УДК 517.956

**Э. И. Абдурагимов**

# Положительные решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений

Улучшены достаточные условия существования положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Получены новые достаточные условия существования и единственности положительного решения двухточечной краевой задачи для одного специального вида нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с дробными производными порядка $\alpha$. Получены новые достаточные условия существования и единственности положительного радиально-симметричного решения задачи Дирихле для одной нелинейной системы дифференциальных уравнений с $p$-лапласианом.

Библиография: 20 названий.

Sufficient conditions for the existence of a positive solution of two-point boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of the fourth order were improved. The new sufficient conditions for the existence and uniqueness of the positive solution of two-point boundary value problem for a special kind of nonlinear ordinary differential equation with fractional derivatives of order $\alpha$ were obtained. The new sufficient conditions for the existence and uniqueness of positive radially symmetric solution of the Dirichlet problem for a system of nonlinear differential equations with $p$-Laplacian were obtained.

Bibliography: 20 items.

**Ключевые слова:** положительное решение, задача Дирихле, краевая задача, нелинейное дифференциальное уравнение.

**Keywords:** positive solution, the Dirichlet problem, boundary problem, non-linear differential equation.

## Введение

Физики достаточно давно и плодотворно используют идеи дробного исчисления преимущественно во фрактальных средах. Дифференциальные уравнения дробного порядка встречаются при описании медленных и быстрых стохастических процессов, диффузии в средах с фрактальной геометрией, при изучении деформационно-прочностных свойств полимерных материалов. Полученные при этом результаты говорят о существовании мощного метода, каким является дробное исчисление при построении математических моделей в тех средах, где классическое дифференциальное исчисление не работает. Особый интерес к дробным производным проявляют гидрогеологи в связи с вопросами безопасности, хранения высокоактивных долгоживущих радиоизотопов в геологических формациях.

При этом публикаций на тему построения численными методами положительных решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений сравнительно мало, хотя такие задачи возникают на практике. Нами предложен численный метод построения положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения с дробными производными. Этот же метод позволяет доказать существование и единственность.

Доказано существование и единственность положительного решения для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Предложен также неитерационный численный метод нахождения положительного решения. Кроме того, численным методом строится положительное радиально-симметричное решение задачи Дирихле для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка.

## 1. Условия существования положительного решения двухточечной краевой задачи для ОДУ 4 порядка.

Исследованиям положительных решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений посвящен ряд работ российских и зарубежных математиков (см., например, [1–3, 5–8] и цитированную в них литературу). Во многих из них рассматриваются вопросы существования положительного решения, его поведения, асимптотики и другие. Работ, посвященных единственности положительного решения и численным методам его построения, мало, особенно в случае сильно нелинейных уравнений вида $u = Au$ с выпуклым оператором $A$. Нами предпринята попытка устранить указанный пробел.

**1.1. Формулировка и вспомогательные утверждения.** Рассматривается семейство двухточечных краевых задач:

$$y_i^{(4)} + x^m|y_i|^n = 0, 0 < x < 1, \tag{1.1}$$

$$y_i(0) = y_i'(0) = y_i''(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$y_i^{(i)}(1) = 0,\ i = 0, 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

где $m \geqslant 0, n > 1$ – константы.

Очевидно, $y_i \equiv 0$ – тривиальное решение задачи (1.1) – (1.3). Под положительным решением задачи (1.1)–(1.3) понимается функция $y_i \in C^4[0, 1]$ положительная при $x \in (0, 1)$, удовлетворяющая уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2)–(1.3).

Нами доказано существование и единственность положительного решения задачи (1.1) – (1.3). Кроме того, предлагается численный метод построения этого решения. Отметим, что существование положительного решения также можно доказать, пользуясь методом расслоения Похожаева С.И. [3]. В качестве примеров приводится положительное решение (в виде таблиц значений) задачи (1.1) – (1.3) при $m = 0$, $n = 4$, построенное приведенным здесь методом.

Отметим, что в этом году продолжены исследования ученых Отдела по данной тематике, начатые ранее и опубликованные в работах [9–12].

Приведем здесь некоторые определения и утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Пусть $A$ – произвольное положительное число. Рассмотрим задачу Коши:

$$y^{(4)} + x^m|y|^n = 0, \tag{1.4}$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \tag{1.5}$$

$$y'''(0) = A. \tag{1.6}$$

Интегрируя уравнение (1.4) с учетом начальных условий (1.5), (1.6), имеем

$$y'''(x) = A - \int_0^x s^m|y(s)|^n ds, \tag{1.7}$$

$$y''(x) = Ax - \int_0^x (x-s)s^m|y(s)|^n ds, \tag{1.8}$$

$$y'(x) = A\frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-s)^2}{2}s^m|y(s)|^n ds, \tag{1.9}$$

$$y(x) = A\frac{x^3}{6} - \int_0^x \frac{(x-s)^3}{6}s^m|y(s)|^n ds. \tag{1.10}$$

Лемма 1.1. *При любом $A > 0$ существует единственная точка $x_3 > 0$ такая, что существует единственное решение $y \in C^4[0, x_3]$ задачи Коши (1.4) – (1.6) такое, что $y'''(x_3) = 0, y'''(x) > 0$ при $x \in (0, x_3)$ и $y'''(x) < 0$ при $x > x_3$.*

