УДК 517.929.4+519.21

Р. И. Кадиев

Исследование вопросов устойчивости для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений методом вспомогательных уравнений

Главной целью статьи является описание некоторых идей Н.В.Азбелева, получившие свое развитие применительно к исследованию вопросов устойчивости решений для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений. Кроме того, в статье сделан обзор результатов исследований вопросов устойчивости решений для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений, полученных методом вспомогательных уравнений автором статьи.

Библиография: 50 названий.

A main goal of the article is the description some ideas of N. V. Azbelev, gained their development in connection with the research of solution stability problems of the linear stochastic functional and differential equations. Besides, in present article we made the review of results in researches of questions of decisions stability for the linear stochastic functional and differential equations, obtained by the author of article with auxiliary equations method.

Bibliography: 50 items.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, разностные уравнения Ито, устойчивость решений, метод вспомогательных уравнений, допустимость пространств.

Keywords: stochastic differential equations, differential equations of Ito, stability of decisions, method auxiliary equations, admissibility of spaces.

Введение

Вопросам устойчивости решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений посвящены многие исследования: см., например [1], [2], [16], [36], [38], [41]–[44], [49], [50], а также многочисленные ссылки, приведенные в этих работах. В основном, в этих работах анализ устойчивости проводился на основе классического метода Ляпунова-Красовского-Разумихина. Этот метод предполагает существование подходящей функции Ляпунова (функционала Ляпунова-Красовского), которая обеспечивает желаемое свойство устойчивости (асимптотического поведения) решений исследуемых уравнений.

Однако в теории устойчивости решений для детерминированных функционально-дифференциальных уравнений широкое применение и высокую эффективность показал метод вспомогательных или «модельных»

© Р. И. Кадиев, 2014

уравнений – «W-метод» Н.В.Азбелева [4], [6], [8]. Этот метод может быть схематически описан следующим образом. Прежде всего, мы устанавливаем эквивалентность между асимптотическим поведением решений и принадлежностью решений исследуемого уравнения некоторым функциональным пространствам на полуоси или связь между асимптотическим поведением решений и допустимостью определенных пар функциональных пространств на полуоси для исследуемых уравнений. Затем мы проверяем свойство допустимости, выбирая более простое уравнение (называемое вспомогательным или модельным уравнением), которое уже обладает требуемым свойством. С помощью этого уравнения исходное уравнение преобразовывается к «интегральному» уравнению. Если последнее разрешимо в соответствующем пространстве, то допустимость, а значит, и устойчивость, доказана. Разрешимость полученного уравнения проверяется методами функционального анализа. Отметим, что этот метод оказывается во многих случаях, более конструктивным чем другие методы. Этод метод обобщен на стохастический случай в работах [10]–[12], [14]–[35].

В определенном смысле W-метод аналогичен прямому (второму) методу Ляпунова. Только вместо поиска функции (функционала) Ляпунова мы пытаемся найти подходящее модельное уравнение, решения которого обладают заданными асимптотическими свойствами. Важно подчеркнуть, что теоретически этот подход, как и метод Ляпунова, также дает необходимые и достаточные условия устойчивости. В частности, если решения исходного уравнения обладают определенными асимптотическими свойствами, то, теоретически, в качестве модельного уравнения можно выбрать само исходное уравнение.

Главной целью статьи является описание некоторых идей Н.В.Азбелева, получившие свое развитие применительно к исследованию вопросов устойчивости решений для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений. Кроме того, в статье сделан обзор результатов исследований вопросов устойчивости решений для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений, полученных методом вспомогательных уравнений.

Объектом исследований является линейное функционально-дифференциальное уравнение по семимартингалу. Частными случаями такого уравнения являются, например, функционально-дифференциальные уравнения Ито и их гибриды, функционально-дифференциальные уравнения в мерах, а также другие стохастические дифференциальные уравнения с последействием. К такому уравнению сводятся обыкновенные дифференциальные уравнения по семимартингалу, дифференциальные уравнения по семимартингалу с запаздывающим аргументом, интегро-дифференциальные уравнения по семимартингалу.

В случае стохастических уравнений понятие «стохастические функционально-дифференциальные уравнения» введено нами по аналогии с детерминированном случаем и являются обобщением стохастических обыкновенных уравнений и стохастических уравнений с последействием. Уместно отметить, что такой объект исследования есть обобщение детерминированного линейного функционально-дифференциального уравнения в форме, рассматриваемого

Н.В.Азбелевым и его учениками. При этом они руководствовались тем, чтобы этот объект исследования охватывал многие известные классы уравнений. Кроме того, такой общий вид объекта исследования не является самоцелью. Границы общности определялись тем, чтобы один и тот же вопрос для разных классов уравнений можно было изучить единым подходом. Методы исследования вопросов выбирались так, чтобы с их помощью можно было бы получить результаты, полученные другими методами для исследуемых уравнений.

В статье рассматриваются следующие вопросы:

— **предварительные сведения и объект исследования;**

— **представление для решений (формула Коши) и моментная устойчивость решений;**

— **допустимость пар пространств и моментная устойчивость решений по начальной функции;**

— W**-метод;**

— **теоремы типа Боля – Перрона;**

— **линейные импульсные дифференциальные уравнения Ито с последействием;**

— **линейные функционально-разностные уравнений Ито.**

1. Предварительные сведения и объект исследования

Пусть: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ - полное вероятностное пространство с фильтрацией (см., например, [37] с. 9); $Z := col(z^1, ..., z^m)$ – m-мерный семимартингал на нем ([37], с. 73); $1 \leqslant p < \infty$; $1 \leqslant q \leqslant \infty$; E – символ математического ожидания; $||.||$ - норма $n{\times}n$-матрицы, согласованная с нормой $|.|$ вектора в R^n; $\bigvee\limits_{s=a}^{b} g$ – вариации функции g на отрезке $[a, b]$; $\bigvee\limits_{s=a-}^{b} = \lim\limits_{\delta\to 0} \bigvee\limits_{s=a+\delta}^{b}$, $\bigvee\limits_{s=a}^{b-} = \lim\limits_{\delta\to 0} \bigvee\limits_{s=a}^{b+\delta}$, $\int\limits_{a-}^{b} = \lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_{a+\delta}^{b}$, $\int\limits_{a}^{b-} = \lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_{a}^{b+\delta}$, где $\delta < 0$.

В дальнейшем используются следующие линейные пространства случайных процессов:

— $L^n(Z)$ состоит из $n \times m$-матричных предсказуемых случайных процессов, заданных на $[0, +\infty)$ чьи строки являются локально интегрируемыми по семимартингалу Z (см., например, [9]);

— k^n состоит из n-мерных $\mathcal{F}_0$–измеримых случайных величин (обозначение: $k := k^1$);

— D^n состоит из n-мерных случайных процессов на $[0, +\infty)$, которые могут быть представлены в виде: $x(t) = x(0) + \int\limits_0^t H(s)dZ(s)(t \geqslant 0)$, где $x(0) \in k^n$, $H \in L^n(Z)$.

Можно показать, что существует естественный топологический изоморфизм $D^n \cong L^n(Z) \times k^n$, который аналогичен соответствующему детерминированному изоморфизму, связывающему пространство Лебега с пространством абсолютно непрерывных функций. Этот изоморфизм и его обобщения играют центральную роль в общей теории детерминированных функционально-дифференциальных уравнений (см., например, [3], [5], [6]). Поэтому, мы можем назвать описанные выше пространства случайных процессов соответственно «пространством решений» (D^n), «пространство абстрактных производных» ($L^n(Z)$), «пространство начальных данных» (k^n).

Главным объектом исследования является следующее уравнение:

$$dx(t) = [(Vx)(t) + f(t)]dZ(t) \ (t \geqslant 0), \tag{1}$$

где $V : D^n \to L^n(Z)$ – k-линейный ($(V(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 V x_1 + \alpha_2 V x_2$ для любых ограниченных $\alpha_1, \alpha_2 \in k$ и любых $x_1, x_2 \in D^n$), вольтерров (для любого момента остановки [37] $\tau = \tau(\omega) \in [0, +\infty)$ почти наверно (п.н.) и любых $x_1, x_2 \in D^n$ из равенства $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in [0, \tau]$ п.н. следует, что $(Vx_1)(t) = (Vx_2)(t)$, $t \in [0, \tau]$ п.н.) оператор.

Уравнение (1) рассматривается в предположении, что через любое $x_0 \in k^n$ проходит единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение этого уравнения. Это решение обозначим через $x_f(t, x_0)$ $(x_0(t, x_0) = x(t, x_0))$.

В этой статье мы ограничимся рассмотрением так называемых «специальных семимартингалов». Для этого случая, мы дадим точное описание пространств D^n и $L^n(Z)$. Предположим, что семимартингал Z представим в виде $Z = b + c$, где b – предсказуемый случайный процесс *локально ограниченной п.н. вариации*, а c – *локально квадратически интегрируемый мартингал* ([37], с.28) и все компоненты процесса b и взаимные характеристики $< c^i, c^j >$ ([37], с.48) всех компонент процесса c абсолютно непрерывны относительно некоторой неубывающей функции $\lambda : [0, +\infty) \to R^1_+$. В этом случае мы можем написать

$$b^i = \int_0^{\cdot} a^i d\lambda, < c^i, c^j > = \int_0^{\cdot} A^{ij} d\lambda, i, j = 1, ..., m.$$

Кроме того, без ограничения общности предположим, что первая компонента семимартингала Z совпадает с λ, т.е. $z^1 = \lambda$. Мы всегда можем добиться этого, увеличив в случае необходимости размерность семимартингала Z.

