УДК 517.51

А.-Р. К. Рамазанов

Оценка полиномиальных приближений ограниченных функций с весом

Решена открытая задача о структурной характеристике ограниченных функций для оценки их наилучших полиномиальных приближений в метрике произвольного ограниченного знакочувствительного веса.

Библиография: 4 названия.

The open problem about the structural characteristic of bounded functions is solved for estimate of their best polynomial approximations in the metric of bounded sign-sensitive weight.

Bibliography: 4 items.

Ключевые слова: знакочувствительный вес, полиномиальные приближения, ограниченные функции.

Keywords: signsensitive weight, polynomial approximations, bounded functions.

Введение

С использованием метода малого параметра построена новая структурная характеристика (аналог модуля непрерывности) ограниченных на отрезке функций для оценки их наилучших полиномиальных приближений в несимметричной метрике относительно пары ограниченных на этом отрезке весовых функций. В этой метрике через построенную характеристику получена точная по порядку оценка наилучших полиномиальных приближений ограниченных на отрезке функций.

Следуя Е.П. Долженко, знакочувствительным весом на множестве $E \subset (-\infty, +\infty)$ называется упорядоченная пара $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ определенных и неотрицательных на E функций $p_-(x)$ и $p_+(x)$.

Будем считать множество E некоторым отрезком $\Delta = [a, b]$, а компоненты веса $p_-(x)$ и $p_+(x)$ ограниченными на Δ функциями. Тогда p–нормой ограниченной на отрезке Δ функции $f(x)$ называется следующая величина:

$$|f|_p = |f|_{p,\Delta} = \sup\{f^+(x)p_+(x) + f^-(x)p_-(x) : \ x \in \Delta\};$$

здесь, как обычно, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ и $f^-(x) = (-f(x))^+$ — срезки функции $f(x)$.

Очевидно, для ограниченных на Δ функций $f(x)$, $g(x)$ и веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ имеем:

1) $|f|_p \geqslant 0$;
2) $|tf|_p = t|f|_p$ при $t \geqslant 0$;
3) $|f+g|_p \leqslant |f|_p + |g|_p$.

Следовательно, p–норма является сублинейным функционалом на множестве ограниченных на данном отрезке функций. Если вес $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ таков, что $|f|_p = 0$ лишь при $f(x) \equiv 0$, то p–норма является масштабной функцией или функционалом Минковского.

Функционалы Минковского в качестве несимметричных норм рассматривали М.Г. Крейн и А.А. Нудельман. Такие нормы соответствуют случаю p–нормы, когда компоненты веса $p_-(x)$ и $p_+(x)$ непрерывны и строго положительны на Δ. Однако в этом случае изучение вопросов приближения функций в p–норме принципиально мало чем отличается от их изучения в обычной равномерной норме

$$\|f\| = \|f\|_\Delta = \sup\{|f(x)| : \ x \in \Delta\},$$

которая совпадает с p–нормой $|f|_{p,\Delta}$ при $p(x) = (1,1)$.

В общем же случае, когда допускаются разрывы или обращение в нуль компонент веса, многие вопросы теории приближения имеют нестандартные ответы и требуют другой методики исследований.

Систематическому изучению вопросов приближения функций в p–норме относительно произвольного знакочувствительного веса начало положили работы Е.П. Долженко и Е.А. Севастьянова.

Полученные ими в этом направлении основные результаты изложены в двух работах ([1] и [2]).

В частности, ими изучены вопросы существования, единственности и устойчивости элемента наилучшего приближения, введены и исследованы важные характеристики: свобода и жесткость системы «Вес — Аппарат приближения», которые играют существенную роль и в обратных теоремах теории приближения в p–норме.

Следующая задача о прямых теоремах теории приближения в p–норме также поставлена Е.П. Долженко.

Найти структурную характеристику (аналог модуля непрерывности) ограниченных функций $f(x)$ $(x \in \Delta)$ для оценки их наилучших полиномиальных приближений в p–норме относительно ограниченного на Δ веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$, т.е. величины

$$E_n(f,p,\Delta) = \inf\{|Q-f|_{p,\Delta} : Q \in \mathcal{P}_n\} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

1. Оценки полиномиальных приближений непрерывных функций со знакочувствительным весом

Пусть сначала функция $f(x)$ и вес $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ непрерывны на отрезке $\Delta = [a,b]$.