Лемма 1.2. *При любом $A > 0$ существует единственная точка $x_2 > 0$ такая, что существует единственное решение $y \in C^4[0, x_2]$ задачи Коши (1.4) – (1.6) такое, что $y''(x_2) = 0, \quad y''(x) > 0$ при $x \in (0, x_2)$ и $y''(x) < 0$ при $x > x_2$.*

Лемма 1.3. *При любом $A > 0$ существует единственная точка $x_1$ такая, что существует единственное решение $y \in C^4[0, x_1]$ задачи Коши (1.4) – (1.6) такое, что $y'(x_1) = 0, \quad y'(x) > 0$ при $x \in (0, x_1)$ и $y'(x) < 0$ при $x > x_1$, где $y(x)$ – решение задачи (1.4) – (1.6).*

Лемма 1.4. *При любом $A > 0$ существует единственная точка $x_0 > 0$ такая, что существует единственное решение $y \in C^4[0, x_0]$ задачи Коши (1.4)–(1.6) такое, что $y(x_0) = 0, \quad y(x) > 0$ при $x \in (0, x_0)$.*

**1.2. Существование и единственность положительного решения.** Следуя Ц. На [13], введем линейную группу преобразований

$$\begin{cases} x = A_i^{\alpha}\overline{x}, \\ y_i = A_i^{\beta}\overline{y_i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $\alpha, \beta$– константы, подлежащие определению,$A_i$ – положительный параметр преобразования. В новых координатах $(\overline{x}, \overline{y_i})$ уравнение $(1_i)$ примет вид

$$A_i^{\beta-4\alpha}\overline{y_i}^{(4)} + A_i^{\alpha m+\beta n}\overline{x}^m\overline{y_i}^n = 0. \tag{1.12}$$

Выберем константы $\alpha$ и $\beta$ так, чтобы это уравнение не зависело от параметра $A_i$ :

$$\beta - 4\alpha = \alpha m + \beta n. \tag{1.13}$$

Тогда из (1.12) имеем

$$\overline{y_i}^{(4)} + \overline{x}^m \overline{y_i}^n = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{1.14}$$

т.е уравнение (1.1) оказалось инвариантным относительно преобразования (1.11).

Обозначим через $A_i$ недостающее начальное условие в задаче (1.1) – (1.3):

$$y_i'''(0) = A_i. \tag{1.15}$$

Это условие в координатах $(\overline{x}, \overline{y_i})$ запишется в виде

$$A_i^{\beta-3\alpha} \overline{y_i}'''(0) = A_i. \tag{1.16}$$

и оно не будет зависеть от параметра $A_i$, если

$$\beta - 3\alpha = 1. \tag{1.17}$$

Тогда из (1.17) получим

$$\overline{y}_i'''(0) = 1. \tag{1.18}$$

Решая систему (1.13), находим

$$\alpha = -\frac{n-1}{m+3n+1}, \tag{1.19}$$

$$\beta = \frac{m+4}{m+3n+1}. \tag{1.20}$$

В силу (1.14), (1.18) и того, что условия (1.2) в новых координатах $(\overline{x}, \overline{y_i})$ будут иметь вид $\overline{y_i}(0) = \overline{y_i}'(0) = \overline{y_i}''(0) = 0$, приходим к следующей задаче Коши для $\overline{y_i}(\overline{x})$ :

$$\overline{y_i}^{(4)} + \overline{x}^m \overline{y_i}^n = 0, \tag{1.21}$$

$$\overline{y_i}(0) = \overline{y_i}'(0) = \overline{y_i}''(0) = 0, \tag{1.22}$$

$$\overline{y}_i'''(0) = 1. \tag{1.23}$$

Из лемм 1.1–1.4 с $A = 1$ следует, что существует единственная точка $\overline{x_{i0}}, i = 0, 1, 2, 3$, такая, что решение $\overline{y_i}(\overline{x})$ задачи Коши (1.21)-(1.23) на $[0, \overline{x_{i0}}]$ определяется единственным образом, удовлетворяет условию $\overline{y_i}^{(i)}(\overline{x_{i0}}) = 0, i = 0, 1, 2, 3$, и $\overline{y_i}^{(i)}(\overline{x}) > 0$ при $\overline{x} \in (0, x_{i0})$. Выберем параметр $A_i$ в (1.11) так, чтобы $x = 1$ при $\overline{x} = \overline{x_{i0}}, i = 0, 1, 2, 3$, т.е. из равенства $1 = A_i^\alpha \overline{x_{i0}}$. Отсюда положительный параметр $A_i$ определяется однозначно:

$$A_i = (\overline{x_{i0}})^{-\frac{1}{\alpha}}, i = 0, 1, 2, 3, \tag{1.24}$$

где $\alpha$ определяется равенством (1.19). Поэтому задача (1.1) – (1.3) имеет единственное положительное решение $y_i \in C^4[0, 1]$. Доказана

Теорема 1. *Задача* (1.1) – (1.3) *имеет единственное положительное решение* $y_i \in C^4[0,1]$, $i = 0,1,2,3$.