Введем обозначения: $a = col(a^1, ..., a^m)$; $A = [A^{ij}]$ – $m \times m$-матрица; $a^+ = col(|a^1|, ..., |a^m|)$; $A^+ = [|A^{ij}|]$. Известно [9], что в этом случае пространство $L^n(Z)$ состоит из предсказуемых $n \times m$-матриц H, для которых выполнено неравенство $\int_0^t (|Ha| + ||HAH^\top||) d\lambda < \infty$ п. н. для любого $t \geqslant 0$ и $\int_0^t H dZ = \int_0^t H db + \int_0^t H dc$, а D^n состоит из n-мерных предсказуемых случайных процессов на $[0, +\infty)$, траектории которых п. н. непрерывны справа и имеют предел слева.

Пусть $\gamma : [0, +\infty) \to R^1$ – положительная функция. Введем следующие обозначения линейных нормированных пространств:

$$M_p^\gamma = \left\{ x : x \in D^n, ||x(0)||_{k_p^n} \overset{def}{=} (E|x(0)|^p)^{1/p} < \infty \right\} (M_p^1 = M_p);$$

$$k_p^n = \left\{ \alpha : \alpha \in k^n, ||\alpha||_{k^n} \overset{def}{=} E|\alpha|^p < \infty \right\}.$$

Как отмечалось ранее частными случаями уравнений (1) являются функционально-дифференциальные уравнения Ито. В этом случае $Z(t) = \mathrm{col}(t, \mathcal{B}^1(t), ..., \mathcal{B}^{m-1}(t))$, где $\mathcal{B}^i, i = 1, ..., m-1$ – независимые, стандартные винеровские процессы, $a = col(1, 0..., 0)$, A – $m \times m$-матрица такая, что $A^{ii} = 1$ при $i = 2, ..., m$, а остальные элементы равны нулю, $\lambda(t) = t$.

В виде уравнения (1) может быть записана также:

а) *Линейная система «обыкновенных» стохастических дифференциальных уравнений по семимартингалу (линейная система «обыкновенных» дифференциальных уравнений Ито)*

$$dx(t) = [(V^1x)(t) + f^1(t)]dZ(t)(t \geqslant 0), \tag{2}$$

где $f^1 \in L^n(Z)$, $(V^1x)(t) = (A_1(t)x(t), ..., A_m(t)x(t))$, A_i – $n \times n$-матрица, элементы которых являются предсказуемые (прогрессивно измеримые) случайные процессы при $i = 1, ..., m$. Кроме того, $\int\limits_0^t (|Ha^+| + ||HA^+H^\top||)\, d\lambda < \infty$ п. н. для любого $t \geqslant 0$, где $H = (||A_1||, ..., ||A_m||)$.

б) *Линейная стохастическая система дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием по семимартингалу (линейная система дифференциальных уравнений Ито с сосредоточенным запаздыванием)*

$$\begin{gathered} dx(t) = [(V^2x)(t) + f^2(t)]dZ(t)(t \geqslant 0), \\ x(s) = \varphi(s)(s < 0), \end{gathered} \tag{3}$$

где $f^2 \in L^n(Z)$, $(V^2x)(t) = \left(\sum\limits_{j=0}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1j}(t)), ..., \sum\limits_{j=0}^{m_m} A_{mj}(t)x(h_{mj}(t))\right)$, A_{ij} – $n \times n$-матрица, элементы которой являются предсказуемые (прогрессивно измеримые) случайные процессы, h_{ij} – предсказуемый (прогрессивно измеримый) случайный процесс такой, что $h_{ij}(t) \leqslant t$, $t \in [0, +\infty)$ п. н. при $i = 1, ..., m$, $j = 0, ..., m_i$, φ – случайный процесс, независимый от семимартингала Z. Кроме того, $\int\limits_0^t (|Ha^+| + +||HA^+H^\top||) d\lambda < \infty$ п. н. для любого $t \geqslant 0$, где $H = \left(\sum\limits_{j=0}^{m_1} ||A_{1j}||, ..., \sum\limits_{j=0}^{m_m} ||A_{mj}||\right)$.

Уравнение (3) можно записать в виде (1) с помощью следующих обозначений

$$(S_hx)(t) = \begin{cases} x(h(t)), \text{если}\, h(t) \geqslant 0 \,\text{п. н.}, \\ 0, \text{если}\, h(t) < 0 \,\text{п. н.}, \end{cases}$$

$$\varphi_h(t) = \begin{cases} 0, \text{если}\, h(t) \geqslant 0 \,\text{п. н.}, \\ \varphi(h(t), \text{если}\, h(t) < 0 \,\text{п. н.} \end{cases}$$

Оператор S_h, в детерминированном случае, называют *оператором внутренней суперпозиции* [5],[6]. Здесь сохраняется это название в общем случае.

Используя предыдущие обозначениях уравнение (3) можно записать в виде (1). При этом

$$(Vx)(t) = \left(\sum_{j=0}^{m_1} A_{1j}(t)(S_{h_{1j}}x)(t), ..., \sum_{j=1}^{m_m} A_{mj}(t)(S_{h_{mj}}x)(t)\right),$$

$$f(t)=f^2(t)+\left(\sum_{j=0}^{m_1}A_{1j}(t)\varphi_{h_{1j}}(t),...,\sum_{j=0}^{m_m}A_{mj}(t)\varphi_{h_{mj}}(t)\right).$$

В работе [17] доказано, что при сделанных предположениях оператор V действует из пространства D^n в пространство $L^n(Z)$. Для того, чтобы f принадлежал пространству $L^n(Z)$ надо еще дополнительные предположения. В частности, если траектории φ п. н. локально ограничены в существенном по мере порожденной функцией λ, то $f\in L^n(Z)$.

в) *Линейные стохастические интегро-дифференциальные уравнения по семимартингалу (линейные интегро-дифференциальные уравнения Ито)*

$$dx(t)=[(V^3x)(t)+f^3(t)]dZ(t)(t\geqslant 0),$$

где $f^3\in L^n(Z)$, $(V^3x)(t)=\left(\int\limits_0^t\mathcal{K}_1(t,s)x(s)ds,...,\int\limits_0^t\mathcal{K}_m(t,s)x(s)ds\right)$, V^3 – интегральный оператор, действующий из пространства D^n в пространство $L^n(Z)$.

г) *Линейное стохастическое дифференциальное уравнение с распределенным запаздыванием по семимартингалу (линейное дифференциальное уравнение Ито с распределенным запаздыванием)*

$$\begin{gathered}dx(t)=[(V^4x)(t)+f^4(t)]dZ(t)(t\geqslant 0),\\ x(s)=\varphi(s)(s<0),\end{gathered}\tag{4}$$

где $f^4\in L^n(Z)$, $(V^4x)(t)=\left(\int\limits_{-\infty}^t d_s\mathcal{R}_1(t,s)x(s),...,\int\limits_{-\infty}^t d_s\mathcal{R}_m(t,s)x(s)\right)$, элементы $r^i_{jl}(t,s)$ $(j,l=1,...,n)$ $n\times n$-матрицы $\mathcal{R}_i(t,s)$ определены в области $G=\{(t,\omega,s):\omega\in\Omega,-\infty\leqslant s\leqslant t<\infty\}$ и при фиксированном $t\geqslant 0$ являются $B((-\infty,+\infty))\otimes\mathcal{P}_d$-измеримыми, $B([-\infty,+\infty))$ – борелевская σ-алгебра на $(-\infty,+\infty)$, $\mathcal{P}_d$ – σ-алгебра предсказуемых (прогрессивно измеримых) множеств (характеристические функции предсказуемы (прогрессивно измеримы)) при $i=1,...,m$, φ – случайный процесс, независимый от семимартингала Z и траектории которой п. н. локально ограничены в существенном по мере порожденной функцией λ. Дополнительно предположим, что $\int\limits_0^t(|H_ja^+|+||H_jA^+H_j^\top||)d\lambda<\infty$ п. н. при $j=0,1$, где $H_j=\left(||\bar{\mathcal{R}}^j_1||,...,||\bar{\mathcal{R}}^j_m||\right)$ при $j=0,1$, $\bar{\mathcal{R}}^0_i$ – $n\times n$-матрица, элементами которой являются $\bigvee\limits_{s=-\infty}^{0-}r^i_{jl}(.,s)$ $(j,l=1,...,n)$ при $i=1,...,m$, $\bar{\mathcal{R}}^1_i$ – $n\times n$-матрица, элементами которой являются $\dot{\bigvee\limits_{s=0-}}r^i_{jl}(.,s)$ $(j,l=1,...,n)$ при $i=1,...,m$.

Уравнение (4) можно записать в виде (1) и при этом

$$(Vx)(t)=\left(\int\limits_{0-}^t d_s\mathcal{R}_1(t,s)x(s)\ ,\ ...,\int\limits_{0-}^t d_s\mathcal{R}_m(t,s)x(s)\right)$$

,

$$f(t)=f^4(t)+\left(\int\limits_{-\infty}^{0-}d_s\mathcal{R}_1(t,s)x(s),...,\int\limits_{-\infty}^{0-}d_s\mathcal{R}_m(t,s)x(s)\right)$$

. Тогда в случае выполнения предыдущих предположений оператор V действует из пространства D^n в пространство $L^n(Z)$ и $f \in L^n(Z)$ [46].

Уравнение (3) можно записать в виде (4)(см, например [17]). Кроме того, уравнение (2) является частным случаем уравнения (3). На практике иногда удобно бывает рассматривать уравнения (2)-(4) в отдельности.

