УДК 517.587

И. И. Шарапудинов, Т. И. Шарапудинов

Об одновременном приближении функций и их производных посредством полиномов Чебышева, ортогональных на равномерной сетке

Рассмотрена задача об исследовании аппроксимативных свойств полиномиального оператора $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f,x)$, действующего в пространстве $C[-1,1]$, основанного на использовании лишь дискретных значений функции $f(x)$, заданных в узлах равномерной сетки $\{x_j = -1 + jh\}_{j=0}^{N+2r-1} \subset [-1,1]$, который может быть использован в задаче об одновременном приближении дифференцируемой функции $f(x)$ и ее нескольких производных $f'(x),\dots,f^{(p)}(x)$. Построение операторов $\mathcal{X}_{m,N}(f)$ основано на полиномах Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$, образующих ортогональную систему на множестве $\Omega_N = \{0,1,\dots,N-1\}$ с весом

$$\mu(x) = \mu(x;\alpha,\beta,N) = c\frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)},$$

т.е.

$$\sum_{x\in\Omega_N} \mu(x) T_n^{\alpha,\beta}(x,N) T_m^{\alpha,\beta}(x,N) = h_{n,N}^{\alpha,\beta}\delta_{nm}.$$

Получены верхние оценки для функции Лебега оператора $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f,x)$ и весовых приближений вида

$$\frac{\left|\frac{1}{h^\nu}\Delta_h^\nu\left[f(x_{j-\nu}) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_{j-\nu})\right]\right|}{\left(\sqrt{1-x_j^2}+\frac{1}{m}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}}.$$

Библиография: 29 названий.

The article is dedicated to investigation of approximative properties of polynomial operator $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f,x)$, defined in the space $C[-1,1]$ and based on the use of only discrete values of the function $f(x)$, given in the nodes of uniform grid $\{x_j = -1 + jh\}_{j=0}^{N+2r-1} \subset [-1,1]$, which can be used in the problem of simultaneous approximation of a differentiable function $f(x)$ and its multiple derivatives $f'(x),\dots,f^{(p)}(x)$. Construction of operators $\mathcal{X}_{m,N}(f)$ is based on Chebyshev polynomials $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$, which form an orthogonal system on the set $\Omega_N = \{0,1,\dots,N-1\}$ with weight

$$\mu(x) = \mu(x;\alpha,\beta,N) = c\frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)},$$

i.e.

$$\sum_{x\in\Omega_N} \mu(x) T_n^{\alpha,\beta}(x,N) T_m^{\alpha,\beta}(x,N) = h_{n,N}^{\alpha,\beta}\delta_{nm}.$$

There were obtained upper bounds for the Lebesgue functions of an operator $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f,x)$ and weight type approximations of the following form

$$\frac{\left|\frac{1}{h^{\nu}}\Delta_h^{\nu}\left[f(x_{j-\nu}) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_{j-\nu})\right]\right|}{\left(\sqrt{1-x_j^2}+\frac{1}{m}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}}.$$

Bibliography: 29 items.

Ключевые слова: полиномы Чебышева, ортогональные на сетке; полиномы Чебышева первого рода; приближение функций и производных.

Keywords: Chebyshev polynomials orthogonal on the grid; Chebyshev polynomials of the first kind; approximation of functions and derivatives.

Введение

Задача об одновременном приближении функций и их производных достаточно хорошо исследована в теории приближений [1]-[5]. Она вызывает интерес исследователей не только сама по себе, но и в связи с различными прикладными вопросами. В настоящей работе рассмотрена задача о конструировании полиномиального оператора $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f,x)$, действующего в пространстве $C[-1,1]$, основанного на использовании лишь дискретных значений функции $f(x)$, заданных в узлах равномерной сетки $\{-1+jh\}_{j=0}^{N+2r-1} \subset [-1,1]$, который может быть использован в задаче об одновременном приближении дифференцируемой функции $f(x)$ и ее нескольких производных $f'(x),\ldots,f^{(p)}(x)$. Такие задачи достаточно часто возникают в различных приложениях. В качестве примера мы отметим линейную систему, у которой выходной сигнал $f = f(x)$ и входной сигнал $g = g(x)$ связаны между собой равенством

$$f^{(r)}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} a_\nu(x) f^{(\nu)}(x) + \sum_{\mu=0}^{s} b_\mu(x) g^{(\mu)}(x), \tag{0.1}$$

где неизвестные переменные коэффициенты $a_\nu(x)$ $(\nu = 0,\ldots,r-1)$ и $b_\mu(x)$ $(\mu = 0,\ldots,s)$ представляют собой алгебраические полиномы заданной степени m. Будем считать, что функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[-1,1]$, соответственно, r раз и s раз. Ставится задача найти неизвестные переменные коэффициенты $a_\nu(x)$ $(\nu = 0,\ldots,r-1)$ и $b_\mu(x)$ $(\mu = 0,\ldots,s)$ экспериментальным путем. Такую задачу часто называют [6]-[8] *идентификацией* параметров системы. Методы и подходы к решению этой задачи существенно зависят от того, что именно мы знаем о входном и выходном сигналах $f = f(x)$ и $g = g(x)$. Рассмотрим часто встречающийся на практике случай, когда заданы значения сигналов $f(x)$ и $g(x)$ в узлах равномерной сетки $\{x_j = -1+jh\}_{j=0}^{N+2r-1}$, где $h = \frac{2}{N+2r-1}$. Основной (и наиболее трудный) вопрос, который возникает при решении поставленной задачи, заключается в том, чтобы найти в заданной точке $x \in [-1,1]$ численные значения производных $f^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 1,\ldots,r)$ и $g^{(\mu)}(x)$ $(\mu = 1,\ldots,s)$, исходя из дискретной информации $f_j = f(x_j)$, $g_j = g(x_j)$ $(0 \leqslant j \leqslant N+2r-1)$. Для решения задачи численного дифференцирования функции $f(x)$, используя лишь значения $f_j = f(x_j)$, исторически часто применялись интерполяционные полиномы Ньютона (или Лагранжа) [9], а в настоящее время наиболее часто для этого применяют [10] интерполяционные полиномиальные сплайны. Но при решении задачи идентификации (0.1) с полиномиальными коэффициентами естественно предположить, что сигналы $f = f(x)$ и $g = g(x)$ являются аналитическими функциями переменной $x \in [-1, 1]$. В этом случае, как хорошо известно [11] , асимптотически оптимальным способом приближенного представления этих функций служат их частичные суммы Фурье по полиномам Чебышева $C_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Остановимся вкратце (и схематично) на описании подхода к приближенному нахождению переменных коэффициентов $a_\nu(t)$ $(\nu = 0, \dots, r-1)$ и $b_\mu(t)$ $(\mu = 0, \dots, s)$ задачи (0.1), основанного на использовании полиномов $C_n(t) = \cos(n \arccos t)$, в котором полиномиальный метод приближения производных оказался(как это показали компьютерные эксперименты) весьма эффективным. А именно, пусть

$$f^{(\nu)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{\nu,k} C_k(x), \quad g^{(\mu)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}_{\mu,k} C_k(x),$$

$$a_\nu(x) = \sum_{j=0}^{m} \hat{a}_{\nu,j} C_j(x), \quad b_\mu(x) = \sum_{j=0}^{m} \hat{b}_{\mu,j} C_j(x).$$

Подставляя эти значения в (0.1), имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{r,k} C_k(t) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \hat{a}_{\nu,j} \hat{f}_{\nu,k} C_j(x) C_k(t) + \sum_{\mu=0}^{s} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \hat{b}_{\mu,j} \hat{g}_{\mu,k} C_j(x) C_k(x).$$

Отсюда с учетом равенства $2C_j(x)C_k(x) = C_{j+k}(x) + C_{|k-j|}(x)$ находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{r,k} C_k(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \hat{a}_{\nu,j} \hat{f}_{\nu,k} (C_{j+k}(x) + C_{|k-j|}(x))$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{s} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \hat{b}_{\mu,j} \hat{g}_{\mu,k} (C_{j+k}(x) + C_{|k-j|}(x)).$$

Используя это равенство можно записать алгоритм для получения элементов матрицы $U = \{u_{il}\}_{1 \leqslant i \leqslant \infty, 1 \leqslant l \leqslant L}$ с числом столбцов, равным $L = (r+s+1)(m+1)$ и бесконечным числом строк, для которой запишем бесконечную систему линейных уравнений:

$$U \cdot V = F_r,$$

где V – вектор-столбец, для которого транспонированный вектор V' имеет вид

$$V' = (\hat{a}_{0,0}, \dots, \hat{a}_{0,m}, \dots, \hat{a}_{r-1,0}, \dots, \hat{a}_{r-1,m}, \hat{b}_{0,0}, \dots, \hat{b}_{0,m}, \dots, \hat{b}_{s,0}, \dots, \hat{b}_{s,m}),$$

F_r – последовательность-столбец коэффициентов Фурье-Чебышева функции $f^{(r)}(x)$.

Заметим, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ представляют собой алгебраические полиномы степени M, то их производные $f^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 1, \dots, r)$ и $g^{(\mu)}(x)$

($\mu = 1, \dots, s$) также являются алгебраическими полиномами степени не выше M. Тогда, в силу ортогональности полинома Чебышева $C_k(x)$ к произвольному алгебраическому полиному степени меньше, чем k, мы заметим, что коэффициенты Фурье-Чебышева $\hat{f}_{\nu,k}$ и $\hat{g}_{\mu,k}$ с $k > M$ обращаются в нуль и поэтому в этом случае вместо бесконечной системы уравнений мы будем иметь конечную систему линейных уравнений

$$U_{M,L} \cdot V = F_{r,M},$$

где $U_{M,L}$ – подматрица матрицы U вида $U_{M,L} = \{u_{il}\}_{1 \leqslant i \leqslant M, 1 \leqslant l \leqslant L}$, $F_{r,M}$ – вектор-столбец, составленный из коэффициентов $\hat{f}_{r,k}$ $(0 \leqslant k \leqslant M-1)$. Поскольку, как было отмечено выше, мы предполагаем $M \geqslant L$, то вполне может случиться так, что эта система не разрешима. Тогда ставится задача о нахождении квази-решения указанной системы, придав предварительно этому понятию определенный смысл. Если, например, ставится задача о решении этой системы методом наименьших квадратов, то при условии обратимости матрицы $U'_{M,L} U_{M,L}$ мы получим

$$V = (U'_{M,L} U_{M,L})^{-1} U'_{M,L} F_{r,M}.$$

Нам остается теперь выразить искомые переменные коэффициенты $a_\nu(x)$, $b_\mu(x)$ в виде равенств $a_\nu(x) = \sum_{j=0}^{m} \hat{a}_{\nu,j} C_j(x), \quad b_\mu(x) = \sum_{j=0}^{m} \hat{b}_{\mu,j} C_j(x)$ и, тем самым, будет решена задача идентификации рассматриваемой линейной системы (0.1). Если же функции $f(x)$ и $g(x)$, фигурирующие в (0.1), не являются алгебраическими полиномами, то необходимо найти алгебраические полиномы $X_n(x)$ и $Y_n(x)$ степени n, которые обладают тем свойством, что $X_n^{(\nu)}(x)$ с требуемой точностью приближает $f^{(\nu)}(x)$ одновременно для всех $\nu = 0, 1, \dots, p$, а $Y_n^{(\nu)}(x)$ приближает $g^{(\nu)}(x)$ одновременно для всех $\nu = 0, 1, \dots, s$. Если такие полиномы будут найдены, то вместо исходной задачи (0.1) мы можем указанным выше методом решить приближенную задачу

$$X_n^{(r)}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} A_\nu(x) X_n^{(\nu)}(x) + \sum_{\mu=0}^{s} B_\mu(x) Y_n^{(\mu)}(x)$$

и найти переменные параметры $A_\nu(x)$, $B_\mu(x)$ и, тем самым, мы получим приближенное решение задачи об идентификации параметров системы (0.1).

При численной реализации описанного метода приближенного решения задачи идентификации (0.1) возникает промежуточная задача о конструировании на основе дискретных данных $f_j = f(x_j)$, $g_j = g(x_j)$ $(0 \leqslant j \leqslant N + 2r - 1)$ алгебраических полиномов $X_n(x) = X_n(f, x)$ и $Y_n(x) = Y_n(g, x)$ степени n, которые обладают тем свойством, что $X_n^{(\nu)}(x)$ с требуемой точностью приближает $f^{(\nu)}(x)$ одновременно для всех $\nu = 0, 1, \dots, p$, а $Y_n^{(\nu)}(x)$ приближает $g^{(\nu)}(x)$ одновременно для всех $\nu = 0, 1, \dots, s$. Следует отметить, что из-за присутствия в измерениях $f_j = f(x_j) = \tilde{f}(x_j) + \eta_j$ и $g_j = g(x_j) = \tilde{g}(x_j) + \xi_j$ случайных погрешностей η_j и ξ_j обычные методы численного дифференцирования, основанные на применении интерполяционных полиномов могут оказаться непригодными для решения поставленной задачи. Требуется предварительная обработка заданной дискретной информации $f_j = f(x_j)$, $g_j = g(x_j)$

$(0 \leqslant j \leqslant N+2r-1)$ путем ее «сглаживания». Один из наиболее часто применяемых методов сглаживания дискретных данных, как известно, базируется на использовании полиномиального метода наименьших квадратов, который, в свою очередь, тесно связан с полиномами Чебышева, ортогональными на дискретной сетке $\{x_j=-1+jh\}_{j=0}^{M-1}$. Остановимся на этом вопросе более подробно. Обозначим через $\hat{P}_{n,M}(x)$ $(0 \leqslant n \leqslant M-1)$ полиномы Чебышева, образующие на сетке $\{x_j=-1+jh\}_{j=0}^{M-1}$ ортонормированную систему с весом $2/M$, т.е.

$$\frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\hat{P}_{n,M}(x_j)\hat{P}_{m,M}(x_j)=\delta_{nm}. \tag{0.2}$$

Эти полиномы и некоторые их обобщения были введены впервые в работах П.Л.Чебышева [12]-[16] в связи задачей сглаживания наблюдений и в настоящее время находят многочисленные приложения как в математической статистике (в связи с методом наименьших квадратов), так и во многих других областях. В задаче сглаживания наблюдений полиномы Чебышева возникают следующим образом. Предположим, что нам заданы измерения $f_j=f(x_j)=\tilde{f}(x_j)+\eta_j$ $(0 \leqslant j \leqslant M-1)$ и требуется найти алгебраический полином $S_{n,M}(x)$, который минимизирует величину

$$J(a_0,\ldots,a_n)=\frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}[f_j-p_n(x_j)]^2$$

среди всех алгебраических полиномов $p_n(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_n t^n$ степени $n \leqslant M-1$. П.Л.Чебышев предложил искать такой полином в виде

$$S_{n,M}(t)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k\hat{P}_{k,M}(t)$$

и показал, что для искомого оптимального полинома коэффициенты β_k принимают вид

$$\beta_k=\hat{f}_k=\frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}f_j\hat{P}_{n,M}(x_j). \tag{0.3}$$

Таким образом, полином

$$S_{n,M}(x)=\sum_{k=0}^{n}\hat{f}_k\hat{P}_{k,M}(x), \tag{0.4}$$

реализующий метод наименьших квадратов, представляет собой сумму Фурье дискретной функции, принимающей значения f_j в точках x_j $(0 \leqslant j \leqslant M-1)$. Одним из способов «сглаживания» наблюдений $f_j=f(x_j)$ $(0 \leqslant j \leqslant M-1)$ является замена значений $f_j=f(x_j)$ соответствующими приближенными значениями $S_{n,M}(x_j)$. Более того, исходную функцию $f(x)$, заданную на $[-1,1]$, можно заменить (приближенно) суммой Фурье $S_{n,M}(x)$. В работе [17] было показано, что если $n=O(\sqrt{M})$, то $S_{n,M}(x)=S_{n,M}(f,x)$ имеет достаточно хорошие аппроксимативные свойства в пространстве непрерывных на $[-1,1]$

функций $f = f(x)$. Другими словами, $S_{n,M}(f, x)$ приближает функцию $f(x)$ достаточно хорошо при любом $x \in [-1, 1]$. В то же время, можно показать, что производные $S^{(\nu)}_{n,M}(f, x)$ приближают производных $f^{(\nu)}(x)$ значительно хуже. Поэтому частичные суммы $S_{n,M}(f, x)$ не могут быть рекомендованы в качестве аппарата одновременного приближения функций $f(x)$ и их производных $f^{(\nu)}(x)$ в рассматриваемой задаче идентификации параметров из (0.1). Требуется конструировать альтернативные суммам Фурье $S_{n,M}(f, x)$ операторы $\mathcal{X}_{n,N}(f) = \mathcal{X}_{n,N}(f, x)$, представляющие собой (также как и $S_{n,M}(f, x)$) проекторы на подпространство алгебраических полиномов степени n, действующие в пространстве непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f = f(x)$, использующие в качестве исходной информации значения $f(x_j)$ $(0 \leqslant j \leqslant N + 2r - 1)$ и которые могут быть эффективно использованы для «сглаживания» ошибок в наблюдениях $f(x_j)$ $(0 \leqslant j \leqslant N + 2r - 1)$ и для решения задачи одновременного приближения дифференцируемой функции $f(x)$ и её нескольких производных. В настоящей работе (§5) предпринята попытка конструировать такие операторы на основе уже упомянутых выше полиномов Чебышева $\hat{P}_{k,M}(x)$ и их обобщений, также введенных в работе Чебышева [16]. На обсуждении вопроса о том, в какой степени при решении задачи приближенного нахождения производных, фигурирующих в задаче (0.1), следует отдать предпочтение полиномиальным операторам, построенным на основе ортогональных полиномов (спектральный метод), мы здесь не остановимся. По поводу достоинств и недостатков подобного (спектрального) подхода к проблемам решения дифференциальных уравнений, задач идентификации параметров систем вида (0.1) и численного дифференцирования мы можем отсылать, например, к работам [8], [18] -[20]. Отметим также, что в последнее время получило развитие (см. [21] и цитированную там литературу) спектральный подход решения задач идентификации, основанный на *вейвлетах*, построенных с помощью ортогональных полиномов.

