}}=c(\alpha)\theta_n^{\alpha-r}. \tag{7.18}$$

Далее, для I_{22}''' из (7.19) имеем

$$I_{22}'''\leqslant\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{3\theta_{n/2}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\tau}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau\leqslant\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{3\theta_{n/2}}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha,r)n^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-n}. \tag{7.19}$$

Собирая оценки (7.17) – (7.19) и сопоставляя их с (7.16), выводим

$$I_{22}\leqslant c(\alpha,r)(1+\theta_n^{\alpha-r}). \tag{7.20}$$

Перейдем к оценке I_{23} при $t\in G_1$. Используя оценки (2.12) – (2.14), мы можем записать

$$I_{23}\leqslant c(\alpha)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{\alpha}\theta_n^{-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}[H_1+H_2+H_3]=c(\alpha)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{3}{4}}[H_1+H_2+H_3], \tag{7.21}$$

где

$$H_1=\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_{n/2}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{3}{4}}\tau^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{\tau-t}=$$

$$\theta_n^{-\frac{3}{4}}\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_{n/2}}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-1}d\tau\leqslant\theta_n^{-\frac{3}{4}}\begin{cases}2\ln\theta_n-3\ln 2, & \alpha=r,\\ \dfrac{2}{\alpha-r}\left[\left(\dfrac{\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}}{2}\right)-\left(\dfrac{4}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right], & \alpha\neq r,\end{cases} \tag{7.22}$$

$$H_2=\theta_n^{-\frac{3}{4}}\int\limits_{\theta_{n/2}}^{3\theta_{n/2}}\frac{\tau^{-\frac{\alpha}{2}}(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)^{\frac{1}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau\leqslant$$

$$\theta_n^{-\frac{3}{4}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{5}{4}}\int\limits_{\theta_{n/2}}^{3\theta_{n/2}}(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)^{\frac{1}{4}}d\tau\leqslant c\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-2}\theta_n^{\frac{5}{4}}\leqslant c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{3}{4}}, \tag{7.23}$$

$$H_3=\int\limits_{3\theta_{n/2}}^{\infty}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{4}}}{\tau-t}d\tau<\int\limits_{3\theta_{n/2}}^{\infty}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}e^{-\frac{\tau}{4}}d\tau\leqslant c(\alpha,r)e^{-n}. \tag{7.24}$$

Из (7.22) – (7.24) имеем

$$I_{23}\leqslant c(\alpha,r)\theta_n^{\alpha-r}. \tag{7.25}$$

Из оценок (7.9), (7.15), (7.16), (7.20) и (7.25) выводим

$$I_2(t) \leqslant c(\alpha, r) \begin{cases} \ln n, & \text{если } \alpha = r, \\ n^{\alpha - r}, & \text{если } \alpha \neq r. \end{cases} \tag{7.26}$$

А из (7.7), (7.8) и (7.26) имеем

$$l^{\alpha}_{r,n}(t) \leqslant c(\alpha, r) \begin{cases} \ln n, & \text{если } \alpha = r, \\ n^{\alpha - r}, & \text{если } \alpha \neq r. \end{cases}$$

Тем самым оценка (6.10) доказана.

Перейдем к доказательству оценки (6.11). Пусть $t \in G_2 = \left[\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}\right]$. Тогда мы можем записать $(0, \infty) = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, где

$$Q_1 = [0, t - \sqrt{t/\theta_n}], Q_2 = [t - \sqrt{t/\theta_n}, t + \sqrt{t/\theta_n}], Q_3 = [t + \sqrt{t/\theta_n}, \infty).$$

Используя эти обозначения, из (6.8) имеем

$$\lambda^{\alpha}_{r,n}(t) = J_1 + J_2 + J_3, \tag{7.27}$$

где

$$J_k = t^{\frac{r}{2} + \frac{1}{4}} \int\limits_{Q_k} e^{-\frac{\tau + t}{2}} \tau^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}} |\mathcal{K}^{\alpha}_{n-r}(t, \tau)| d\tau \quad (1 \leqslant k \leqslant 3). \tag{7.28}$$

Оценим J_2. Для этого сначала заметим, что в силу неравенства Коши-Шварца

$$|\mathcal{K}^{\alpha}_{n-r}(t, \tau)| \leqslant (\mathcal{K}^{\alpha}_{n-r}(t, t))^{1/2} (\mathcal{K}^{\alpha}_{n-r}(\tau, \tau))^{1/2}. \tag{7.29}$$

Далее, если $3/\theta_n \leqslant t \leqslant 3\theta_n/2$, то $t - \sqrt{t/\theta_n} \geqslant 1/\theta_n$, кроме того для $\tau \in [t - \sqrt{t/\theta_n}, t + \sqrt{t/\theta_n}]$ имеем $c_1 t \leqslant \tau \leqslant c_2 t$. Поэтому из (7.28) и (7.29) имеем

$$J_2 = \int\limits_{Q_2} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{r/2 + 1/4} \tau^{\alpha} e^{-\frac{\tau + t}{2}} |\mathcal{K}^{\alpha}_{n-r}(t, \tau)| d\tau \leqslant$$

$$c \int\limits_{Q_2} \tau^{\alpha} e^{-\frac{\tau + t}{2}} (\mathcal{K}^{\alpha}_{n-r}(t, t))^{1/2} (\mathcal{K}^{\alpha}_{n-r}(\tau, \tau))^{1/2} d\tau \leqslant$$

$$c(e^{-t} \mathcal{K}^{\alpha}_{n-r}(t, t))^{1/2} \int\limits_{Q_2} \tau^{\alpha} (e^{-\tau} \mathcal{K}^{\alpha}_{n-r}(\tau, \tau))^{1/2} d\tau. \tag{7.30}$$

Неравенство (7.30) приводит, в свою очередь, к задаче об оценке для $e^{-\tau} \mathcal{K}^{\alpha}_{n}(\tau, \tau)$ при $3/\theta_n \leqslant \tau \leqslant 3\theta_n/2$. Следующее утверждение дает ответ на этот вопрос.

Лемма 7.1. *Пусть $\alpha > -1$, $\theta_k = 4k + 2\alpha + 2$, $\tau \geqslant 3/\theta_n$. Тогда имеет место оценка*

$$e^{-\tau} \mathcal{K}^{\alpha}_{n}(\tau, \tau) \leqslant c(\alpha) \tau^{-\alpha - 1/2} n^{1/2}. \tag{7.31}$$