Если в уравнении (1) $f \equiv 0$, то уравнение (1) называют линейным однородным стохастическим функционально-дифференциальным уравнением. Следовательно, уравнения (3) и (4) являются линейным однородными соответственно, если $f^2 \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ и $f^4 \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$.

В заключении этого пункта отметим, что вокруг определений решения и однородности детерминированных уравнений вида (3), (4) шли и идут бурные дискуссии. Более подробно об этом можно посмотреть в работах [3], [5]. Мы также придерживаемся определений этих работ. Заметим, что эти определения не противоречат другим определениям, они являются их обобщениями. Такие обобщения позволяют обходить некоторые трудности, возникающие при других определениях.

2. Представление для решений (формула Коши) и моментная устойчивость решений

Представление решений детерминированных линейных функционально-дифференциальных уравнений (формула Коши) играет важную роль, например, в задачах устойчивости, краевых задачах, а также в теории квазилинейных уравнений. Некоторые результаты для стохастических уравнений получены в [44], [45], [47], [48], где рассмотрены уравнения Ито без последействия. В настоящем пункте утверждения из [5], [7] для детерминированных уравнений распространяются на стохастический случай.

Лемма 1. *Пусть через любое $x_0 \in k^n$ проходит единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение $x_f(t, x_0)$ уравнения (1). Тогда для этого решения имеет место представление*

$$x_f(t, x_0) = X(t)x_0 + (Cf)(t)(t \geqslant 0), \tag{5}$$

где $X(t)(X(0) = \bar{E}$ – единичная матрица) – $n \times n$-матрица, столбцами которой являются решения однородного уравнения (1) (фундаментальная матрица), а $C : L^n(Z) \to D^n$ – k-линейный оператор (оператор Коши) такой, что $(Cf)(0) = 0$ и Cf – решение уравнения (1).

Доказательство. Используя k-линейность оператора V нетрудно убедиться в том, что $X(t)x_0$, где $x_0 \in k^n$ является решением однородного уравнения (1).

Для уравнения (1) рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = 0. \tag{6}$$

Задача Коши (1), (6), в силу предположений леммы, однозначна разрешима при любом $f \in L^n(Z)$. Следовательно, эта задача задает некоторый оператор, действующий из пространства $L^n(Z)$ в пространство D^n. Обозначим этот оператор через C. Очевидно, что $(Cf)(0) = 0$, а в k-линейности этого оператора можно убедиться непосредственно проверкой, используя при этом k-линейность оператора V и однозначную разрешимость задачи (1), (6). Отсюда следует, что (5) является решением уравнения (1). В силу того, что через любое $x_0 \in k^n$ проходит единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение уравнения (1) получим, что любое решение уравнения (1) имеет представление (5).

Лемма доказана.

Для уравнений (2)–(4) выполнены условия леммы 1, т.е. через любое $x_0 \in k^n$ проходит единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение этих уравнений (см, например, [13]). Следовательно, для решения этих уравнений имеет место представление (5).

Отметим, что представление (5) уточнен для решения некоторых классов линейных функционально-дифференциальных уравнений Ито: функционально-дифференциальных уравнений Ито с аддитивными шумами и обыкновенных дифференциальных уравнений Ито (см, например, [17]). Специфика этих уравнений определяется тем, что для них оператор Коши оказывается «интегральным».

Представление (5) является центральным результатом в теории устойчивости решений уравнения (1). В силу этого представления асимптотические свойства решений уравнения (1) определяются фундаментальной матрицей и оператором Коши для этого уравнения. В дальнейшем остановимся на этих воросах.

Определение 1. Тривиальное решение однородного уравнения (1) называют [1], [36], [50]:

— *p-устойчивым* , если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\eta(\epsilon) > 0$, что при $|x_0| < \eta$ будет выполнено неравенство $E|x(t, x_0)|^p \leqslant \epsilon$ для любого $t \geqslant 0$;

— *асимптотически p-устойчивым* , если оно p-устойчиво, и, кроме того, для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\eta(\epsilon) > 0$, что при $|x_0| < \eta$ будет $\lim\limits_{t\to+\infty} E|x(t, x_0)|^p = 0$;

— *экспоненциально p–устойчивым* , если найдутся такие числа $\bar{c} > 0$, $\beta > 0$, что выполнено неравенство $E|x(t, x_0)|^p = \bar{c}|x_0|^p \exp\{-\beta t\}$ $(t \geqslant 0)$.

Аналогично даются определения устойчивости любого решения уравнения (1). Однако, из формулы (5) видно, что устойчивость любого решения уравнения (1) по начальным данным не зависит от f и эквивалентна устойчивости тривиального решения однородного уравнения. Поэтому в дальнейшем вместо термина «устойчивость тривиального решения однородного уравнения» будем употреблять термин «устойчивость уравнения».

Заметим, что в предыдущих определениях величина x_0 – неслучайная. В противном случае вместо $|x_0| < \eta$ надо писать $E|x_0|^p < \eta$ в случае p-устойчивости и асимтотической p-устойчивости. Кроме того, $E|x_0|^p$ надо писать вместо $|x_0|$ для экспоненциальной p-устойчивости.

Как мы отмечали ранее уравнения (2)–(4) являются частными случаями уравнения (1). Следовательно, и для этих уравнений так же имеет место определение 1, т.е. для них можно изучать вопросы устойчивости по начальным данным. Для уравнений (3), (4) вопросы устойчивости по начальным данным, по-видимому, другими авторами не изучались. Отметим, что для уравнений (3), (4) в некоторых случаях из устойчивости по начальным данным следует устойчивость по начальной функции. А для уравнений (3), (4) задача устойчивости по начальной функции является основной и этой задаче посвящены многие исследования.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *([11], [17], [23]).*

а) p-устойчивость уравнения (1) *эквивалентна тому, что для любого* $x_0 \in R^n$ *решение* $x(.,x_0)$ *однородного уравнения* (1) *принадлежит пространству* M_p.

б) Асимптотически p-устойчивость уравнения (1) *эквивалентна тому, что существует функция* $\gamma(t), t \in [0,+\infty)$ *такая, что* $\gamma(t) \geqslant \delta > 0$ *при* $t \in [0,+\infty)$ *(*δ *– некоторое число),* $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty$ *и для любого* $x_0 \in R^n$ *решение* $x(.,x_0)$ *однородного уравнения* (1) *принадлежит пространству* M_p^γ.

в) Экспоненциально p-устойчивость уравнения (1) *эквивалентна тому, что существует положительное число* β *такое, что для любого* $x_0 \in R^n$ *решение* $x(.,x_0)$ *однородного уравнения* (1) *принадлежит пространству* M_p^γ, *где* $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$ *(*$t \geqslant 0$*).*

Теорема 1 устанавливает эквивалентность между наиболее распространенными типами устойчивости уравнения (1) и разрешимостью задачи Коши для однородного уравнения (1) в соответствующем функциональном пространстве.

На основе теоремы 1 удобно ввести новое общее понятие устойчивости.

Определение 2. Уравнение (1) назовем M_p^γ-*устойчивым*, если для любого $x_0 \in k_p^n$ имеем $Xx_0 \in M_p^\gamma$.

Из теоремы 1 получим, что для уравнения (1) из M_p-устойчивости следует p-устойчивость, из M_p^γ-устойчивости (где $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$ $(t \geqslant 0)$ при некотором $\beta > 0$) следует экспоненциальная p-устойчивость, а из M_p^γ-устойчивости (где $\gamma(t) \geqslant \delta > 0$ при $t \in [0,+\infty)$ для некоторого числа δ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty$) следует асимптотическая p-устойчивость.

3. Допустимость пар пространств и моментная устойчивость решений по начальной функции

В настоящем пункте рассматриваются вопросы допустимости некоторых пар пространств для уравнения (1). Подобные вопросы для стохастических уравнений, по-видимому, другими авторами не рассматривались. Отметим, что задача допустимости пар пространств тесно связана с задачей устойчивости по начальной функции решений для уравнений с запаздывающим аргументом. В конце этого пункта будет показано как они связаны.

Пусть B – линейное подпространство пространства $L^n(Z)$ с нормой $||.||_B$, $B^\gamma = \{f : f \in B, \gamma f \in B\}$ – пространство с нормой $||f||_{B^\gamma} = ||\gamma f||_B$ (γ – фиксированная функция, такая же, как в пункте 1), $x_f(t,x_0)$ – решение уравнения (1) с правой частью f и $x_f(0,x_0) = x_0$.

Определение 3. Будем говорить, что для уравнения (1) *допустима пара* (M_p^γ, B^γ), если существует такое $\bar{c} \in R_+^1$, при котором для любых $x_0 \in k_p^n$, $f \in B^\gamma$ имеем $x_f(.,x_0) \in M_p^\gamma$, причем выполнено неравенство

$$||x_f(.,x_0)||_{M_p^\gamma} \leqslant \bar{c}\left(||x_0||_{k_p^n} + ||f||_{B^\gamma}\right). \tag{7}$$

Отметим, что для детерминированных уравнений в определении допустимости обычно не требуется выполнение неравенств для норм решений. Однако в силу банаховости пространств, непрерывности операторов и специфики объекта эти неравенства выполняются автоматически [4], [6], [7], [8], [40]. Кроме того, из допустимости пари (M_p^γ, B^γ) для уравнения (1) следует M_p^γ-устойчивость этого уравнения.