Основные сведения о полиномах Чебышева $T^{\alpha,\beta}_n(t; M)$, определяемых для произвольных действительных (или даже комплексных) α и β разностной формулой Родрига (1.2), собраны (для удобства ссылок) в §2. Конструкция оператора $\mathcal{X}_{m,M}(f) = \mathcal{X}_{m,M}(f, x)$, являющегося основным объектом исследования настоящей работы, возникает при линейной замене переменных, переводящей отрезок $[-1, 1]$ в отрезок $[-r, N + r - 1]$, из частичных сумм некоторого специального конечного ряда по полиномам $T^{r,r}_n(t; N)$. Наиболее короткий путь получения специального ряда, о котором идет речь, состоит в следующем. Пусть r и N – натуральные числа. Рассмотрим дискретную функцию $d(t)$, заданную на сетке $\bar{\Omega}_{N+2r} = \{-r, -r + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N - 1, N, \dots, N - 1 + r\}$. Через $\mathcal{D}_{2r-1,N}(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t)$ обозначим интерполяционный полином Лагранжа степени $2r - 1$, совпадающий с функцией $d(t)$ в точках множества $\{-r, -r + 1, \dots, -1, N, \dots, N - 1 + r\}$, стало быть,

$$\mathcal{D}_{2r-1,N}(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t) =$$
$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \frac{(t + 1)_r (N - t)_r}{(i - 1)!(r - i)!(N + i)_r} \left[\frac{d(-i)}{t + i} + \frac{d(N - 1 + i)}{N - 1 + i - t} \right].$$

Далее рассмотрим новую дискретную функцию $g(t) = \frac{d(t)-\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t)}{\mu(t;r,r,N)}$, где $\mu(t; r, r, N)$ – весовая функция, определенная равенством (1.5), которая для

$\alpha = \beta = r$ принимает следующий вид $\mu(t;r,r,N) = \frac{2^{2r+1}(t+1)_r(N-t)_r}{N(N+r)^{[r]}(N+2r)^{[r]}}$, где $(a)_r = a(a+1)\cdots(a+r-1)$, $a^{[r]} = a(a-1)\cdots(a-r+1)$. Дискретная функция $g(t)$ определена на сетке $\Omega_N = \{0,1,\dots,N-1\}$ и, следовательно, ее можно разложить в конечный ряд Фурье по системе полиномов Чебышева $\tau_k^{r,r}(t,N)$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$, ортонормированной на Ω_N с весом $\mu(t;r,r,N)$ (см.(1.7) и (1.8)): $g(t) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \tau_k^{r,r}(t,N)$, где g_k $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$ – коэффициенты Фурье функции $g(t)$ по системе $\tau_k^{r,r}(t,N)$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$, т.е.

$$g_k = \sum_{j=0}^{N-1} \mu(j;r,r,N)\tau_k^{r,r}(j,N)g(j) = \sum_{j\in\Omega_N} [d(j) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j)]\tau_k^{r,r}(j,N) = \hat{d}_{r,k}.$$

Из этих равенств имеем

$$d(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) + \mathcal{F}_r^N(t), \tag{0.5}$$

где

$$\mathcal{F}_r^N(t) = \mu(t;r,r,N)\sum_{k=0}^{N-1} \hat{d}_{r,k}\tau_k^{r,r}(t,N). \tag{0.6}$$

Правую часть равенства (0.5) будем называть *специальным или смешанным* рядом по полиномам Чебышева $\tau_k^{r,r}(t,N)$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$. Заметим, что частичная сумма ряда (0.5) вида

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) + \mu(t;r,r,N)\sum_{k=0}^{n} \hat{d}_{r,k}\tau_k^{r,r}(t,N) \tag{0.7}$$

представляет собой алгебраический полином степени $n+2r$. Теперь мы можем определить оператор $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$ следующим образом. Пусть функция $f = f(x)$, заданная на $[-1,1]$, принимает конечные значения $f(x_j)$ в узлах сетки $H_\Lambda = \{x_j = -1 + \frac{2j}{\Lambda-1}\}_{j=0}^{\Lambda-1}$, где $\Lambda = N+2r$. Тогда на сетке $\bar{\Omega}_{N+2r} = \{-r,-r+1,\dots,-1,0,1,\dots,N-1,N,\dots,N-1+r\}$ мы можем определить функцию $d = d(j) = f(x_{j+r})$, для которой, в свою очередь, определим оператор $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t)$. Определим, наконец, оператор $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ с помощью равенства $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t)$, где $t = \frac{\Lambda-1}{2}(x+1) - r$.

При исследовании разностных свойств операторов $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d)$ и соответствующих свойств операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ удобно пользоваться некоторой модификацией специального ряда (0.5), в которой вместо ортонормированных полиномов Чебышева $\tau_k^{r,r}(t,N)$ фигурируют полиномы Чебышева $T_k^{r,r}(t;N)$, связанные с $\tau_k^{r,r}(t,N)$ с помощью равенства (1.7). В связи с этим в §3 показано, что ряд $\mathcal{F}_{r,N}(t)$, фигурирующий в правой части равенства (0.5) может быть записан (см. (2.11)) в следующем виде

$$\mathcal{F}_r^N(d,t) = \frac{(-1)^r(t+1)_r(N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}}\sum_{k=r}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r,r}(t,N), \tag{0.8}$$

в которой

$$d_{r,k} = \frac{b_k}{\sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}} = \frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}}\sum_{j=0}^{N+r-1} \Delta^r d(j-r)T_k^{0,0}(j,N+r),$$

где b_k $(0 \leqslant k \leqslant N+r-1)$ – коэффициенты Фурье функции $b(t) = \Delta^r d(t-r)$ по полиномам Чебышева $\tau_k^{0,0}(t, N+r) = \frac{T_k^{r,r}(t,N+r)}{\sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}}$. Из (0.7) и (0.8) имеем

$$d(t) - \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t) = \frac{(-1)^r (t+1)_r (N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r,r}(t,N), \qquad (0.9)$$

и, как следствие, для полинома $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$, в свою очередь, имеет место следующее равенство

$$f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x) = \frac{(-1)^r (t+1)_r (N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r,r}(t,N), \qquad (0.10)$$

где $t = \frac{\Lambda-1}{2}(x+1) - r \in \bar{\Omega}_{N+2r}$ или (что то же) $x \in H_\Lambda$. Как показано в параграфах §4 и §5, аналогичные равенства справедливы для разностей $\Delta^\nu d(t) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t)$ и $\Delta_h^\nu f(x) - \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$ $(h = 2/(\Lambda-1))$.

Ряды (0.5), в которых выражение $\mathcal{F}_{r,N}(t)$ имеет вид (0.8) (но не (0.6)), ра́вно как и операторы $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d)$ и $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$, были введены впервые в работе [25] (см. также [26] и [27]). В работах [25]–[27], в частности, была рассмотрена задача об одновременном приближении аналитических функций f и их производных посредством полиномов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$ и их соответствующих производных. Основным (техническим) инструментом решения этой задачи в указанных работах являлись равенства (0.9) и (0.10) и аналогичные равенства (3.6) и (4.6) для конечных разностей. Дело заключается в том, что если f аналитическая функция в некотором эллипсе, содержащем отрезок $[-1,1]$, то, как показано в [25]–[27], коэффициенты $d_{r,k}$, фигурирующие в равенстве (0.10), а точнее их абсолютные величины $|d_{r,k}|$, допускают оценку сверху некоторой геометрической прогрессией q^k с $0 < q < 1$, и это, в свою очередь, позволяет получить точную по порядку оценку конечного ряда из правой части равенства (0.10). В то же время, задача об одновременном приближении функции $f(x)$, обладающей конечной гладкостью и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ посредством полиномов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$ и ее производных $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f,x)$ оставалась неисследованной. Для решения этой задачи потребовалось разработать принципиально иные подходы, не опирающиеся на равенство (0.10). Отметим также, что если точка $x \in [-1,1]$ не принадлежит сетке H_Λ, то равенство (0.10) может вообще не иметь места, а задача о приближении функции $f(x)$ полиномом $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$ остается актуальной для любого $x \in [-1,1]$. В настоящей работе предпринята попытка восполнить указанные пробелы. В частности, в §5 получена оценка (см.(4.19))

$$\frac{|f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)|}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r})^{r-\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$\mathcal{E}_{n+2r}^r(f,N) \left(\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^{\frac{1}{2}} + L_{n,N}^r(x) \right) \quad (x \in [-1,1]), \qquad (0.11)$$

где $\mathcal{E}_{n+2r}^r(f,N)$ – наилучшее приближение функции f, определенное равенством (4.9), $L_{n,N}^r(x)$ – функция Лебега для полинома $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$ (см.(4.20) и (4.17)), для которой в случае $r \geqslant 1$, $a > 0$, $1 \leqslant n \leqslant a\sqrt{N}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$получены (теорема 4 из §5 и следствие 4.1) оценки

$$L^r_{n,N}(x) \leqslant c(r,a)\left(1 + \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{1/2} \ln(n\sqrt{1-x^2}+1)\right), \qquad (0.12)$$

и, как следствие,

$$L^r_{n,N} = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} L^r_{n,N}(x) \leqslant c(r,a)\ln n \quad (n = 2,3,\ldots),$$

где здесь и всюду в дальнейшем $c, c(a), \ldots, c_i(a,b,\ldots,r)$ означают положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, различные в разных местах.

Идея применения операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ в задаче численного дифференцирования функции $f(x)$ возникает в связи с результатами, полученными в §6, в частности, с оценкой (5.42)(теорема 6). Дело в том, что оценке (5.42) можно придать несколько иной вид, поделив ее правую и левую части на $h^\nu = (\frac{2}{\Lambda-1})^\nu$, а именно:

$$\frac{|\frac{1}{h^\nu}\Delta^\nu_h\left[f(x_{j-\nu}) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_{j-\nu})\right]|}{\left(\sqrt{1-x_j^2}+\frac{1}{m}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$c(r,a)E^{r,\nu}_m(\frac{1}{h^\nu}\psi, N)\left(1 + \left(\sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{n}\right)^{1/2} \ln\left(n\sqrt{1-x_j^2}+1\right)\right), \qquad (0.13)$$

где $m = n + 2r - \nu$, $E^{r,\nu}_m(\frac{1}{h^\nu}\psi, N)$ – величина наилучшего приближения функции $\frac{1}{h^\nu}\psi(x) = \frac{1}{h^\nu}\Delta^\nu_h f(x - h\nu)$ на сетке $H_\Lambda = \{x_j = -1 + \frac{2j}{\Lambda-1}\}_{j=0}^{\Lambda-1}$ алгебраическими полиномами степени m, определенная равенством (5.30). Теперь воспользуемся известным свойством конечной разности, согласно которого в интервале $(x_{j-\nu}, x_j)$ найдется такая точка $y_j = x_{j-\nu} + \theta_j\nu h$ $(0 < \theta_j < 1)$, для которой $\frac{1}{h^\nu}\Delta^\nu_h g(x_{j-\nu}) = g^{(\nu)}(y_j)$. Применяя это равенство к функции $f(x_{j-\nu}) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_{j-\nu})$, из (0.13) получим

$$\frac{|f^{(\nu)}(y_j) - \mathcal{X}^{(\nu)}_{n+2r,N}(f,y_j)|}{\left(\sqrt{1-x_j^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$c(r,a)E^{r,\nu}_m(\frac{1}{h^\nu}\psi, N)\left(1 + \left(\sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{n}\right)^{1/2} \ln\left(n\sqrt{1-x_j^2}+1\right)\right), \qquad (0.14)$$

где $y_j = x_{j-\nu} + \theta_j\nu h$ $(0 < \theta < 1)$ для всех j таких, что $\nu \leqslant j \leqslant N + 2r - 1$. Нетрудно заметить, что если мы в оценке (0.14) заменим точки точки x_j на $y_j = x_{j-\nu} + \theta_j\nu h$, то она останется справедливой (возможно с другой константой $c(r,a)$) и примет следующий вид

$$\frac{|f^{(\nu)}(y_j) - \mathcal{X}^{(\nu)}_{n+2r,N}(f,y_j)|}{\left(\sqrt{1-y_j^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$c(r,a)E_m^{r,\nu}(\frac{1}{h^\nu}\psi,N)\left(1+\left(\sqrt{1-y_j^2}+\frac{1}{n}\right)^{1/2}\ln\left(n\sqrt{1-y_j^2}+1\right)\right), \qquad (0.15)$$

где $r\geqslant 1$, $0\leqslant\nu\leqslant r-1$, $a>0$, $1\leqslant n\leqslant a\sqrt{N}$. Кроме того заметим, что $\frac{1}{h^\nu}\psi(x_j)=\frac{1}{h^\nu}\Delta^\nu f(x_{j-\nu})=f^{(\nu)}(z_j)$, где $z_j=x_{j-\nu}+\eta_j\nu h$ $(0<\eta_j<1)$.

Оценка (0.15) показывает, что операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ успешно могут быть использованы в задаче одновременного приближения функций и их нескольких производных. Это подтвердили также компьютерные эксперименты, проведенные авторами при решении задачи идентификации переменных параметров системы (0.1). Для приложений важно то, что конструкция операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ базируется на массиве значений функции $f(x)$ в узлах равномерной сетки $H_\Lambda=\{x_j=-1+\frac{2j}{\Lambda-1}\}$.

Замечание 1. В связи с оценкой (0.15), полученной для узлов сетки $\{y_j=x_{j-\nu}+\theta_j\nu h\}_{j=\nu}^{N+2r-1}$, возникает вопрос о том, останется ли она справедливой для точек отрезка $[-1,1]$, не попавших в эту сетку. Но эта задача является объектом исследования другой работы.

Подводя итоги, отметим, что в настоящей работе получены результаты двух типов. Результаты первого типа касаются получения для разностей $|f(x)-\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)|$ и $|\Delta_h^\nu f(x_{j-\nu})-\Delta_h^\nu\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_{j-\nu})|$ неравенств типа Лебега, поведение функций Лебега $L_{n,N}^r(x)$ и $L_{n,N}^{r,\nu}(x)$ в которых отражал бы тот факт, что при $0\leqslant\nu\leqslant r-1$ вблизи концов отрезка $[-1,1]$ частичные суммы $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$ и их разностные производные $\frac{1}{h^\nu}\Delta_h^\nu\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_{j-\nu})$ приближают, соответственно, r раз дифференцируемую функцию f и ее разностные производные $\frac{1}{h^\nu}\Delta_h^\nu f(x_{j-\nu})$ значительно лучше (см.(0.11) – (0.13)), чем на всем отрезке.

