УДК 517.587

З. Г. Меджидов

Формулы обращения тензорной томографии по неполным данным

В статье приведены новые формулы обращения лучевого преобразования симметричного тензорного поля по неполным данным. Преобразование Радона оператора Сен-Венана тензорного поля однозначно определяется, когда заданы линейные интегралы поля вдоль прямых, образующих n-мерные комплексы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассматриваются три наиболее часто встречающихся комплекса: семейства прямых, пересекающих данную кривую, пересекающих бесконечно удаленную кривую, а также касающихся данной поверхности. В случае комплекса прямых, пересекающих бесконечно удаленную кривую, получена формула, содержащая только двукратное интегрирование.

Библиография: 10 названий.

In this article new inverse formulas for a ray transform of symmetric tensor fields with incomplete data are given. The Radon transform of Saint-Venant operator of tensor field is uniquely determined when the line integrals of the field along lines which form an n-dimensional complexes in the space $\mathbb{R}^n$ are given. Three most common complex is considered: the family of lines intersecting a given curve, intersecting a given curve at infinity and tangent a given surface. In the case of the complex of lines intersecting a curve at infinite the formula containing only two-fold integration is obtained.

Bibliography: 10 items.

Ключевые слова: симметричное тензорное поле, лучевое преобразование, формула обращения, комплекс прямых, преобразование Радона, соленоидальная часть, оператор Сен-Венана.

Keywords: symmetric tensor field, ray transform, reconstruction formula, complex of lines, Radon transform, solenoidal part, Saint-Venant operator.

1. Восстановление по интегралам вдоль лучей, с вершинами на заданной кривой

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция в $\mathbb{R}^n$, убывающая при $x \to \infty$ быстрее, чем $\frac{1}{|x|^n}$. Преобразованием Радона этой функции называется семейство интегралов

$$Rf(p,\omega) = \int_{x\cdot\omega=p} f(x)dx \tag{1.1}$$

вдоль гиперплоскостей $H_{p,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,\omega) = p\}$.

Имеются формулы ([5], [9], [10]), позволяющие найти функцию f из определенного класса по заданной функции $G = Rf$. Например, решением уравнения (1.1) в пространстве Шварца $J(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций будет

$$f(x) = \frac{(-1)^{n/2-1}}{(2\pi)^n} \int_{SS^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^{(n-1)}\left(\langle \omega, x\rangle - p, \omega\right) dp}{p} d\omega$$

в случае четного n (внутренний интеграл понимается в смысле главного значения, а производная функции G берется по первому аргументу) и

$$f(x) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{(2\pi)^{n-1}} \int_{SS^{n-1}} G^{(n-1)}\left(\langle \omega, x\rangle, \omega\right) d\omega$$

– в случае нечетного n; здесь SS^{n-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. В частности, при $n = 3$ формула обращения имеет вид

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{SS^2} G''\left(\langle \omega, x\rangle, \omega\right) d\omega. \tag{1.2}$$

Семейство интегралов

$$h(x, \theta) = \int_0^{\infty} f(x + t\theta) dt, \tag{1.3}$$

где $x, \theta \in \mathbb{R}^n, |\theta| = 1$, называется веерным преобразованием (X-ray transform) функции f. Гранжит (Grangeat, [1]) получил формулу, выражающую производную преобразования Радона $\frac{\partial}{\partial p} Rf(p, \omega)$ через заданную функцию h и ее производные. Чтобы написать эту формулу в компактной форме, введем дифференциальный оператор

$$\partial_{;\omega} h(x, \theta) = (\omega, \nabla_\theta h) = \omega_1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(x, \theta) + \ldots + \omega_n \frac{\partial h}{\partial \theta_n}(x, \theta).$$

Теорема 1. *(см. [1]) Пусть $H_{p,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x, \omega) = p\}$ – плоскость в $\mathbb{R}^3$, $y \in H$ и $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ – произвольная функция, такая что множество $supp f \cap H$ компактно. Тогда справедлива формула*

$$\frac{\partial}{\partial p} Rf(p, \omega) = \int_{SS} \partial_{;\omega} h(x, \theta) d\theta, \tag{1.4}$$

где SS – единичная окружность в плоскости $\omega^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x, \omega) = 0\}$.

Заметим, что величина $\frac{\partial}{\partial p} Rf(p, \omega)$ может быть определена и в случае, когда функция $h(x, \theta)$ и ее производные известны не для всех значений аргументов. Достаточно потребовать, чтобы аргумент x пробегал некоторое множество Γ, обладающее свойством: всякая плоскость H, пересекающая носитель функции f, пересекает Γ хотя бы в одной точке. Формула (1.4) по сути является формулой обращения преобразования (1.3) по неполным данным. Действительно, если x – произвольная точка носителя f и Γ – множество указанного вида, то для любой плоскости H, проходящей через x и имеющей общую точку y с множеством Γ, формула (1.2) позволяет написать

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{SS^2} d\omega \frac{\partial}{\partial p}\int_{\theta\in SS} \partial_{;\omega} h(y,\theta)d\theta; \tag{1.5}$$

Здесь SS^2 – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, а SS – как и выше, единичная окружность в плоскости $\omega^{\perp}$.