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев: a) $1/\theta_n \leqslant \tau \leqslant 1/\sqrt{2}$; b) $1/\sqrt{2} < \tau \leqslant \sqrt{3/2}$; c) $\sqrt{3/2} < \tau$. В случае a) имеем $1/\theta_n \leqslant \tau \leqslant 1/\sqrt{2}$, откуда $0 < 2\tau \leqslant 1/\tau$. Через k_1 обозначим наибольшее натуральное число, для которого $\theta_{k_1} \leqslant 1/\tau$, следовательно, $\tau \leqslant 1/\theta_k$ при $k \leqslant k_1$ и $\tau > 1/\theta_k$ при $k \geqslant k_1 + 1$, стало быть, $\theta_k > 1/\tau \geqslant 2\tau$. Тем самым для $k \geqslant k_1 + 1$ имеем $1/\theta_k < \tau < \theta_k/2$. Эти неравенства вместе с оценкой (2.13) дают

$$e^{-\tau}\mathcal{K}_n^\alpha(\tau,\tau) \leqslant \sum_{k=0}^{k_1} e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2 + \sum_{k=k_1+1}^{n} e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2 \leqslant$$

$$c(\alpha)\sum_{k=0}^{k_1}(k+1)^{-\alpha}\theta_k^{2\alpha} + c(\alpha)\sum_{k=k_1+1}^{n}(k+1)^{-\alpha}\theta_k^{\alpha-1/2}\tau^{-\alpha-1/2} \leqslant$$

$$c(\alpha)k_1^{\alpha+1} + c(\alpha)n^{\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-1/2} \leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-1} + c(\alpha)n^{\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-1/2} \leqslant$$

$$c(\alpha)(\tau^{-1/2} + n^{1/2})\tau^{-\alpha-1/2} \leqslant c(\alpha)n^{\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-1/2}. \tag{7.32}$$

Тем самым оценка (7.31) в случае a) доказана. Перейдем к случаю b): $1/\sqrt{2} < \tau \leqslant \sqrt{3/2}$. В этом случае нетрудно заметить, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место неравенство $1/\theta_k < \tau < \theta_k/2$. Действительно,

$$\frac{1}{\theta_k} \leqslant \frac{1}{\theta_1} \leqslant \frac{1}{4+2\alpha+2} < \frac{1}{4} < \tau \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2} < \frac{1}{2}(4+2\alpha+2) = \frac{1}{2}\theta_1 \leqslant \frac{1}{2}\theta_k.$$

Кроме того $\frac{1}{2} < \tau^2 < \frac{3}{2}$ и, стало быть, $\frac{2}{3}\tau < \frac{1}{\tau} < 2\tau$. Из этих неравенств и оценки (2.13) имеем

$$e^{-\tau}\mathcal{K}_n^\alpha(\tau,\tau) \leqslant e^{-\tau}(\hat{L}_0^\alpha(\tau))^2 + \sum_{k=1}^{n} e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2 \leqslant$$

$$c(\alpha)\left[e^{-\tau} + \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}\theta_k^{\alpha-1/2}\tau^{-\alpha-1/2}\right] \leqslant$$

$$c(\alpha)\left[e^{-\tau} + \sum_{k=1}^{n} \theta_k^{-1/2}\tau^{-\alpha-1/2}\right] \leqslant$$

$$c(\alpha)\left[e^{-\tau} + n^{1/2}\tau^{-\alpha-1/2}\right] \leqslant c(\alpha)n^{1/2}\tau^{-\alpha-1/2}.$$

Отсюда следует, что оценка (7.31) верна и в случае b). Перейдем к случаю c): $\sqrt{3/2} \leqslant \tau$. Нетрудно заметить, что если произвольные фиксированные числа a и b таковы, что $0 < a < b < \infty$, то для $a \leqslant \tau \leqslant b$ оценка (7.31) непосредственно вытекает из неравенства (2.13). Поэтому мы можем считать, что $b \leqslant \tau$, где b – достаточно большое фиксированное число. Обозначим через m и q натуральные числа, для которых

$$\frac{3}{2}\theta_m \leqslant \tau < \frac{3}{2}\theta_{m+1}, \quad \frac{1}{2}\theta_q \leqslant \tau < \frac{1}{2}\theta_{q+1}. \tag{7.33}$$

Тогда мы можем записать

$$e^{-\tau}\mathcal{K}_n^\alpha(\tau,\tau)=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3, \tag{7.34}$$

$$\Sigma_1=\sum_{k=0}^{m}e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2, \tag{7.35}$$

$$\Sigma_2=\sum_{k=m+1}^{q}e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2, \tag{7.36}$$

$$\Sigma_3=\sum_{k=q+1}^{n}e^{-\tau}(\hat{L}_k^\alpha(\tau))^2. \tag{7.37}$$

Из определения чисел m и q имеем

$$\frac{3}{2}\theta_k\leqslant\tau,\quad \text{если}\quad 1\leqslant k\leqslant m;$$

$$\frac{1}{2}\theta_k\leqslant\tau<\frac{3}{2}\theta_k,\quad \text{если}\quad m+1\leqslant k\leqslant q;$$

$$\sqrt{3/2}\leqslant\tau\leqslant\frac{1}{2}\theta_k,\quad \text{если}\quad q+1\leqslant k.$$

Это позволяет при оценке Σ_1, Σ_2, Σ_3 использовать неравенство (2.13). С учетом выбора m и q (см.(7.33)) и обозначений (7.35) – (7.37) имеем

$$\Sigma_1\leqslant c(\alpha)\sum_{k=0}^{m}\theta_k^\alpha e^{-\tau/2}\leqslant c(\alpha)\tau^\alpha e^{-\tau/2}m\leqslant c(\alpha)\tau^{\alpha+1}e^{-\tau/2}\leqslant c(\alpha), \tag{7.38}$$

$$\Sigma_2\leqslant c(\alpha)\sum_{k=m+1}^{q}\theta_k^{-\alpha}[\theta_k(\theta_k^{1/3}+|\tau-\theta_k|)]^{-1/2}$$

$$=c(\alpha)\sum_{k=m+1}^{q}\theta_k^{-\alpha-\frac{1}{2}}(\theta_k^{1/3}+|\tau-\theta_k|)^{-1/2}\leqslant$$

$$=c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=m+1}^{q}(\theta_k^{1/3}+|\tau-\theta_k|)^{-1/2}$$

$$\leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}(\theta_k^{1/3}+|\tau-\theta_k|)^{-1/2}\leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{1/2}, \tag{7.39}$$

$$\Sigma_3\leqslant c(\alpha)\sum_{k=q+1}^{n}\theta_k^{-\alpha}\theta_k^{\alpha-\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=q+1}^{n}\theta_k^{-\frac{1}{2}}\leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{1/2}. \tag{7.40}$$

Из (7.34) – (7.40) имеем

$$e^{-\tau}\mathcal{K}_n^\alpha(\tau,\tau)\leqslant c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{1/2},$$

где $\sqrt{3/2}\leqslant\tau$. Тем самым лемма 5.1 доказана полностью.

Лемма 7.2. *Пусть* $u=\sqrt{t/\theta_n}$, $\alpha>-1$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $3/\theta_n\leqslant t\leqslant 3\theta_n/2$. *Тогда имеет место оценка*

$$I=(e^{-t}\mathcal{K}_n^\alpha(t,t))^{1/2}\int_{Q_2}\tau^\alpha(e^{-\tau}\mathcal{K}_n^\alpha(\tau,\tau))^{1/2}d\tau\leqslant c(\alpha). \tag{7.41}$$

Доказательство. Из леммы 5.1 имеем (т.к. $t\asymp\tau$)

$$I\leqslant c(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}n^{1/4}\int_{t-u}^{t+u}\tau^\alpha\tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}n^{1/4}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}n^{1/2}u=c(\alpha)n^{1/2}t^{-1/2}u\leqslant c(\alpha)n^{1/2}t^{-1/2}\sqrt{t/\theta_n}\leqslant c(\alpha).$$

Лемма 5.2 доказана.