Замечание 1. Отрезок $[0,a]$ с произвольным положительным $a$ заменой $t = \frac{x}{a}$ сводится к отрезку $[0,1]$. Поэтому сформулированная здесь теорема имеет место для любого отрезка $[0,a]$ с заменой условия $(3_i)$ на $y_i{}^{(i)}(a) = 0, i = 0,1,2,3$.

**1.3. Численный метод построения положительного решения.** Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать алгоритм построения единственного положительного решения задачи (1.1) – (1.3) состоящий из следующих шагов:

1. Вычисляем $\alpha$ и $\beta$ по формулам (1.19), (1.20);

2. Решаем каким-либо численным методом, например, методом Рунге-Кутта четвертого порядка задачу Коши (1.21)–(1.23), начиная с $\overline{x} = 0$ до тех пор, пока по одной из лемм 1.1-1.4 не выполнится равенство $\overline{y_i}^{(i)}(\overline{x_{i0}}) = 0$ с $\overline{x_{i0}} > 0, \quad i = 0,1,2,3$;

3. Вычисляем $A_i$ по формуле (1.24);

4. Находим решение по формулам (1.11).

Замечание 2. Для уменьшения вычислительной погрешности, связанной с вычислением степени $A_i$ пункт 4 можно заменить пунктом

4′. Решаем задачу Коши (1.1) – (1.2) тем же численным методом, что и в пункте 2, начиная с $x = 0$ до $x = 1$.

В качестве примера приведем таблицу значений положительного решения задачи (1.1) – (1.2) (случай $i = 0$) при $m = 0$, $n = 4$, полученного указанным здесь методом.

**Положительное решение задачи** (1.1) – (1.3) **при** $m = 0, n = 4$

| x | 0,00 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0,00 | 0,04 | 0,31 | 1,05 | 2,49 | 4,86 | 8,39 | 13,18 | 18,54 | 19,65 | 0,00 |

**Заключение.** Доказано, что каждая задача из семейства двухточечных краевых задач

$$y_i{}^{(4)} + x^m|y_i|^n = 0, 0 < x < 1,$$

$$y_i(0) = y_i{}'(0) = y_i{}''(0) = 0,$$

$$y_i{}^{(i)}(1) = 0,\ i = 0,1,2,3,$$

где $m \geqslant 0, n > 1$ – константы, имеет единственное положительное решение и предложен неитерационный численный метод его построения. Для данного класса уравнений результат о единственности является новым. Также нов, предложенный здесь неитерационный численный метод построения положительного решения.

## 2. Численный метод построения положительного решения двухточечной краевой задачи для одного дифференциального уравнения второго порядка с дробной производной

**2.1. Предварительные сведения.** Рассмотрим двухточечную краевую задачу:

$$D_{0+}^{\alpha} u\left(t\right) + f\left(t, u\left(t\right)\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{2.1}$$

$$u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \tag{2.2}$$

где $1 < \alpha \leqslant 2$ – вещественное число, и численными методами строится это решение, $D_{0+}^{\alpha} u\left(t\right)$ – производная в смысле Римана-Лиувилля. В дальнейшем нам понадобится

Теорема 2. *(см. [20], с.502) Пусть $f(t, u)$ непрерывно на $[0, 1] \times [0, \infty)$. Предположим, что существуют две положительные константы $r_2 > r_1 > 0$ такие, что*

$$(У1) \quad f\left(t, u\right) \leqslant M r_2, \ \text{для всех} \left(t, u\right) \in \left[0, 1\right] \times \left[0, r_2\right]; \tag{2.3}$$

$$(У2) \ \ f\left(t, u\right) \geqslant N r_1, \ \text{для всех} \left(t, u\right) \in \left[0, 1\right] \times \left[0, r_1\right], \tag{2.4}$$

*где* $M\left(\alpha\right) = \left(\int_0^1 G\left(\alpha, s, s\right) ds\right)^{-1}, \quad N\left(\alpha\right) = \left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \gamma\left(\alpha, s\right) G\left(\alpha, s, s\right) ds\right)^{-1}$,

$$\gamma\left(\alpha, s\right) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\left[\frac{3}{4}(1-s)\right]^{\alpha-1} - \left(\frac{3}{4} - s\right)^{\alpha-1}}{\left[s(1-s)\right]^{\alpha-1}}, s \in \left(0, r\right], \\ \frac{1}{(4s)^{\alpha-1}}, s \in \left[r, 1\right), \end{array} \right.$$