Использованный здесь метод (найти преобразование Радона, затем применить формулу обращения) в работе [4] применен для обращения преобразования Допплера дифференциальных форм. В данной статье этот метод нами будет применен для обращения интегральных преобразований тензорных полей по неполным данным, соответсвующим различным комплексам прямых.

Напомним необходимые определения и обозначения (см. [8] и процитированную там литературу).

Обозначим через S^m линейное пространство гладких ковариантных симметричных тензоров ранга m, $m \geqslant 1$, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а символом $J(\mathbb{R}^n, S^m)$ – пространство Шварца гладких (класса C^∞) быстро убывающих тензорных полей (т.е. полей, компоненты которых принадлежат $J(\mathbb{R}^n)$). Значение поля $f \in J(\mathbb{R}^n, S^m)$ на векторах $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ будем записывать как функцию

$$f(x;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m) = f_{i_1 i_2 \ldots i_m}(x)\,\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\ldots\xi_m^{i_m}$$

аргументов $x \in \mathbb{R}^n$ и $\xi_i = \left(\xi_i^1, \xi_i^2, \ldots, \xi_i^n\right) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$; по повторяющемуся индексу предполагается суммирование от 1 до n. Лучевое преобразование поля $f \in J(\mathbb{R}^n, S^m)$ определяется формулой

$$If(l) \equiv If(\xi,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{i_1 i_2\ldots i_m}(x+t\theta)\,\theta^{i_1}\theta^{i_2}\ldots\theta^{i_m}dt \equiv \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t\theta;\theta,\ldots,\theta)\,dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t\theta;\theta^m)\,dt, \tag{1.6}$$

где $l = \{x + t\theta : t \in \mathbb{R}\}$ – ориентированная прямая.

Наряду с преобразованием (1.6) мы будем рассматривать веерное преобразование поля f:

$$h(\xi,x) = \int_0^{\infty} f(x+t\theta;\theta^m)\,dt, \tag{1.7}$$

Преобразования (1.6) и (1.7) и их обобщения на римановы многообразия возникают и применяются как в самой математике, так и в других областях науки, требующих приложения математических методов. Так, при $m = 1$ интегралы (1.6) моделируют измерения в задачах визуализации движущихся сред, в частности, течений жидкостей и газов. Задачи восстановления f возникают в медицине при диагностике опухолей, оптике, физике плазмы и т.д.

Заметим, что поле f зависит от n переменных, в то время как If зависит от $2n-2$ независимых переменных, и при $n \geqslant 3$ задача обращения является переопределенной. Поэтому возникает задача реконструкции поля f по данным на n – мерном многообразии прямых (лучей). Такое многообразие мы называем комплексом (термин В.П. Паламодова). Примером комплекса лучей в $\mathbb{R}^3$ является рассмотренное выше множество лучей, исходящих с данной кривой. Для решения задачи реконструкции поля f необходимо, чтобы кривая удовлетворяла некоторому условию, известному в литературе как условие Кириллова-Туя ([3, 10]).

Напомним необходимые в дальнейшем дифференциальные операции над тензорными полями в $\mathbb{R}^n$ (см. [2, 5, 8]):

$f_\xi = (\xi, \nabla_x) f$, $(f_\xi)_{i_1\dots i_m} = \xi^j \frac{\partial f_{i_1\dots i_m}(x)}{\partial x^j}$;

$g_\xi(x;\theta) = (\xi, \nabla_x) g(x;\theta) = \xi_j \frac{\partial g(x;\theta)}{\partial x_j}$;

$\partial_{;\xi} g(x,\theta) = (\xi, \nabla_\theta h) = \xi_j \frac{\partial g(x,\theta)}{\partial \theta_j}$;

$W : C^\infty(S^m) \to C^\infty\left(S^m\left(\overset{k}{\wedge} T^*\mathbb{R}^n\right)\right)$ – оператор Сен-Венана,

$(Wf(x))_{i_1 j_1\dots i_m j_m} = \alpha(i_1 j_1)\dots\alpha(i_m j_m)\frac{\partial f_{i_1\dots i_m}(x)}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_m}}$,
где $\alpha(i_k j_l)$ – оператор альтернирования:

$$(\alpha(i_k j_l) g)_{i_1\dots i_p} = \frac{1}{2}\left(g_{i_1\dots i_k\dots i_l\dots i_p} - g_{i_1\dots i_l\dots i_k\dots i_p}\right).$$