Из равенства (7.28) и леммы 5.2 выводим

$$J_2\leqslant c(\alpha). \tag{7.42}$$

Оценим J_3 при $t\in G_2$. Воспользовавшись равенствами (7.28) и (7.4) мы можем записать

$$J_3\leqslant c(\alpha)(J_{31}+J_{32}+J_{33}), \tag{7.43}$$

где

$$J_{31}=t^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-t/2}|\hat L_{n-r}^\alpha(t)|\int_{Q_3}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\tau/2}|\hat L_{n-r}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.44}$$

$$J_{32}=nt^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}|\hat L_{n-r+1}^\alpha(t)-\hat L_{n-r-1}^\alpha(t)|\int_{Q_3}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat L_{n-r}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.45}$$

$$J_{33}=nt^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}|\hat L_{n-r}^\alpha(t)|\int_{Q_3}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat L_{n-r+1}^\alpha(\tau)-\hat L_{n-r-1}^\alpha(\tau)|d\tau. \tag{7.46}$$

Чтобы оценить величину J_{31} представим ее в следующем виде

$$J_{31}=J_{31}^1+J_{31}^2+J_{31}^3, \tag{7.47}$$

в котором $(k=1,2,3)$

$$J_{31}^k=t^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-t/2}|\hat L_{n-r}^\alpha(t)|\int_{Q_{31}^k}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\tau/2}|\hat L_{n-r}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.48}$$

где $Q_{31}^1=(t+\sqrt{t/\theta_n},\theta_n/2)$, $Q_{31}^2=(\theta_n/2,3\theta_n/2)$, $Q_{31}^3=(3\theta_n/2,\infty)$. Обратимся к неравенству (2.13), тогда из (7.48) находим

$$J_{31}^1\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac12}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{31}^1}\tau^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac12}d\tau=$$

$$\frac{c(\alpha,r)}{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}n^{-\frac12}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\left[\left(\frac{\theta_n}{2}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}-\left(t+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}\right]\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}, \tag{7.49}$$

$$J_{31}^2 \leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac12}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{31}^2}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}d\tau}{(\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|)^{1/4}}$$
$$\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac34+\frac{\alpha-r}{2}}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{31}^2}\frac{d\tau}{(\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|)^{1/4}}$$
$$\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac34}\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\int_{Q_{32}^2}\frac{d\tau}{(\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|)^{1/4}}$$
$$\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}2n^{-\frac34}\int_{\theta_n}^{3\theta_n/2}\frac{d\tau}{(\tau+\theta_n^{1/3}-\theta_n)^{1/4}}$$
$$\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}, \tag{7.50}$$

$$J_{31}^3 \leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac14}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{31}^3}\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-\tau/4}d\tau$$
$$\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac14-\frac{\alpha}{2}}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{31}^3}\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}e^{-\tau/4}d\tau$$
$$\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}n^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac14}\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}. \tag{7.51}$$

Из (7.47), (7.49) – (7.51) выводим

$$J_{31}\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\qquad (t\in G_2, r-\frac12<\alpha<r+\frac12). \tag{7.52}$$

Переходя к оценке величины J_{32}, представим ее в виде

$$J_{32}=J_{32}^1+J_{32}^2+J_{32}^3, \tag{7.53}$$

в котором $(k=1,2,3)$

$$J_{32}^k = nt^{\frac r2+\frac14}e^{-\frac t2}|\hat L_{n-r+1}^\alpha(t)-\hat L_{n-r-1}^\alpha(t)|\int_{Q_{32}^k}\frac{\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat L_{n-r}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.54}$$

где $Q_{32}^1=(t+\sqrt{t/\theta_n},\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n})$, $Q_{32}^2=(\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n},3\theta_n/2)$, $Q_{32}^3=(3\theta_n/2,\infty)$. Обратимся к неравенству (2.13), тогда из (7.48) находим

$$J_{32}^1\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}\int_{Q_{32}^1}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}}{\tau-t}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{2t}\frac{d\tau}{\tau-t}+c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{2t}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac32}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\ln\frac{t}{\sqrt{t/\theta_n}}+\frac{c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}}{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}\left[\left(\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}-(2t)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}\right]$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\ln\sqrt{\frac{\theta_n}{t}}+c(\alpha,r)\left[1-\left(\frac{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}\right]$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\ln\sqrt{\frac{\theta_n}{t}}, \tag{7.55}$$

$$J_{32}^2\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac r2+\frac14}\theta_n^{-\frac34}t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac14}\int_{Q_{32}^2}\theta_n^{-\frac14}(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|)^{-\frac14}\frac{\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}d\tau}{\theta_n^{\frac{\alpha}{2}}(\tau-t)}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}\int_{Q_{32}^2}(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|)^{-\frac14}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}\left[\int\limits_{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n-\theta_n^{1/3}}+\int\limits_{\theta_n-\theta_n^{1/3}}^{3\theta_n/2}\right](\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|)^{-\frac14}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac nt\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\left(\ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}-1}+1\right)$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac nt\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}-1}, \tag{7.56}$$

$$J_{32}^3\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac r2+\frac14}\theta_n^{-\frac34}t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac14}\int_{Q_{32}^3}e^{-\tau/4}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}\tau^{\alpha-\frac r2-\frac54}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac14}\int_{Q_{32}^3}e^{-\tau/4}\tau^{\alpha-\frac r2-\frac54}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)e^{-3\theta_n/8}. \tag{7.57}$$

Из (7.53) – (7.57) выводим оценку

$$J_{32}\leqslant c(\alpha,r)\left[\ln\frac{\theta_n}{t}+\left(\frac nt\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}-1+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}}\right]. \tag{7.58}$$

Оценим J_{33} по той же схеме, что и J_{32}. Имеем представление

$$J_{33}=J_{33}^1+J_{33}^2+J_{33}^3, \tag{7.59}$$

в котором $(k=1,2,3)$

$$J_{33}^k=nt^{\frac r2+\frac14}e^{-\frac t2}|\hat L_{n-r}^\alpha(t)|\int_{Q_{33}^k}\frac{\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat L_{n-r+1}^\alpha(\tau)-\hat L_{n-r-1}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.60}$$