Результаты второго типа касаются получения верхних оценок для функций Лебега $L_{n,N}^r(x)$ и $L_{n,N}^{r,\nu}(x)$, зависящие от точки $x\in[-1,1]$ (теорема 4, лемма 6.2 и равенства (5.40) и (5.41)). Можно показать, что оценка (0.12), установленная для $L_{n,N}^r(x)$ в теореме 4 и оценка сверху для величины $I_{n,N}^{r,\nu}(x)$, содержащаяся в лемме 6.2, неулучшаемы по порядку, если $x\in[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$. Другими словами, можно показать, что

$$c_1(r,a))\ln n\leqslant\max_{x\in[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]}L_{n,N}^r(x)\leqslant c_2(r,a)\ln n,$$

$$c_1(r,a))\ln n\leqslant\max_{x\in[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]}I_{n,N}^{r,\nu}(x)\leqslant c_2(r,a)\ln n,$$

если только $1\leqslant n\leqslant a\sqrt{N}$. Правые части этих неравенств непосредственно вытекают из теоремы 4 и леммы 6.2 , соответственно. Что же касается нижних оценок в этих неравенствах, то их можно доказать с помощью асимптотической формулы (1.20) и асимптотических формул для полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$. Но мы на этом здесь не остановимся. Вместо этого мы обсудим вопрос об окончательности оценок, установленных в теореме 5, ограничившись для определенности (и для краткости) случаем $r=1$. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[-1,1]$, $\|f'\|=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|\leqslant 1$. Тогда в силу известной теоремы Теляковского-Гопенгауза [1], [2] существует такой алгебраический полином $q_{n+2}(x)$ степени $n+2$, что $\frac{|f(x)-q_{n+2}(x)|}{\sqrt{1-x^2}}\leqslant cn^{-1}$. Отсюда следует, что, во-первых, $f(\pm1)=q_{n+2}(\pm1)$ и, во-вторых, $\frac{|f(x)-q_{n+2}(x)|}{\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n+2}}\leqslant\frac{c}{n}$. Сопоставляя эту оценку с равенствами (4.8) и (4.9), мы замечаем, что $E^1_{n+2}(f,N) \leqslant \mathcal{E}^1_{n+2}(f,N) \leqslant cn^{-1}$. Отсюда и из теоремы 5 находим $(1 \leqslant n \leqslant a\sqrt{N},\ -1 \leqslant x \leqslant 1)$

$$Z_{n,N}(f,x) = \frac{|f(x) - \mathcal{X}_{n+2,N}(f,x)|}{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2}\right)^{1/2}}$$

$$\leqslant \frac{c(a)}{n}\left(1 + \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \ln(n\sqrt{1-x^2}+1)\right).$$

Обозначим через W^r класс r раз непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций $f(x)$, для которых $\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f^{(r)}(x)| \leqslant 1$ и положим $W = W^1$. Тогда для $2 \leqslant n \leqslant a\sqrt{N}, N = 3,4,\ldots$ из последнего неравенства имеем

$$R_{n,N} = \sup_{f\in W}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} Z_{n,N}(f,x) \leqslant \frac{c(a)\ln n}{n}, \tag{0.16}$$

$$\mathcal{R}_{n,N} = \sup_{f\in W}\max_{x\in H_\Lambda} Z_{n,N}(f,x) \leqslant \frac{c(a)\ln n}{n}.$$

Можно доказать, что эти оценки являются окончательными по порядку в том смысле, что величину $\frac{\ln n}{n}$, фигурирующую в правых частях этих оценок, нельзя заменить существенно меньшей величиной $Q_n = o(\frac{\ln n}{n})$. Рассмотрим, например, оценку (0.16). Из справедливости неравенства $R_{n,N} \leqslant c(a)Q_n$ следует, что

$$R_{n,N}(\varepsilon) = \sup_{f\in W}\max_{-1+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon} \frac{|f(x) - \mathcal{X}_{n+2,N}(f,x)|}{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2}\right)^{1/2}} \leqslant c(a)Q_n.$$

Отсюда, переходя к пределу при $N \to \infty$, получим

$$R_n(\varepsilon) = \sup_{f\in W}\max_{-1+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon} \frac{|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2}(f,x)|}{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2}\right)^{1/2}} \leqslant c(a)Q_n, \tag{0.17}$$

где $\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x) = \lim_{N\to\infty}\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$. Чтобы получить явное выражение для предельного полинома $\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)$ мы обратимся к равенству (4.5) и асимптотической формуле (1.20), из которых нетрудно увидеть, что

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x) = D_{2r-1}(f,x) + \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=r}^{n+r}\frac{f_{r,k}}{k^{[r]}}P^{r,r}_{k-r}(x),$$

где

$$f_{r,k} = \frac{1}{2k+1}\int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)P^{0,0}_k(t)dt,$$

$D_{2r-1}(f,x)$ – интерполяционный полином Эрмита степени $2r-1$, удовлетворяющий условиям $D^{(\nu)}_{2r-1}(f,\pm 1) = f^{(\nu)}(\pm 1)$, $\quad \nu = 0,1,\ldots,r-1$. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)$ для функций $f \in W^r$ были исследованы в работе [28], в которой, в частности, доказано, что

$$U_n^r(\varepsilon) = \sup_{f\in W^r} \max_{-1+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon} \frac{|f(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)|}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1/2}} \geqslant \frac{c(r)\ln n}{n^r}, \tag{0.18}$$

где $c(r) > 0$. Поскольку $R_n(\varepsilon) \asymp U_n^1(\varepsilon)$, то, сопоставляя (0.17) и (0.18), мы придем к противоречию, если допустим, что $Q_n = o(\frac{\ln n}{n})$. Стало быть, оценка (0.16) в смысле порядка является окончательной.

Замечание 2. Если $f \in W^r$, то для $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$ имеет место равенство $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{h^\nu}\Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2,N}(f,x) = \mathcal{Y}_{n+2}^{(\nu)}(f,x)$. Используя этот факт и результаты, полученные в работе [28] (а именно, теорему 4.2 и равенство (3.10) из [28]), можно показать, что оценки, установленные в теореме 6 также носят окончательный характер для всего класса функций $f \in W^r$ (но не для каждой индивидуальной функции $f \in W^r$).

1. Некоторые сведения о полиномах Чебышева, ортогональных на равномерной сетке

Пусть N – натуральное, α, β – произвольные числа. Положим

$$\rho(x) = \rho(x;\alpha,\beta,N) = \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}, \tag{1.1}$$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{(-1)^n}{n!(N-1)^{[n]}\rho(x)}\Delta^n\left\{\rho(x)(x-N-\alpha)^{[n]}x^{[n]}\right\}, \tag{1.2}$$

где $\Delta^n f(x)$ – конечная разность n-го порядка функции $f(x)$ в точке x, т.е. $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^n f(x) = \Delta\Delta^{n-1} f(x)$ $(n \geqslant 1)$, $a^{[0]} = 1$, $a^{[k]} = a(a-1)\cdots(a-k+1)$ при $k \geqslant 1$. Для каждого $0 \leqslant n \leqslant N-1$ равенство (1.2) определяет [16] алгебраический полином степени n, для которого

$$T_n^{\alpha,\beta}(N-1,N) = \binom{n+\alpha}{n}, \qquad T_n^{\alpha,\beta}(0,N) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}.$$

Полные доказательства приведенных ниже свойств полиномов Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ можно найти, например, в монографии [**?**]. Прежде всего отметим, что полиномы $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ допускают следующее явное представление

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = (-1)^n\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_k x^{[k]}}{\Gamma(k+\beta+1)k!(N-1)^{[k]}}. \tag{1.3}$$

Если α, $\beta > -1$, то полиномы $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $\quad (0 \leqslant n \leqslant N-1)$ образуют ортогональную с весом $\rho(x)$ (см. (1.1)) систему на множестве $\Omega_N = \{0,1,\dots,N-1\}$, точнее

$$\sum_{x\in\Omega_N}\mu(x)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)T_m^{\alpha,\beta}(x,N) = h_{n,N}^{\alpha,\beta}\delta_{nm}, \tag{1.4}$$

где δ_{nm} – символ Кронекера,

$$\mu(x) = \mu(x;\alpha,\beta,N) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}\rho(x)$$

$$= \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}, \tag{1.5}$$

$$h_{n,N}^{\alpha,\beta} = \frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \tag{1.6}$$

При $n = 0$ произведение $(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)$ следует заменить на $\Gamma(\alpha+\beta+2)$. Для $0 \leqslant n \leqslant N-1$ положим

$$\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \left\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-1/2} T_n^{\alpha,\beta}(x,N). \tag{1.7}$$

Очевидно, если $0 \leqslant n,m \leqslant N-1$, то

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x)\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)\tau_m^{\alpha,\beta}(x,N) = \delta_{nm}. \tag{1.8}$$

Другими словами, многочлены $\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$ образуют ортонормированную с весом $\mu(x)$ систему на Ω_N.

Формула Кристоффеля–Дарбу для многочленов Чебышева имеет следующий вид:

$$\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\tau_k^{\alpha,\beta}(x)\tau_k^{\alpha,\beta}(y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{T_k^{\alpha,\beta}(x)T_k^{\alpha,\beta}(y)}{h_{k,N}^{\alpha,\beta}} =$$

$$\frac{(N-1)^{[n+1]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2}\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\times$$

$$\frac{T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)T_n^{\alpha,\beta}(y) - T_n^{\alpha,\beta}(x)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y}. \tag{1.9}$$

Поскольку $\Delta a^{[k]} = ka^{[k-1]}$, то из (1.3) находим

$$(n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x,N) + (n+\beta+1)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$$

$$= \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1}xT_n^{\alpha,\beta+1}(x-1,N-1). \tag{1.10}$$

Из равенства $\mu(N-1-x;\beta,\alpha,N) = \mu(x;\alpha,\beta,N)$, непосредственно вытекающего из соотношения ортогональности (1.4) следует, что при $\alpha,\beta > -1$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = (-1)^n T_n^{\beta,\alpha}(N-1-x,N). \tag{1.11}$$

Поскольку обе части этого равенства аналитичны относительно α и β, то оно справедливо для произвольных α и β. Из (1.10) и (1.11) имеем также следующее равенство

$$(n+\alpha+1)T_n^{\alpha,\beta}(x,N) - (n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x,N)$$

$$= \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1}(N-1-x)T_n^{\alpha+1,\beta}(x,N-1). \tag{1.12}$$

Непосредственно из явной формулы (1.3) мы можем вывести следующее полезное равенство

$$\Delta^m T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_m}{(N-1)^{[m]}}T_{n-m}^{\alpha+m,\beta+m}(x,N-m), \tag{1.13}$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ при $k \geqslant 1$. Если β такое целое число, что $-n \leqslant \beta \leqslant -1$, то из (1.13) выводим также

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{(n+\beta)!}{n!}\frac{(n+\alpha)^{[-\beta]}x^{[-\beta]}}{(N-1)^{[-\beta]}}T_{n+\beta}^{\alpha,-\beta}(x+\beta,N+\beta), \tag{1.14}$$

а если α и β – целые, $-n \leqslant \beta \leqslant -1$, $-(n+\beta) \leqslant \alpha \leqslant -1$, $N \geqslant 2$, то

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]}(N-x-1)^{[-\alpha]}}{(N-1)^{[-\beta]}(N-1+\beta)^{[-\alpha]}}T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha,-\beta}(x+\beta,N+\alpha+\beta). \tag{1.15}$$

Разностная формула Родрига (1.1) допускает следующее обобщение

$$\rho(x+m;\alpha,\beta,N+m)T_n^{\alpha,\beta}(x+m,N+m) =$$

$$\frac{(-1)^m}{n^{[m]}(N)_m}\Delta^m\left\{\rho(x;\alpha+m,\beta+m,N)T_{n-m}^{\alpha+m,\beta+m}(x,N)\right\}, \tag{1.16}$$

которое, впрочем, непосредственно вытекает из (1.1). Заменяя здесь m на ν, α и β на $m-\nu$, n на $k+\nu-m$, мы можем также записать

$$\Delta^\nu\{(x+1)_m(N-x)_m T_{k-m}^{m,m}(x,N)\} =$$

$$(-1)^\nu(k+\nu-m)^{[\nu]}(N+\nu-1)^{[\nu]}(x+1+\nu)_{m-\nu}(N-x)_{m-\nu}T_{k+\nu-m}^{m-\nu,m-\nu}(x+\nu,N+\nu). \tag{1.17}$$

Если в равенстве (1.16) мы заменим α, β и n, соответственно, на $\alpha-m$, $\beta-m$ и $k+m$, то придем к формуле

$$\Delta^m T_{k+m}^{\alpha-m,\beta-m}(x,N) = \frac{(k+\alpha+\beta)^{[m]}}{(N-1)^{[m]}}T_k^{\alpha,\beta}(x,N-m). \tag{1.18}$$

Мы введем здесь двух-индексные полиномы Чебышева $T_{k,M}^{\alpha,\beta}(x)$ и $\hat{T}_{k,M}^{\alpha,\beta}(x)$ с помощью следующих равенств ($0 \leqslant k \leqslant M-1$):

$$T_{k,M}^{\alpha,\beta}(x) = T_k^{\alpha,\beta}\left(\frac{M-1}{2}(1+x),M\right), \quad \hat{T}_{k,M}^{\alpha,\beta}(x) = \tau_k^{\alpha,\beta}\left(\frac{M-1}{2}(1+x),M\right). \tag{1.19}$$

В случае целых α и β в [22, 24, **?**] установлен следующий результат. Пусть $P_n^{\alpha,\beta}(x)$– полином Якоби, для которого $P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$, $a > 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = P_n^{\alpha,\beta}(t) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t), \tag{1.20}$$

для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ которой при $1 \leqslant n \leqslant aN^{1/2}$, $\delta > 0$ справедлива оценка

$$|v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)| \leqslant c\sqrt{\frac{n}{N}}\left[|1-t|^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left[|1+t|^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{n}\right]^{-\beta-\frac{1}{2}}, \tag{1.21}$$

где $c = c(\alpha,\beta,a,\delta)$, $-1-\delta/n^2 \leqslant t \leqslant 1+\delta/n^2$.

Далее, пусть j_1, j_2 – фиксированные целые числа, α,β – неотрицательные целые числа, $1 \leqslant n \leqslant aN^{\frac{1}{2}}$ $(a > 0)$, $\delta \geqslant 0$, $|\tau| \leqslant \delta$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда из (1.20) и (1.21) с учетом известных весовых оценок для полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ непосредственно выводится следующая оценка:

$$\left|T_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{N+j_1}{2}(1+t)+\tau, N+j_2\right]\right| \leqslant$$

$$cn^{-\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{n}\right]^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left[(1+t)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{n}\right]^{-\beta-\frac{1}{2}}, \tag{1.22}$$

где $c = c(a,\alpha,\beta,j_1,j_2,\delta)$.

2. Некоторые специальные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке

При конструировании операторов $\mathcal{X}_{n,N}(f) = \mathcal{X}_{n,N}(f,x)$, действующих в пространстве непрерывных на $[-1,1]$ функций $f = f(x)$, использующих в качестве исходной информации значения $f(x_j)$ $(0 \leqslant j \leqslant N-1)$, нам понадобятся некоторые специальные ряды по полиномам Чебышева $\tau_k^{r,r}(t,N)$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$, ортогональным на равномерной сетке $\{0,\ldots,N-1\}$.

Пусть r и N – натуральные числа. Рассмотрим дискретную функцию $d(t)$, заданную на сетке $\bar{\Omega}_{N+2r} = \{-r,-r+1,\ldots,-1,0,1,\ldots,N-1,N,\ldots,N-1+r\}$. Через $\mathcal{D}_{2r-1,N}(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t)$ обозначим интерполяционный полином Лагранжа степени $2r-1$, совпадающий с функцией $d(t)$ в точках множества $\{-r,-r+1,\ldots,-1,N,\ldots,N-1+r\}$. Стало быть,

$$\mathcal{D}_{2r-1,N}(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) =$$

$$\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\frac{(t+1)_r(N-t)_r}{(i-1)!(r-i)!(N+i)_r}\left[\frac{d(-i)}{t+i}+\frac{d(N-1+i)}{N-1+i-t}\right]. \tag{2.1}$$

Далее рассмотрим новую дискретную функцию

$$g(t) = \frac{d(t)-\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t)}{\mu(t;r,r,N)}, \tag{2.2}$$

где $\mu(t;r,r,N)$ – весовая функция, определенная равенством (1.5), которое для $\alpha=\beta=r$ принимает следующий вид

$$\mu(t;r,r,N) = \frac{2^{2r+1}(t+1)_r(N-t)_r}{N(N+r)^{[r]}(N+2r)^{[r]}}. \tag{2.3}$$

Дискретная функция $g(t)$ определена на сетке Ω_N и, следовательно, ее можно разложить в конечный ряд Фурье по системе полиномов Чебышева $\tau_k^{r,r}(t,N)$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$, ортогональной на Ω_N с весом $\mu(t;r,r,N)$, а именно, имеет место равенство

$$g(t) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \tau_k^{r,r}(t,N), \tag{2.4}$$

где g_k $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$ – коэффициенты Фурье функции $g(t)$ по системе $\tau_k^{r,r}(t,N)$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$. В силу (2.2) мы можем записать

$$g_k = \sum_{j=0}^{N-1} \mu(j;r,r,N)\tau_k^{r,r}(j,N)g(j) = \sum_{j\in\Omega_N} [d(j) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j)]\tau_k^{r,r}(j,N) = \hat{d}_{r,k}. \tag{2.5}$$

Из (2.2) – (2.5) имеем

$$d(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) + \mu(t;r,r,N)\sum_{k=0}^{N-1} \hat{d}_{r,k}\tau_k^{r,r}(t,N). \tag{2.6}$$

Правую часть равенства (2.6) будем называть *специальным или смешанным* рядом по полиномам Чебышева $\tau_k^{r,r}(t,N)$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$.