*а функция Грина $G(\alpha, t, s)$ имеет вид:*

$$G\left(\alpha, t, s\right) = \left\{ \ \frac{\left[t(1-s)\right]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \frac{\left[t(1-s)\right]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \right. \tag{2.5}$$

*Тогда задача (2.1)–(2.2) имеет не менее одного положительного решения и такого, что $r_1 \leqslant \|u\| \leqslant r_2$.*

**2.2. Единственность и численный метод построения положительного решения.** Рассмотрим численный метод построения положительного решения двухточечной краевой задачи на примере задачи

$$D_{0+}^{\alpha} u\left(t\right) + u^2 + \frac{\sin t}{4} + 1 = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{2.6}$$

$$u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \tag{2.7}$$

где $3/2 \leqslant \alpha \leqslant 2$. Справедлива

Лемма 2.1. *Для любого $3/2 \leqslant \alpha \leqslant 2$ функция $f\left(t, u\right) = u^2 + \frac{\sin t}{4} + 1$ удовлетворяет условиям теоремы 2.*

Следовательно, по теореме 2 задача (2.6), (2.7) имеет не менее одного положительного решения при $\frac{3}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2$, причем $r_1 \leqslant \|u\| \leqslant r_2$, где $\|u\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} u(t)$ .

Положительное решение задачи (2.6), (2.7) удовлетворяет уравнению

$$u = \Phi(u), \tag{2.8}$$

где

$$\Phi(u) = \int_0^1 G(t,s)\,[u^2(s) + \frac{\sin \mathrm{s}}{4} + 1]ds, \tag{2.9}$$

Нелинейное уравнение (2.8) будем решать методом последовательных приближений:

$$u_{k+1}(t) = \Phi(u_k), \text{ т.е.}$$

$$u_{k+1}(t) = \int_0^1 G(t,s)\left[u_k^2(s) + \frac{\sin s}{4} + 1\right] ds, k = 0,1,2,\ldots \tag{2.10}$$

Покажем, что $\Phi(u)$ является сжимающимся отображением на множестве

$$T = \{u \in C[0,1] : 0 \leqslant u(t) \leqslant 1 \text{ при } t \in [0,1]\}.$$

Для этого достаточно показать, что $\|\Phi'(u)\| \leqslant q < 1$. Легко видеть, что

$$\Phi'(u)\,h = \int_0^1 2G(\alpha,t,s)\,u(s)\,h(s)ds.$$

Тогда при $u \in T$ имеем:

$$\|\Phi'(u)\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^1 2G(\alpha,t,s)\,u(s)\,ds\right| \leqslant$$

$$2\int_0^1 G(\alpha,s,s)\,ds = \frac{2}{(\alpha)}\int_0^1 [s(1-s)]^{\alpha-1}ds \leqslant \frac{2}{(\alpha)}\frac{1}{4^{\alpha-1}}.$$

Легко проверить, что функция $(\alpha)\,4^{\alpha-1}$ при $\frac{3}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2$ возрастает. Поэтому

$$(\alpha)\,4^{\alpha-1} \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)4^{\frac{3}{2}-1} = 2\sqrt{\pi}.$$

Следовательно, $\|\Phi'(u)\| \leqslant \frac{2}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = q < 1$.

Обозначим $G_q = \{u \in C[0,1],\ 0 \leqslant u(t) \leqslant q\}$. Покажем, что $\Phi(u)$ отображает множество $G_q$ в себя. Имеем

$$0 \leqslant \Phi(u) = \int_0^1 G(\alpha,t,s)\left[u^2(s) + \frac{\sin s}{4} + 1\right] ds \leqslant$$

$$\left(q^2 + \frac{7}{32} + 1\right)\int_0^1 G(\alpha,s,s)\,ds \leqslant$$

$$\left(q^2+\frac{39}{32}\right)\frac{1}{(\alpha)\,4^{\alpha-1}}\leqslant\left(q^2+\frac{39}{32}\right)\frac{q}{2}=\frac{(\frac{1}{\pi}+\frac{39}{32})}{2}q\leqslant q.$$

Следовательно,$\Phi\,(u)$ отображает множество $G_q$ в себя. Так как $\Phi(u)$ является сжимающимся отображением на множестве Т и отображает множество $G_q \subset T$ в себя, то в силу принципа сжимающихся отображений и теоремы 2 справедлива

Теорема 3. *При $3/2 \leqslant \alpha \leqslant 2$ задача (2.6), (2.7) имеет единственное решение и $\frac{1}{N_0} \leqslant \|u\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, где $N_0 = max_{3/2\leqslant\alpha\leqslant2}\left[4^{2\alpha-2}\,(\alpha)\right]$. Кроме того, итерационный процесс (2.10) сходится к этому решению и справедлива оценка погрешности:*

$$\|u-u_k\|\leqslant\frac{q^k}{1-q}\underset{0\leqslant j\leqslant10}{max}|u_1\,(t_j)-u_0(t_j)|\ \ ,\ где\ q=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