Нам будет удобно рассматривать оператор Wf как функцию $2m$ векторных аргументов:

$$Wf(x;\ \xi_1,\eta_1\dots,\xi_m,\eta_m) = \alpha(\xi_1,\eta_1)\cdots\alpha(\xi_m,\eta_m) f_{\xi_1\dots\xi_m}(x;\eta_1,\dots,\eta_m) = \alpha(\xi_1,\eta_1)\cdots\alpha(\xi_m,\eta_m)\xi_1^{i_1}\cdots\xi_m^{i_m}\frac{\partial^m f_{j_1\dots j_m}(x)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_m}}\eta_1^{j_1}\cdots\eta_m^{j_m}. \quad (1.8)$$

Как отмечено в работах [2, 6, 7, 8], по заданной функции g однозначно можно восстановить лишь соленоидальную часть поля f или, что то же самое, оператор Сен-Венана. Для определения поля Wf достаточно найти значения преобразования Радона

$$R(Wf)(p,\omega;\xi_1,\eta_1\dots,\xi_m,\eta_m) = \int_{x\cdot\omega=p} Wf(x;\xi_1,\eta_1\dots,\xi_m,\eta_m)\,dx$$

для всех значений аргументов: применив любую из приведенных выше формул обращения преобразования Радона мы сможем восстановить Wf. Поскольку в формулы обращения входит производная $(n-1)$-го порядка преобразования Радона, то вместо $R(Wf)$ можно найти производную $\frac{\partial^k}{\partial p^k}R(Wf)$, где $k \leqslant n-1$.

Теорема 2. *([8]) Пусть $f \in J(S^m)$, Γ – множество в $\mathbb{R}^n$, обладающее свойством: всякая гиперплоскость H, пересекающая носитель поля f, имеет хотя бы одну общую точку с Γ. Тогда поле Wf может быть восстановлена по заданному полю $h(x,\theta)$ и его первым производным для лучей $l = l(x,\theta)$, где $x \in \Gamma$.*

Утверждение теоремы остается в силе если вместо бесконечной дифференцируемости функции f потребовать существование непрерывных производных до порядка $n+2m-2$, а требование быстрой убываемости при $x \to \infty$ ослабить следующим образом: функция f и все ее производные до порядка $n+m-2$ убывают быстрее, чем $\frac{1}{|x|^n}$.

Формула обращения в случае, когда число $m+n-2$ четное, имеет вид

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial p^{n-2}}\int_H Wf\left(y;\omega,\xi_1,\cdots,\omega,\xi_m\right)dH=\frac{(-1)^m}{2^m\cdot m!}\int_{SS^{n-2}}\partial^{m+n-2}_{;\omega}h_{\xi_1\ldots\xi_m}\left(x;\theta\right)d\theta,$$

где SS^{n-2} – единичная сфера в гиперплоскости $\omega^\perp=\{x\in R^n:x\cdot\omega=0\}$, а векторы $\xi_1,\cdots,\xi_m$ ортогональны ω. В случае, когда число $m+n-2$ нечетное, справедлива формула с функцией $g=If$ вместо h и полусферой $SS^{n-2}_+=\{\theta\in SS^{n-2}:\theta^n\geqslant 0\}$ вместо сферы SS^{n-2}:

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial p^{n-2}}\int_H Wf\left(y;\omega,\xi_1,\cdots,\omega,\xi_m\right)dH=\frac{(-1)^m}{2^m\cdot m!}\int_{SS^{n-2}_+}\partial^{m+n-2}_{;\omega}g_{\xi_1\ldots\xi_m}\left(x;\theta\right)d\theta.$$

В частности, при $n=3$ фомула обращения имеет вид (ср. с формулой из теоремы 1)

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_H Wf\left(y;\omega,\xi_1,\cdots,\omega,\xi_m\right)dH=\frac{(-1)^m}{2^m\cdot m!}\int_S\partial^{m+1}_{;\omega}h_{\xi_1\ldots\xi_m}\left(x;\theta\right)d\theta \tag{1.9}$$

2. Восстановление по интегралам вдоль прямых, пересекающих бесконечно удаленную кривую

Рассмотрим теперь семейство прямых в $\mathbb{R}^n$, направляющие векторы которых являются радиус-векторами точек множества (кривой) Γ, принадлежащей единичной сфере SS^{n-1}. Говорят, что прямые пересекают бесконечно удаленную кривую Γ. Для решения задачи реконструкции необходимо, чтобы кривая Γ удовлетворяла некоторому условию полноты (условию типа Кириллова-Туя). Это условие приведено в следующей теореме.