Определение 4. Тривиальное решение однородного уравнения (4) назовем:

— *p-устойчивым* по начальной функции, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых начального процесса $\varphi(\nu)$, $\nu < 0$ и $x_0 \in k_p^n$ из неравенства $E|x_0|^p + \underset{\nu<0}{vrai\,sup}\ E|\varphi(\nu)|^p < \delta$ ($vrai\,sup$ берется по мере порожденной функцией λ) следует оценка $E|x_\varphi(t,x_0)|^p \leqslant \varepsilon$ при $t \geqslant 0$ (здесь и в дальнейшем $x_\varphi(t,x_0)$ – решение уравнения (3) или (4) при $f^2 \equiv 0$ и $f^4 \equiv 0$ соответственно с начальной функцией φ, причем $x_\varphi(0,x_0) = x_0$);

— *асимптотически p-устойчивым* по начальной функции, если оно p-устойчиво по начальной функции, и, кроме того, для $E|x_0|^p + \underset{\nu<0}{vrai\,sup}$ $E|\varphi(\nu)|^p < \delta$ будет $\lim\limits_{t\to+\infty} E|x_\varphi(t,x_0)|^p = 0$;

— *экспоненциально p-устойчивым* по начальной функции, если при некоторых положительных постоянных $\bar{c}$, β справедливо неравенство $E|x_\varphi(t,x_0)|^p \leqslant$ $\bar{c}\,(E|x_0|^p + \underset{\nu<0}{vrai\,sup}\ E|\varphi(\nu)|^p\Big) \exp\{-\beta t\} (t \geqslant 0)$.

Отметим, что определение 4 немножко отличается от общепринятых определений. В случае, когда решение уравнения (4) определяется (понимается) как непрерывное продолжение начального процессы φ это определение совпадает с другими общепринятими определениями. Кроме того, в определении 4 естественно было бы вместо слов «по начальной функции» употребить словосочетание «по отношению к начальному значению x_0 и функции «предистории» φ» (или короче: «по x_0 и φ»).

Нетрудно заметить, что из p-устойчивости, асимптотической p-устойчивости, экспоненциальной p-устойчивости тривиального решения однородного уравнения (4) по начальной функции, следует соответственно p-устойчивость, асимптотическая p-устойчивость, экспоненциальная p-устойчивость этого же уравнения. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно даже для детерминированного уравнения.

Пусть для уравнений (4) имеем $f^4 \equiv 0$ и при любой начальной функции φ такой, что $\underset{\nu<0}{vrai\,sup}\ E|\varphi(\nu)|^p < \infty$ случайный процесс f для уравнения (4) принадлежит некоторому нормированному подпространству B пространства

$L^n(Z)$, норма в котором удовлетворяет неравенству

$$||f||_B \leqslant K \underset{\nu<0}{vrai\,sup}\,(E|\varphi(\nu)|^p)^{1/p},$$

где K – некоторое положительное число. Тогда справедлива

Лемма 2. *Если для уравнения* (1), *соответствующее уравнению* (4) *допустима пара* (M_p, B), *то тривиальное решение уравнения* (4) *p-устойчиво по начальной функции.*

Доказательство. Действительно, в этом случае имеем

$$||x_f(.,x_0)||_{M_p} \leqslant \hat{c}(||x_0||_{k_p^n} + ||f||_B) \leqslant$$

$$\leqslant \hat{c}\left(||x_0||_{k_p^n} + K \underset{\nu<0}{vrai\,sup}\,(E|\varphi(\nu)|^p)^{1/p}\right) \leqslant \bar{c}\left(||x_0||_{k_p^n} + \underset{\nu<0}{vrai\,sup}\,(E|\varphi(\nu)|^p)^{1/p}\right),$$

где $\hat{c}, \bar{c}, K$ – некоторые положительные числа. Отсюда, учитывая равенство $x_\varphi(t,x_0) = x_f(t,x_0)$, получим

$$\sup_{t\geqslant 0}(E|x_\varphi(t,x_0)|^p)^{1/p} \leqslant \bar{c}\left(||x_0||_{k_p^n} + \underset{\nu<0}{vrai\,sup}\,(E|\varphi(\nu)|^p)^{1/p}\right).$$

Откуда и получается p-устойчивость тривиального решения однородного уравнения (3) или (4) по начальной функции.

Лемма доказана.

Разумеется, в лемме 2 пространство B можно заменить на пространство B^γ. Тогда из допустимости пары (M_p^γ, B^γ) для уравнения (1), соответствующее уравнению (4) будет следовать экспоненциальная p-устойчивость по начальной функции тривиального решения однородного уравнения (4), если $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, $\beta > 0$ и асимптотическая p-устойчивость по начальной функции тривиального решения однородного уравнения (4), если $\gamma(t) \geqslant \delta > 0$, $t \in [0,+\infty)$ для некоторого числа δ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t) = +\infty$.

Изучение связей между устойчивостью и допустимостью пар пространств для обыкновенных дифференциальных уравнений восходить к Е.А. Барбашину [7], Х.Л. Массера и Х.Х.Шеферу [40]. Случай детерминированных функционально-дифференциальных уравнений изучался Н.В.Азбелевым и его учениками (см., например, [4], [5], [6], [8] и приведенные там ссылки). В случае стохастических функционально-дифференциальных уравнений подобные вопросы, по-видимому, другими авторами не изучались.

В заключении этого пункта отметим, что все утверждения, которые имеют место для уравнения (4) справедливы и для уравнения (3), так как, как отмечалось ранее, уравнение (3) можно записать в виде (4).

4. W-метод

W-метод, в его настоящем виде, был предложен Н.В.Азбеленвым, но согласно его коментарию в [3], этот метод восходит к Г.Фубину и Ф.Трикоми. Первоначально этот метод описывал способ регуляризации краевых задач для детерминированных дифференциальных уравнений (см., например, [3], [5]). Позже он был развит, обощен и применен в теории устойчивости [4], [6], [8].

Цель этого пункта – краткое описание W-метода для уравнения (1). Как и в детерминированном случае, обобщение W-метода на стохастический случай имеет целью преодоление трудностей, возникающих при применении классических методов теории устойчивости. Например, W-метод может давать эффективные признаки устойчивости в ситуациях, где схему Ляпунова – Красовского – Разумихина трудно использовать. Типичными примерами могут служит уравнения с произвольным семимартингалом, уравнения с неограниченным запаздыванием, уравнения со случайными коэффиицентами и запаздываниями и другие уравнения.

Для установления допустимости пары (M_p^γ, B^γ) для уравнения (1) необходимо проверить принадлежность решения $x_f(.,x_0)$ уравнения (1) пространству M_p^γ при любых $x_0 \in k_p^n$, $f \in B^\gamma$ и выполнимость для него неравенство (7). Будем проверять выполнимость этих условий, используя эквивалентное преобразование уравнения (1).

Начнем с «W-преобразования». Для описания W-преобразования уравнения (1) рассмотрим «модельное» уравнение, асимптотические свойства решений которого известны. Пусть модельное уравнение имеет вид

$$dx(t) = [(Qx)(t) + g(t)]dZ(t)(t \geqslant 0), \tag{8}$$

где $Q : D^n \to L^n(Z)$ – k-линейный вольтерров оператор, $g \in L^n(Z)$. Предполагается, что через любое $x_0 \in k^n$ проходить единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение x уравнения (8). Тогда, в силу леммы 1, для этого решения x имеет место представление $x(t) = U(t)x_0 + (Wg)(t)(t \geqslant 0)$, где U – фундаментальная матрица, W - оператор Коши для уравнения (8).

Уравнение (1) используя модельное уравнение (8) перепишем в виде

$$dx(t) = [(Qx)(t) + ((V-Q)x)(t) + f(t)]dZ(t)(t \geqslant 0)$$

или

$$x(t) = U(t)x_0 + (W(V-Q)x)(t) + (Wf)(t)(t \geqslant 0).$$

Обозначив $W(V-Q) = \Theta_l$, получим $((I-\Theta_l)x)(t) = U(t)x_0 + (Wf)(t)$ $(t \geqslant 0)$.

Отметим, что здесь и в дальнейшем обратимость оператора $(I-\Theta_l) : M_p^\gamma \to M_p^\gamma$ будет означать, что оператор $I-\Theta_l$ взаимно однозначно переводит пространство M_p^γ на себя.

Теорема 2. *Пусть для модельного уравнения допустима пара* (M_p^γ, B^γ), *а оператор* Θ_l *действует в пространстве* M_p^γ. *Тогда, если оператор* $(I-\Theta_l) : M_p^\gamma \to M_p^\gamma$ *непрерывно обратим, то для уравнения* (1) *допустима пара* (M_p^γ, B^γ).

Доказательство. Ввиду обратимости оператора $(I-\Theta_l) : M_p^\gamma \to M_p^\gamma$ уравнение $(I-\Theta_l)x = g$, где $g \in M_p^\gamma$ имеет единственное решение из M_p^γ, т.е. $x = (I-\Theta_l)^{-1}g \in M_p^\gamma$. Отсюда и из условий теоремы получим, что $(I-\Theta_l)^{-1}(Ux_0 + Wf) \in M_p^\gamma$ для любых $x_0 \in k_p^n$, $f \in B^\gamma$. Но с другой стороны $x_f(t,x_0) = ((I-\Theta_l)^{-1}(Ux_0 + f))(t)$. В силу предположений теоремы имеем $x_f(.,x_0) \in M_p^\gamma$ для любых $x_0 \in k_p^n$, $f \in B^\gamma$. Выполнимость неравенства (7) для $x_f(t,x_0)$ следует из непрерывной обратимости оператора $(I-\Theta_l) : M_p^\gamma \to M_p^\gamma$

и допустимости пары (M_p^γ, B^γ) для модельного уравнения (8), т.е. из условий теоремы. Следовательно, для уравнения (1) допустима пара (M_p^γ, B^γ).