В качестве начального приближения в (2.10) возьмем функцию $u_0\,(t) = \frac{t(1-t)}{2}$, которая удовлетворяет краевым условиям (2.2). Последующие приближения $u_{k+1}\,(t)\,,(k=0,1,2,\dots)$ будем вычислять в точках $t_j = 0.1j,\ j = 0,1,2,\dots 10$. При этом интеграл в правой части (2.10) будем вычислять по какой-либо квадратурной формуле, например, по квадратурной формуле средних прямоугольников:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx\approx h\sum_{i=0}^{N-1}f\left(x_i+\frac{h}{2}\right),\quad h=\frac{b-a}{N},\ x_i=a+ih,\ i=\overline{0,N}. \tag{2.11}$$

$$\int_0^1 G\,(t_j,s)\left(y^2\,(s)+\frac{\sin s}{4}+1\right)ds\approx h\sum_{i=0}^{n-1}G\,(t_j,s_i)\,[y^2(s_i)+\frac{\sin s_i}{4}+1],$$

где $s_i = 0.1i+\frac{h}{2}, \quad i=\overline{0,n-1}, \quad j=0,1,\dots 10.$

При вычислении интеграла в (2.10) функцию $u_k\,(t)\ \ (k=0,1,2,\dots)$ заменим интерполяционным многочленом Лагранжа 10-й степени по ее значениям в узлах $t_j = 0.1j,\ j=0,1,\dots 10$.

Так как $u_k\,(t) = \frac{t(1-t)}{2}$ при $k=0$, то интерполяционный многочлен $L_{10}(t)$ для этой функции равен $\frac{t(1-t)}{2}$, $(0\leqslant t\leqslant 1)$ в силу единственности интерполяционного многочлена. Полагая в (2.10) $u_k\,(s)\ \ k=0$ приближенно $L_{10}\,(s) = \frac{s(1-s)}{2}$ и, пользуясь квадратурной формулой (2.11) с шагом h=0.01, можно вычислить (при k=0) значения правой части равенства (2.8) при $t=t_j,\ \ j=\overline{0,10}$, т.е. можно найти значения первого приближения $u_1(t)$ при $t=t_j,\ \ j=\overline{0,10}$. Далее с помощью полученных значений $u_1(t_j)$ можно аппроксимировать $u_1(t)$ интерполяционным многочленом 10-й степени. Затем при k=1 так же, как и в случае k=0, можно вычислить значения $u_2\,(t_j)\,,\ \ j=\overline{0,\ 10}$ и так далее, продолжаем вычислять $u_k\,(t_j)$до тех пор, пока не окажется $\frac{q^k}{1-q}\max_{0\leqslant j\leqslant10}|u_1\,(t_j)-u_0\,(t_j)|\leqslant\varepsilon$, где $\varepsilon$ – некоторое малое положительное число.

При $\varepsilon = 10^{-4}$ нами получены следующие таблицы положительных решений задачи (2.6), (2.7) для значений $\alpha$ от $\frac{3}{2}$ до 2 с шагом 0.1.

| t | $\alpha$=1.5 | $\alpha$=1.6 | $\alpha$=1.7 | $\alpha$=1.8 | $\alpha$=1.9 | $\alpha$=2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1 | 0.2557 | 0.1890 | 0.1392 | 0.1020 | 0.0743 | 0.0539 |
| 0.2 | 0.3459 | 0.2753 | 0.2182 | 0.1720 | 0.1348 | 0.1052 |
| 0.3 | 0.4006 | 0.3333 | 0.2760 | 0.2275 | 0.1862 | 0.1519 |
| 0.4 | 0.4332 | 0.3720 | 0.3180 | 0.2705 | 0.2286 | 0.1924 |
| 0.5 | 0.4497 | 0.3958 | 0.3468 | 0.3024 | 0.2620 | 0.2660 |
| 0.6 | 0.4538 | 0.4077 | 0.3645 | 0.3243 | 0.2865 | 0.2521 |
| 0.7 | 0.4485 | 0.4100 | 0.3728 | 0.3373 | 0.3030 | 0.2710 |
| 0.8 | 0.4364 | 0.4050 | 0.3737 | 0.3429 | 0.3122 | 0.2831 |
| 0.9 | 0.4203 | 0.3953 | 0.3693 | 0.3428 | 0.3157 | 0.2893 |
| 1.0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Приведенные результаты показывают, что полученные решения удовлетворяют условиям теоремы 3: $\|u\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ и убывают по $\alpha$.