Для дальнейшего преобразуем правую часть равенства (2.6). Положим

$$F(t) = d(t-r), \qquad t \in \Omega_{N+2r}, \tag{2.7}$$

$$b(t) = b(t;r,N) = \Delta^r F(t), \tag{2.8}$$

$$d_{r,k} = d_{r,k}(N+r) = \frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{t\in\Omega_{N+r}} b(t)T_k^{0,0}(t,N+r). \tag{2.9}$$

Тогда смешанный ряд (2.6) функции $d = d(t)$ принимает следующий вид

$$d(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) + \mathcal{F}_{r,N}(d,t), \tag{2.10}$$

$$\mathcal{F}_{r,N}(d,t) = \frac{(-1)^r(t+1)_r(N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r,r}(t,N). \tag{2.11}$$

В самом деле, используя ортогональность при $k \geqslant r$ полинома $T_k^{0,0}(j,N+r)$ к полиному $\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j-r)$, из (2.8) – (2.10) имеем

$$d_{r,k} = \frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j\in\Omega_{N+r}} T_k^{0,0}(j,N+r)\Delta^r d(j-r) =$$

$$\frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j\in\Omega_{N+r}} T_k^{0,0}(j,N+r)\Delta^r[d(j-r) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j-r)].$$

Отсюда, воспользовавшись преобразованием Абеля r раз и учитывая равенство (1.15) , находим

$$d_{r,k} = \frac{(-1)^r 2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j\in\Omega_N} [d(j) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j)]\Delta^r T_k^{0,0}(j,N+r) =$$

$$\frac{(-1)^r 2}{(N+r)h^{0,0}_{k,N+r}}\frac{(k+1)_r}{(N+r-1)^{[r]}}\sum_{j\in\Omega_N}[d(j)-\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j)]T^{r,r}_{k-r}(j,N),$$

откуда, полагая

$$\bar d_{r,k}=\frac{2}{(N+r)}\sum_{j\in\Omega_N}[d(j)-\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j)]T^{r,r}_{k}(j,N),$$

получаем

$$\frac{d_{r,k+r}}{(k+r)^{[r]}}=\frac{(-1)^r\bar d_{r,k}}{h^{0,0}_{k+r,N+r}}\frac{(k+r+1)_r}{(k+r)^{[r]}(N+r-1)^{[r]}}=$$

$$\frac{(-1)^r\bar d_{r,k}(N+r-1)^{[k+r]}}{(N+2r+k)^{[k+r]}}\frac{(k+r+1)_r}{(k+r)^{[r]}(N+r-1)^{[r]}}\frac{2k+2r+1}{2}=$$

$$\frac{(-1)^r\bar d_{r,k}(N+r-1)^{[r]}}{(N+2r)^{[r]}}\frac{(N-1)^{[k]}}{(N+2r+k)^{[k]}}\frac{2^{2r}}{(N+r-1)^{[r]}}\frac{k!(k+2r)!}{(k+r)!^2}\frac{2k+2r+1}{2^{2r+1}}=$$

$$\bar d_{r,k}\frac{(-1)^r 2^{2r}}{(N+2r)^{[r]}}\frac{1}{h^{r,r}_{k,N}}.$$

С учетом этого равенства выводим

$$d(t)=\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t)+\frac{2^{2r}(t+1)_r(N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}(N+2r)^{[r]}}\sum_{k=0}^{N-1}\bar d_{r,k}\frac{T^{r,r}_k(t,N)}{h^{r,r}_{k,N}}.$$

Далее заметим, что

$$\frac{\bar d_{r,k}}{(h^{r,r}_{k,N})^{\frac12}}=\hat d_{r,k}=\sum_{j\in\Omega_N}[d(j)-\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j)]\tau^{r,r}_k(j,N), \tag{2.12}$$

поэтому предыдущее равенство принимает вид

$$d(t)=\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t)+\frac{2^{2r+1}(t+1)_r(N-t)_r}{N(N+r)^{[r]}(N+2r)^{[r]}}\sum_{k=0}^{N-1}\hat d_{r,k}\tau^{r,r}_k(t,N)=$$

$$\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t)+\mu(t;r,r,N)\sum_{k=0}^{N-1}\hat d_{r,k}\tau^{r,r}_k(t,N), \tag{2.13}$$

$t\in\bar\Omega_{N+2r}=\{-r,\dots,-1,0,1,\dots,N-1,N,\dots,N-1+r\}$. Сопоставляя (2.13) с (2.6), убеждаемся, что правые части равенств (2.6) и (2.10) совпадают.

Рассмотрим некоторые разностные свойства ряда (2.10), которые нам понадобятся в дальнейшем. Применим равенства (2.10) и (2.11) к функции $\partial(t)=\Delta^\nu d(t-\nu)$, заданной на $\bar\Omega_{N+\nu+2(r-\nu)}=\{-r+\nu,\dots,-1,0,1,\dots,N-1,N,\dots,N-1+r\}$. Это дает

$$\partial(t)=\Delta^\nu d(t-\nu)=\mathcal{D}_{2(r-\nu)-1,N+\nu}(\partial,t)+\mathcal{F}_{r-\nu,N+\nu}(\partial,x), \tag{2.14}$$

где

$$\mathcal{D}_{2(r-\nu)-1,N+\nu}(\partial,t)=$$

$$\sum_{i=1}^{r-\nu}\frac{(-1)^{i-1}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(i-1)!(r-\nu-i)!(N+\nu+i)_{r-\nu}}\left[\frac{\partial(-i)}{t+i}+\frac{\partial(N+\nu-1+i)}{N+\nu-1+i-t}\right], \tag{2.15}$$

$$\mathcal{F}_{r-\nu,N+\nu}(\partial,t)=$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r-\nu}^{N-1+r}\frac{\partial_{r-\nu,k}}{k^{[r-\nu]}}T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(x,N+\nu), \tag{2.16}$$

С другой стороны заметим, что

$$\partial_{r-\nu,k}=\frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}}\sum_{t=0}^{N+r-1}\Delta^{r-\nu}\partial(t-r+\nu)T_k^{0,0}(t,N+r)=$$

$$\frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}}\sum_{t=0}^{N+r-1}\Delta^{r}d(t-r)T_k^{0,0}(t,N+r)=d_{r,k}, \tag{2.17}$$

поэтому (2.16) можно переписать еще так

$$\mathcal{F}_{r-\nu,N+\nu}(\partial,t)=$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r-\nu}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r-\nu]}}T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(t,N+\nu).$$

Равенство (2.14) в развернутом виде принимает теперь следующий вид

$$\partial(t)=\Delta^{\nu}d(t-\nu)=\mathcal{D}_{2(r-\nu)-1,N+\nu}(\partial,t)+$$

$$(-1)^{r-\nu}\frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r-\nu}^{N-1+r}\frac{\partial_{r-\nu,k}}{k^{[r-\nu]}}T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(t,N+\nu)=$$

$$\mathcal{D}_{2(r-\nu)-1,N+\nu}(\partial,t)+$$

$$(-1)^{r-\nu}\frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r-\nu}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r-\nu]}}T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(t,N+\nu). \tag{2.18}$$

Далее, взяв конечные разности порядка ν от обеих частей равенства (2.10) и учитывая (1.19), имеем

$$\partial(t)=\Delta^{\nu}d(t-\nu)=\Delta^{\nu}\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t-\nu)+$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r-\nu]}}T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(t,N+\nu). \tag{2.19}$$

Сопоставляя (2.18) с (2.19), мы замечаем, что

$$\Delta^{\nu}\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t-\nu)=\mathcal{D}_{2(r-\nu)-1,N+\nu}(\partial,t)+$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r-\nu}^{r-1}\frac{d_{r,k}}{k^{[r-\nu]}}T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(t,N+\nu). \tag{2.20}$$

3. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t)$

Рассмотрим частичную сумму ряда (2.6) вида

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) + \mu(t;r,r,N)\sum_{k=0}^{n}\hat{d}_{r,k}\tau_k^{r,r}(t,N). \quad (3.1)$$

Нетрудно увидеть, что если $d = d(t)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+2r$, то $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t) \equiv d(t)$, т.е. $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t)$ является проектором на пространство алгебраических полиномов степени $n+2r$. В самом деле, если $d = d(t)$ – алгебраический полином степени $n+2r$, то функция $g(t)$, определенная равенством (2.2), представляет собой алгебраический полином степени n, поэтому при $k > n$ $g_k = 0$ и, как следствие,

$$\frac{d(t) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t)}{\mu(t;r,r,N)} = \sum_{k=0}^{n} g_k\tau_k^{r,r}(t,N),$$

откуда и следует требуемое равенство:

$$d(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) + \mu(t;r,r,N)\sum_{k=0}^{n} g_k\tau_k^{r,r}(t,N) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t).$$

Как было показано в предыдущем разделе, смешанный ряд (2.6) может быть преобразован к виду (2.10) и, как следствие, оператор $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x)$ допускает также следующее представление

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(x) + \frac{(-1)^r(x+1)_r(N-x)_r}{(N-1+r)^{[r]}}\sum_{k=r}^{n+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r]}}T_{k-r}^{r,r}(x,N). \quad (3.2)$$

С другой стороны, из равенств (2.6) и (3.1) непосредственно вытекает, что полином $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x)$ интерполирует функцию $d(x)$ в узлах множества $A = \{-r,-r+1,\dots,-1\}\bigcup\{N,N+1,\dots,N-1+r\}$, т.е. мы имеем

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x) = d(x) \quad (x \in A). \quad (3.3)$$

Далее мы имеем ($x \in \bar{\Omega}_{N+2r}$)

$$d(x) - \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,x) =$$
$$\frac{(-1)^r(x+1)_r(N-x)_r}{(N-1+r)^{[r]}}\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r]}}T_{k-r}^{r,r}(x,N) = \mathcal{R}_{n,N}^r(d,x). \quad (3.4)$$

Пусть $0 \leqslant \nu \leqslant r$, $-r \leqslant t \leqslant N-1+r-\nu$ (t – целое). Тогда мы можем взять конечные разности порядка ν от обеих частей равенства (3.4), что дает

$$\Delta^\nu d(t) - \Delta^\nu\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t) = \Delta^\nu\mathcal{R}_{n,N}^r(t) =$$
$$\frac{(-1)^r}{(N-1+r)^{[r]}}\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r}\frac{d_{r,k}}{k^{[r]}}\Delta^\nu\{(t+1)_r(N-t)_rT_{k-r}^{r,r}(t,N)\}. \quad (3.5)$$

Если теперь воспользуемся равенством (1.17), то из (3.5) приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.1. *Пусть* $0 \leqslant \nu \leqslant r$, $-r \leqslant t \leqslant N-1+r-\nu$ *(t – целое). Тогда имеет место равенство*

$$\Delta^\nu d(t) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t) =$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1+\nu)_{r-\nu}(N-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k+\nu-r}^{r-\nu,r-\nu}(t+\nu, N+\nu). \quad (3.6)$$

Рассмотрим задачу об оценке разности $|\Delta^\nu d(t-\nu) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t-\nu)|$ в терминах наилучших приближений функции $\partial(x) = \Delta^\nu d(x-\nu)$ алгебраическими полиномами в одном весовом нормированном пространстве. С этой целью заметим, что в силу (3.2), (2.17), (2.20) и (1.19) имеет место равенство

$$\Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t-\nu) = \mathcal{D}_{2(r-\nu)-1,N+\nu}(\partial,t)+$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{n+r} \frac{(\partial)_{r-\nu,k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(t, N+\nu)$$

$$= \mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(\partial,t). \quad (3.7)$$

Пусть $p_m(t)$ – произвольный алгебраический полином степени $m \leqslant n+2r-\nu$. Тогда $\mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(p_m,t) \equiv p_m(t)$, поэтому мы можем записать

$$p_m(t) - \mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(\partial,t) \equiv \mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(p_m-\partial,t).$$

С учетом этого факта из (3.7) имеем

$$\Delta^\nu d(t-\nu) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t-\nu) = \partial(t) - \mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(\partial,t)$$

$$= \partial(t) - p_m(t) + \mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(p_m-\partial,t). \quad (3.8)$$

Для натуральных N, m и r положим

$$v = v(t) = v_{r,m,N}(t) = \frac{1}{N+r}\sqrt{(t+r)(N+r-1-t)} + \frac{1}{m}.$$

Через $C_v(\bar\Omega_{N+2(r-\nu)})$ обозначим нормированное пространство дискретных функций $b(t)$, заданных на $\bar\Omega_{N+2(r-\nu)}$, для которых норма определяется равенством

$$\|b\|_v = \max_{t\in\bar\Omega_{N+2(r-\nu)}} \frac{|b(t)|}{v^{r-\nu}(t)},$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant r$. Обозначим через $p_{n+2r-\nu}(\partial) = p_{n+2r-\nu}(\partial)(t)$ алгебраический полином степени $n+2r-\nu$, который совпадает с функцией $\partial(t)$ в точках множества $A = \{-r+\nu, -r+\nu+1, \ldots, -1, N+\nu, N+\nu+1, \ldots, N+r-1\}$ и среди таких полиномов осуществляет наилучшее приближение к $\partial(t)$ в нормированном пространстве $C_v(\bar\Omega_{N+2(r-\nu)})$. Положим $E^v_{n+2r-\nu}(\partial) = \|\partial - p_{n+2r-\nu}(\partial)\|_v$. Тогда из (3.8) имеем

$$|\Delta^\nu d(t-\nu) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t-\nu)| = |\partial(t) - \mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(\partial,t)| \leqslant$$

$$|\partial(t)-p_{n+2r-\nu}(\partial)(t)|+|\mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial,t)|\leqslant$$
$$v^{r-\nu}(t)E^{v}_{n+2r-\nu}(\partial)+|\mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial,t)|. \tag{3.9}$$

С другой стороны, в силу (3.2)

$$\mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial,t)=\mathcal{D}_{2(r-\nu)-1,N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial,t)+$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r-\nu}^{n+r}\frac{(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial)_{r-\nu,k}}{k^{[r-\nu]}}T^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu}(t,N+\nu).$$

Поскольку, очевидно, что $\mathcal{D}_{2(r-\nu)-1,N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial,t)\equiv 0$, то это равенство можно переписать так

$$\mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial,t)=$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r-\nu}^{n+r}\frac{(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial)_{r-\nu,k}}{k^{[r-\nu]}}T^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu}(t,N+\nu). \tag{3.10}$$

Далее, имеем

$$(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial)_{r-\nu,k}=$$

$$\frac{2}{(N+r)h^{0,0}_{k,N+r}}\sum_{t=0}^{N+r-1}\Delta^{r-\nu}[p_{n+2r-\nu}(\partial)(j-r+\nu)-\partial(j-r+\nu)]T^{0,0}_{k}(j,N+r).$$

Применим к правой части этого равенства преобразование Абеля $r-\nu$ раз. Тогда с учетом того, что разность $p_{n+2r-\nu}(\partial)(j)-\partial(j)$ обращается в нуль во всех точках множества $A=\{-r+\nu,-r+\nu+1,\dots,-1,N+\nu,N+\nu+1,\dots,N+r-1\}$, мы находим

$$(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial)_{r-\nu,k}=$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}2}{(N+r)h^{0,0}_{k,N+r}}\sum_{j=0}^{N+r-1}[p_{n+2r-\nu}(\partial)(j)-\partial(j)]\Delta^{r-\nu}T^{0,0}_{k}(j,N+r).$$