Теорема доказана.

Перейдем к «W-подстановке». Уравнение (1) используя модельное уравнение (8) перепишем в виде

$$[(QUx_0)(t) + (QWg)(t)]dZ(t) = [(V(Ux_0 + Wg)(t) + f(t)]dZ(t)(t \geqslant 0).$$

Обозначив $(V - Q)W = \Theta_r$ мы приходим к операторному уравнению $(I - \Theta_r)g = (V - Q)Ux_0$.

Теорема 3. *Пусть для модельного уравнения допустима пара* (M_p^γ, B^γ), *а операторы* V, Q *непрерывно действуют из пространства* M_p^γ *в пространство* B^γ. *Тогда, если оператор* $(I - \Theta_r) : B^\gamma \to B^\gamma$ *непрерывно обратим, то для уравнения* (1) *допустима пара* (M_p^γ, B^γ).

Доказательство. В предположениях теоремы мы имеем

$$x_f(t, x_0) = U(t)x_0 + (W(I - \Theta_r)^{-1}(V - Q)Ux_0)(t) + (W(I - \Theta_r)^{-1}f)(t)$$

для произвольных $x_0 \in k_p^n$, $f \in B^\gamma$. В силу предположений теоремы получим $x_f(., x_0) \in M_p^\gamma$ для любых $x_0 \in k_p^n$, $f \in B^\gamma$. Выполнимость неравенства (7) для $x_f(t, x_0)$ следует также из условий теоремы. Отсюда следует, что для уравнения (1) допустима пара (M_p^γ, B^γ).

Теорема доказана.

Заметим, что при произвольном, априорном выборе модельного уравнения (8), для которого допустима пара (M_p^γ, B^γ) бывают случаи, когда оператор Θ_l (Θ_r)даже не действует в соответствующем функциональном пространстве, в то время как для уравнение (1) допустима пара (M_p^γ, B^γ). Однако, если для уравнение (1) допустима пара (M_p^γ, B^γ), то всегда найдется хотябы одно модельное уравнение, для которого допустима пара (M_p^γ, B^γ) и оператор Θ_l (Θ_r) будет действовать в соответствующем функциональном пространстве, причем оператор $I - \Theta_l$ $(I - \Theta_r)$ будет непрерывно обратим в этом же пространстве. В качестве такого модельного уравнения (8) можно взять само уравнение (1).

При использовании теорем 2 и 3 наиболее трудным является вопрос нахождения условий непрерывной обратимости оператора $(I - \Theta_l) : M_p^\gamma \to M_p^\gamma$ $((I - \Theta_r) : B^\gamma \to B^\gamma)$. Непрерывная обратимость оператора $(I - \Theta_l) : M_p^\gamma \to M_p^\gamma$ $((I - \Theta_r) : B^\gamma \to B^\gamma)$ можно установить, оценивая норму оператора Θ_l (Θ_r) в пространстве M_p^γ (B^γ). Если она меньше 1, то непрерывная обратимость гарантирована.

В заключении отметим, что бутвы «l» и «r» в операторых Θ_l, Θ_r происходить от слов «left» и «right» соответственно. Это означает, что W-метод применяется к оператору V слева и справа соответственно.

5. Теоремы типа Боля – Перрона

В теории устойчивости детерминированных линейных функционально-дифференциальных уравнений теоремами типа Боля–Перрона называют теоремы устанавливающие эквивалентность допустимости пространств без веса и весовых пространств. Аналогичные утверждения имеют место и в случае уравнения (1).

В дальнейшем вместо общего пространства B нам потребуются следующие примеры таких пространств:

$$\Lambda^n_{p,q}(\xi, K_1, K_2) = \Big\{H : H \in L^n(Z), (E|Ha|^p)^{1/p}\xi^{1/q-1},$$

$$(E||HAH^\top||^{p/2})^{1/p}\xi^{1/q-1/2} \in L^\lambda_q,$$

$$||H||_{\Lambda^n_{p,q}(\xi,K_1,K_2)} \stackrel{def}{=} ||(E|K_1Ha|^p)^{1/p}\xi^{(1/q-1)}||_{L^\lambda_q} +$$

$$||(E||K_2HAH^\top||^{p/2})^{1/p}\xi^{1/q-1/2}||_{L^\lambda_q}\Big\};$$

$$\Lambda^{n+}_{p,q}(\xi, K_1, K_2) = \Big\{H : H \in L^n(Z), (E|H^+a^+|^p)^{1/p}\xi^{1/q-1},$$

$$(E||H^+A^+(H^+)^\top||^{p/2})^{1/p}\xi^{1/q-1/2} \in L^\lambda_q, ||H||_{\Lambda^{n+}_{p,q}(\xi,K_1,K_2)} \stackrel{def}{=}$$

$$||(E|K_1H^+a^+|^p)^{1/p}\xi^{(1/q-1)}||_{L^\lambda_q} + ||(E||K_2H^+A^+(H^+)^\top||^{p/2})^{1/p}\xi^{1/q-1/2}||_{L^\lambda_q}\Big\};$$

В предыдущих пространствах использованы следующие обозначения:

— $\xi : [0, +\infty) \to R^1$ – неотрицательная и локально суммируемая по функции λ функция;

— K_1, K_2 – некоторые положительные числа;

— L^λ_q – линейное пространство скалярных функций на $[0, +\infty)$, суммируемых со степенью q при $1 \leqslant q < \infty$ по функции λ и ограниченных в существенном по мере порожденной функцией λ при $q = \infty$.

Подчеркнем, что для любых положительных чисел K_1, K_2 пространства $\Lambda^n_{p,q}(\xi,\ K_1, K_2)$ состоят из одних и тех же случайных процессов. Различаются их нормы, введенные по техническим причинам. Это же справедливо для пространств $\Lambda^{n+}_{p,q}(\xi, K_1, K_2)$. Отметим, что эти пространства играют важную роль при изучении вопросов устойчивости по начальной функции для уравнений (3), (4).

В дальнейшем для заданного ξ мы положим $\gamma(t) = \exp\{\beta \int\limits_0^t d\lambda(s)\}$ $(t \geqslant 0)$.

Ниже m_p обозначает пространство совпадающее с пространством M_p в скалярном случае. Мы предполагаем, что k-линейный оператор V в уравнении (1) удовлетворяет условию: $V : M_p \to \Lambda^n_{p,q}(\xi, K_1, K_2)$. Мы также будем использовать следующие обозначения, связанные с оператором V:

— $Vx = (V_1x, ..., V_mx)$;

— $(V_\beta x)(t) = \gamma(t)(V(x/\gamma))(t)$.

Определение 5. Будем говорть, что k-линейный вольтерров оператор $\bar V : m_p \to \to \Lambda^+_{p,q}(\xi, K_1, K_2)$ является *мажорантой* k-линейного вольтеррового оператора $V : M_p \to \Lambda^n_{p,q}(\xi, K_1, K_2)$, если 1) оператор $\bar V x$ положителен, т.е. $x \geqslant 0$ п.н. влечет $\bar V x \geqslant 0$ п. н., и 2) $(|V_1x|, ..., |V_mx|) \leqslant \bar V|x|$ п. н. для любого $x \in M_p$.

Определение 6. Будем говорить, что k-линейный вольтерров оператор $V : M_p \to \Lambda^n_{p,q}(\xi, K_1, K_2)$ удовлетворяет Δ-*условию*, если оператор V допускает k-линейную вольтеррову мажоранту $\bar{V} : m_p \to \Lambda^{n+}_{p,q}(\xi, K_1, K_2)$, удовлетворяющую следующим дополнительному условию: существует число $\beta_0 > 0$, для которого оператор $\bar{V}_{\beta_0}$ непрерывно действует из пространства m_p в пространство $\Lambda^{+}_{p,q}(\xi, K_1, K_2)$.

В дальнейшем нам нужны будут более конкретные ограничения на модельное уравнение (8).

Условие 1. Фундаментальная матрица для модельного уравнения (8) удовлетворяет оценке $||U(t)|| \leqslant \hat{c}(t \geqslant 0)$, где $\hat{c} \in R_+$.

Условие 2. Оператор Коши для модельного уравнения (8) имеет интегральную форму

$$(Wg)(t) = \int\limits_0^t C(t,s)dZ(s)(t \geqslant 0),$$

где $C(t,s)$ – $n \times n$-матричная функция, заданная на $G := \{(t,s) : t \in [0, \infty), 0 \leqslant s \leqslant t\}$ и удовлетворяющая оценке $||C(t,s)|| \leqslant \bar{c}\exp\{-\alpha(\nu(t) - \nu(s))\}$ на G, где $\nu(t) = \int\limits_0^t \xi(s)d\lambda(s)$, для некоторых $\alpha > 0, \bar{c} > 0$ и скалярной неотрицательной функции ξ, определенная ранее.

Следующие два результата дают достаточные условия допустимости пар пространств с весом. Их доказательства можно найти соответственно в [23] и [24]. Эти теоремы можно назвать некоторым распространением теоремы Боля–Перрона на случай уравнения (1).