## 3. Численный метод нахождения радиально-симметричного положительного решения задачи Дирихле для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим в $n$-мерном кольце $S = \{x \in R^n : r_1 < r < r_2\}$, где $r = |x|$ следующую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta U + r^m U^p = 0, \quad r_1 < r < r_2, \\ U\,|_K = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $K$ – граница кольца $S$, $m \geqslant 0$, $p > 1$ – действительные числа.

Очевидно, $U \equiv 0$ – тривиальное решение. Под *положительным решением* задачи (3.1) будем понимать функцию $U \in C^2\left(\overline{S}\right)$ положительную в $S$ и обращающуюся в нуль на границе $K$.

Существует ряд работ отечественных и зарубежных математиков, посвященных существованию положительного решения задачи Дирихле для нелинейных уравнений вида (3.1) (см., например, [2,4–7,9,14–19] и др.). Работ же, посвященных построению положительных решений таких задач, насколько нам известно, сравнительно мало. В данной работе делается попытка восполнить этот пробел. В ней численным методом строится положительное радиально-симметричное решение задачи (3.1). Для этого сначала доказывается существование и единственность положительного радиально-симметричного решения задачи (3.1).

**3.1. Существование и единственность положительного радиально-симметричного решения.** Будем искать положительное решение $U$ в виде радиально-симметричной функции, то есть в виде $U = \varphi(r)$. Вычисления показывают, что $\Delta U = \varphi'' + \frac{n-1}{r}\varphi'$. Следовательно, положительное радиально-симметричное решение задачи (3.1) является нетривиальным решением следующей двухточечной краевой задачи:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi''+\frac{n-1}{r}\varphi'+r^{m}\varphi^{2p}=0,\ \ 0<r_1<r<r_2,\\ \varphi\left(r_1\right)=\varphi\left(r_2\right)=0.\end{array}\right. \tag{3.2}$$

Для случая $n>2$ сделаем замену:

$$t=\frac{1}{r^{n-2}}>0; r=t^{\frac{1}{n-2}}$$

В результате чего задача (3.2) примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi''_{tt}+\left(\frac{1}{2-n}\right)^{2}t^{\frac{m+2n-2}{2-n}}\varphi^{2p}=0,\ \ t_2<t<t_1,\\ \varphi\left(t_1\right)=\varphi\left(t_2\right)=0.\end{array}\right. \tag{3.3}$$

Произведя еще одну замену: $s=\frac{t-t_2}{t_1-t_2}$, задачу (3.3) можно записать в виде:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi''+\frac{\left[t_2+\tau(t_1-t_2)\right]^{-\gamma}(t_1-t_2)^2}{(n-2)^2}\varphi^{2p}=0,\ \ 0<\tau<1,\\ \varphi\left(0\right)=\varphi\left(1\right)=0,\end{array}\right. \tag{3.4}$$

где $\gamma=\frac{m+2n-2}{n-2}$.

Для случая $n=2$, задача (3.2) примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi''+\frac{1}{r}\varphi'+r^{m}\varphi^{2p}=0, r_1<r<r_2,\\ \varphi\left(r_1\right)=\varphi\left(r_2\right)=0.\end{array}\right. \tag{3.5}$$

Используем следующую замену: $t=\ln\frac{r}{r_1}$. В результате задача (3.5) приведется к виду:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi''+r_1^{2+m}e^{2+m}\varphi^{2p}=0,\ \ 0<t<t_2,\\ \varphi\left(0\right)=\varphi\left(t_2\right)=0,\end{array}\right. \tag{3.6}$$

где $t_2=\ln\frac{r_2}{r_1}$.

Еще одна замена $\tau=\frac{t}{t_2}$ приводит задачу (3.5) к виду

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi''+\ln^2\frac{r_2}{r_1}r_1^{2+m}e^{(2+m)(\ln\frac{r_2}{r_1})\tau}\varphi^{2p}=0,\ 0<\tau<1,\\ \varphi\left(0\right)=\varphi\left(1\right)=0.\end{array}\right. \tag{3.7}$$

Задачи (3.4) и (3.7) являются двухточечными краевыми задачами вида

$$y''(x)+f(x,y)=0,\ 0<x<1, \tag{3.8}$$

$$y(0)=y(1)=0. \tag{3.9}$$

Для данной задачи справедливо утверждение

Теорема 4. *([19]). Предположим, что функция $f(x,z)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial z}$ при $x\in[0,1]$, $z\geqslant 0$, и что выполняются условия*

$$a(x)z^{p}\leqslant f(x,y)\leqslant b(x)z^{p}, p=const>1, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial f(x,z)}{\partial z} \geqslant 0, \tag{3.11}$$

*где $a(x), b(x)$ - непрерывные неотрицательные функции при $x \in [0,1]$, причем $a(x) \leqslant b(x)$. Тогда задача (3.8), (3.9) имеет единственное положительное решение из класса $C^2[0,1]$.*

Легко проверить, что для задач (3.4) и (3.7) выполнены все условия этой теоремы. Следовательно, справедлива также следующая

Теорема 5. *Задача Дирихле (3.1) имеет единственное радиально-симметричное положительное решение при любом $m \geqslant 0$, $n \geqslant 2$ и $p > 1$.*

**3.2. Численный метод нахождения положительного решения задачи.** Численный метод нахождения положительного решения задачи (3.4), (3.7) основывается на методе Ньютона. Решение будем искать в виде радиально-симметричной функции $u = \varphi(r)$ из класса $C^2[0,1]$. Численные методы построения положительных решений задач (3.4) и (3.7) аналогичны. Поэтому рассмотрим только случай построения положительного решения задачи (3.4).