Обратимся теперь к формуле (1.15), из которой находим

$$\Delta^{r-\nu}T^{0,0}_{k}(j,N+r)=\frac{(k+1)_{r-\nu}T^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu}(j,N+\nu)}{(N+r-1)^{[r-\nu]}}.$$

Подставляя это выражение в правую часть предыдущего равенства, получим

$$(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial)_{r-\nu,k}=$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}2}{(N+r)h^{0,0}_{k,N+r}}\sum_{j=0}^{N+r-1}[p_{n+2r-\nu}(\partial)(j)-\partial(j)]\frac{(k+1)_{r-\nu}T^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu}(j,N+\nu)}{(N+r-1)^{[r-\nu]}}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) находим

$$\mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial,t)=$$

$$\frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r-\nu}^{n+r}\frac{2T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(t,N+\nu)}{k^{[r-\nu]}(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}}\times$$

$$\sum_{t=0}^{N+r-1}[p_{n+2r-\nu}(\partial)(j)-\partial(j)]\frac{(k+1)_{r-\nu}T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(j,N+\nu)}{(N+r-1)^{[r-\nu]}}=$$

$$\frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\frac{2}{N+r}\sum_{j=0}^{N+r-1}[p_{n+2r-\nu}(\partial)(j)-\partial(j)]\times$$

$$\sum_{k=r-\nu}^{n+r}\frac{(k+1)_{r-\nu}T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(j,N+\nu)T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(t,N+\nu)}{k^{[r-\nu]}.(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}}.$$

Отсюда имеем

$$|\mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial,t)|\leqslant$$

$$\frac{2(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{j=0}^{N+r-1}\frac{|p_{n+2r-\nu}(\partial)(j)-\partial(j)|}{v^{r-\nu}(j)}\times$$

$$v^{r-\nu}(j)\left|\sum_{k=r-\nu}^{n+r}\frac{(k+1)_{r-\nu}T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(j,N+\nu)T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(t,N+\nu)}{k^{[r-\nu]}.(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}}\right|. \qquad (3.12)$$

Положим

$$\lambda_{n,N,r,\nu}(t)=\frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}v^{r-\nu-\frac12}(t)}\times$$

$$\frac{2}{N+r}\sum_{j=0}^{N+r-1}v^{r-\nu}(j)\left|\sum_{k=r-\nu}^{n+r}\frac{(k+1)_{r-\nu}T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(j,N+\nu)T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(t,N+\nu)}{k^{[r-\nu]}.h_{k,N+r}^{0,0}}\right|. \qquad (3.13)$$

Тогда неравенство (3.12) принимает следующий вид

$$\frac{|\mathcal{Y}_{n+2r-\nu,N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial)-\partial,t)|}{v^{r-\nu-\frac12}(t)}\leqslant E_{n+2r-\nu}^{v}(\partial)\lambda_{n,N,r,\nu}(t). \qquad (3.14)$$

Из (3.9) и (3.14) выводим следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть* $0\leqslant\nu\leqslant r-1$, $-r+\nu\leqslant t\leqslant N-1+r$ *(t – целое). Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{|\Delta^\nu d(t-\nu)-\Delta^\nu\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t-\nu)|}{v^{r-\nu-\frac12}(t)}\leqslant E_{n+2r-\nu}^{v}(\partial)\left(v^{\frac12}(t)+\lambda_{n,N,r,\nu}(t)\right). \qquad (3.15)$$

В связи с неравенством (3.15) возникает важная задача об оценке величины $\lambda_{n,N,r,\nu}(t)$ при $-r+\nu\leqslant t\leqslant N-1+r$ (t – целое), $n,N\to\infty$. Эта задача является частным случаем более общей задачи, рассмотренной ниже в §6 (см. (5.40), (5.41) и лемму 6.2).

4. Операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$

Пусть функция $f=f(x)$ определена в узлах сетки $H_\Lambda = \{x_j = -1+\frac{2j}{\Lambda-1}\}_{j=0}^{\Lambda-1}$, где $\Lambda = N+2r$. С помощью равенства

$$d(j-r) = f(x_j) \quad (j=0,1,\ldots,N+2r-1) \tag{4.1}$$

мы можем на сетке $\bar\Omega_\Lambda = \{-r,-r+1,\ldots,-1,0,1,\ldots,N-1,N,\ldots,N-1+r\}$ определить дискретную функцию $d=d(t)$ и для нее построить оператор $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d,t)$. Тогда

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}\left(d, \frac{\Lambda-1}{2}(1+x)-r\right) \tag{4.2}$$

представляет собой алгебраический полином степени $n+2r$, для которого

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_j) = f(x_j), \quad 0 \leqslant j \leqslant r-1, \quad N+r \leqslant j \leqslant N-1+2r. \tag{4.3}$$

В частности, если $p_m(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $m \leqslant n+2r$, то из (4.2) следует, что

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(p_m,x) = p_m(x) \tag{4.4}$$

тождественно. Далее, полагая $t = \frac{\Lambda-1}{2}(1+x)-r$ и сопоставляя (4.1) с (4.2), мы можем записать

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) + \frac{(-1)^r(t+1)_r(N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{f_{r,k}^N}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r,r}(t,N), \tag{4.5}$$

где $f_{r,k}^N = d_{r,k}$,

$$\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \frac{(t+1)_r(N-t)_r}{(i-1)!(r-i)!(N+i)_r} \left[\frac{f(x_{r-i})}{t+i} + \frac{f(x_{N-1+r+i})}{N-1+i-t}\right].$$

Из (4.2) и теоремы (3.1) непосредственно вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.1. *Пусть $t = \frac{\Lambda-1}{2}(1+x)-r$, $h = \frac{2}{\Lambda-1}$, $0 \leqslant \nu \leqslant r$, $-r \leqslant t \leqslant N-1+r-\nu$ (t – целое). Тогда имеет место равенство*

$$\Delta_h^\nu f(x) - \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x) =$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1+\nu)_{r-\nu}(N-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{f_{r,k}^N}{k^{[r-\nu]}} T_{k+\nu-r}^{r-\nu,r-\nu}(t+\nu,N+\nu), \tag{4.6}$$

где $\Delta_h^\nu g(x)$ есть ν - тая степень оператора конечной разности $\Delta_h g(x) = g(x+h)-g(x)$ с шагом h.

Через $C[-1,1]$ обозначим, как обычно, пространство непрерывных функций, определенных на $[-1,1]$. Мы можем рассмотреть $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$

как линейный оператор, действующий в $C[-1,1] : f \to \mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$. Нашей целью является изучение аппроксимативных свойств этих операторов, другими словами, требуется исследовать поведение разности $|f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)|$ при определенных условиях на гладкость функции $f(x)$.

Нам понадобятся некоторые обозначения. Среди алгебраических полиномов $p_m(x)$ степени m, удовлетворяющих условию

$$f(x_j) = p_m(x_j), \quad j \in \{0,1,\dots,r-1\} \bigcup \{N+r,\dots,N+2r-1\}, \tag{4.7}$$

через $p_m^r(f) = p_{m,N}^r(f,x)$ и $q_m^r(f) = q_{m,N}^r(f,x)$ обозначим, соответственно, полиномы, для которых

$$E_m^r(f,N) = \inf_{p_m} \max_{x \in H_\lambda} \frac{|f(x) - p_m(x)|}{(\sqrt{1-x^2}+1/m)^r} = \max_{x \in H_\lambda} \frac{|f(x) - p_m^r(f,x)|}{(\sqrt{1-x^2}+1/m)^r}, \tag{4.8}$$

$$\mathcal{E}_m^r(f,N) = \inf_{p_m} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \frac{|f(x) - p_m(x)|}{(\sqrt{1-x^2}+1/m)^r} = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \frac{|f(x) - q_m^r(f,x)|}{(\sqrt{1-x^2}+1/m)^r}. \tag{4.9}$$

Учитывая (4.4), мы имеем

$$f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x) = f(x) - p_{n+2r}^r(f,x) + \mathcal{X}_{n+2r,N}(p_{n+2r}^r(f) - f, x), \tag{4.10}$$

$$f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x) = f(x) - q_{n+2r}^r(f,x) + \mathcal{X}_{n+2r,N}(q_{n+2r}^r(f) - f, x). \tag{4.11}$$

Сопоставляя (4.10) и (4.11) с (4.3), (4.5) и (4.6), мы замечаем, что

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(p_{n+2r}^r(f) - f, x) =$$

$$\frac{(-1)^r (t+1)_r (N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{n+r} (p_{n+2r}^r(f) - f)_{r,k} \frac{T_{k-r}^{r,r}(t,N)}{k^{[r]}}, \tag{4.12}$$

где (конечная разность Δ^r берется по переменной j)

$$(p_{n+2r}^r(f) - f)_{r,k} = \frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N+r-1} T_k^{0,0}(j, N+r) \Delta^r (p_{n+2r}^r(f,x_j) - f(x_j)).$$

Отсюда, после r-кратного преобразования Абеля, учитывая равенства (4.7), находим

$$(p_{n+2r}^r(f) - f)_{r,k} = \frac{(-1)^r 2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r T_k^{0,0}(j, N+r)(p_{n+2r}^r(f,x_{j+r}) - f(x_{j+r})).$$

Воспользуемся теперь формулой (1.15). Тогда последнее равенство приобретет следующий вид

$$(p_{n+2r}^r(f) - f)_{r,k} =$$

$$\frac{(-1)^r 2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(k+1)_r T_{k-r}^{r,r}(j,N)}{(N+r-1)^{[r]}} (p_{n+2r}^r(f,x_{j+r}) - f(x_{j+r})).$$

Подставляя это выражение в (4.12), мы получаем

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(p^r_{n+2r}(f)-f,x)=\frac{(t+1)_r(N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}}\frac{2}{N+r}\times$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}(p^r_{n+2r}(f,x_{j+r})-f(x_{j+r}))\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+r+1)_r T_k^{r,r}(j,N)T_k^{r,r}(t,N)}{(k+r)^{[r]}(N+r-1)^{[r]}h^{0,0}_{k+r,N+r}}.$$

С другой стороны, учитывая (1.6), заметим,что

$$(N+r)(N+r-1)^{[r]}h^{0,0}_{k+r,N+r}\frac{(N+r-1)^{[r]}(k+r)^{[r]}}{(k+r+1)_r}=$$

$$(N+r)(N+r-1)^{[r]}\frac{(N+k+2r)^{[k+r]}}{(N+r-1)^{[k+r]}}\frac{2}{2k+2r+1}\frac{(N+r-1)^{[r]}(k+r)^{[r]}}{(k+r+1)_r}=$$

$$N\frac{(N+2r)^{[2r]}}{2^{2r}}h^{r,r}_{k,N},$$

поэтому, принимая во внимание (1.15), предыдущее выражение принимает окончательно следующий вид

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(p^r_{n+2r}(f)-f,x)=$$

$$\frac{(t+1)_r(N-t)_r2^{2r}}{(N+2r)^{[2r]}}\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(p^r_{n+2r}(f,x_{j+r})-f(x_{j+r}))\sum_{k=0}^{n}\frac{T_k^{r,r}(j,N)T_k^{r,r}(t,N)}{h^{r,r}_{k,N}}$$

$$=\frac{(t+1)_r(N-t)_r2^{2r}}{(N+2r)^{[2r]}}\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(p^r_{n+2r}(f,x_{j+r})-f(x_{j+r}))\mathcal{K}^{r,r}_{n,N}(j,t). \tag{4.13}$$

Совершенно аналогично мы выводим

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(q^r_{n+2r}(f)-f,x)=$$

$$\frac{(t+1)_r(N-t)_r2^{2r}}{(N+2r)^{[2r]}}\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(q^r_{n+2r}(f,x_{j+r})-f(x_{j+r}))\mathcal{K}^{r,r}_{n,N}(j,t). \tag{4.14}$$

Если мы примем во внимание (4.8) и (4.9), то из (4.13) и (4.14) можем вывести следующие оценки:

$$|\mathcal{X}_{n+2r,N}(p^r_{n+2r}(f)-f,x)|\leqslant E^r_{n+2r}(f,N)\frac{|(t+1)_r(N-t)_r|2^{2r}}{(N+2r)^{[2r]}}I^r_{n,N}(x), \tag{4.15}$$

$$|\mathcal{X}_{n+2r,N}(q^r_{n+2r}(f)-f,x)|\leqslant \mathcal{E}^r_{n+2r}(f,N)\frac{|(t+1)_r(N-t)_r|2^{2r}}{(N+2r)^{[2r]}}I^r_{n,N}(x), \tag{4.16}$$

где

$$I^r_{n,N}(x)=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sqrt{1-x^2_{j+r}}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\left|\mathcal{K}^{r,r}_{n,N}(j,t)\right|, \tag{4.17}$$

причем в неравенстве (4.15) $x \in H_\Lambda$. Отсюда, с учетом (4.8) и (4.9) мы выводим следующие неравенства типа Лебега

$$\frac{|f(x)-\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)|}{(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n+2r})^{r-\frac{1}{2}}} \leqslant$$
$$E^r_{n+2r}(f,N)\left(\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n+2r}\right)^{\frac{1}{2}}+L^r_{n,N}(x)\right) \quad (x \in H_\Lambda), \tag{4.18}$$
$$\frac{|f(x)-\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)|}{(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n+2r})^{r-\frac{1}{2}}} \leqslant$$
$$\mathcal{E}^r_{n+2r}(f,N)\left(\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n+2r}\right)^{\frac{1}{2}}+L^r_{n,N}(x)\right) \quad (x \in [-1,1]), \tag{4.19}$$

в которых фигурирует функция Лебега $L^r_{n,N}(x)$, определенная равенством

$$L^r_{n,N}(x)=\frac{I^r_{n,N}(x)|(t+1)_r(N-t)_r|2^{2r}}{(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n+2r})^{r-\frac{1}{2}}(N+2r)^{[2r]}}. \tag{4.20}$$

Неравенства (4.18) и (4.19) сводят задачу об оценке разности $|f(x)-\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)|$ к исследованию поведения функции Лебега $L^r_{n,N}(x)$ для полинома $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$ при $n,N\to\infty$. Из (4.20) видно, что для этой цели нам необходимо оценить величину $I^r_{n,N}(x)$, определенную равенством (4.17). Эта задача впервые была рассмотрена в работе работе [29]. В следующем параграфе мы приводим с полным доказательством основной результат, анонсированный в [29] без доказательства.

5. Оценки для функции Лебега полинома $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$

Ввиду равенства (4.20) задача об оценке сверху функции Лебега $L^r_{n,N}(x)$ сводится к аналогичной задаче для величины $I^r_{n,N}(x)$ при $x\in[-1,1]$.