Теорема 3. *([8]) Пусть $f\in J\left(\mathbb{R}^n,S^m\right)$, $\Gamma\subset SS^{n-1}$ – множество направлений, обладающее свойством: для любой гиперплоскости $H\subset\mathbb{R}^n$, пересекающей носитель поля f существует хотя бы одно направление $\theta\in\Gamma$, параллельное H. Тогда поле Wf может быть восстановлено по заданной функции $g\left(x,\theta\right)$ и ее первым производным для прямых $l=l\left(x,\theta\right)$, где $\theta\in\Gamma$.*

Напомним, что аналогичная задача в работе [2] решена при условии, что для каждой гиперплоскости H существует C^m_{n+m-2} векторов из Γ, параллельных H.

Доказательство. Возьмем произвольную гиперплоскость $H=H_{(\omega,p)}$ и зафиксируем вектор $\theta\in\Gamma$, параллельный H. В этой гиперплоскости рассмотрим семейство прямых, параллельных θ. Как следует из доказательства теоремы 7 из работы [8] (см. также окончание доказательства теоремы 6 настоящей статьи), достаточно доказать, что величину

$$J_H(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)=\int_H Wf(y;\omega,\xi_1,\ldots,\omega,\xi_m)dy$$

можно вычислить для всех векторов $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m\in\omega^\perp$ по известным интегралам f вдоль прямых этого семейства.

Рассмотрим сначала случай, когда все векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ совпадают с θ. По теореме Фубини

$$\int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g(x+s\omega, \theta)|_{s=0} dx = \int_H f_\omega^m(y;\theta^m) dH = 2^m \int_H Wf(y;\omega,\theta,\ldots,\omega,\theta) dH,$$

откуда следует равенство

$$J_H(\theta^m) = \frac{1}{2^m} \int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g(x+s\omega,\theta)|_{s=0} dx \tag{2.1}$$

Предположим теперь, некоторые k векторов системы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, скажем $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, ортогональны θ, а остальные – совпадают с θ. Вычислим производные

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \cdots \frac{\partial}{\partial q^m} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g(x+s\omega, \theta + q^1\xi_1 + \ldots + q^k\xi_k)\Bigg|_{\substack{s=0 \\ q^1=\ldots=q^k=0}} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\omega^{(m)}\right)_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k} (x+t\theta;\theta^m)\, t^k dt + \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega^{(m)}\left(x+t\theta;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k,\theta^{m-k}\right) dt$$

В гиперплоскости $\omega^\perp$ выберем ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, где $e_1 = \theta$, а $e_2, \ldots, e_{n-1} \perp \theta$. Тогда любой вектор $y = x + t\theta \in H$ имеет однозначное разложение по этому базису: $y = y^1 e_1 + y^2 e_2 + \ldots + y^{n-1} e_{n-1}$, где $y^1 = (y,\theta) = (x+t\theta,\theta) = t$. Проинтегрируем последнее равенство вдоль $(n-2)$-мерной плоскости $\theta^\perp \cap H$, ортогональному прямым нашего семейства:

$$\int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial}{\partial q^1} \cdots \frac{\partial}{\partial q^m} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g(x+s\omega, \theta + q^1\xi_1 + \ldots + q^k\xi_k)\Bigg|_{\substack{s=0 \\ q^1=\ldots=q^k=0}} =$$

$$\int_H \left(f_\omega^{(m)}\right)_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k} (x+t\theta; e_1^m)\, y_1^m dH +$$

$$2^m \int_H Wf\left(y;\omega\xi_1,\ldots,\omega,\xi_k,\omega,\theta,\ldots,\omega,\theta\right) dH.$$

Первый интеграл в правой части обращается в нуль после интегрирования по частям, поскольку $\partial_{\xi_1}(y_1^m) = 0$ в силу того, что первая координата вектора ξ_1 в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ равна нулю.

Таким образом, нами доказана формула

$$J_H\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k,\theta^{m-k}\right) = \int_H Wf\left(y;\omega,\xi_1,\ldots,\omega,\xi_k,\omega,\theta,\ldots,\omega,\theta\right) dH =$$

$$\frac{1}{2^m} \int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial}{\partial q^1} \cdots \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g\left(x+s\omega, \theta + q^1\xi_1 + \ldots + q^k\xi_k\right)\Bigg|_{\substack{s=0 \\ q^1=\ldots=q^k=0}} dx \tag{2.2}$$

Вычислим теперь значение функции $J_H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ для любых аргументов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}^n$. Каждый вектор однозначно разлагается в сумму

$$\xi_i = a_i\theta + \xi_i',$$

где $\xi_i' \in \theta^{\perp}$, и симметричная m-линейная функция J_H представляется в виде линейной комбинации членов вида $J_H(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_k', \theta^{m-k})$, которые для любого индекса $k = 0$ или $1 \leqslant k \leqslant m$ можно вычислить по формулам (2.1) или (2.2). Теорема доказана.