Заменим краевую задачу (3.4) задачей Коши, обозначив недостающее начальное условие через $s$:

$$\varphi'' + \frac{\left[t_2 + \tau\left(t_1 - t_2\right)\right]^{-\gamma}\left(t_1 - t_2\right)^2}{\left(n-2\right)^2}\varphi^{2p} = 0, \tag{3.12}$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = s, \tag{3.13}$$

решение которой можно найти, например, методом Рунге-Кутта [17].

Параметр $s$ находим из условия

$$\varphi(1,s) = 0, \tag{3.14}$$

где $\varphi(x,s)$ – решение задачи (3.12)–(3.13).

Будем решать уравнение (3.14) методом Ньютона

$$s_{k+1} = s_k - \frac{\varphi(1,s_k)}{\frac{\partial\varphi(1,s_k)}{\partial s}}. \tag{3.15}$$

Обозначим

$$\frac{\partial\varphi(\tau,s)}{\partial s} = u(\tau,s).$$

Продифференцируем равенства (3.12) и (3.13) по $s$, получим вспомогательную задачу Коши

$$u'' + \frac{\left[t_2 + \tau\left(t_1 - t_2\right)\right]^{-\gamma}\left(t_1 - t_2\right)^2}{\left(n-2\right)^2} 2p\varphi^{2p-1}u = 0, \tag{3.16}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \tag{3.17}$$

Итерационный процесс (3.15) можно записать в виде:

$$s_{k+1} = s_n - \frac{\varphi(1,s_k)}{u(1,s_k)}.$$

Введем обозначения: $y_1 = \varphi(\tau,s)$, $y_3 = u(\tau,s)$. Таким образом, задачу (3.4) можно решить по алгоритму, состоящему из следующих шагов.

1. Пусть $k = 1$. Задаем начальное значение параметра $s = s_{k-1}$;
2. Каким-либо одношаговым методом, например, методом Рунге-Кутта четвертого порядка решаем задачу Коши для систем дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = y_2, \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -\frac{[t_2+\tau(t_1-t_2)]^{-\gamma}(t_1-t_2)^2}{(n-2)^2} y_1^{2p}, \\ \frac{dy_3}{d\tau} = y_4, \\ \frac{dy_4}{d\tau} = -\frac{[t_2+\tau(t_1-t_2)]^{-\gamma}(t_1-t_2)^2}{(n-2)^2} 2py_1^{2p-1}, \end{cases}$$

с начальными условиями $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = s_{k-1}$, $y_3(0) = 1$, $y_4(0) = 0$ от $\tau = 0$ до $\tau = 1$.

1. Находим $s_k = s_{k-1} - \frac{y_1(1,s_{k-1})}{y_3(1,s_{k-1})}$.
2. Если $d = |s_k - s_{k-1}| \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon$ – заранее заданное малое число, связанное с точностью нахождения решения, то переходим к следующему пункту, иначе, $k := k + 1$ и возвращаемся к пункту 2.
3. Решаем методом Рунге-Кутта задачу Коши (3.12)-(3.13) с найденным значением $s_k$ от $\tau = 0$ до $\tau = 1$.

При реализации на компьютере шагов приведенного алгоритма могут представиться два неприятных случая: 1) получается тривиальное решение $y \equiv 0$, 2) метод не сходится. В обоих случаях необходимо задать другое начальное значение параметра $s$. Поскольку по теореме 5 задача (3.1) имеет единственное положительное радиально-симметричное решение и применяется для решений задач Коши численный метод Рунге-Кутта четвертого порядка, то при соответствующем подборе начального значения $s$ можно получить ее решение с точностью порядка $O(h^4)$.

Приведем некоторые примеры положительных радиально-симметричных решений задачи Дирихле (3.1) в $n$ – мерном кольце $S = \{x \in R^n : r_1 < r < r_2\}$ с $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, полученных по приведенному алгоритму.