где $Q_{33}^1=(t+\sqrt{t/\theta_n},\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n})$, $Q_{33}^2=(\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n},3\theta_n/2)$, $Q_{33}^3=(3\theta_n/2,\infty)$. Обратимся к неравенству (2.13), тогда из (7.60) находим

$$J_{33}^1\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{33}^1}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}}}{\tau-t}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{2t}\frac{d\tau}{\tau-t}+c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{2t}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-1}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\left(\ln\sqrt{t\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right),\tag{7.61}$$

$$J_{33}^2\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac14}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\int_{Q_{33}^2}\theta_n^{-\frac34}(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|)^{\frac14}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}d\tau}{\tau-t}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int_{Q_{32}^2}\left(\frac{\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|}{\tau}\right)^{\frac14}\frac{\tau^{\frac{r-\alpha}{2}}d\tau}{\tau-t}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}\int\limits_{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n}\frac{(\theta_n^{\frac13}+\theta_n-\tau)^{1/4}}{\tau^{1/4}}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$+c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}\int\limits_{\theta_n}^{\frac{3\theta_n}{2}}\frac{(\theta_n^{\frac13}-\theta_n+\tau)^{1/4}}{\theta_n^{1+1/4}}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)(t/n)^{\frac{r-\alpha}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n-t}{\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}-t}\right)$$

$$=c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n/t-1}{\theta_n/(2t)+\sqrt{1/(t\theta_n)}-1}\right),\tag{7.62}$$

$$J_{33}^3\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac14}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\int_{Q_{33}^3}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{4}}d\tau}{\tau-t}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)n^{\frac34}\int_{Q_{33}^3}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac54}e^{-\frac{\tau}{4}}d\tau}{\tau-t}$$

$$=c(\alpha,r)e^{-\frac{3\theta_n}{8}}\leqslant c(\alpha,r)e^{-\frac{3n}{2}}.\tag{7.63}$$

Из (7.59) – (7.63) находим

$$J_{33}\leqslant c(\alpha,r)\leqslant\left[\ln\sqrt{t\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n/t-1}{\theta_n/(2t)+\sqrt{1/(t\theta_n)}-1}\right)\right],\tag{7.64}$$

а из (7.52), (7.58) и (7.64), в свою очередь, получаем

$$J_3\leqslant c(\alpha,r)\left[\ln\sqrt{t\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\ln\frac{\theta_n/t-1}{\theta_n/(2t)+\sqrt{1/(t\theta_n)}-1}\right].\tag{7.65}$$

Оценим J_1 при $t \in G_2$. Воспользовавшись равенствами (7.28) и (7.4) мы можем записать

$$J_1 \leqslant c(\alpha)(J_{11} + J_{12} + J_{13}), \tag{7.66}$$

где

$$J_{11} = t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-t/2} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(t)| \int_{Q_1} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\tau/2} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(\tau)| d\tau, \tag{7.67}$$

$$J_{12} = nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} |\hat{L}_{n-r+1}^{\alpha}(t) - \hat{L}_{n-r-1}^{\alpha}(t)| \int_{Q_1} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau - t} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(\tau)| d\tau \tag{7.68}$$

$$J_{13} = nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(t)| \int_{Q_1} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau - t} |\hat{L}_{n-r+1}^{\alpha}(\tau) - \hat{L}_{n-r-1}^{\alpha}(\tau)| d\tau. \tag{7.69}$$

Чтобы оценить величину J_{11} представим ее в следующем виде

$$J_{11} = J_{11}^1 + J_{11}^2, \tag{7.70}$$

в котором $(k = 1, 2)$

$$J_{11}^k = t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-t/2} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(t)| \int_{Q_1^k} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\tau/2} |\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(\tau)| d\tau, \tag{7.71}$$

где $Q_1^1 = (0, 1/\theta_n)$, $Q_1^2 = (1/\theta_n, t - \sqrt{t/\theta_n})$. Обратимся к к неравенству (2.13), тогда из (7.71) находим

$$\begin{gathered} J_{11}^1 \leqslant c(\alpha, r)\theta_n^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{r-\alpha}{2}} \int_0^{1/\theta_n} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}} d\tau = \\ \frac{c(\alpha, r)}{\alpha - \frac{r}{2} + \frac{3}{4}} \theta_n^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{r-\alpha}{2}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}} \theta_n^{-\alpha+\frac{r}{2}-\frac{3}{4}} \leqslant \\ c(\alpha, r)\,(t\theta_n)^{\frac{r-\alpha}{2}}\,\theta_n^{-1} \leqslant c(\alpha, r)\theta_n^{-\frac{1}{2}}, \end{gathered} \tag{7.72}$$

$$\begin{gathered} J_{11}^2 \leqslant c(\alpha, r)\theta_n^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{r-\alpha}{2}} \int_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{1}{4}} \tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} d\tau = \\ c(\alpha, r)\theta_n^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{r-\alpha}{2}} \int_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}} \tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}} d\tau = \\ \frac{c(\alpha, r)}{\frac{\alpha-r}{2} + \frac{1}{2}} \theta_n^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{r-\alpha}{2}} \left[\left(t - \sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}}\right] \leqslant \\ c(\alpha, r)(t/\theta_n)^{\frac{1}{2}}, \end{gathered} \tag{7.73}$$

Из (7.72) и (7.73) имеем

$$J_{11} \leqslant c(\alpha, r)\left[(t/\theta_n)^{\frac{1}{2}} + \theta_n^{-\frac{1}{2}}\right]. \tag{7.74}$$

Оценим J_{12}. С этой целью имеем

$$J_{12} = J_{12}^1 + J_{12}^2, \tag{7.75}$$

в котором $(k = 1, 2)$

$$J_{12}^k = nt^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}|\hat{L}_{n-r+1}^\alpha(t) - \hat{L}_{n-r-1}^\alpha(t)|\int_{Q_1^k}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau - t}|\hat{L}_{n-r}^\alpha(\tau)|d\tau, \tag{7.76}$$

где Q_1^k имеет тот же смысл, что в (7.71). Обратимся снова к к неравенству (2.13), тогда из (7.74) выводим

$$\begin{aligned} J_{12}^1 &\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac34}t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac14}\int_0^{1/\theta_n}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}}{t-\tau}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}}d\tau \\ &\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}\frac{1}{t}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}\theta_n^{-\alpha+\frac{r}{2}-\frac34} \\ &= c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac12}\theta_n^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac12} = c(\alpha,r)(t\theta_n)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac12}, \end{aligned} \tag{7.77}$$

$$\begin{aligned} J_{12}^2 &\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac34}t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac14}\int\limits_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}}{t-\tau}\theta_n^{-\frac14}\tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}d\tau \\ &\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}\int\limits_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}}{t-\tau}d\tau \\ &= c(\alpha,r)\int\limits_{1/(t\theta_n)}^{1-\sqrt{1/(t\theta_n)}}\frac{x^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}}{1-x}dx \\ &\leqslant c(\alpha,r)\int\limits_{1/(t\theta_n)}^{1/3}x^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}dx + c(\alpha,r)\int\limits_{1/3}^{1-\sqrt{1/(t\theta_n)}}\frac{dx}{1-x}dx \\ &\leqslant c(\alpha,r)\left(1+\ln\left(\frac23\sqrt{t\theta_n}\right)\right). \end{aligned} \tag{7.78}$$

Из (7.75), (7.77) и (7.78) находим

$$J_{12} \leqslant c(\alpha,r)\left(1+\ln\left(\sqrt{t\theta_n}\right)\right). \tag{7.79}$$