Лемма 5.1. *Пусть $r \geqslant 1$, $a>0$, $1\leqslant n\leqslant a\sqrt{N}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. Тогда имеет место оценка*

$$I^r_{n,N}(x)\leqslant \frac{c(r,a)}{\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r+\frac{1}{2}}}\left(1+\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\ln(n\sqrt{1-x^2}+1)\right).$$

Доказательство. В силу (4.17) и (1.11) имеем $I^r_{n,N}(x)=I^r_{n,N}(-x)$, поэтому достаточно рассмотреть случай $0\leqslant x\leqslant 1$. Сумму (4.17), определяющую $I^r_{n,N}(x)$, разобьем на две по схеме:

$$I^r_{n,N}(x)=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sqrt{1-x^2_{j+r}}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\left|\mathcal{K}^{r,r}_{n,N}(j,t)\right|=$$
$$\frac{2}{N}\sum_{x_r\leqslant x_{j+r}\leqslant -1/2}\left(\sqrt{1-x^2_{j+r}}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\left|\mathcal{K}^{r,r}_{n,N}(j,t)\right|+$$

$$\frac{2}{N}\sum_{-1/2<x_{j+r}\leqslant x_{N-1+r}}\left(\sqrt{1-x_{j+r}^2}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\left|\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)\right|.$$

Отсюда, полагая $x_j=\cos\theta_j$, $\varphi=\arccos x$, имеем

$$I_{n,N}^r(x)=\sum_{k=1}^{4}J_k, \tag{5.1}$$

где

$$J_1=\frac{2}{N}\sum_{x_r\leqslant x_{j+r}\leqslant -1/2}\left(\sqrt{1-x_{j+r}^2}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\left|\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)\right|,$$

$$J_2=\frac{2}{N}\sum_{\varphi+\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\left|\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)\right|,$$

$$J_3=\frac{2}{N}\sum_{\varphi-\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}\leqslant\varphi+\frac{1}{n}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\left|\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)\right|,$$

$$J_4=\frac{2}{N}\sum_{\arccos x_{N-1+r}\leqslant\theta_{j+r}<\varphi-\frac{1}{n}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\left|\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)\right|,$$

причем если окажется, что $\varphi\leqslant 1/n$, то $J_4=0$, а вместо $\varphi-1/n$ в J_3 следует взять $\arccos x_{N-1+r}$. Перейдем к оценкам величин J_k, для чего предварительно заметим, что при $\Lambda=N-1+2r$, $\alpha=\beta=r$ и $n\leqslant a\sqrt{N}$

$$\lambda_n=\frac{(N-1)^{[n+1]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2}\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\asymp nN. \tag{5.2}$$

Далее, введем следующие обозначения

$$\hat{T}_n^r(u)=\hat{T}_{n,N}^r(u)=T_n^{r,r}\left(\frac{\Lambda-1}{2}(1+u),N\right)\quad(0\leqslant n\leqslant N-1), \tag{5.3}$$

$$\tilde{T}_n^r(u)=\tilde{T}_{n,N}^r(u)=T_n^{r+1,r}\left(\frac{\Lambda-1}{2}(1+u),N-1\right)\quad(0\leqslant n\leqslant N-2) \tag{5.4}$$

и рассмотрим ядро $\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)$. Формула Кристоффеля-Дарбу (1.9) с учетом введенных здесь обозначений приобретает следующий вид

$$\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)=\lambda_n\frac{T_{n+1}^{r,r}(j)T_n^{r,r}(t)-T_n^{r,r}(j)T_{n+1}^{r,r}(t)}{j-t}=$$

$$\frac{2\lambda_n}{\Lambda-1}\frac{\hat{T}_{n+1}^r(x_{j+r}-\frac{2r}{\Lambda-1}))\hat{T}_n^r(x-\frac{2r}{\Lambda-1})-\hat{T}_n^r(x_{j+r}-\frac{2r}{\Lambda-1}))\hat{T}_{n+1}^r(x-\frac{2r}{\Lambda-1})}{x_{j+r}-x}. \tag{5.5}$$

Поэтому для J_1 мы получаем

$$J_1\leqslant\frac{4\lambda_n}{N(\Lambda-1)}\left|\hat{T}_n^r\left(x-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)\right|\times$$

$$\sum_{x_r\leqslant x_{j+r}\leqslant -1/2}\left(\sqrt{1-x_{j+r}^2}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\left|\hat{T}_{n+1}^r\left(x_{j+r}-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)\right|+$$

$$\frac{4\lambda_n}{N(\Lambda-1)}\left|\hat{T}_{n+1}^r\left(x-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)\right|\times$$

$$\sum_{x_r\leqslant x_{j+r}\leqslant -1/2}\left(\sqrt{1-x_{j+r}^2}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\left|\hat{T}_{n}^r\left(x_{j+r}-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)\right|.$$

Отсюда, имея ввиду (1.22) и (5.3), выводим

$$J_1\leqslant c(r,a)\frac{\sqrt{n}}{\Lambda-1}\left[\left|\hat{T}_n^r\left(x-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)\right|+\left|\hat{T}_{n+1}^r\left(x-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)\right|\right]\times$$

$$\sum_{x_r\leqslant x_{j+r}\leqslant -1/2}\left(\sqrt{1-x_{j+r}^2}+\frac{1}{n+2r}\right)^{-\frac12}\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r-\frac12}\left[\frac{\sqrt{n+2r}}{\Lambda-1}+\int_{x_r}^{-\frac12}\left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n+2r}\right)^{-\frac12}dt\right]\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r-\frac12}. \tag{5.6}$$

Оценим J_3 при $\varphi>1/n$. С этой целью снова обратимся к формуле (1.9) (первое равенство), которую перепишем так

$$\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)=\sum_{k=0}^n\frac{T_k^{r,r}(j)T_k^{r,r}(t)}{h_{k,N}^{r,r}}=\sum_{k=0}^n\frac{\hat{T}_k^r(x_{j+r}-\frac{2r}{\Lambda-1})\hat{T}_k^r(x-\frac{2r}{\Lambda-1})}{h_{k,N}^{r,r}}, \tag{5.7}$$

где при $1\leqslant k\leqslant n\leqslant a\sqrt{N}$

$$h_{k,N}^{r,r}\asymp 1/k. \tag{5.8}$$

Поэтому, пользуясь весовой оценкой (1.22), находим

$$J_3\leqslant\frac{2}{N}\sum_{\varphi-\frac1n\leqslant\theta_{j+r}\leqslant\varphi+\frac1n}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\times$$

$$\sum_{k=0}^n\frac{1}{h_{k,N}^{r,r}}\left|\hat{T}_k^r\left(\cos\varphi-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)\hat{T}_k^r\left(\cos\theta_{j+r}-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)\right|\leqslant$$

$$\frac{c(r,a)}{N}\sum_{\varphi-\frac1n\leqslant\theta_{j+r}\leqslant\varphi+\frac1n}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\times$$

$$\sum_{k=0}^n\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{k+1}\right)^{-r-\frac12}\left(\sin\varphi+\frac{1}{k+1}\right)^{-r-\frac12}=$$

$$\frac{c(r,a)}{N}\sum_{k=0}^n\left(\sin\varphi+\frac{1}{k+1}\right)^{-r-\frac12}\times$$

$$\sum_{\varphi-\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}\leqslant\varphi+\frac{1}{n}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+2r}\right)^{r}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{k+1}\right)^{-r-\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$c(r,a)\sum_{k=0}^{n}\left(\sin\varphi+\frac{1}{k+1}\right)^{-r-\frac{1}{2}}\times$$

$$\frac{2}{\Lambda-1}\sum_{\varphi-\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}\leqslant\varphi+\frac{1}{n}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{k+1}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.9}$$

Далее, так как $\arccos\tau=\tau(1-\tau^2)^{1/2}+2\int_\tau^1(1-y^2)^{1/2}dy$, то ($1\leqslant j\leqslant\Lambda-2$)

$$\theta_{j-1}-\theta_j=\arccos x_{j-1}-\arccos x_j\leqslant\frac{1}{\sqrt{\Lambda-2}},$$

$$\frac{\theta_{j-1}}{\theta_j}=1+\frac{\theta_{j-1}-\theta_j}{\theta_j}\leqslant1+\frac{1}{(\Lambda-1)^{1/2}\arccos x_{\Lambda-2}}<2,$$

$$\frac{2}{\Lambda-1}=x_j-x_{j-1}=\cos\theta_j-\cos\theta_{j-1}=2\sin\frac{\theta_{j-1}-\theta_j}{2}\sin\frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2}\leqslant$$

$$\frac{1}{2}(\theta_{j-1}^2-\theta_j^2)\leqslant(\theta_{j-1}-\theta_j)\theta_{j-1}\leqslant2(\theta_{j-1}-\theta_j)\theta_j. \tag{5.10}$$

Из (5.9) и (5.10) имеем

$$J_3\leqslant c(r,a)\sum_{k=0}^{n}\left(\sin\varphi+\frac{1}{k+1}\right)^{-r-\frac{1}{2}}\times$$

$$\sum_{\varphi-\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}\leqslant\varphi+\frac{1}{n}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{k+1}\right)^{-\frac{1}{2}}(\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r})\theta_{j+r}\leqslant$$

$$c(r,a)\sum_{k=0}^{n}\left(\sin\varphi+\frac{1}{k+1}\right)^{-r-\frac{1}{2}}\times$$

$$\sum_{\varphi-\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}\leqslant\varphi+\frac{1}{n}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{k+1}\right)^{-\frac{1}{2}}(\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r})\sin\theta_{j+r}\leqslant$$

$$c(r,a)n\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r-\frac{1}{2}}\times$$

$$\sum_{\varphi-\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}\leqslant\varphi+\frac{1}{n}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+1}\right)\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}(\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r})\leqslant$$

$$c(r,a)n\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r-\frac{1}{2}}\times$$

$$\sum_{\varphi-\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}\leqslant\varphi+\frac{1}{n}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}(\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r})\leqslant$$

$$c(r,a)n\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r-\frac12}\times$$

$$\left[\int\limits_{\varphi-\frac1n}^{\varphi+\frac1n}\left(\theta+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac12}d\theta+\left(\sin\theta_{j_0+r}+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac12}(\theta_{j_0+r-1}-\theta_{j_0+r})\right]\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r-\frac12}\left(\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac12}\leqslant c(r,a)\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r}, \quad (5.11)$$

где θ_{j_0+r} – ближайший слева к $\varphi+\frac1n$ из узлов θ_{j+r}. Для дальнейшего отметим также, что если $\varphi\leqslant 1/n$, то

$$J_3\leqslant c(r,a)n\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r-\frac12}\times$$

$$\sum_{\arccos x_{N-1+r}\leqslant\theta_{j+r}\leqslant\varphi+\frac1n}\left(\theta_{j+r}+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac12}(\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r})\leqslant$$

$$c(r,a)n\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r-\frac12}\times$$

$$\left[\int\limits_{0}^{\varphi+\frac1n}\left(\theta+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac12}d\theta+\left(\sin\theta_{j_0+r}+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac12}(\theta_{j_0+r-1}-\theta_{j_0+r})\right]\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r-\frac12}\left(\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac12}\leqslant c(r,a)\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r}. \quad (5.12)$$

Перейдем к оценке J_2 при $\varphi>1/n$. С этой целью преобразуем числитель в правой части формулы (5.5) с помощью равенства (1.12) следующим образом. Имеем

$$T_{n+1}^{r,r}(v,N)=\left(1+\frac{r}{n+1}\right)T_n^{r,r}(v,N)-\left(1+\frac{r}{n+1}\right)\left(2-\frac{2v}{N-1}\right)T_n^{r+1,r}(v,N-1),$$

и поэтому

$$T_{n+1}^{r,r}(j,N)T_n^{r,r}(t,N)-T_n^{r,r}(j,N)T_{n+1}^{r,r}(t,N)=$$

$$\left(1+\frac{r}{n+1}\right)\left[\left(2-\frac{2t}{N-1}\right)T_n^{r+1,r}(t,N-1)T_n^{r,r}(j,N)-\right.$$

$$\left.\left(2-\frac{2j}{N-1}\right)T_n^{r+1,r}(j,N-1)T_n^{r,r}(t,N)\right]=$$

$$\left(1+\frac{r}{n+1}\right)\left\{\left[1-\left(1+\frac{2r}{N-1}\right)x\right]\tilde T_n^r\left(x-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)\hat T_n^r\left(x_{j+r}-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)-\right.$$

$$\left.\left[1-\left(1+\frac{2r}{N-1}\right)x_{j+r}\right]\tilde T_n^r\left(x_{j+r}-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)\hat T_n^r\left(x-\frac{2r}{\Lambda-1}\right)\right\}. \quad (5.13)$$

Из (5.1) и (5.13) находим

$$J_2 = \frac{2}{N} \sum_{\varphi+\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \left|\mathcal{K}^{r,r}_{n,N}(j,t)\right| \leqslant J_{21} + J_{22}, \tag{5.14}$$

где

$$J_{21} = c(r,a)n \left|\left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1}\right)x\right] \tilde{T}^r_n\left(x - \frac{2r}{\Lambda-1}\right)\right| \times$$

$$\frac{2}{N} \sum_{\varphi+\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \left|\frac{\hat{T}^r_n\left(\cos\theta_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1}\right)}{\cos\theta_{j+r} - \cos\varphi}\right|, \tag{5.15}$$

$$J_{22} = c(r,a)n \left|\hat{T}^r_n\left(x - \frac{2r}{\Lambda-1}\right)\right| \frac{2}{N} \sum_{\varphi+\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \times$$

$$\left|\left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1}\right)\cos\theta_{j+r}\right]\right| \left|\frac{\tilde{T}^r_n\left(\cos\theta_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1}\right)}{\cos\theta_{j+r} - \cos\varphi}\right|. \tag{5.16}$$

Теперь обратимся к весовой оценке (1.22). Тогда из (5.15) и (5.16) имеем

$$J_{21} = c(r,a)\left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1}\right)x\right]\left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n}\right]^{-r-3/2} \times$$

$$\frac{2}{N} \sum_{\varphi+\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \frac{\left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n}\right)^{-r-1/2}}{|\cos\theta_{j+r} - \cos\varphi|},$$

$$J_{22} \leqslant c(r,a)\left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n}\right]^{-r-1/2} \frac{2}{N} \sum_{\varphi+\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \times$$

$$\left|\left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1}\right)\cos\theta_{j+r}\right]\right| \frac{\left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n}\right)^{-r-3/2}}{|\cos\theta_{j+r} - \cos\varphi|},$$

но, поскольку при $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi/3]$ справедлива оценка $\cos\theta - \cos\varphi \asymp \varphi^2 - \theta^2$, то

$$J_{21} \leqslant c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{-r+1/2} \times$$

$$\sum_{\varphi+\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^{-1/2} \frac{(\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r})\theta_{j+r}}{\theta^2_{j+r} - \varphi^2}.$$

Отсюда, с учетом того, что $\theta^2_{j+r} - \varphi^2 \geqslant (\theta_{j+r} - \varphi)\theta_{j+r}, \quad \theta_{j+r-1} - \theta_{j+r} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Lambda-2}}$, имеем

$$J_{21} \leqslant c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{-r+1/2} \times$$

$$\sum_{\varphi+\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r}}{\theta_{j+r}-\varphi}=$$

$$\sum_{\theta_{j_1+r}<\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r}}{\theta_{j+r}-\varphi}+$$

$$\left(\sin\theta_{j_1+r}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{\theta_{j_1+r-1}-\theta_{j_1+r}}{\theta_{j_1+r}-\varphi}\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\left[\int_{\varphi+\frac{1}{n}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{d\theta}{\theta-\varphi}+\right.$$

$$\left.\left(\sin\theta_{j_1+r}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{\theta_{j_1+r-1}-\theta_{j_1+r}}{\theta_{j_1+r}-\varphi}\right]\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\left[\int_{\varphi+\frac{1}{n}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{d\theta}{\theta-\varphi}+\right.$$

$$\left.\left(\sin\varphi+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{n}{\sqrt{N-1}}\right]\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\left(\int_{\varphi+\frac{1}{n}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{-1/2}d\theta}{\theta-\varphi}+\left(\sin\varphi+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\right)\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\int_{\varphi+\frac{1}{n}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{-1/2}d\theta}{\theta-\varphi}+c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r},\quad(5.17)$$

где θ_{j_1+r} – ближайшая к $\varphi+\frac{1}{n}$ справа из узлов θ_{j+r}. Аналогично, из (5.16) находим

$$J_{22}\leqslant c(r,a)\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r-1/2}\times$$

$$\sum_{\varphi+\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}}\left|\left[1-\left(1+\frac{2r}{N-1}\right)\cos\theta_{j+r}\right]\right|\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{-3/2}\frac{\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r}}{\theta_{j+r}-\varphi}.$$

С другой стороны,

$$\left|1-\left(1+\frac{2r}{N-1}\right)\cos\theta_{j+r}\right|=\left|1-\cos\theta_{j+r}+\frac{2r}{N-1}\cos\theta_{j+r}\right|\leqslant$$

$$2\sin^2\frac{\theta_{j+r}}{2}+\frac{2r}{N-1}\leqslant c(a,r)\left(\sin^2\frac{\theta_{j+r}}{2}+\frac{1}{n^2}\right)\leqslant c(a,r)\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^2.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства имеем

$$J_{22}\leqslant c(r,a)\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r-1/2}\times$$

$$\sum_{\varphi+\frac{1}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{1/2} \frac{\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r}}{\theta_{j+r}-\varphi} \leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r-1/2}\int_{\varphi+\frac{1}{n}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{1/2}d\theta}{\theta-\varphi}+c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r}. \quad (5.18)$$

Далее имеем

$$\int\limits_{\varphi+\frac{1}{n}}^{2\pi/3}\frac{\theta^{\alpha-1/2}}{\theta-\varphi}d\theta\leqslant c(\alpha)\begin{cases}\varphi^{\alpha-\frac{1}{2}}[\ln(n\varphi+1)+1], & -\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2},\\ \varphi^{\alpha-\frac{1}{2}}\ln(n\varphi+1)+1, & \frac{1}{2}<\alpha.\end{cases}$$

Отсюда и из (5.17) и (5.18) имеем ($\varphi>1/n$)

$$J_{21}\leqslant c(r,a)\varphi^{-r}[\ln(n\varphi+1)+1],\quad J_{22}\leqslant c(r,a)\varphi^{-r}[\ln(n\varphi+1)+\varphi^{-1/2}]. \quad (5.19)$$