Пример 1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ роль множества Γ играет любая большая окружность единичной сферы (бесконечно удаленная прямая).

Следствие 1. *Пусть $H \subset \mathbb{R}^3$ – произвольная плоскость, Σ_H – комплекс прямых, параллельных H. Соленоидальная часть поля $f \in J(\mathbb{R}^n, S^m)$ для любого $m \geqslant 1$ может быть восстановлена по заданной функции $g(x, \theta)$ и ее первым производным для прямых $l \in \Sigma_H$.*

Для доказательства достаточно в качестве множества Γ в теореме 3 взять большую окружность единичной сферы, параллельную H.

Замечание 1. Напомним, что в работе В. Шарафутдинова ([6]) для обращения лучевого преобразования векторного поля ($m = 1$) требуется задание функции g на комплексе $\Sigma_{H_1} \cup \Sigma_{H_2}$, где H_1, H_2 – пересекающиеся плоскости, а в случае $m = 2$ наименьшим является комплекс прямых $\Sigma_{H_1} \cup \Sigma_{H_2} \cup \Sigma_{H_3}$, где H_1, H_2, H_3 – плоскости с линейно независимыми нормальными векторами.

Замечание 2. Обращение лучевого преобразования (вычисление функции $Wf(x; \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_m, \eta_m)$ для всех значений аргументов) по формулам (2.1) и (2.2) с учетом последующего применения формулы обращения преобразования Радона в пространстве $\mathbb{R}^3$ требует четырехкратное интегрирование. Следующая теорема позволяет свести число интегрирований к двум.

Символом $s(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ обозначим оператор симметрирования по переменным $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$:

$$s(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) F(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) = \sum_{\pi(1,2,\ldots,m)} F\left(\eta_{\pi(1)}, \eta_{\pi(2)}, \ldots, \eta_{\pi(m)}\right),$$

где π – группа перестановок.

Лемма 1. *Для гладкого (класса C^m) поля f, векторов $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m \in \mathbb{R}^3$ и лучевого преобразования $g = If$ справедлива формула*

$$\partial_{;\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m} g(x, \theta) =$$
$$s(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} A_m^k f_{\eta_1, \ldots, \eta_{m-k}} \left(x + t\theta; \eta_m, \ldots, \eta_{m-k+1}, \theta^{m-k}\right) t^{m-k} dt +$$
$$m! \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\theta; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m), \quad (2.3)$$

где $A_m^k = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)$ при $1 \leqslant k \leqslant m$ и $A_m^0 = 1$.

Доказывается лемма индукцией.

Для векторов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \theta \in \mathbb{R}^3$ положим

$$\partial_{[\omega,\eta]} g(x, \theta) = \alpha(\omega_1, \eta_1)\alpha(\omega_2, \eta_2) \ldots \alpha(\omega_m, \eta_m) \partial_{\omega_1 \ldots \omega_m; \eta_1 \ldots \eta_m} g(x, \theta),$$

где $\alpha(\omega, \eta)$ – введенные в п. 1 операторы альтернирования.

Лемма 2. *Для оператора W Сен-Венана, произвольных векторов*

$$x, \theta, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m \in \mathbb{R}^3$$

справедлива формула

$$m! I(Wf)\left(x, \theta; \omega_1, \eta_1, \ldots, \omega_m, \eta_m\right) = \partial_{[\omega,\eta]} If(x, \theta).$$

Для доказательства нужно к обеим частям формулы леммы 1 последовательно применить оператор $\partial_{\omega_1 \ldots \omega_m}$ и операторы альтернирования $\alpha(\omega_k, \eta_k)$. В результате все слагаемые под знаком суммы в правой части уничтожатся, а второе слагаемое станет равным

$$m! \alpha(\omega_1, \eta_1) \ldots \alpha(\omega_m, \eta_m) \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega_1 \ldots \omega_m}\left(x + t\theta; \eta_1, \ldots, \eta_m\right) dt = m! I(Wf).$$

Для множества $\Gamma \in SS^2$ символом Σ_Γ обозначим семейство прямых в $\mathbb{R}^3$, направляющий вектор каждой из которых совпадает с радиус-вектором какой-нибудь точки Γ.