Переходя к оценке J_{13}, запишем

$$J_{13} = J_{13}^1 + J_{13}^2, \tag{7.80}$$

в котором $(k = 1, 2)$

$$J_{13}^k = nt^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}|\hat{L}_{n-r}^\alpha(t)|\int_{Q_1^k}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat{L}_{n-r+1}^\alpha(\tau) - \hat{L}_{n-r-1}^\alpha(\tau)|d\tau. \tag{7.81}$$

Из (2.13) и (7.81) имеем

$$J_{13}^1 \leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac14}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\int_0^{1/\theta_n}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}}{t-\tau}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-1}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}\frac1t\int_0^{1/\theta_n}\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)(t\theta_n)^{\frac{r-\alpha}{2}-1}, \tag{7.82}$$

$$J_{13}^2\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac r2+\frac14}\theta_n^{-\frac14}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\int\limits_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}}\frac{\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}}{t-\tau}\theta_n^{-\frac34}\tau^{-\frac{\alpha}{2}+\frac14}d\tau$$

$$\leqslant c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{1/\theta_n}^{t-\sqrt{t/\theta_n}}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}}}{t-\tau}d\tau=c(\alpha,r)\int\limits_{1/(t\theta_n)}^{1-\sqrt{1/(t\theta_n)}}\frac{x^{\frac{\alpha-r}{2}}}{1-x}dx$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\left(1+\ln\left(\sqrt{t\theta_n}\right)\right), \tag{7.83}$$

Из (7.80) – (7.83) получаем

$$J_{13}\leqslant c(\alpha,r)\left(1+\ln\left(\sqrt{t\theta_n}\right)\right), \tag{7.84}$$

Оценки (7.66), (7.74), (7.79), (7.84), взятые вместе дают

$$J_1\leqslant c(\alpha,r)\left(1+\ln\left(t\theta_n\right)\right). \tag{7.85}$$

Собирая оценки (7.27), (7.42), (7.65) и (7.85), мы приходим к следующему неравенству

$$l_{r,n}^{\alpha}\leqslant c(\alpha,r)\left[\ln\sqrt{t\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\ln\frac{\theta_n/t-1}{\theta_n/(2t)+\sqrt{1/(t\theta_n)}-1}\right]$$

$$\leqslant c(\alpha,r)[\ln(n+1)+(n/t)^{\frac{\alpha-r}{2}}]\quad(t\in G_2). \tag{7.86}$$

Тем самым оценка (6.11) доказана.

Докажем (6.12). Пусть $t\in G_3=[\frac12\theta_n,\frac32\theta_n]$. Воспользуемся представлением (7.27) и оценим J_k $(1\leqslant k\leqslant 3)$. Что касается величины J_2, то для нее верна оценка (7.42). Поэтому остается оценить J_k для $k=1$ и $k=3$. Для $k=3$ мы воспользуемся оценкой (7.43). Чтобы оценить величину J_{31} представим ее в следующем виде

$$J_{31}=J_{311}+J_{312}, \tag{7.87}$$

в котором $(k=1,2)$

$$J_{31k}=t^{\frac r2+\frac14}e^{-t/2}|\hat L_{n-r}^{\alpha}(t)|\int_{Q_{31k}}\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}e^{-\tau/2}|\hat L_{n-r}^{\alpha}(\tau)|d\tau, \tag{7.88}$$

где $Q_{311}=(t+\sqrt{t/\theta_n},3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n})$, $Q_{312}=(3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n},\infty)$. Обратимся к неравенству (2.13), тогда из (7.88) находим

$$J_{311}\leqslant c(\alpha,r)\frac{\theta_n^{-\frac12-\alpha}t^{\frac r2+\frac14}}{(\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|)^{1/4}}\int_{Q_{311}}\frac{\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}d\tau}{(\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|)^{1/4}}$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac{1}{2}}}{(\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|)^{1/4}}\int_{Q_{311}}\frac{d\tau}{(\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|)^{1/4}}$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac{1}{2}}}{(\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|)^{1/4}}\int\limits_{\theta_n}^{\frac{3}{2}\theta_n+\sqrt{t/\theta_n}}\frac{d\tau}{(\tau+\theta_n^{1/3}-\theta_n)^{1/4}}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{7.89}$$

$$J_{312}\leqslant c(\alpha,r)\frac{\theta_n^{-\alpha}t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{(\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|)^{1/4}}\int_{Q_{312}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\tau/4}d\tau$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha,r)}{(\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|)^{1/4}}\int\limits_{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}}^{\infty}(\tau/\theta_n)^{\alpha}e^{-\tau/4}d\tau\leqslant c(\alpha,r). \tag{7.90}$$

Из (7.87) – (7.90) выводим

$$J_{31}\leqslant c(\alpha,r)\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\quad (t\in G_3,\quad r-\frac{1}{2}<\alpha<r+\frac{1}{2}). \tag{7.91}$$

Переходя к оценке величины J_{32}, представим ее в виде

$$J_{32}=J_{321}+J_{322}, \tag{7.92}$$

в котором $(k=1,2)$

$$J_{32k}=nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}|\hat{L}_{n-r+1}^{\alpha}(t)-\hat{L}_{n-r-1}^{\alpha}(t)|\int_{Q_{31k}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}|\hat{L}_{n-r}^{\alpha}(\tau)|d\tau, \tag{7.93}$$

Обратимся к неравенству (2.14), тогда из (7.93) находим

$$J_{321}\leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{3}{4}}[\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}\times$$

$$\int\limits_{Q_{311}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}[\theta_n(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|)]^{-\frac{1}{4}}}{\tau-t}d\tau\leqslant$$

$$c(\alpha,r)\int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\frac{3}{2}\theta_n+\sqrt{t/\theta_n}}\frac{[\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}{[\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t}=\leqslant c(\alpha,r)\ln(n+1). \tag{7.94}$$

Чтобы убедиться в справедливости (7.94) покажем, что

$$A=\int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\frac{3}{2}\theta_n+\sqrt{t/\theta_n}}\frac{[\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}{[\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t}\leqslant c(\alpha)\ln(n+1).$$

С этой целью рассмотрим два случая: 1) $\theta_n/2 \leqslant t \leqslant \theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}}$; 2) $\theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}} \leqslant t \leqslant 3\theta_n/2$. Во-втором из этих случаев имеем

$$\frac{\theta_n^{1/3} + |t-\theta_n|}{\theta_n^{1/3} + |\tau-\theta_n|} \leqslant 3 \quad (\theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}} \leqslant t \leqslant \tau),$$

поэтому

$$A \leqslant 3\ln\frac{\frac{3}{2}\theta_n + \sqrt{t/\theta_n} - t}{\sqrt{t/\theta_n}} \leqslant 3\ln\left(1 + \frac{\frac{3}{2}\theta_n - t}{\sqrt{t/\theta_n}}\right) \leqslant c(\alpha)\ln(n+1).$$