Теорема 4. *Пусть уравнение* (1) *и модельное уравнение* (8) *удовлетворяют следующим условиям:*

1) операторы V, Q непрерывно действуют из M_{2p} в $\Lambda^n_{2p,q}(\xi, K_1, K_2)$, $2p \leqslant q \leqslant \infty$;

2) модельное уравнение (8) *удовлетворяет условиям 1 и 2;*

3) оператор V удовлетворяет Δ-условию;

Тогда, если оператор $(I - \Theta_l) : M_{2p} \to M_{2p}$ непрерывно обратим, то для уравнения (1) *допустима пара $(M^\gamma_{2p}, (\Lambda^n_{2p,q}(\xi, K_1, K_2))^\gamma)$ при некотором $\beta > 0$.*

Теорема 5. *Пусть уравнение* (1) *и модельное уравнение* (8) *удовлетворяют следующим условиям:*

1) операторы V, Q непрерывно действуют из M_{2p} в $\Lambda^n_{2p,\infty}(\xi, K_1, K_2)$, $2p \leqslant q \leqslant \infty$;

2) модельное уравнение (8) *удовлетворяет условиям 1 и 2;*

3) оператор V удовлетворяет Δ-условию;

Тогда, если оператор $(I - \Theta_r) : M_{2p}$ в $\Lambda^n_{2p,\infty}(\xi, K_1, K_2) \to M_{2p}$ в $\Lambda^n_{2p,\infty}(\xi, K_1, K_2)$ непрерывно обратим, то для уравнения (1) *допустима пара $(M^\gamma_{2p}, (\Lambda^n_{2p,q}(\xi, K_1, K_2))^\gamma)$ при некотором $\beta > 0$.*

В качестве приложения вышеизложенной теории приведем один результат об асимптотической устойчивости скалярного функционально-дифференциального уравнения Ито.

Теорема 6. *Нулевое решение однородной задачи, соответствующей задаче*

$$dx(t) = (a\xi(t)x(t) + b\xi(t)x(t/\tau_0))dt + c\sqrt{\xi(t)}x(t/\tau_1)d\mathcal{B}(t), t \geqslant 0,$$

где ξ *задано формулой* $\xi(t) = I_{[0,r]}(t) + tI_{[r,\infty]}(t)$, $t \geqslant 0$, $I_A(t)$ *– характеристическая функция множества* A, $\mathcal{B}(t)$ *является скалярным винеровским процессом,* $a, b, c, \tau_0, \tau_1, r$ *– вещественные числа* $(\tau_0 > 1, \tau_1 > 1)$, *будет асимптотически* $2p$*-устойчивым по* x_0, *если существует* $\alpha > 0$, *такое что*

$$|a + b + \alpha| + c_p|c|\sqrt{0,5\alpha} + (|ab| + b^2)\delta_0 + c_p|bc|\sqrt{\delta_0} < \alpha,$$

где $\delta_0 = \max\{\log \tau_0, (1 - \tau_0^{-1})r\}$.

6. Линейные импульсные дифференциальные уравнения Ито с последействием

Для импульсных дифференциальных уравнений Ито с последействием вопросы устойчивости решений ранее, по-видимому, другими авторами не рассматривались. Объектом исследования этого пункта является линейная импульсная система дифференциальных уравнений Ито вида

$$dx(t) = \sum_{j=0}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1j}(t))dt + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t))d\mathcal{B}_i(t) \ (t \geqslant 0), \tag{9}$$

$$x(\nu) = \varphi(\nu) \ (\nu < 0), \tag{10}$$

$$x(\mu_j) = A_j x(\mu_j - 0), j = 1, 2, 3, ... \text{ почти наверно}, \tag{11}$$

где $\mu_j, A_j, j = 1, 2, 3, ...$ – действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < ...$, $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_j = \infty$; φ – случайный процесс, который не зависит от винеровских процессов $\mathcal{B}_i, i = 2, ..., m$, и имеет почти наверноограниченные в существенном траектории; $A_{ij}, i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$ – $n \times n$-матрицы, элементы матриц $A_{1j}, j = 0, ..., m_1$ – прогрессивно измеримые случайные процессы, траектории которых почти наверно локально суммируемы, элементы матриц $A_{ij}, i = 2, ..., m, j = 0, ..., m_i$ – прогрессивно измеримые случайные процессы, траектории которых почти наверно локально суммируемы с квадратом; h_{ij}, $i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$ – измеримые по Лебегу функции такие, что $h_{ij}(t) \leqslant t$ при $t \in [0, \infty)$ μ-почти всюду, $i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$ (μ – мера Лебега на $[0, +\infty)$).

Исследование вопросов устойчивости для уравнения (9)–(11) проведено методом модельных или вспомогательных уравнений, описанный в предыдущих пунктах. При этом учтен кокретный вид уравнения при выборе модельного уравнения и при преобразовании исходного уравнения.

Кроме того, будем предполагать $A_{ij}, h_{ij}, i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$ удовлетворяют условиям:

1) $\|A_{1j}(t)\| \leqslant a_{1j}(t)$ $P \times \mu$-почти всюду, где a_{1j} – локально суммируемая функция при $j = 0, ..., m_1$;

2) $\|A_{ij}(t)\| \leqslant a_{ij}(t)$ $P \times \mu$-почти всюду, где a_{ij} – локально суммируемая с квадратом функция при $i = 2, ..., m, j = 0, ..., m_i$;

3) $\underset{t\geqslant 0}{vrai\,sup}\,(t - h_{ij}(t)) < \infty$ для $i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$.

Замечание 1. Если в (11) $A_j = 1$ при $j = 1, 2, 3, ...$, то уравнение (9)–(11) называют дифференциальным уравнением Ито с последействием и при этом условие (11) отбрасывают. Если, кроме того, в (5) $h_{ij}(t) = t$ при $t \in [0, \infty)$ μ-почти всюду, $i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$, то уравнение (9)–(10) называют дифференциальным уравнением Ито и при этом условие (10) лишнее.

Приведем следующий результат, доказаный в работе [31].

Пусть $h^T(t)$ – функция на $[T, \infty)$, определяемая по функции $h(t)$ $(t \in [T, \infty))$ равенством

$$h^T(t) = \begin{cases} h(t), \text{ если } h(t) \geqslant T, \\ T, \text{ если } h(t) < T. \end{cases}$$

Теорема 7. *Пусть существуют индексы $I \subset \{0, ..., m_1\}$, положительные числа $A, \rho, \sigma, \alpha,$ $\gamma_i, i = 1, 2$ и $T \in [0, \infty)$ такие, что $|A_j| \leqslant A$, $\rho \leqslant \mu_{j+1} - \mu_j \leqslant \sigma$ при $j = k_T, k_T{+}1, ...,$ $\left\|\exp\left\{\int\limits_s^t \sum\limits_{k\in I} A_{1k}(\tau)d\tau\right\}\right\| \leqslant \exp\{-\alpha(t{-}s)\}$, $A\exp\{-\alpha\rho\} < 1$,*

$$\sum_{k\in I} a_{1k}(t)\left[\sum_{j=0}^{m_1}\int\limits_{h_{1k}^T(t)}^t a_{1j}(s)ds + c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\left(\int\limits_{h_{1k}^T(t)}^t (a_{ij}(s))^2 ds\right)^{0.5}\right] + \sum_{k\bar{\in} I} a_{1k}(t) \leqslant \gamma_1$$

при $t \geqslant T$ μ-п.в., $\sum\limits_{i=2}^{m}\sum\limits_{j=0}^{m_i}(\underset{t\geqslant T}{vrai\,sup}\,(a_{ij}(t))^2)^{0.5} = \gamma_2$ и

$$\frac{\max\{1, A\}(1-\exp\{-\alpha\sigma\})}{\alpha(1-\exp\{-\alpha\rho\}A)}\gamma_1 + c_p\gamma_2\left[\frac{\max\{1, A^2\}(1-\exp\{-2\alpha\sigma\})}{2\alpha(1-\exp\{-2\alpha\rho\}A)}\right]^{1/2} < 1. \quad (12)$$

Тогда тривиальное решение однородного уравнения (9)–(11) экспоненциально $2p$-устойчиво по начальной функции при $1 \leqslant p < \infty$.

В работе [31] приведены следствия этой теоремы, которые можно использовать для получения конкретных условий экспоненциальной $2p$-устойчивости по начальной функции тривиального решения для конкретных однородных уравнений вида (9)–(11) при $1 \leqslant p < \infty$.

В дальнейшем для уравнения (9)–(11) будем предпологать, что вместо условия **3** выполнены условия: $h_{ij}(t) = t/h_{ij}$ при $t \in [0, +\infty)$, где h_{ij} – действительне число такое, что $h_{ij} \geqslant 1$ при $i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$. Тогда условие (10) лишнее.

Пусть в дальнейшем $\gamma(t) = t^\beta$, где β – некоторое положительное число, $\hat{h}_{ij}(t) = t/h_{ij}$ при $i = 1, .., m$, $j = 0, ..., m_i$, $h^T(t)$, $\chi_h^T(t)$ – функции на $[T, \infty)$, определяемые по функции $h(t)$ $(t \in [T, \infty))$ равенствами

$$h^T(t) = \begin{cases} h(t), \text{ если } h(t) \geqslant T, \\ T, \text{ если } h(t) < T, \end{cases} \quad \chi_h^T(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } h(t) \geqslant T, \\ 0, \text{ если } h(t) < T, \end{cases}$$

$\hat{A}_{ij}(t) = A_{ij}(t)\chi^T_{\hat{h}_{ij}}(t)$ при $i = 1, ..., m$, $j = 0, ..., m_i$, $\xi(t) = 1/t(t \geqslant T)$.

Имееет место следующая теорема, доказанная в работе [32].