1. $n = 3$, $m = 2$, $p = 2$

| r | U |
|---|---|
| 1.00 | 0.0000 |
| 1.04 | 0.3677 |
| 1.08 | 0.7353 |
| 1.14 | 1.1018 |
| 1.20 | 1.4614 |
| 1.26 | 1.7904 |
| 1.35 | 2.0168 |
| 1.45 | 1.9865 |
| 1.58 | 1.5554 |
| 1.75 | 0.8175 |
| 2.00 | 0.0000 |

2. $n = 3$, $m = 6$, $p = 2$

| r | U |
|---|---|
| 1.00 | 0.0000 |
| 1.04 | 0.1763 |
| 1.08 | 0.3527 |
| 1.14 | 0.5289 |
| 1.20 | 0.7045 |
| 1.26 | 0.8766 |
| 1.35 | 1.0322 |
| 1.45 | 1.1224 |
| 1.58 | 1.0133 |
| 1.75 | 0.5866 |
| 2.00 | 0.0000 |

3. $n = 2$, $m = 2$, $p = 2$

| r | U |
|---|---|
| 1.00 | 0.0000 |
| 1.07 | 1.1050 |
| 1.15 | 2.2002 |
| 1.23 | 3.2513 |
| 1.32 | 4.1804 |
| 1.41 | 4.8497 |
| 1.52 | 5.0664 |
| 1.62 | 4.6432 |
| 1.74 | 3.5208 |
| 1.87 | 1.8676 |
| 2.00 | 0.0000 |

На основании полученных результатов можно сделать следующий вывод: при фиксированном значении параметра $p$, максимальное значение решения задачи Дирихле $\varphi(\tau)$ уменьшается, если увеличивать значение параметра $m$. При фиксированном значении параметра $m$ максимальное значение $\varphi(\tau)$ уменьшается, если увеличивать значение параметра $p$.

При фиксированном параметре $m$, рост максимального значения решения $\varphi(\tau)$ происходит быстрее, чем при фиксированном параметре $p$, если при этом уменьшать значение другого соответствующего параметра.

## Список литературы

[1] Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М., 1962. 394 с.

[2] Похожаев С.И. Об одной задаче Овсянникова. // ПМТФ. 1989. №2. С. 5–10.

[3] Похожаев С.И. Об одном конструктивном методе вариационного исчисления. // ДАН СССР. 1988. Т. 298. № 6. С. 1330-1333.

[4] Похожаев С.И. О целых радиальных решениях некоторых квазилинейных эллиптических уравнений // Математический сборник. 1992. Т. 83. №11. С. 3-18.

[5] Gidas B., Spruck J. // Global and local behavior of positive solutions of nonlineare elliptic equations. 1982. V. 4. P. 525–598.

[6] Kuo-Shung Cheng and Jenn-Tsann Lin. // On the elliptic equations $\Delta u = K(x)u^{\alpha}$ and $\Delta u = K(x)\exp^{2u}$. // Transactions of American mathematical society. 1987. V. 304. № 2. P. 633–668.

[7] Галахов Е.И. Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения. // Математические заметки. 2005. Т. 78. Вып. 2. С. 202–211.

[8] Гапоненко Ю.Л. О положительных решениях нелинейных краевых задач. // Вестник Московского университета, серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1983. № 4. С. 8–12.

[9] Абдурагимов Э.И. О единственности положительного решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи. // Изв.вузов. Математика. 2002. №6. С. 3–6.

[10] Абдурагимов Э.И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного оду четвертого порядка. //Дагестанский математический сборник. 2005. Т. 1. С. 7–12.

[11] Абдурагимов Э.И. О положительном решении двухточечной краевой задачи для одного нелинейного оду четвертого порядка. // Материалы Международной конференции. Махачкала. 2005. С. 12–13.

[12] Абдурагимов Э.И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного оду четвертого порядка. // Изв. вузов. Математика. 2006. № 8. С. 3–6.

[13] На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. 296 с.

[14] Dancer E. Norman, Shi Junping. Uniqueness and nonexistence of positive solutions to semipositive problems. // London Math. Soc. 2006. V. 38. №6. P. 1033–1044.

[15] Kavano Nichiro, Satsuma Junkichi, Youtsutani Shoji. On the positive solution of an emden-type elliptic equation. // Proc. Jap. Acad. 1985. Ser A. V. 61. №6. P. 186–189.

[16] Jiang Ju. On radially symmetric solutions to singular nonlinear Dirichlet problems. // Nonlinear Anal. Theory, Methods and Applications. 1995. V. 24. P. 159–163.

[17] Бахвалов Н.С. Численные методы. Т. I; М.: «Наука», 1973.

[18] Абдурагимов Э.И. О единственности положительного радиально-симметричного решения задачи Дирихле в шаре для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Изв. Вузов. Математика. 2008. №12. С. 3–6.

[19] Абдурагимов Э.И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ второго порядка со степенным ростом. // Вестник ДГУ. Вып. 6. 2011. С. 104–110.

[20] Zhanbing Bai, Haishen Lu. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. // J.Math.Anal.Appl. 2005. V. 311. Pp. 495–505.

**Э. И. Абдурагимов (E. I. Abduragimov)**
Дагестанский научный центр РАН
*E-mail*: abduragimov42@mail.ru

Поступила в редакцию
10.11.2014