Если же $\theta_n/2 \leqslant t \leqslant \theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}}$, то мы можем записать

$$A = \int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n-\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} + \int\limits_{\theta_n-\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n+\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} + \int\limits_{\theta_n+\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}} = A_1 + A_2 + A_3.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $2\theta_n^{\frac{1}{3}} \leqslant \theta_n - t$, то

$$A_2 \leqslant \int\limits_{\theta_n-\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{[\frac{3}{2}(\theta_n-t)]^{\frac{1}{4}}}{[\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{12}}\ln\frac{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}-t}{\theta_n-\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}-t} =$$

$$\left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{12}}\ln\left(1+\frac{2\theta_n^{\frac{1}{3}}}{\theta_n-\theta^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}-t}\right)$$

$$\left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{12}}\frac{2\theta_n^{\frac{1}{3}}}{\theta_n-t-\theta^{\frac{1}{3}}} \leqslant \left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\frac{2\theta_n^{\frac{1}{4}}}{\theta_n-t-\frac{1}{2}(\theta_n-t)} =$$

$$\left(\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right)^{\frac{1}{4}}\frac{4\theta_n^{\frac{1}{4}}}{\theta_n-t} \leqslant 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\theta_n}{(\theta_n-t)^3}\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant \left(\frac{\theta_n}{(2\theta_n^{\frac{1}{3}})^3}\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant 2\sqrt{3},$$

$$A_1 \leqslant \int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{[\frac{3}{2}(\theta_n-t)]^{\frac{1}{4}}}{[\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{[\frac{3}{2}(\theta_n-t)]^{\frac{1}{4}}}{(\theta_n-\tau)^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t} \leqslant$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{-d\frac{\theta_n-\tau}{\theta_n-t}}{\left(1-\frac{\theta_n-\tau}{\theta_n-t}\right)\left(\frac{\theta_n-\tau}{\theta_n-t}\right)^{\frac{1}{4}}} =$$

$$\int\limits_{\frac{\theta_n^{\frac{1}{3}}-\sqrt{t/\theta_n}}{\theta_n-t}}^{\frac{\theta-t-\sqrt{t/\theta_n}}{\theta_n-t}} \frac{d\tau}{(1-\tau)\tau^{1/4}} \leqslant c(\alpha)\ln(n+1),$$

$$A_3 \leqslant \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{[\frac{3}{2}(\theta_n-t)]^{\frac{1}{4}}}{[\theta_n^{1/3}+|\tau-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t} \leqslant$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{(\tau-t)^{\frac{1}{4}}d\tau}{(\tau-t)(\tau-\theta_n)^{\frac{1}{4}}} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{d\tau}{(\tau-t)^{\frac{3}{4}}(\tau-\theta_n)^{\frac{1}{4}}} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{t/\theta_n}}^{3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n}} \frac{d\tau}{(\tau-\theta_n)} \leqslant c(\alpha)\ln(n+1).$$

Из полученных оценок для A_i ($i = 1, 2, 3$) вытекает, что $A \leqslant c(\alpha)\ln(n+1)$ и тем самым доказана справедливость оценки (7.94).

Далее из (7.93) и неравенства (2.14) имеем

$$J_{322} \leqslant c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{3}{4}}[\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}\int_{Q_{312}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{4}}d\tau}{\theta_n^{\frac{\alpha}{2}}(\tau-t)}$$

$$\leqslant c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{1}{4}-\alpha}[\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}} \int\limits_{\frac{3}{2}\theta_n+\sqrt{t/\theta_n}}^{\infty}\frac{\tau^{\alpha}e^{-\frac{\tau}{4}}d\tau}{\tau-t} \leqslant c(\alpha,r). \tag{7.95}$$

Из (7.92) – (7.95) мы замечаем, что

$$J_{32} = c(\alpha,r)\ln(n+1). \tag{7.96}$$

Комбинируя методы, которые привели к оценкам (7.91) и (7.96), нетрудно доказать также, что из (7.46) вытекает оценка

$$J_{33} = c(\alpha,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right] \quad (t\in G_3, \quad r-\frac{1}{2}<\alpha<r+\frac{1}{2}). \tag{7.97}$$

Сопоставляя оценки (7.91), (7.96), (7.97) с (7.43), имеем

$$J_3 = c(\alpha, r)\left[\ln(n+1) + \left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3} + |t-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right] \quad (t \in G_3, \quad -\frac{1}{2} < \alpha < r + \frac{1}{2}). \tag{7.98}$$

Наконец, почти дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к оценке (7.98), из равенства (7.28) можно доказать, что

$$J_1 = c(\alpha, r)\left[\ln(n+1) + \left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{1/3} + |t-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right] \quad (t \in G_3, \quad -\frac{1}{2} < \alpha < r + \frac{1}{2}). \tag{7.99}$$

Объединяя оценки (7.98), (7.99), (7.42) и сопоставляя их с равенством (7.27), приходим к (6.12).

Нам осталось доказать оценку (6.13). С этой целью мы обратимся непосредственно к равенству (6.8), из которого находим

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t) \leqslant t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(e^{-t}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t,t))^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^\infty \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(e^{-\tau}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau.$$

Положим $(k = 1, 2, 3)$

$$I_k = \int_{E_k} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(e^{-\tau}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau,$$

где $E_1 = [0, \frac{1}{\theta_n}]$, $E_2 = [\frac{1}{\theta_n}, 3\theta_n/2]$, $E_3 = [3\theta_n/2, \infty)$. Тогда

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t) \leqslant t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(e^{-t}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t,t))^{\frac{1}{2}}(I_1 + I_2 + I_3).$$

Из (2.12) и (2.13) для $t \geqslant 3\theta_n/2$ имеем

$$t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(e^{-t}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(t,t))^{\frac{1}{2}} \leqslant c(\alpha,r)n^{\frac{1-\alpha}{2}}t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-t/4}.$$

Кроме того

$$I_1 = \int_{E_1} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(e^{-\tau}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau \leqslant c(\alpha,r)n^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}$$

и, в силу леммы 7.1

$$I_2 = \int_{E_2} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(e^{-\tau}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau \leqslant$$

$$c(\alpha,r)n^{\frac{1}{4}} \int_{E_2} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}d\tau \leqslant c(\alpha,r)n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{3}{4}}.$$

Наконец,

$$I_3 = \int_{E_3} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(e^{-\tau}\mathcal{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c(\alpha,r)n^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_{E_3}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\tau/4}d\tau\leqslant c(\alpha,r).$$

Собирая полученные оценки, находим

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t)\leqslant c(\alpha,r)n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}}t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{4}}.$$

Тем самым оценка (6.13) доказана.

8. Достаточные условия сходимости на $[0,A]\subset[0,\infty)$ ряда Фурье по полиномам $l_{r,k}^{\alpha}(x)$

Поскольку, как было показано выше, ряд Фурье (5.11) и смешанный ряд (3.4) для $f\in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ совпадают, то один из вариантов решения задачи об условиях равномерной сходимости на $[-1,1]$ ряда Фурье (5.11) к исходной функции $f(x)$ можно вывести из теоремы 1. Но мы дадим независимое доказательство равномерной сходимости ряда Фурье (5.11) и выполнения равенства

$$f(x)=\sum_{k=0}^{r-1}f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=r}^{\infty}\tilde f_{r,k}^{\alpha}l_{r,k}^{\alpha}(x) \tag{8.1}$$

при условии $f\in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$.