Сопоставляя (5.14) с (5.19), приходим к следующей оценке

$$J_2\leqslant c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r}\left(\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}+\ln(n\sqrt{1-x^2}+1)\right). \quad (5.20)$$

Оценим J_4 при $\varphi>1/n$. Совершенно аналогично тому, как это было сделано для J_{21} и J_{22}, мы Имеем

$$J_4=\frac{2}{N}\sum_{\theta_{N-1+r}\leqslant\theta_{j+r}<\varphi-\frac{1}{n}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\left|\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)\right|\leqslant J_{41}+J_{42}, \quad (5.21)$$

где

$$J_{41}=c(r,a)\left[1-\left(1+\frac{2r}{N-1}\right)x\right]\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r-3/2}\times$$

$$\frac{2}{N}\sum_{\substack{\theta_{N-1+r}\leqslant\\ \theta_{j+r}<\varphi-\frac{1}{n}}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+2r}\right)^r\frac{\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{-r-1/2}}{|\cos\theta_{j+r}-\cos\varphi|}\leqslant$$

$$c(r,a)\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r+1/2}\frac{2}{\Lambda-1}\sum_{\substack{\theta_{N-1+r}\leqslant\\ \theta_{j+r}<\varphi-\frac{1}{n}}}\frac{\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}}{|\cos\theta_{j+r}-\cos\varphi|}\leqslant$$

$$c(r,a)\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r+1/2}\sum_{\substack{\theta_{N-1+r}\leqslant\\ \theta_{j+r}<\varphi-\frac{1}{n}}}\frac{\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}}{|\cos\theta_{j+r}-\cos\varphi|}(\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r})\theta_{j+r}\leqslant$$

$$c(r,a)\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r+1/2}\sum_{\substack{\theta_{N-1+r}\leqslant\\ \theta_{j+r}<\varphi-\frac{1}{n}}}\frac{\theta_{j+r}^{1/2}}{\varphi^2-\theta_{j+r}^2}(\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r})\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\left(\int_0^{\varphi-\frac{1}{n}}\frac{\theta^{1/2}d\theta}{\varphi^2-\theta^2}+\frac{(\theta_{j_2+r-1}-\theta_{j_2+r})\theta_{j_2+r}}{\varphi^2-\theta_{j_2+r}^2}\right)\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\left(\int_0^{\varphi-\frac{1}{n}}\frac{\theta^{1/2}d\theta}{\varphi^2-\theta^2}+\frac{n}{\sqrt{\Lambda}}\right), \tag{5.22}$$

$$J_{42}\leqslant c(r,a)\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r-1/2}\frac{2}{N}\sum_{\theta_{N-1+r}\leqslant\theta_{j+r}<\varphi-\frac{1}{n}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+2r}\right)^{r}\times$$

$$\left|\left[1-\left(1+\frac{2r}{N-1}\right)\cos\theta_{j+r}\right]\right|\frac{\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{-r-3/2}}{|\cos\theta_{j+r}-\cos\varphi|}\leqslant$$

$$c(r,a)\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r-1/2}\frac{2}{\Lambda-1}\sum_{\substack{\theta_{N-1+r}\leqslant\\ \theta_{j+r}<\varphi-\frac{1}{n}}}\frac{\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{1/2}}{|\cos\theta_{j+r}-\cos\varphi|}\leqslant$$

$$c(r,a)\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r-1/2}\sum_{\substack{\theta_{N-1+r}\leqslant\\ \theta_{j+r}<\varphi-\frac{1}{n}}}\frac{\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{1/2}}{|\cos\theta_{j+r}-\cos\varphi|}(\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r})\theta_{j+r}\leqslant$$

$$c(r,a)\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r-1/2}\sum_{\substack{\theta_{N-1+r}\leqslant\\ \theta_{j+r}<\varphi-\frac{1}{n}}}\frac{\theta_{j+r}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{1/2}}{\varphi^2-\theta_{j+r}^2}(\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r})\leqslant$$

$$c(r,a)\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r-1/2}\varphi^{\frac{3}{2}}\sum_{\substack{\theta_{N-1+r}\leqslant\\ \theta_{j+r}<\varphi-\frac{1}{n}}}\frac{\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r}}{\varphi^2-\theta_{j+r}^2}\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r-1/2}\varphi^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^{\varphi-\frac{1}{n}}\frac{d\theta}{\varphi^2-\theta^2}+\frac{\theta_{j_2+r-1}-\theta_{j_2+r}}{\varphi^2-\theta_{j_2+r}^2}\right)\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r-1/2}\varphi^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^{\varphi-\frac{1}{n}}\frac{d\theta}{\varphi^2-\theta^2}+\frac{n}{\varphi\sqrt{\Lambda}}\right)\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r}\left(\varphi\int_0^{\varphi-\frac{1}{n}}\frac{d\theta}{\varphi^2-\theta^2}+\frac{n}{\sqrt{\Lambda}}\right), \tag{5.23}$$

где θ_{j_2+r} – ближайший слева к $\varphi-\frac{1}{n}$ из узлов θ_{j+r}. Но при $\sigma\geqslant0$, $\varphi>1/n$ имеем

$$\int\limits_0^{\varphi-\frac{1}{n}}\frac{\theta^\sigma}{\varphi^2-\theta^2}d\theta\leqslant\varphi^\sigma\int\limits_0^{\varphi-\frac{1}{n}}\frac{d\theta}{\varphi^2-\theta^2}d\theta=\frac{1}{2}\varphi^{\sigma-1}\ln(2n\varphi-1)\leqslant c(\sigma)(\varphi+1/n)^{\sigma-1}\ln(n\varphi+1),$$

поэтому из (5.21)– (5.23) выводим оценку

$$J_4\leqslant c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r}(\ln(n\sqrt{1-x^2}+1)+1).$$

Сопоставляя эту оценку с (5.6), (5.12), (5.20), убеждаемся в справедливости леммы 6.1 в случае $\varphi > 1/n$, где $x = \cos\varphi$. Перейдем к случаю $0 \leqslant \varphi \leqslant 1/n$. Тогда мы записать

$$I_{n,N}^r(x) \leqslant \sum_{k=1}^{3} U_k,$$

где

$$U_1 = \frac{2}{N} \sum_{x_r \leqslant x_{j+r} \leqslant -1/2} \left(\sqrt{1-x_{j+r}^2} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \left|\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)\right|,$$

$$U_2 = \frac{2}{N} \sum_{\frac{2}{n} < \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \left|\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)\right|,$$

$$U_3 = \frac{2}{N} \sum_{\arccos x_{N-1+r} \leqslant \theta_{j+r} \leqslant \frac{2}{n}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \left|\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)\right|.$$

Заметим, что $U_1 = J_1$ (см.(5.1)), поэтому из (5.6) вытекает оценка

$$U_1 \leqslant c(r,a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{-r-\frac{1}{2}}.$$

Оценим U_2. Мы здесь, не оговаривая особо, применяем рассуждения, которые уже применялись при оценке J_2. Имеем

$$U_2 = \frac{2}{N} \sum_{\frac{2}{n} \leqslant \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \left|\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j,t)\right| \leqslant U_{21} + U_{22},$$

где

$$U_{21} = c(r,a) n \left| \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1}\right) x\right] \tilde{T}_n^r \left(x - \frac{2r}{\Lambda - 1}\right)\right| \times$$

$$\frac{2}{N} \sum_{\frac{2}{n} \leqslant \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \left| \frac{\hat{T}_n^r\left(\cos\theta_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1}\right)}{\cos\theta_{j+r} - \cos\varphi} \right|,$$

$$U_{22} = c(r,a) n \left| \hat{T}_n^r \left(x - \frac{2r}{\Lambda-1}\right)\right| \frac{2}{N} \sum_{\frac{2}{n} \leqslant \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \times$$

$$\left| \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1}\right)\cos\theta_{j+r}\right] \right| \left| \frac{\tilde{T}_n^r\left(\cos\theta_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1}\right)}{\cos\theta_{j+r} - \cos\varphi} \right|.$$

Обратимся к весовой оценке (1.22). Это дает

$$U_{21} = c(r,a) n \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1}\right) x\right] \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n}\right]^{-r-3/2} \times$$

$$\frac{2}{N} \sum_{\frac{2}{n} \leqslant \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r}\right)^r \frac{\left(\sin\theta_{j+r} + \frac{1}{n}\right)^{-r-1/2}}{|\cos\theta_{j+r} - \cos\varphi|},$$

$$U_{22} \leqslant (r,a)n\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r-1/2}\frac{2}{N}\sum_{\frac{2}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+2r}\right)^{r}\times$$

$$\left|\left[1-\left(1+\frac{2r}{N-1}\right)\cos\theta_{j+r}\right]\right|\frac{\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{-r-3/2}}{|\cos\theta_{j+r}-\cos\varphi|}.$$

Поскольку, как уже отмечалось выше, при $\varphi\in[0,\pi/2]$, $\theta\in[0,2\pi/3]$ справедлива оценка $\cos\theta-\cos\varphi\asymp\varphi^2-\theta^2$, то с учетом (5.10) имеем

$$U_{21}\leqslant c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\times$$

$$\sum_{\frac{2}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n+2r}\right)^{-1/2}\frac{(\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r})\theta_{j+r}}{\theta_{j+r}^2-\varphi^2}$$

и, так как $\theta_{j+r}^2-\varphi^2\geqslant(\theta_{j+r}-\varphi)\theta_{j+r}$, то

$$U_{21}\leqslant c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\times$$

$$\sum_{\frac{2}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r}}{\theta_{j+r}-\varphi}=$$

$$\sum_{\frac{2}{n}<\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r}}{\theta_{j+r}-\varphi}+$$

$$\left(\sin\theta_{j_1+r}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{\theta_{j_1+r-1}-\theta_{j_1+r}}{\theta_{j_1+r}-\varphi}\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\left[\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{d\theta}{\theta-\varphi}+\right.$$

$$\left.\left(\sin\theta_{j_1+r}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{\theta_{j_1+r-1}-\theta_{j_1+r}}{\theta_{j_1+r}-\varphi}\right]\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\left[\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{d\theta}{\theta-\varphi}+\right.$$

$$\left.\left(\sin\varphi+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\frac{n}{\sqrt{N-1}}\right]\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\left(\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{-1/2}d\theta}{\theta-\varphi}+\left(\sin\varphi+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\right)\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r+1/2}\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{-1/2}d\theta}{\theta-\varphi}+c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r},$$

где θ_{j_1+r} - ближайший к $\frac{2}{n}$ справа из узлов θ_{j+r}. Аналогично находим

$$U_{22} \leqslant (r,a)n\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r-1/2}\times$$

$$\sum_{\frac{2}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}}\left|\left[1-\left(1+\frac{2r}{N-1}\right)\cos\theta_{j+r}\right]\right|\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{-3/2}\frac{\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r}}{\theta_{j+r}-\varphi}\leqslant$$

$$(r,a)n\left[(1-x^2)^{1/2}+\frac{1}{n}\right]^{-r-1/2}\sum_{\frac{2}{n}\leqslant\theta_{j+r}<\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta_{j+r}+\frac{1}{n}\right)^{1/2}\frac{\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r}}{\theta_{j+r}-\varphi}\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r-1/2}\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta^{1/2}d\theta}{\theta-\varphi}+c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r}.$$

Далее, для $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{1}{n}$ имеем

$$\int\limits_{\frac{2}{n}}^{2\pi/3}\frac{\theta^{\alpha-1/2}}{\theta-\varphi}d\theta\leqslant c(\alpha)\begin{cases}n^{\frac{1}{2}-\alpha}, & -\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2},\\ 1, & \frac{1}{2}<\alpha,\end{cases}$$

следовательно ($0\leqslant\varphi\leqslant\frac{1}{n}$, $x=\cos\varphi$)

$$U_2\leqslant U_1+U_2\leqslant c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r-1/2}.$$

Оценим U_3. Почти дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к оценке (5.12), имеем

$$U_3\leqslant c(r,a)n\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r-\frac{1}{2}}\times$$

$$\sum_{\arccos x_{N-1+r}\leqslant\theta_{j+r}\leqslant\frac{2}{n}}\left(\theta_{j+r}+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}(\theta_{j+r-1}-\theta_{j+r})\leqslant$$

$$c(r,a)n\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r-\frac{1}{2}}\times$$

$$\left[\int\limits_0^{\frac{2}{n}}\left(\theta+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}d\theta+\left(\sin\theta_{j_0+r}+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}(\theta_{j_0+r-1}-\theta_{j_0+r})\right]\leqslant$$

$$c(r,a)\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r-\frac{1}{2}}\left(\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant c(r,a)\left(\sin\varphi+\frac{1}{n+1}\right)^{-r},$$

где θ_{j_0+r} – ближайший слева к $2/n$ из узлов θ_{j+r}. Собирая оценки, полученные выше для U_1, U_2 и U_3, мы приходим при $0\leqslant\varphi\leqslant 1/n$ к следующей оценке

$$I_{n,N}^r(x)\leqslant\sum_{k=1}^3 U_k\leqslant c(r,a)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-r-1/2}.$$

Тем самым лемма 6.1 полностью доказана.

Из леммы 6.1 и равенства (4.20) следующая

Теорема 5.1. *Пусть* $r \geqslant 1$, $a > 0$, $1 \leqslant n \leqslant a\sqrt{N}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. *Тогда*

$$L_{n,N}^r(x) \leqslant c(r,a)\left(1+\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{1/2}\ln(n\sqrt{1-x^2}+1)\right) \quad (x\in[-1,1]).$$

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы 4 непосредственно вытекает из леммы 6.1, равенства (4.20) и оценки

$$\frac{|(t+1)_r(N-t)_r|2^{2r}}{(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n+2r})^{2r}(N+2r)^{[2r]}} \leqslant c(r,a) \quad (1\leqslant n\leqslant a\sqrt{N}, -1\leqslant x\leqslant 1),$$

где $t = \frac{N+2r-1}{2}(x+1)-r$.

Положим $L_{n,N}^r = \max_{x\in[-1,1]} L_{n,N}^r(x)$. Из теоремы 4 непосредственно вытекает

Следствие 5.1. *Пусть* $r \geqslant 1$, $a > 0$. *Тогда равномерно относительно* $2 \leqslant n \leqslant a\sqrt{N}$ *имеет место оценка*

$$L_{n,N}^r \leqslant c(r,a)\ln n \quad (n=2,3,\ldots).$$

Из теоремы 4 и неравенств (4.18) и (4.19) немедленно вытекает также

Теорема 5.2. *Пусть* $r \geqslant 1$, $a > 0$, $1 \leqslant n \leqslant a\sqrt{N}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. *Тогда*

$$\frac{|f(x)-\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)|}{(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n+2r})^{r-1/2}} \leqslant$$

$$c(r,a)E_{n+2r}^r(f,N)\left(1+\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{\frac12}\ln(n\sqrt{1-x^2}+1)\right)(x\in H_\Lambda),$$

$$\frac{|f(x)-\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)|}{(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n+2r})^{r-1/2}} \leqslant$$

$$c(r,a)\mathcal{E}_{n+2r}^r(f,N)\left(1+\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{\frac12}\ln(n\sqrt{1-x^2}+1)\right)(x\in[-1,1]).$$

Перейдем к вопросу об аппроксимативных свойствах конечных разностей операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x)$. Пусть, по прежнему, $d(j) = f(x_{j+r})$ $(j \in \bar\Omega_\Lambda)$. Для $t \in \{-r+\nu,\ldots,-1,0,\ldots,N-1,N,\ldots,N+r-1\}$ положим $d_\nu = d_\nu(t) = d(t) = f(x_{t+r})$ и введем оператор $\mathcal{X}_{n+2r-\nu,N+\nu}^\nu(f) = \mathcal{X}_{n+2r-\nu,N+\nu}^\nu(f,x)$, полагая для $t = \frac{\Lambda-1}{2}(1+x)-r$

$$\mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}^\nu(f,x) = \mathcal{Y}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}(d_\nu,t) = \mathcal{D}_{2(r-\nu)-1,N+\nu}(d_\nu,t)+$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r-\nu}^{n+r}\frac{(d_\nu)_{r-\nu,k}}{k^{[r-\nu]}}T_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(t,N+\nu), \qquad (5.24)$$

где в силу (2.9)

$$(d_\nu)_{r-\nu,k} = \frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}}\sum_{t\in\Omega_{N+r}}\Delta^{r-\nu}d_\nu(t-r+\nu)T_k^{0,0}(t,N+r) =$$

$$\frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{t\in\Omega_{N+r}} \Delta_h^{r-\nu} f(x_{t+\nu}) T_k^{0,0}(t, N+r) = f_{r-\nu,k}^{\nu}, \tag{5.25}$$

$$\mathcal{D}_{2(r-1)-1,N+\nu}(d_\nu, t) =$$

$$\sum_{i=1}^{r-\nu}(-1)^{i-1}\frac{(t+1)_{r-\nu}(N-t)_{r-\nu}}{(i-1)!(r-\nu-i)!(N+\nu+i)_{r-\nu}}\left[\frac{f(x_{r-i})}{t+i}+\frac{f(x_{N+\nu-1+r+i})}{N+\nu-1+i-t}\right].$$

Из определения (5.24) следует, что оператор $\mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}^{\nu}(f)$ является проектором на пространство алгебраических полиномов $p_m(x)$ степени $m \leqslant n+2r-\nu$, т.е.

$$\mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}^{\nu}(p_m, x) \equiv p_m(x) \quad (m \leqslant n+2r-\nu). \tag{5.26}$$

Кроме того, имеют место следующие равенства

$$\mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}^{\nu}(f, x_j) = f(x_j), \tag{5.27}$$

где $\nu \leqslant j \leqslant r-1$, $N+r+\nu \leqslant j \leqslant N+2r-1$.