Определим аналог модуля непрерывности $f(x)$ относительно знакочувствительного веса как обычно, взяв p–норму приращения функции, т.е. равенством

$$\omega(\delta, f, p) = \sup_{|h| \leqslant \delta} |f_h - f|_{p,\Delta} \quad (f_h(x) = f(x+h); \delta \geqslant 0).$$

Будем придерживаться также обозначений

$$\omega(\delta, f) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \|f_h - f\|_\Delta, \quad \omega(\delta, p) = \max\{\omega(\delta, p_-), \omega(\delta, p_+)\}.$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *При $n = 1, 2, \dots$ имеет место неравенство*

$$E_n(f, p, \Delta) \leqslant 6\omega\left(\frac{b-a}{n}, f, p\right) + 8\omega\left(\frac{b-a}{n}, f\right)\omega\left(\frac{b-a}{n}, p\right). \tag{1.1}$$

Доказательство теоремы 1 дано в работе [3]. Приведем некоторые замечания относительно оценки (1.1).

Замечание 1. По порядку малости (при $n \to \infty$) слагаемые в правой части неравенства (1.1) могут вести себя по–разному для различных функций $f(x)$ и весов $p(x)$. Например, для функции $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0,1])$ и веса $p(x) = (1,1)$ имеем:

$$\omega(\delta, f, p) = \sqrt{\delta} \quad (\delta \geqslant 0), \quad \omega(\delta, p) \equiv 0.$$

Для функции $f(x) = x^\alpha$ $(x \in [0,1],\ 0 < \alpha < 1)$ и веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ с $p_-(x) = p_+(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ и $p_-(x) = p_+(x) = (x - 0,5)^\beta$ при $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$ $(0 < \beta < 1)$ в случае $\alpha + \beta \leqslant 1$ имеем: $\omega(\delta, f, p) \leqslant 2^{1-\alpha-\beta}\delta$, $\omega(\delta, f) = \delta^\alpha$, $\omega(\delta, p) = \delta^\beta$.

Замечание 2. Оценка (1.1) является точной на классах непрерывных функций и весов с заданными модулями непрерывности, согласованными соотношениями вида

$$\omega(2\delta, f, p) \leqslant 2\left(\omega(\delta, f, p) + \omega(\delta, f)\omega(\delta, p)\right),$$

$$\omega(\delta, f, p) = \underset{=}{O}(\omega(\delta, f)) \quad (\delta \to 0).$$

Замечание 3. Для разрывных функций и весов оценка типа (1.1) является грубой. Так, существуют разрывные функции $f(x)$ и веса $p(x)$, для которых $\omega(\delta, f, p) \not\to 0$ при $\delta \to 0$ (для них, очевидно, $\omega(\delta, f) \not\to 0$ и $\omega(\delta, p) \not\to 0$ при $\delta \to 0$) и при этом $E_n(f, p, \Delta) \to 0$ при $n \to \infty$. В качестве примера можно взять $f(x) = \operatorname{sign} x$ $(x \in [-1,1])$, $p_-(x) = 1$ при $x \in [-1, 0]$ и $p_-(x) = 0$ при $x \in (0,1]$, $p_+(x) = 0$ при $x \in [-1, 0)$ и $p_+(x) = 1$ при $x \in [0,1]$.

Значит, в случае разрывных функций $f(x)$ и весов $p(x)$ условие для аналога модуля непрерывности $\omega(\delta, f, p) \to 0$ $(\delta \to 0)$ не является даже критерием полиномиальной аппроксимируемости функций в p–норме.

Другими словами, для адекватных оценок полиномиальных приближений ограниченных функций в p–норме структурную характеристку функций следует определить по–другому. Ниже предлагается решение этой задачи с использованием малого параметра [4].

2. Оценки полиномиальных приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом

Пусть функция $f(x)$ и вес $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ ограничены на некотором отрезке $\Delta = [a, b]$.

При $\varepsilon > 0$ положим

$$\Delta(p_\pm \geqslant \varepsilon) = \{x \in \Delta | p_\pm(x) \geqslant \varepsilon\}.$$

Если $\Delta(p_\pm \geqslant \varepsilon) \neq \varnothing$, то обозначим также

$$d = \inf\{|x - y| : x \in \Delta(p_- \geqslant \varepsilon), y \in \Delta(p_+ \geqslant \varepsilon)\}.$$

Промодуль непрерывности функции $f(x)$ относительно веса $p(x)$ определим сначала для $\varepsilon > 0$ с $\Delta(p_\pm \geqslant \varepsilon) \neq \varnothing$ при заданном $\delta \geqslant 0$ равенством

$$\overline{\Omega}_\varepsilon(f, p, \delta) = \sup[f(x) - f(y)]^+,$$

где супремум берется по всем $x \in \Delta(p_- \geqslant \varepsilon)$ и $y \in \Delta(p_+ \geqslant \varepsilon)$, для которых $|x - y| \leqslant \delta$.