Если $f\in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$, то $f^{(r)}\in\mathcal{L}^2_\rho$ и, следовательно, в метрике пространства $\mathcal{L}^2_\rho$ имеет место равенство

$$f^{(r)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_{r,k+r}^{\alpha}l_k^{\alpha}(x). \tag{8.2}$$

Пусть $-1<\alpha<1$,

$$S_{r,n}^{\alpha}(f)=S_{r,n}^{\alpha}(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f_{r,k+r}^{\alpha}l_k^{\alpha}(x)$$

– частичная сумма порядка n ряда (8.2). Мы имеем

$$\left|\int\limits_0^x(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt-\int\limits_0^x(x-t)^{r-1}S_{r,n}^{\alpha}(f,t)dt\right|\leqslant$$

$$\int\limits_0^x(x-t)^{r-1}|f^{(r)}(t)-S_{r,n}^{\alpha}(f,t)|dt\leqslant x^{r-1}\int\limits_0^x|f^{(r)}(t)-S_{r,n}^{\alpha}(f,t)|dt=$$

$$x^{r-1}\int\limits_0^x t^{-\frac{\alpha}{2}}e^{t/2}t^{\frac{\alpha}{2}}e^{-t/2}|f^{(r)}(t)-S_{r,n}^{\alpha}(f,t)|dt\leqslant$$

$$x^{r-1}\left(\int\limits_0^x t^{-\alpha}e^{t}dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^x t^{\alpha}e^{-t}(f^{(r)}(t)-S_{r,n}^{\alpha}(f,t))^2dt\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\left(\frac{e^x x^{2r-\alpha-1}}{1-\alpha}\right)^{1/2} \|f^{(r)} - S^{\alpha}_{r,n}\|_{\mathcal{L}^2_\rho}. \tag{8.3}$$

Поскольку в силу (8.2) $\|f^{(r)} - S^{\alpha}_{r,n}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}} \to 0$ $(n \to \infty)$, то из (8.3) следует, что

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{\alpha}_{r,k+r} \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} l^{\alpha}_k(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} f^{\alpha}_{r,k+r} l^{\alpha}_{r,k+r}(x), \tag{8.4}$$

причем ряд, фигурирующий в правой части равенства (8.4), сходится равномерно относительно $x \in [0, A]$, где $0 \leqslant A < \infty$. Сопоставляя (8.3) и (8.4) с (5.2), заключаем, что справедливо равенство (8.1). Тем самым, нами доказана следующая

Теорема 6. *Пусть* $-1 < \alpha < 1$, $f \in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$, $0 \leqslant A < \infty$. *Тогда для произвольного* $x \in [0, \infty)$ *имеет место равенство* (8.1), *в котором ряд Фурье функции* f *по полиномам* $l^{\alpha}_{r,k}(x)$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно относительно* $x \in [0, A]$.

Теорема 3 оставляет открытым вопрос о том, с какой скоростью частичные суммы ряда (8.1) сходятся к функции $f(x)$ в заданной точке $x \in [0, \infty)$. Эту задачу мы рассмотрим в следующем параграфе, ограничившись для краткости случаем $\alpha = 0$.

9. Аппроксимативные свойства частичных сумм ряда Фурье, по полиномам $l^0_{r,k}(x)$

Пусть $\alpha = 0$ и, следовательно, $\rho(x) = e^{-x}$. В настоящем параграфе мы рассмотрим аппроксимативные свойства частичных сумм ряда Фурье функции $f \in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ по полиномам $l^0_{r,k}(x)$, который в силу (8.1) и следствия 1 имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f^0_{r,k} l^0_{r,k}(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + x^r \sum_{k=r}^{\infty} f^0_{r,k} \frac{L^r_{k-r}(x)}{k^{[r]}}. \tag{9.1}$$

Через $\mathcal{Y}_{r,n}(f) = \mathcal{Y}_{r,n}(f)(x)$ мы обозначим частичные суммы ряда (9.1) вида

$$\mathcal{Y}_{r,n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n} f^0_{r,k} l^0_{r,k}(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + x^r \sum_{k=r}^{n} f^0_{r,k} \frac{L^r_{k-r}(x)}{k^{[r]}}. \tag{9.2}$$

Из определения коэффициентов $f_{r,k}^0$ (см. (9.10)) следует, что если $f = q_n$ – произвольный алгебраический полином степени n, то $f_{r,k}^0 = 0$ при $k > n$. С другой стороны, в силу теоремы 3 для $f = q_n$ имеет место равенство (9.1), поэтому

$$\mathcal{Y}_{r,n}(q_n)(x) \equiv q_n(x). \tag{9.3}$$

Другими словами, оператор $\mathcal{A}(f) = \mathcal{Y}_{r,n}(f)$ является проектором на подпространство $H^n \subset W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$, состоящее из всех алгебраических полиномов q_n степени n. Далее заметим, что если $n \geqslant r$, то

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{r,n}(f)(x)| = x^r \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_{r,k}^0 \frac{L_{k-r}^r(x)}{k^{[r]}}\right| \leqslant$$

$$x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (f_{r,k}^0)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} L_{k-r}^r(x)}{k^{[r]}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9.4}$$

Далее, если $0 \leqslant x \leqslant A$, то в силу (2.10) найдется положительное число $c(r, A)$, зависящее лишь от указанных параметров, для которого

$$x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} |L_{k-r}^r(x)| \leqslant c(r, A) k^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}.$$

С учетом этой оценки из (9.4) находим

$$x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} |f(x) - \mathcal{Y}_{r,n}(f)(x)| \leqslant \frac{c(r, A)}{n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}} E_{n-r}(f^{(r)})_{\mathcal{L}^2_\rho} \quad (0 \leqslant x \leqslant A),$$

где

$$E_{n-r}(f^{(r)})_{\mathcal{L}^2_\rho} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (f_{r,k}^0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

– наилучшее приближение в $\mathcal{L}^2_\rho$ функции $f^{(r)}$ алгебраическими полиномами q_{n-r} степени $n - r$. В связи с этим возникает задача об оценке величины

$$R_{n,r}(f)(x) = |f(x) - \mathcal{Y}_{r,n}(f)(x)| x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{x}{2}} \quad (0 < x < \infty). \tag{9.5}$$

Обозначим через $q_n(x)$ - алгебраический полином степени n, для которого

$$f^{(\nu)}(0) = q_n^{(\nu)}(0) \ (\nu = 0, 1, \ldots, r - 1). \tag{9.6}$$

Тогда, в силу (9.3)

$$f(x) - \mathcal{Y}_{r,n}(f)(x) = f(x) - q_n(x) + q_n(x) - \mathcal{Y}_{r,n}(f)(x) =$$

$$f(x) - q_n(x) + \mathcal{Y}_{r,n}(q_n - f)(x). \tag{9.7}$$

С учетом (9.5) и (9.7) находим

$$|R_{n,r}(f)(x)| \leqslant |f(t) - q_n(t)| x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{x}{2}} + |\mathcal{Y}_{r,n}(q_n - f)(x)| x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{x}{2}}. \tag{9.8}$$