Теорема 8. *Пусть для уравнений (9), (11) существуют индексы $I \subset \{0, ..., m_1\}$, положительные числа $A, \rho, \sigma, \alpha,$ $\gamma_i, i = 1, 2$ и $T \in [0, \infty)$ такие, что $a_{1j}/\xi \in L_\infty^T$ при $j = 0, ..., m_1$, $a_{ij}/\sqrt{\xi} \in L_\infty^T$ при $i = 2, ..., m,$*

$j = 0, ..., m_i$, $|A_j| \leqslant A$, $\rho \leqslant \ln(\mu_{j+1}/\mu_j) \leqslant \sigma$ при $j = k_T, k_T + 1, ...$, элементы матриц $A_{1k}, k \in I$ детерминированные функции и $\left\| \exp\left\{ \int\limits_s^t \sum\limits_{k\in I} \hat{A}_{1k}(\tau)d\tau \right\} \right\| \leqslant \exp\{-\alpha \ln(t/s)\}$,

$$A\exp\{-\alpha\rho\} < 1, \sum_{k\in I} ta_{1k}(t) \left(\sum_{j=0}^{m_1} \int\limits_{\hat{h}_{1k}^T(t)}^{t} a_{1j}(s)ds + \right.$$

$$\left. c_p \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=0}^{m_i} \left(\int\limits_{\hat{h}_{1k}^T(t)}^{t} (a_{ij}(s))^2 ds \right)^{0.5} \right) + \sum_{k\bar{\in} I} ta_{1k}(t) \leqslant \gamma_1$$

при $t \geqslant T$ μ-п.в., $\sum\limits_{i=2}^{m}\sum\limits_{j=0}^{m_i} \underset{t\geqslant T}{vrai\,sup}\,(\sqrt{t}a_{ij}(t)) = \gamma_2$, а также выполнено неравенство (12). Тогда тривиальное решение однородного уравнения (9), (11) асимптотически $2p$-устойчиво относительно начальных данных при $1 \leqslant p < \infty$.

В работе [32] также приведены следствия этой теоремы, которые можно использовать для получения конкретных условий экспоненциальной $2p$-устойчивости по начальной функции тривиального решения для конкретных однородных уравнений вида (9)–(11) при $1 \leqslant p < \infty$.

7. Линейные функционально-разностные уравнения Ито

Вопросы устойчивости решений для линейных функционально-разностных уравнений Ито другими авторами, по-видимому, также не иследовались. Объектом исследования этого пункта является линейное функционально-разностное уравнение Ито.

Пусть в дальнейшем N – множество натуральных чисел и $N_+ = \{0\} \cup N$.

Рассматривается линейня функционально-разностная система Ито вида

$$\begin{gathered} x(s+1) = x(s) + \sum_{j=0}^{s} [A_1(s,j)x(j) + f_1(s)]h + \\ \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{s} [A_i(s,j)x(j) + f_i(s)](\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh))\,(s \in N_+), \end{gathered} \tag{13}$$

где $x(s)$ – $\mathcal{F}_s$ – измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$,$f_i(s)$ – $\mathcal{F}_s$ – измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$, $i = 1, ..., m$, h – достаточно малое действительное число, $A_i(s,j)$ – $n \times n$-матрица, элементы которой $\mathcal{F}_s$ – измеримые случайные величины при $s \in N_+$, $j = 0, ..., s$, $i = 1, ..., m$.

Под решением уравнения (13) понимается последовательность случайных величин $x(s)\, s \in N_+$, где $x(s)$ – $\mathcal{F}_s$ – измеримая n-мерная случайная величина, удовлетворяющая уравнению (13) P-почти всюду. Заметим, что решение уравнения (13) является прогрессмвно измеримый случайный процесс $x : N_+ \times \Omega \to R^n$.

Уравнение (13) называют однородным, если $f_i(s) = 0$ P-почти всюду при $s \in N_+$, $i = 1, ..., m$.

Частными случаями уравнения (13)являются:

а) *Линейная система «обыкновенных» разностных уравнений Ито*

$$\begin{gathered} x(s+1) = x(s) + [A_1(s)x(s) + f_1^1(s)]h + \\ \sum_{i=2}^{m} [A_i(s)x(s) + f_i^1(s)](\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh))\,(s \in N_+), \end{gathered} \tag{14}$$

где $x(s)$ – $\mathcal{F}_s$ – измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$, $f_i^1(s)$ – $\mathcal{F}_s$ – измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$, $i = 1, ..., m$, h – достаточно малое действительное число, $A_i(s)$ – $n \times n$-матрица, элементы которой $\mathcal{F}_s$ – измеримые случайные величины при $s \in N_+$, $i = 1, ..., m$.

б) *Линейная система разностных уравнений Ито с запаздыванием*

$$\begin{gathered} x(s+1) = x(s) + \sum_{j=-\infty}^{s} [A_1^2(s,j)x(j) + f_1^2(s)]h + \\ \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=-\infty}^{s} [A_i^2(s,j)x(j) + f_i^2(s)](\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh))\,(s \in N_+), \\ x(j) = \varphi(j) \ (j < 0), \end{gathered} \tag{15}$$

где $x(s)$ – $\mathcal{F}_s$ – измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$, $f_i^2(s)$ – $\mathcal{F}_s$ – измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$, $i = 1, ..., m$, h – достаточно малое действительное число, $A_i^2(s,j)$ – $n \times n$-матрица, элементы которой $\mathcal{F}_s$ – измеримые случайные величины при $s \in N_+$, $j = -\infty, ..., s$, $i = 1, ..., m$, $\varphi(j)$ – случайная величина, которая не зависит от винеровских процессов $\mathcal{B}_i, i = 2, ..., m$ при $j < 0$.

Чтобы записать уравнение (15) в виде (13) в уравнении (13) надо положить $A_i(s,j) = A_i^2(s,j)$, $f_i(s) = f_i^2(s) + \sum_{j=-\infty}^{0} A_i^2(s,j)\varphi(j)$ при $s \in N_+$, $j = 0, ..., s$, $i = 1, ..., m$.

Заметим, что уравнение (15) будет однородным, если $f_i^2(s) = 0$ P-почти всюду при $n \in N_+$, $i = 1, ..., m$ и $\varphi(j) = 0$ P-почти всюду при $j < 0$.

в) *Линейная система разностных уравнений Ито с ограниченным запаздыванием*

$$\begin{gathered} x(s+1) = x(s) + \sum_{j=s-d}^{s} [A_1^3(s,j)x(j) + f_1^3(n)]h + \\ \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=s-d}^{s} [A_i^3(s,j)x(j) + f_i^3(s)](\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh))\,(s \in N_+), \\ x(j) = \varphi(j) \ (-d \leqslant j < 0), \end{gathered} \tag{16}$$

где $d \in N$, $x(s)$ – $\mathcal{F}_s$ – измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$,$f_i^3(s)$ – $\mathcal{F}_s$ – измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$, $i = 1, ..., m$, h – достаточно малое действительное число, $A_i^3(s,j)$ – $n \times n$-матрица, элементы которой $\mathcal{F}_s$ – измеримые случайные величины при $s \in N_+$, $j = s-d, ..., s$, $i = 1, ..., m$, $\varphi(j)$ – случайная величина, которая не зависит от винеровских процессов $\mathcal{B}_i, i = 2, ..., m$ при $j = -d, ..., -1$.

Чтобы записать уравнение (16) в виде (13) достаточно заметить, что уравнение (16) является частным случаем уравнения (15).

Для уравнения (13) исследованы вопросы устойчивости методом модельных уравнений. Исследования проведены как и в случае уравнения (2). Для уравнения (13) имеют место аналоги всех утверждений справедливые для уравнения (2). Устойчивость решений уравнений (15), (16) относительно начальной функции исследована как частный случай допустимости пар пространств для соответствующего уравнения (13). Результаты исследований по вопросам устойчивости для уравнения (13), соответственно для уравнений (14)–(16) опубликованы в работах [34] и [35].

Заключение

Мы в рамках этой статьи ограничились рассмотрением вопросов только p-устойчивости для уравнения (1) при $1 \leqslant p < \infty$. Это связано с тем, что в этом случае удается получить признаки устойчивости для исследуемых уравнений в терминах парамеров этих уравнений. Отметим, что основные утверждения этой статьи имеют место и в случае других видов устойчивости (см, например,[17]). Основные трудности, возникающие при исследовании этих видов устойчивости не нормируемость пространств случайных процессов, связанных с этими видами устойчивости. Вследствие этого нельзя эффективно проверять обратимость операторов в этих пространствах.

Для получения достаточных условий устойчивости решений уравнений, рассмотренных ранее в терминах параметров этих уравнений могут быть использованы теоремы 1 – 8. Некоторые результаты полученные таким образом для этих уравнений можно найти в работах [10]–[12], [14]–[35].

Если в методе Ляпунова – Красовского – Разумихина предполагают существование подходящий функции Ляпунова (функционал Ляпунова – Красовского), то в W-методе надо предполагать существование подходящего (вспомогательного, модельного) уравнения обеспечивающее желаемое асимптотическое свойство решений исследуемых уравнений. Следовательно, для W-метода актуальной является вопрос выбора модельного уравнения.

В качестве модельного уравнения можно использовать любое уравнение вида (8) с известными аисптотическими совйствами решениий, т.е. удовлетворяющее условиям теорем 3 – 8. Однако при исследовании асимптотических свойств решений уравнения (1) успех зависит от того, насколько близки асимптотические сойства решений модельного уравнения (8) и уравнения (1). Другими словами этот успех зависить насколько эффективно мы можем устанавливать непрерывную обратимость операторов $I - \Theta_l$, $I - \Theta_r$ в соответствующих пространствах случайных процессов.