Заметим, что если $p_-(x) \equiv p_+(x) \equiv 1$, то при всех $0 < \varepsilon \leqslant 1$ имеем $\Delta(p_- \geqslant \varepsilon) = \Delta(p_+ \geqslant \varepsilon) = \Delta$. Поэтому для веса $p(x) = (1, 1)$ промодуль непрерывности $\overline{\Omega}_\varepsilon(f, p, \delta)$ превращается в обычный модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ функции $f(x)$ на отрезке Δ.

Если при заданном $\varepsilon > 0$ хотя бы одно из множеств $\Delta(p_\pm \geqslant \varepsilon)$ пусто, то при всех $\delta \geqslant 0$ считаем $\overline{\Omega}_\varepsilon(f, p, \delta) = 0$.

Если между множествами $\Delta(p_- \geqslant \varepsilon)$ и $\Delta(p_+ \geqslant \varepsilon)$ расстояние $d > 0$, то при $0 \leqslant \delta < d$ (и для этого ε) считаем также $\overline{\Omega}_\varepsilon(f, p, \delta) = 0$.

Модуль непрерывности функции $f(x)$ относительно веса $p(x)$ определим при $\varepsilon > 0$ и $\delta \geqslant 0$ равенством

$$\Omega_\varepsilon(f, p, \delta) = \overline{\lim_{h \to \delta}}\, \overline{\Omega}_\varepsilon(f, p, h).$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$ функция $\Omega_\varepsilon(f, p, \delta)$ относительно $\delta \geqslant 0$ является неотрицательной, неубывающей и полунепрерывной сверху (может быть разрывной, а также может быть $\Omega_\varepsilon(f, p, 0) > 0$); при фиксированном $\delta \geqslant 0$ функция $\Omega_\varepsilon(f, p, \delta)$ относительно $\varepsilon > 0$ является невозрастающей.

При этом можно доказать, что для ограниченных на некотором отрезке $\Delta = [a, b]$ функций $f(x)$ и весов $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ следующие два утверждения эквивалентны между собой:

1) $E_n(f, p, \Delta) \to 0$ при $n \to \infty$;

2) $\Omega_\varepsilon(f, p, 0) = 0$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Более того, имеет место

Теорема 2. *При $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство*

$$E_n(f, p, \Delta) \leqslant 2 \inf_{\varepsilon > 0} \left\{ \Omega(f, \Delta) \cdot \varepsilon + \|p\|_\Delta \Omega_\varepsilon \left(f, p, \frac{b - a}{n} \right) \right\}, \tag{2.1}$$

где

$$\Omega(f, \Delta) = \sup\{f(x) - f(y) : \ x, y \in \Delta\},$$

$$\|p\|_\Delta = \max\{\|p_-\|_\Delta, \|p_+\|_\Delta\}.$$

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ и вес $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ ограничены на отрезке $\Delta = [a, b]$ и выполнено условие $\Omega_\varepsilon(f, p, 0) = 0$ при всех д.м. $\varepsilon > 0$ (для существования последовательности полиномов $Q_n(x)$ с $|Q_n - f|_\Delta \to 0$ $(n \to \infty)$).

Пусть сначала $\varepsilon > 0$ — любое фиксированное число с $\Delta(p_\pm \geqslant \varepsilon) \neq \varnothing$.

Для краткости обозначим $\Omega(\delta) = \Omega_\varepsilon(f, p, \delta)$ $(\delta \geqslant 0)$ и построим кусочно–линейную и непрерывную функцию $g(t)$ такую, что:

1) $g(t) = \Omega(t)$ при $t = 0$ и $t = b - a$;

2) $g\left(\dfrac{b-a}{n}\right) = \sup\left\{\Omega(t) \,\middle|\, t \in \left(\dfrac{b-a}{n}, \dfrac{b-a}{n-1}\right)\right\}$ при $n = 2, 3, \ldots$;

3) $g(t)$ линейна на отрезках $\left[\dfrac{b-a}{n}, \dfrac{b-a}{n-1}\right]$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Тогда при $n = 2, 3, \ldots$ и $\dfrac{b-a}{n+1} \leqslant t \leqslant \dfrac{b-a}{n}$ выполняются неравенства

$$\Omega(t) \leqslant g(t) \leqslant \Omega\left(\frac{b-a}{n-1}\right).$$

При $x \in \overline{\Delta(p_- \geqslant \varepsilon)}$ определим полунепрерывную сверху функцию

$$M_-(x, \varepsilon) = \lim_{\delta \to +0} \sup\{f(t) : t \in [x - \delta, x + \delta] \cap \Delta(p_- \geqslant \varepsilon)\}.$$

Тогда функция

$$\varphi(x) = \sup\{M_-(t, \varepsilon) - g(|x - t|) \,|\, t \in \overline{\Delta(p_- \geqslant \varepsilon)}\}$$

будет непрерывной на отрезке $\Delta = [a, b]$, причем при всех $x, y \in \Delta$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant g(|x - y|).$$