Положим $\psi(x) = \Delta_h^{\nu} f(x-\nu h)$ и рассмотрим функцию $\partial(t) = \Delta^{\nu} d(t-\nu) = \Delta_h^{\nu} f(x_{t-\nu+r}) = \psi(x_{t+r})$, для которой в силу первого равенства из (3.8) мы можем записать

$$\Delta_h^{\nu} f(x_{j-\nu+r}) - \Delta_h^{\nu}\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_{j-\nu+r}) =$$

$$\Delta^{\nu} d(j-\nu) - \Delta^{\nu}\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, j-\nu) = \partial(j) - \mathcal{Y}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}(\partial, j) =$$

$$\psi(x_{j+r}) - \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}^{\nu}(\psi, x_{j+r})$$

или, что то же,

$$\Delta_h^{\nu} f(x_{j-\nu}) - \Delta_h^{\nu}\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_{j-\nu}) = \psi(x_j) - \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}^{\nu}(\psi, x_j). \tag{5.28}$$

Через $\mathcal{P}_m^{r,\nu}$ обозначим пространство алгебраических полиномов $p_m(x)$ степени m, удовлетворяющих условию

$$\psi(x_j) = p_m(x_j), \quad j \in \{\nu, \dots, r-1\} \cup \{N+r+\nu, \dots, N+2r-1\}, \tag{5.29}$$

а через $q_m^{r,\nu}(\psi) = q_{m,N}^{r,\nu}(\psi, x)$ обозначим полином из $\mathcal{P}_m^{r,\nu}$, для которого

$$E_m^{r,\nu}(\psi, N) = \inf_{p_m\in\mathcal{P}_m^{r,\nu}} \max_{r\leqslant j\leqslant N+r+\nu-1} \frac{|\psi(x_j) - p_m(x_j)|}{\left(\sqrt{1-x_j^2}+\frac{1}{m}\right)^{r-\nu}}$$

$$= \max_{r\leqslant j\leqslant N+r+\nu-1} \frac{|\psi(x_j) - q_m^{r,\nu}(\psi, x_j)|}{\left(\sqrt{1-x_j^2}+\frac{1}{m}\right)^{r-\nu}}. \tag{5.30}$$

Тогда, учитывая (5.26), мы имеем

$$\psi(x) - \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}^{\nu}(\psi, x) =$$

$$\psi(x) - q_{m,N}^{r,\nu}(\psi, x) + \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}^{\nu}(q_{m,N}^{r,\nu}(\psi) - \psi, x). \tag{5.31}$$

Далее заметим, что если в равенстве (5.27) функцию $f(x)$ заменить функцией $q^{r,\nu}_{m,N}(\psi,x)-\psi(x)$, то, в силу (5.29), будем иметь $\mathcal{D}_{2(r-1)-1,N+\nu}(d_\nu,t)\equiv 0$, поэтому из (5.24) находим

$$\mathcal{X}^{\nu}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi)-\psi,x)=$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r-\nu}^{n+r}\frac{(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi)-\psi)^{\nu}_{r-\nu,k}}{k^{[r-\nu]}}T^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu}(t,N+\nu), \tag{5.32}$$

где, в силу(5.25),

$$(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi)-\psi)^{\nu}_{r-\nu,k}=$$

$$\frac{2}{(N+r)h^{0,0}_{k,N+r}}\sum_{j=0}^{N+r-1}T^{0,0}_k(j,N+r)\Delta^{r-\nu}(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi,x_{j+\nu})-\psi(x_{j+\nu})), \tag{5.33}$$

причем конечная разность $\Delta^{r-\nu}$ берется по переменной j. Применим к правой части равенства (5.33) преобразование Абеля $r-\nu$ раз, тогда в силу равенств (5.29), которым удовлетворяет полином $p_m(x)=q^{r,\nu}_{m,N}(\psi,x)$, получим

$$(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi)-\psi)^{\nu}_{r-\nu,k}=$$

$$\frac{2(-1)^{r-\nu}}{(N+r)h^{0,0}_{k,N+r}}\sum_{j=0}^{N+r-1}(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi,x_{j+r})-\psi(x_{j+r}))\Delta^{r-\nu}T^{0,0}_k(j,N+r). \tag{5.34}$$

Отсюда, с учетом равенства (1.15) находим

$$(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi)-\psi)^{\nu}_{r-\nu,k}=$$

$$\frac{2(-1)^{r-\nu}}{(N+r)h^{0,0}_{k,N+r}}\sum_{j=0}^{N+\nu-1}\frac{(k+1)_{r-\nu}T^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu}(j,N+\nu)}{(N+r-1)^{[r-\nu]}}(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi,x_{j+r})-\psi(x_{j+r})). \tag{5.35}$$

Подставляя это выражение в (5.32), мы получаем

$$\mathcal{X}^{\nu}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi)-\psi,x)=$$

$$\frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{k=r-\nu}^{n+r}\frac{2}{(N+r)k^{[r-\nu]}h^{0,0}_{k,N+r}}\times$$

$$\sum_{j=0}^{N+\nu-1}\frac{(k+1)_{r-\nu}T^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu}(j,N+\nu)}{(N+r-1)^{[r-\nu]}}(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi,x_{j+r})-\psi(x_{j+r}))T^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu}(t,N+\nu)=$$

$$\frac{2(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N+r)(N-1+r)^{[r-\nu]}}\sum_{j=0}^{N+\nu-1}(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi,x_{j+r})-\psi(x_{j+r}))\times$$

$$\sum_{k=0}^{n+\nu}\frac{(k+r-\nu+1)_{r-\nu}T^{r-\nu,r-\nu}_{k}(j,N+\nu)T^{r-\nu,r-\nu}_{k}(t,N+\nu)}{(k+r-\nu)^{[r-\nu]}h^{0,0}_{k+r-\nu,N+r}(N+r-1)^{[r-\nu]}}. \tag{5.36}$$

С другой стороны, учитывая (1.6), заметим, что

$$(N+r)(N+r-1)^{[r-\nu]}h^{0,0}_{k+r-\nu,N+r}\frac{(N+r-1)^{[r-\nu]}(k+r-\nu)^{[r-\nu]}}{(k+r-\nu+1)_{r-\nu}}=$$

$$(N+r)(N+r-1)^{[r-\nu]}\frac{(N+\nu+k+2(r-\nu))^{[k+r-\nu]}}{(N+r-1)^{[k+r-\nu]}}\times$$

$$\frac{2}{2k+2(r-\nu)+1}\frac{(N+r-1)^{[r-\nu]}(k+r-\nu)^{[r-\nu]}}{(k+r-\nu+1)_{r-\nu}}=$$

$$(N+\nu)\frac{(N+\nu+2(r-\nu))^{[2(r-\nu)]}}{2^{2(r-\nu)}}h^{r-\nu,r-\nu}_{k,N+\nu},$$

поэтому, принимая во внимание (1.6), предыдущее выражение принимает окончательно следующий вид

$$\mathcal{X}^{\nu}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi)-\psi,x)=$$

$$\frac{2^{2(r-\nu)}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N+\nu+2(r-\nu))^{2[r-\nu]}}\sum_{j=0}^{N+\nu-1}(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi,x_{j+r})-\psi(x_{j+r}))\times$$

$$\sum_{k=0}^{n+\nu}\frac{T^{r-\nu,r-\nu}_k(j,N+\nu)T^{r-\nu,r-\nu}_k(t,N+\nu)}{h^{r-\nu,r-\nu}_{k,N+\nu}}=$$

$$\frac{2^{2(r-\nu)}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N+\nu+2(r-\nu))^{2[r-\nu]}}\sum_{j=0}^{N+\nu-1}(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi,x_{j+r})-\psi(x_{j+r}))\mathcal{K}^{r-\nu,r-\nu}_{n+\nu,N+\nu}(j,t). \tag{5.37}$$

Если мы примем во внимание (5.30), то для $m\leqslant n+2r-\nu$ из (5.37) можем вывести следующую оценку:

$$|\mathcal{X}^{\nu}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}(q^{r,\nu}_{m,N}(\psi)-\psi,x)|\leqslant$$

$$E^{r,\nu}_m(\psi,N)\frac{|(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}|2^{2(r-\nu)+1}}{(N+\nu+2(r-\nu))^{[2(r-\nu)]}(N+\nu)}\times$$

$$\sum_{j=0}^{N+\nu-1}\left(\sqrt{1-x^2_{j+r}}+\frac{1}{m}\right)^{r-\nu}\left|\mathcal{K}^{r-\nu,r-\nu}_{n+\nu,N+\nu}(j,t)\right|. \tag{5.38}$$

Положим $m=n+2r-\nu$, $t_i=\frac{\Lambda-1}{2}(1+x_i)-r$, тогда из (5.28), (5.31) и (5.38) находим

$$|\Delta^{\nu}_h f(x_{i-\nu})-\Delta^{\nu}_h\mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_{i-\nu})|=|\psi(x_i)-\mathcal{X}^{\nu}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}(\psi,x_i)|\leqslant$$

$$|\psi(x_i)-q^{r,\nu}_{m,N}(\psi,x_i)|+\frac{E^{r,\nu}_m(\psi,N)L^{r,\nu}_{n,N}(x_i)}{\left(\sqrt{1-x_i^2}+\frac{1}{m}\right)^{\nu-r+\frac12}}, \tag{5.39}$$

где $(t = \frac{\Lambda-1}{2}(1+x) - r)$

$$L_{n,N}^{r,\nu}(x) = \frac{|(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}|2^{2(r-\nu)}I_{n,N}^{r,\nu}(x)}{(N+\nu+2(r-\nu))^{[2(r-\nu)]}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{m}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}}, \tag{5.40}$$

$$I_{n,N}^{r,\nu}(x) = \frac{2}{N+\nu}\sum_{j=0}^{N+\nu-1}\left(\sqrt{1-x_{j+r}^2}+\frac{1}{m}\right)^{r-\nu}\left|\mathcal{K}_{n+\nu,N+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(j,t)\right|. \tag{5.41}$$

Неравенство (5.39) сводит задачу об оценке отклонения функции $\psi(x)$ от полинома $\mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu),N+\nu}^{\nu}(\psi,x)$ к вопросу об оценке величины $I_{n,N}^{r,\nu}(x)$. Но этот вопрос, по сути, был уже рассмотрен в лемме 6.1 и мы можем здесь сформулировать следующий результат.

Лемма 5.2. *Пусть $r \geqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, $a > 0$, $1 \leqslant n \leqslant a\sqrt{N}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда имеет место оценка*

$$I_{n,N}^{r,\nu}(x) \leqslant \frac{c(r,a)}{\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\nu+\frac{1}{2}}}\left(1+\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\ln(n\sqrt{1-x^2}+1)\right).$$

Из леммы 6.2 с учетом равенства (5.28) и неравенства (5.39) мы выводим

Теорема 5.3. *Пусть $r \geqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, $\nu \leqslant i \leqslant N+2r-1$, $a > 0$, $1 \leqslant n \leqslant a\sqrt{N}$, $m = n+2r-\nu$. Тогда имеет место оценка*

$$\frac{|\Delta_h^\nu f(x_{i-\nu}) - \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_{i-\nu})|}{\left(\sqrt{1-x_i^2}+\frac{1}{m}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$c(r,a)E_m^{r,\nu}(\psi,N)\left(1+\left(\sqrt{1-x_i^2}+\frac{1}{n}\right)^{1/2}\ln\left(n\sqrt{1-x_i^2}+1\right)\right). \tag{5.42}$$

Список литературы

[1] Теляковский С. А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами // Математический сборник. 1966. Т.70. Вып. 2. С. 252–265.

[2] Гопенгауз И.З. К теореме А.Ф.Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке // Математические заметки. 1967. Т. 1. Вып. 2. С. 163-172.

[3] Малоземов В.Н. Совместное приближение функции и ее производных. Л. Изд-во ЛГУ. 1973.

[4] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций. М. Наука. 1977.

[5] Теляковский С.А. Оценка одновременного приближения функций и их производных суммами Фурье // Математические заметки. 2011. Т. 90. Вып. 3. С. 478–480.

[6] Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: прогноз и управление. М. Мир. Вып. 1,2. 1974.

[7] Дейч А.М. Методы идентификации динамических объектов. М. Энергия. 1979.

[8] Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов н.д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. Москва. Машиностроение. 1986.

[9] Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. Москва. Наука. 1966.

[10] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.Сплайны в вычислительной математике. Москва. Наука. 1976.

[11] Витушкин А.Г. Оценка сложности задачи табулирования. Москва. Физматлит. 1959.

[12] Чебышев П.Л. О непрерывных дробях (1855). Полн. собр.соч. Москва. Изд.АН СССР. 1947. Т. 2. С. 103–126

[13] Чебышев П.Л. Об одном новом ряде. Полн. собр.соч. Москва. Изд.АН СССР. 1947. Т. 2. С. 236–238.

[14] Чебышев П.Л. Об интерполировании по способу наименьших квадратов (1859). Полн. собр.соч. Москва. Изд.АН СССР. 1947. Т. 2. С. 314–334.

[15] Чебышев П.Л. Об интерполировании (1864). Полн. собр.соч. Москва. Изд.АН СССР. 1947. Т. 2. С. 357–374.

[16] Чебышев П.Л. Об интерполировании величин равноотстоящих (1875). Полн. собр.соч. Москва. Изд.АН СССР. 1947. Т. 2. С. 66–87.

[17] Шарапудинов И.И. О сходимости метода наименьших квадратов // Математические заметки. 1993. Т. 53. Вып. 3. С. 131-–143.

[18] Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. Philadelphia. SIAM. 2000.

[19] Trefethen L.N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University. 1996.

[20] Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф. О вычислении коэффициентов рядов Чебышева для решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2011. Т. 8. С. 273 – 283.

[21] Saeed Radhoush, Mahmoud Samavat, Mohammad Ali Vali. Optimal control of linear time-varying systems using the Chebyshev wavelets (a comparative approach) // Systems Science and Control Engineering: An Open Access Journal. 2014. Vol. 2. Pp. 691–698.

[22] Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства и весовые оценки многочленов Чебышева–Хана алгебраическими многочленами // Математический сборник. 1991. Т. 183. Вып. 3. С. 408—420.

[23] Шарапудинов И.И. Об асимптотике многочленов Чебышева, ортогональных на конечной системе точек // Вестник МГУ. Серия 1. 1992. Т. 1. С. 29—35.

[24] Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на дискретных сетках. Махачкала. Издательство Даг. гос. пед. ун-та. 1997.

[25] Шарапудинов И.И. Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Математический заметки. 2000. Т. 67. Вып. 3. С. 460—470.

[26] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Математический заметки. 2002. Т. 72. Вып. 5. С. 765—795.

[27] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математический заметки. 2005. Т. 78. Вып. 3. С. 442—465.

[28] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Математический сборник. 2006. Т. 197. Вып. 3. С. 135—154.

[29] Шарапудинов Т.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестник Дагестанского научного центра РАН. 2007. Т. 29. С. 12–23.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)
Дагестанский научный центр РАН, Владикавказский научный центр РАН
E-mail: sharapud@mail.ru

Т. И. Шарапудинов (T. I. Sharapudinov)
Дагестанский научный центр РАН, Владикавказский научный центр РАН
E-mail: sharapudinov@gmail.com

Поступила в редакцию
27.10.2015