Некоторые подходы в выборе модельного уравнения реализованы в работах [10]–[12], [14]–[35]. В этих работах модельное уравнение, в основном, выбиралось зависящее от параметра. Рассматривался вопрос можно ли выбрать этот параметр так, чтобы операторы полученные после преобразования уравнения (1) были обратимы в соответствующих пространствах случайных процессов. На основе этой идеи получены многочисленные интересные результаты.

В случае применений теорем 4 – 5 для исследования асимптотической устойчивости решений уравнения (1) немаловажную роль играет проверяемость Δ-условий для оператора V. Для оператора V, соответствующее уравнению (2) выполнимость Δ-условий проверяется непосредственно. В работах [11], [17], [23], [24] этот вопрос изучен подробно, определены операторы удовлетворяющие Δ-условию. В случае уравнений (3), (4) для того, чтобы оператор V довлетворял Δ-условию один из основных ограничений, чтобы эти уравнения были с ограниченным запаздыванием.

В заключении этого пункта отметим, что W-метод так же можно применить и для изучения других вопросов для уравнения (1). В частности, с помощью W-метода эффективно удается исследовать вопросы устойчивости решений по части переменных для уравнения (1). Результаты исследований устойчивости решений по части переменных для уравнения (1) можно найти в работах [16]–[18], [21]. W-метод так же можно эффективно применить для исследования вопросов устойчивости решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу. Исследованию вопросов устойчивости нелинейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений W-методом посвящены работы [15], [17], [121], [34].

Список литературы

[1] Appleby J. A. D., Reynolds D. W. Non-exponential stability of scalar stochastic Volterra equations // Statist. Probab. Lett. 2003.

[2] Arnold L. Random Dynamical Systems // Berlin – Heidelberg:Springer. 1998. Pp. 588.

[3] Азбелев Н.В. Как это было // Проблемы нелинейного Анализа в инженерных Системах // 2003. Т.9. Вып. 1(17). С. 22–39.

[4] Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Симонов П. М., Чистяков А. В. Устойчивость линейных систем с последействием. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 28. N 5. С. 745–754.

[5] Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. С. 280.

[6] Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. С. 230.

[7] Барбашин Е. А. Введение в таорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.

[8] Березанский Л. М. Развитие W-метода Н. В. Азбелева в задачах устойчивости решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. N 5 С. 739–750.

[9] Jacod J. Integrales stochastiques par rapport d'une semimartingale vectorielle et changements de filtration // Lect. Notes Math. Spriger. 1980. V. 784. Pp. 161–172.

[10] Кадиев Р. И., Поносов А. В. Устойчивость стохастических функционально-дифференциальных уравнений относительно постоянно действующих возмущений // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. N 2. С. 198–207.

[11] Кадиев Р. И. Достаточные условия устойчивости стохастических систем с последействием // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. N 2. С. 555–564.

[12] Кадиев Р.И. Допустимость пар пространств по части переменных для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Изв. Вузов. Математика. 1994. N 5. С. 13–22.

[13] Кадиев Р.И. Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу // Изв. Вузов. Математика. 1995. N 10. С. 35–40.

[14] Кадиев Р.И. Достаточные условия устойчивости стохастических систем // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. N 3. С. 423–424.

[15] Кадиев Р.И. К вопросу об устойчивости стохастических функционально-дифференциальных уравнений по первому приближению // Изв. Вузов. Математика. 1999. N 10. С. 3–8.

[16] Кадиев Р.И. Асимптотическая устойчивость по части переменных дифференциальных систем Ито с запаздывающим аргументом // Изв. Вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. 1999. N 2. С. 3–8.

[17] Кадиев Р.И. Устойчивость решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Дис. ... д-р физ.-мат. Наук. Екатеринбург. 2000. С. 231.

[18] Кадиев Р.И. Достаточные условия устойчивости по части переменных линейных стохастических систем последействием // Изв. Вузов. Математика. 2000. N 6. С. 75–79.

[19] Кадиев Р.И. Устойчивость линейных дифференциальных систем со случайными матрицами, многочлены со случайными коэффициентами и жорданова форма случайных матриц // Изв. Вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. 2000. N 1. С. 8–16.

[20] Кадиев Р.И. Асимптотическая устойчивость дифференциальных систем Ито с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 24. N 2. С. 163–167.

[21] Кадиев Р.И. Устойчивость решений по части переменных стохастических функционально-дифференциальных уравнений по первому приближению // Изв. Вузов. Математика. 2001. N 5. С. 30–35.

[22] Кадиев Р.И. Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений со случайным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. N 2. С. 276–281.

[23] Kadiev R.I. and Ponosov A.V. Stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // Electron J. Diff. Eqns. 2004. V.2004. N 92. Pp. 1–36.

[24] Kadiev R.I., Ponosov A.V. Relations between stability and admissibility for stochastic linear functional differential equations //J. Func. Diff. Eqs. 2005. N 12. Pp. 117–141.

[25] Кадиев Р.И., Поносов А.В. Метод Н.В. Азбелева в теории стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Проблемы Нелинейного Анализа в Инженерных Системах. 2006. Т.12. N 1(25). С. 57–88.

[26] Кадиев Р.И., Поносов А.В. Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. N 7. С. 879–885.

[27] Kadiev R.I., Ponosov A.V. Exponential stability of linear stochastic differential equations with bounded delay and the W-transform // E. J. Qualitative Theory of Diff. Eq. 2008. N 23. Pp. 1–14.

[28] Kadiev R.I. Development of N. V. Azbelev*s ideas in the stability theory for stochastic functional differential equations // Functional Differential Equations / College of Judea and Samaria. Ariel, Israel. 2008. V. 15. Pp. 195–213.

[29] Kadiev R.I., Ponosov A.V. Partial Lyapunov stability of linear stochastic functional differential equations with to initial values // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis, 2008. V. 15. N 5. Pp. 727–754.

[30] Kadiev R.I., Ponosov A.V. Linear stochastic functional differential equations: stability, admissible pairs of spaces and N.V. Azbelev*s W-method // Electronic Journal of Differential Equations. Texas State University, 2008. Pp. 1–16.

[31] Кадиев Р.И. Поносов А.В. Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Дифференц. уравнения. Минск. Т.46. N 4. 2010. С. 486–498.

[32] Kadiev R., Ponosov A. Stability of impulsive stochastic differential linear functional equations with linear delays // J. of Abstract Differential Equations and Applications. V. 2. N. 2 2011. Pp. 7–25.

[33] Kadiev R.I., Ponosov A.V. The W-transform in stability analysis for stochastic linear functional difference equations // J. Mathem. Analysis and Appl. V. 389. N 2. 2012. Pp. 1239–1250.

[34] Кадиев Р.И. Устойчивость решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями по линейному приближению. // Дифференц. уравнения. Минск. Т.49. N 8. 2013. С. 963–970.

[35] Kadiev R., Ponosov A. Exponential stability of Ito-type linear functional difference equations. Computers & Mathematics with Applications. V. 66. N. 11. 2013. Pp. 2295–2306. (http://www.sciencedirect.com/science/journal/08981221/66/11)

[36] Kolmanovskii V. B., Nosov V.R. Stability of functional Differential Equations. New York: Academic Press. 1986. Pp. 217.

[37] Липцер Р.Ш., Ширяев Ф.Н. Теория мартингалов. М., 1986. 512 с.

[38] Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications / Chichester: Horwood Publishing ltd. 1997. Pp. 360.

[39] Mao X., Rodkina A. E. Exponential stability and stochastic differential equations driven by discontinuous semimartingales // Stochastics and Stochastics Reports. 1995. V. 55. Pp. 207–224.

[40] Массера Х. Л., Шефер Х.Х. Линейные дифференциальные уравненияч и функциональные прострaства. М.: Мир. 1970. С. 456.

[41] Mizel V.J. and Trutzer V. Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability // J. Integral Equations. 1984. V.7. Pp. 1–72.

[42] Mohammed S.-E.F. Stochastic Functional Differential Equations // Boston – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. 1984. Research notes in Mathematics. No. 99. Pp. 245.

[43] Mohammed S.-E.F. Stochastic Functional Differential Equations With Memory. Theory, Examples and Applications // Proceeding of The Sixth on Stochastic Analysis. Geilo. Norway. 1996. Pp. 1–91.

[44] Садовяк А.М., Царьков Е.Ф. Аналог формулы Коши для стохастических дифференциальных уравнений // Теор. вероятн. и ее примен. 1973. Т. 28. Вып. 2. С. 415–416.

[45] Садовяк А.М., Царьков Е.Ф. Матрица Коши систем стохастических дифференциальных уравнений // Математический анализ и теория вероятностей. Киев: Наукова думка. 1978. С. 150–154.

[46] Поносов А.В. Свойства стохастической полной непрерывности операторов, связанных с винеровским процессом // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: Межвуз. сбр. научн. тр. / Перм. ун-т.–Пермь: 1988.–С. 148–154.

[47] Пугачев В.С., Синицин И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука. 1985. С. 559.

[48] Rangqufn Wu Stochastic differential equations. // Research Notes in Math. – Pitman publ. Boston – London – Melbourne. 1985. C. 150.

[49] Scheutzov M.K.R. Stationary and Periodic Stochastic Differential Systems: A study of Qualitative Changes with Respect to the Noise Level and Asymptotics. Habilitationsschrift, Universitat Keiserslautern, Germany. 1988. C. 181.

[50] Царьков. Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне. 1989. С. 421.

Р. И. Кадиев (R. I. Kadiev)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: kadiev_r@mail.ru

Поступила в редакцию
21.11.2014