Теорема 4. *Пусть $\Gamma \subset SS^2$ – замкнутая центрально симметричная кривая класса C^1, $\theta = \theta(s)$, $s \in [0, S]$ – параметризация Γ, такая что $|\theta'(s)| = 1$. В классе тензорных полей $f \in C_0^{2m+2}\left(\mathbb{R}^3, S^m\right)$ с компактным носителем величину $Wf\left(x, \omega_1, \eta_1, \ldots, \omega_m, \eta_m\right)$ для всех значений аргументов можно восстановить по функции $g(L) = If(L)$, заданной на прямых L семейства Σ_Γ, с помощью формулы*

$$Wf\left(x, \omega_1, \eta_1, \ldots, \omega_m, \eta_m\right) = -\frac{1}{2\pi^2 m!} \int_0^S ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} \partial_{[\omega,\eta]} g\left(x + q\theta'(s), \theta(s)\right) \frac{dq}{q}, \tag{2.4}$$

в которой внутренний интеграл понимается в смысле главного значения.

Для доказательства запишем преобразование Фурье искомой функции $Wf\left(x, \omega_1, \eta_1, \ldots, \omega_m, \eta_m\right)$ по переменной x:

$$\widehat{Wf}\left(\xi, \omega_1, \eta_1, \ldots, \omega_m, \eta_m\right) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} Wf\left(x, \omega_1, \eta_1, \ldots, \omega_m, \eta_m\right) dx,$$

где $dx = dx_1 dx_2 dx_3$, $\langle x, \xi \rangle = x^1 \xi^1 + x^2 \xi^2 + x^3 \xi^3$. Зафиксировав ξ, выберем единичный вектор $\theta \perp \xi$, и разложим вектор x в сумму $x = y + t\theta$, $y \in \theta^\perp$, $t \in \mathbb{R}$. Заметив далее, что $\langle x, \xi \rangle = \langle y, \xi \rangle$, заменим тройной интеграл в последней фомуле повторным:

$$\begin{aligned} &\widehat{Wf}\left(\xi, \omega_1, \eta_1, \ldots, \omega_m, \eta_m\right) = \\ &\qquad \int_{\theta^\perp} e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} dy \int_{-\infty}^{\infty} Wf\left(y + t\theta; \omega_1, \eta_1, \ldots, \omega_m, \eta_m\right) dt = \\ &\int_{\theta^\perp} e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} I(Wf)\left(y, \theta; \omega_1, \eta_1, \ldots, \omega_m, \eta_m\right) dy = \frac{1}{m!} \int_{\theta^\perp} e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} \partial_{[\omega,\eta]}(y, \theta) dy, \end{aligned}$$

где $g = If$. В последнем равенстве мы применили формулу леммы 2.

Далее применяем метод доказательства теоремы 4.2 из работы [5], заменив фигурирующую в этой теореме функцию $g(x, \theta)$ на $\partial_{[\omega,\eta]}(x, \theta)$. Этот метод позволяет записать композицию прямого и обратного трехмерных преобразований Фурье как результат двухкратного интегрирования по формуле (2.4).

3. Восстановление по интегралам вдоль лучей, касательных к данной поверхности

В работе [5] доказана следующая

Теорема 5. *Пусть S – гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, H – плоскость, трансверсальная к S и K – связное компактное подмножество $H - S$. Тогда для любой функции $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, такой что $\mathrm{supp} f \cap H \subset K$ справедлива формула*

$$\frac{\partial}{\partial p} Rf(H) = \frac{1}{z}\int_0^S \left[\frac{k}{[x',\nu,\omega]}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\langle \nu,\omega\rangle}{[x',\nu,\omega]}\right)\right] g(y, ry' + qy'\times\nu)\Big|_{q=0} ds, \quad (3.1)$$

где $y = y(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S$ – уравнение кривой $C = S \cap H$, такое что $|y'(s)| = 1, k = [x', x'', \omega]$ – кривизна кривой C, ω – нормальный вектор плоскости H и $\nu = \nu(x(s))$ и $\nu(x)$ – непрерывное единичное нормальное поле к S. Предполагается, что множество $\xi^{-1}(K)$ есть компакт для отображения

$$\xi : C \times \mathbb{R} \to H, \quad \xi(s,t) = y(s) + ty'(s)$$

и $z = \sum_{x=\xi(s,t)} k(s) \neq 0$.

Мы докажем формулу обращения лучевого преобразования векторного поля, заданного на семействе лучей указанного в теореме 5 вида.

Теорема 6. *Пусть R – гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, H имеет гладкую (класса C^2) натуральную параметризацию $y = y(s), s \in [0;S], |y'(s)| = 1$, и кривизну k, отличную от нуля в каждой точке $y(s)$. Тогда для любого векторного поля $f \in J(\mathbb{R}^n, S^m)$, такого что $\mathrm{supp} f \cap H$ содержится в области значений отображения*

$$(0;S) \times (0;\infty) \to H, \quad (s,t) \to y(s) + ry'(s),$$

производная преобразования Радона поля Wf может быть восстановлена по заданному полю $h(x,\theta)$ и его первым производным на лучах $l = l(y(s), y'(s))$, где $s \in C$, по формуле

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_H Wf(y;\omega,\theta)dH = \frac{1}{2}\int_0^S \left[k(s)\partial_{;\omega\omega} h_\theta(y(s), y'(s)) - \chi(s)\partial_{\omega\omega} h(y(s), y'(s))\right] ds, \quad (3.2)$$

где $\chi(s) = [\theta, \omega, y']$ – смешанное произведение векторов θ, ω, y'; здесь θ – произвольный вектор, ортогональный ω.