С другой стороны, в силу (9.6) $\sum_{k=0}^{r-1}(q_n-f)^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\equiv 0$, поэтому из (9.2) имеем (мы воспользуемся попутно также равенствами (2.1), (2.7), (9.3) и (9.10))

$$\mathcal{Y}_{r,n}(q_n-f)(x)=x^r\sum_{k=r}^{n}(q_n-f)_{r,k}^0\frac{L_{k-r}^r(x)}{k^{[r]}}=$$

$$x^r\sum_{k=r}^{n}\frac{L_{k-r}^r(x)}{k^{[r]}}\int\limits_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))^{(r)}(l_{r,k}^0(\tau))^{(r)}e^{-\tau}d\tau=$$

$$x^r\sum_{k=r}^{n}\frac{L_{k-r}^r(x)}{k^{[r]}}\int\limits_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))^{(r)}L_{k-r}^0(\tau)e^{-\tau}d\tau=$$

$$(-x)^r\sum_{k=r}^{n}\frac{L_{k-r}^r(x)}{k^{[r]}}\int\limits_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))\frac{1}{(k-r)!}(\tau^{k-r}e^{-\tau})^{(k)}d\tau=$$

$$(-x)^r\sum_{k=r}^{n}L_{k-r}^r(x)\int\limits_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))\frac{1}{k!}(\tau^{k-r}e^{-\tau})^{(k)}d\tau=$$

$$(-x)^r\sum_{k=r}^{n}L_{k-r}^r(x)\int\limits_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))e^{-\tau}\tau^{-r}L_k^{-r}(\tau)d\tau=$$

$$x^r\sum_{k=r}^{n}L_{k-r}^r(x)\int\limits_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))e^{-\tau}\frac{L_{k-r}^r(\tau)}{k^{[r]}}d\tau=$$

$$x^r\int\limits_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))e^{-\tau}\sum_{k=r}^{n}\frac{L_{k-r}^r(x)L_{k-r}^r(\tau)}{k^{[r]}}d\tau=$$

$$x^r\int\limits_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))e^{-\tau}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{L_k^r(x)L_k^r(\tau)}{(k+r)^{[r]}}d\tau.$$

Отсюда

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac14}\mathcal{Y}_{r,n}(q_n-f)(x)=$$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{r}{2}+\frac14}\int\limits_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))e^{-\tau}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{L_k^r(x)L_k^r(\tau)}{h_k^r}d\tau. \tag{9.9}$$

Положим

$$E_n^r(f)=\inf_{q_n}\sup_{x>0}|q_n(x)-f(x)|e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac14}, \tag{9.10}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_n(t)$ степени n для которых $f^{(\nu)}(0)=q_n^{(\nu)}(0)$ $(\nu=0,\dots,r-1)$, другими словами, $E_n^r(f)$

представляет собой наилучшее приближение на $[0,\infty)$ функции f алгебраическими полиномами q_n степени n со свойством $q_n^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$ $(\nu = 0,\ldots,r-1)$ относительно величины $\sup\limits_{x>0} |f(x) - q_n(x)| e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}$. Тогда из (9.9) находим

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} |\mathcal{Y}_{r,n}(q_n - f)(x)| \leqslant E_n^r(f) \lambda_{r,n}(x), \tag{9.11}$$

где

$$\lambda_{r,n}(x) = x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau+x}{2}} \tau^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} |\mathcal{K}_{n-r}^r(x,\tau)| d\tau, \tag{9.12}$$

а ядро $\mathcal{K}_{n-r}^r(x,\tau)$ определяется равенством (2.5). Из (9.8), (9.10) – (9.12) выводим

$$|R_{n,r}^\alpha(f)(x)| \leqslant E_n^r(f)(1 + \lambda_{r,n}(x)). \tag{9.13}$$

В связи с неравенством (9.13) возникает задача об оценке величины $\lambda_{r,n}(x)$, определяемой равенством (9.12). С этой целью мы обратимся к теореме 5, в которой изучено поведение величины

$$\lambda_{r,n}^\alpha(t) = t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau+t}{2}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} |\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)| d\tau.$$

Поскольку для величины $\lambda_{r,n}(x)$, определенной равенством (9.12), очевидно, имеет место равенство $\lambda_{r,n}(x) = \lambda_{r,n}^r(x)$, то из теоремы 5 мы получаем следующий результат.

Теорема 7. *Пусть* $\theta_n = 4n + 2r + 2$, $\mathcal{Q}_1 = [0, \frac{\theta_n}{2}]$, $\mathcal{Q}_2 = [\frac{\theta_n}{2}, \frac{3\theta_n}{2}]$, $\mathcal{Q}_3 = [\frac{3\theta_n}{2}, \infty]$. *Тогда имеют место следующие оценки:*

1) если $x \in \mathcal{Q}_1$, *то*

$$\lambda_{r,n}(x) \leqslant c(r) \ln(n+1);$$

2) если $x \in \mathcal{Q}_2$, *то*

$$\lambda_{r,n}(x) \leqslant c(r) \left[\ln(n+1) + \left(\frac{x}{\theta_n^{\frac{1}{3}} + |x - \theta_n|} \right)^{\frac{1}{4}} \right];$$

3) если $x \in \mathcal{Q}_3$, *то*

$$\lambda_{r,n}(x) \leqslant c(r) n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}} e^{-\frac{x}{4}}.$$

Список литературы

[1] Kwon K. H., Littlejohn L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. Vol. 2. 1995. Pp. 289–303.

[2] Kwon K. H., Littlejohn L. L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. Vol. 28. 1998. Pp. 547—594.

[3] Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. North-Holland. Vol. 48. 1993. Pp. 113—131.

[4] Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. Vol 65. 1991. Pp. 151—175.

[5] Meijer H.G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Pp. 1–16.

[6] Marcellan F., Yuan Xu. On Sobolev orthogonal polynomials // arXiv: 6249v1 [math.C.A] 25 Mar 2014. 2014. Pp. 1–40.

[7] Lopez G. Marcellan F. Vanassche W. Relative Asymptotics for Polynomials Orthogonal with Respect to a Discrete Sobolev Inner-Product // Constr. Approx. Vol 11. No. 1. 1995 Pp. 107–137.

[8] А. А. Гончар О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Матем. сб. Т. 97(139). Вып. 4(8). 1975. С. 607–629.

[9] Шарапудинов И. И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Математический сборник. Т. 191. Вып. 5. 2000. С. 143–160.

[10] Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Математические заметки. Т. 72. Вып. 5. 2002. С. 765–795.

[11] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Издательство Дагестанского научного центра. Махачкала. 2004. С. 1–176.

[12] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математические заметки. Т. 78. Вып. 3. 2005. С. 442—465.

[13] Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Математический сборник. Т. 197. Вып. 3. 2006. С. 135—154.

[14] Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Математические заметки. Т. 84. Вып. 3. 2008. С. 452–471.

[15] Сеге Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз. Москва. 1962.

[16] Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Mathem., Vol 87. 1965. Pp. 698–708.

[17] Gasper G. Positiviti and special function // Theory and appl. Spec. Funct. Edited by Richard A. Askey. 1975. Pp. 375–433.

[18] Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. Наука. Москва. 1974.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)
Владикавказский научный центр РАН
E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию
26.09.2015