Из результата Н.П. Корнейчука об оценке наилучших приближений непрерывных 2π–периодических функций тригонометрическими полиномами с помощью замены переменной $x = \dfrac{b-a}{2}\cos t + \dfrac{b+a}{2}$ легко следует, что существует алгебраический полином $Q_n(x)$ степени не выше n $(n = 1, 2, \ldots)$ такой, что

$$\|Q_n - \varphi\|_\Delta \leqslant \omega\left(\varphi, \frac{b-a}{2} \cdot \frac{\pi}{n+1}\right) \leqslant 2\omega\left(\varphi, \frac{b-a}{n+1}\right).$$

Значит, с учетом свойств построенных функций $\varphi(x)$ и $g(t)$ при $n = 1, 2, \ldots$ получим

$$\|Q_n - \varphi\|_\Delta \leqslant 2\, g\left(\frac{b-a}{n+1}\right) \leqslant 2\,\Omega\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Если через $\Omega(f, \Delta)$ обозначить полное колебание (ограниченной) функции $f(x)$ на отрезке Δ, то можно доказать, что при рассматриваемом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$|\varphi - f|_\Delta \leqslant 2\,\Omega(f, \Delta)\varepsilon.$$

С использованием последних двух оценок получим

$$|Q_n - f|_\Delta \leqslant |\varphi - f|_\Delta + |Q_n - \varphi|_\Delta \leqslant$$
$$\leqslant 2\,\Omega(f,\Delta)\,\varepsilon + \|p\|_\Delta \cdot \|Q_n - \varphi\|_\Delta \leqslant$$
$$\leqslant 2\,\Omega(f,\Delta)\,\varepsilon + 2\,\|p\|_\Delta\,\Omega\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ с $\Delta(p_\pm \geqslant \varepsilon) \neq \varnothing$ и $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$|Q_n - f|_\Delta \leqslant 2\,\Omega(f,\Delta)\varepsilon + 2\,\|p\|_\Delta\,\Omega_\varepsilon\left(f, p, \frac{b-a}{n}\right).$$

Пусть теперь при заданном $\varepsilon > 0$ хотя бы одно из множеств $\Delta(p_\pm \geqslant \varepsilon)$ пусто, а значит, $\Omega_\varepsilon(f,p,\delta) = 0$ при всех $\delta \geqslant 0$. Пусть, например, $\Delta(p_+ \geqslant \varepsilon) = \varnothing$, т.е. $p_+(x) < \varepsilon$ при всех $x \in \Delta$. Возьмем для всех $n = 1, 2, \ldots$ в качестве полинома $Q_n(x)$ степени не выше n постоянную

$$Q_n(x) = \sup\{f(x) | x \in \Delta\}.$$

Тогда, очевидно, при всех $x \in \Delta$ имеем

$$[Q_n(x) - f(x)]^+ \leqslant \Omega(f,\Delta), \quad [Q_n(x) - f(x)]^- = 0,$$

а поэтому

$$|Q_n - f|_\Delta = \sup_{x\in\Delta}\big([Q_n(x) - f(x)]^+ p_+(x) + [Q_n(x) - f(x)]^- p_-(x)\big) \leqslant$$
$$\leqslant \Omega(f,\Delta)\varepsilon.$$

Итак, при любом $\varepsilon > 0$ существует полином $Q_n(x)$ степени не выше n ($n = 1, 2, \ldots$), для которого выполняется неравенство

$$|Q_n - f|_\Delta \leqslant 2\,\Omega(f,\Delta)\,\varepsilon + 2\,\|p\|_\Delta\,\Omega_\varepsilon\left(f, p, \frac{b-a}{n}\right),$$

а значит, при всех $\varepsilon > 0$ и $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$E_n(f,p,\Delta) \leqslant 2\,\Omega(f,\Delta)\,\varepsilon + 2\,\|p\|_\Delta\Omega_\varepsilon\left(f, p, \frac{b-a}{n}\right).$$

Чтобы получить неравенство (2.1), остается перейти в правой части к инфимуму по всем $\varepsilon > 0$.

Список литературы

[1] Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности) // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 6. С. 59–102.

[2] Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. Аппроксимации со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям) // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т.63. № 3. С. 77–118.

[3] Рамазанов А.-Р.К. О прямых и обратных теоремах теории аппроксимации в метрике знакочувствительного веса // Analysis Mathematica. 1995. Т.21. № 4. С. 191–212.

[4] Рамазанов А.-Р.К. Метод малого параметра для знакочувствительных аппроксимаций // Analysis Mathematica. 2002. Т.28. С. 205–230.

А.-Р. К. Рамазанов (A.-R. K. Ramazanov)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Поступила в редакцию
18.11.2014