Доказательство. Если учесть формулы

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_H Wf(y;\omega,\theta)dH = -\frac{1}{2}\int_{H_{\omega,p}} f_{\omega\omega}(y;\theta)dH, \ \frac{\partial}{\partial p}\int_H f(y)dH = \int_H f_\omega(y)dH,$$

то мы видим, что достаточно доказать равенство

$$-\int_H f_{\omega\omega}(y;\theta)dH = \int_0^S \left[k(s)\partial_{\omega\omega} h_\theta(y(s), y'(s)) - \chi(s)\partial_{\omega\omega} h(y(s), y'(s))\right] ds. \quad (3.3)$$

для произвольного $\theta \perp \omega$.

Имеем

$$\partial_{;\omega\omega}h_\theta(y,y') = \int_0^\infty f_{\theta\omega\omega}(y+ry';y')r^2dr + 2\int_0^\infty f_{\theta\omega}(y+ry';\omega)rdr.$$

Проинтегрируем это равенство вдоль кривой C с весом $k(s)$:

$$\int_0^S k(s)\partial_{;\omega\omega}h_\theta(y(s),y'(s))ds = \int_0^S\int_0^\infty k(s)f_{\theta\omega\omega}\left(y+ry';y'\right)r^2drds+$$

$$2\int_0^S\int_0^\infty k(s)f_{\theta\omega}\left(y+ry';\omega\right)rdrds$$

Второй интеграл равен $\int_H f_{\theta\omega}(z;\omega)dH$, поскольку $krdrds = dH$. В результате интегрирования по частям по направлению вектора θ он обратится в нуль. Преобразуем первый интеграл, обозначив его через I:

$$I = \int_0^S k(s)\int_0^\infty f_{\theta\omega\omega}\left(y+ry';y+ry'-p\omega\right)rdrds-$$
$$\int_0^S k(s)\int_0^\infty f_{\theta\omega\omega}\left(y+ry';y\right)rdrds + \int_0^S k(s)\int_0^\infty f_{\theta\omega\omega}\left(y+ry';p\omega\right)rdrds =$$
$$I_1 - I_2 + I_3 = I_1 - I_2;$$

интеграл I_3 обратился в нуль вследствие интегрирования по частям.

Вычислим интеграл I_1. Вектор $y+ry'-p\omega$ лежит в плоскости $\omega^\perp = \{x\in\mathbb{R}^3 : (x,\omega)=0\}$, и если зафиксировать ортогональный базис e_1, e_2 в этой плоскости, то $y+ry'-p\omega = \sigma_1e_1+\sigma_2e_2$. В силу линейности функции f по второму аргументу интеграл I_1 примет вид

$$I_1 = \sum_{k=1}^2\int_0^S k(s)\int_0^\infty f_{\theta\omega\omega}\left(y+ry';e_k\right)\sigma_k rdrds =$$
$$\sum_{k=1}^2\int_0^S k(s)\int_0^\infty f_{\theta\omega\omega}\left(y+ry';e_k\right)z_kdrds,\ z_k=\sigma_kr$$

Произведем интегрирование по частям по направлению вектора θ в последнем интеграле и воспользуемся формулой $e_1\partial_\theta z_1 + e_2\partial_\theta z_2$:

$$I_1 = -\int_H f_{\omega\omega}(z;\theta)dz.$$

Распишем интеграл от второго слагаемого в правой части равенства (3.3) и интегрированием по частям по переменной s перебросим производную с y' на другие сомножители:

$$\int_0^S \left[\chi(s)\partial_{\omega\omega}h(y(s),y'(s))\right]ds = -\int_0^\infty \int_0^S \left[\theta,\omega,y''\right] f_{\omega\omega}(y+ry';y)dsdr -$$
$$\int_0^\infty \int_0^S \chi(s)\left\langle \nabla f_{\omega\omega}(y+ry';y), y'+ry''\right\rangle dsdr =$$
$$-\int_0^\infty \int_0^S \left[\theta,\omega,k\omega\times y'\right] f_{\omega\omega}(y+ry';y)dsdr -$$
$$\int_0^S \chi(s)\int_0^\infty \frac{d}{dr} f_{\omega\omega}(y+ry';y)dsdr - \int_0^\infty \int_0^S \chi(s)\left\langle \nabla f_{\omega\omega}(y+ry';y), y''\right\rangle dsdr =$$
$$\int_0^\infty \int_0^S k(s)\left\langle \theta, y'\right\rangle f_{\omega\omega}(y+ry';y)dsdr -$$
$$\int_0^\infty \int_0^S k(s)\chi(s)\left\langle \nabla f_{\omega\omega}(y+ry';y), \omega\times y'\right\rangle dsdr. \quad (3.4)$$

Здесь мы воспрользовались легко проверяемыми равенствами

$$y'' = k\omega\times y', \ \int_0^\infty \left\langle \nabla f_{\omega\omega}(y+ry';y), y'\right\rangle dr = \int_0^\infty \frac{d}{dr} f_{\omega\omega}\left(y+ry';y\right) = 0,$$

$$\left[\theta,\omega,\omega\times y'\right] = \left\langle \theta, \omega\times(\omega\times y')\right\rangle = -\left(\theta, y'\right).$$

Векторы $\omega\times y'$, θ и y' компланарны, так как все ортогональны вектору ω. Выразим первый из этих векторов через остальные:

$$\omega\times y' = \frac{\theta}{\chi(s)} - \frac{\langle\theta, y'\rangle}{\chi(s)} y'.$$

Подставив в последний интеграл в равенстве (3.4), получим

$$\int_0^S \left[\chi(s)\partial_{\omega\omega}h(y(s),y'(s))\right]ds = \int_0^\infty \int_0^S \left\langle \theta, y'\right\rangle f_{\omega\omega}(y+ry';y)k(s)dsdr -$$
$$\int_0^\infty \int_0^S f_{\theta\omega\omega}(y+ry';y)k(s)rdsdr + \int_0^\infty \int_0^S \left\langle \theta, y'\right\rangle \left\langle \nabla f_{\omega\omega}(y+ry';y), y'\right\rangle krdsdr.$$

Второй интеграл равен I_2, а сумма первого и третьего интегралов равна

$$\int_0^S k(s)\left\langle \theta, y'(s)\right\rangle ds \int_0^\infty \frac{d}{dr}\left(rf_{\omega\omega}(y+ry';y)\right)dr = 0.$$

Таким образом,

$$\int_0^S \left[k(s)\partial_{;\omega\omega}h_\theta(y(s),y'(s)) - \chi(s)\partial_{\omega\omega}h(y(s),y'(s))\right]ds =$$
$$-\int_H f_{\omega\omega}(z;\theta)dz - I_2 + I_2 = -\int_H f_{\omega\omega}(z;\theta)dz,$$

т.е. доказана формула (3.3) и, следовательно, формула (3.2).

Напомним теперь (см. доказательство теоремы 7 из работы [8]), как, зная величину

$$J_H\,(x;\omega,\theta)=\frac{\partial}{\partial p}\int_{H_{\omega,p}} Wf(x;\omega,\theta)dH$$

для векторов θ, таких что $\theta\perp\omega$, найти значения величины $J\,(x,\xi,\eta)$ для всех векторов ξ и η.

Разлагаем каждый из векторов ξ и η в сумму

$$\xi=a\omega+\xi',\quad \eta=b\omega+\eta',$$

где $\xi'\perp\omega,\ \eta'\perp\omega$. В силу линейности величина J_H представляется в виде линейной комбинации членов вида $J_H\,(\alpha,\beta)$, где вектор α совпадает либо с ω, либо с ξ', а вектор β совпадает либо с ω, либо с η. Если оба аргумента α и β совпадают с ω, то величина J_H равна нулю из-за кососимметричности, если $\alpha=\xi',\ \beta=\eta'$, то интегрирование по частям в получаемых интегралах

$$\int_H Wf(x;\xi',\eta')=\int_H \partial_{\xi'}f(x;\omega,\eta')-\int_H \partial_{\eta'}f(x;\omega,\xi')$$

в направлении векторов ξ', η' приводит к равенству нулю величины J_H. Остаются члены $J_H\,(x;\alpha,\beta)$, в которых один аргумент (из α и β) которых совпадает с ω, а другой ортогонален ω. Такие члены можно вычислить по формуле (3.2).

Список литературы

[1] Grangeat P. Mathematical Framework of Cone-beam 3D-Reconstruction via the First Derivative of the Radon Transform (Springer Lecture Notes in Mathematics vol 1497) (Berlin: Springer). 1991. pp 66–97.

[2] Denisjuk A. Inversion of the X-ray transform for 3D symmetric tensor fields with sources on a curve. Inverse problems. 2006. 22. Pp. 399–411.

[3] Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И. Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, КГУ, 2010.

[4] Palamodov V. P. Reconstruction of a differential form from Doppler transform. placecountry-regionSIAM J. Math. Anal. 2009. №41. Pp. 1713–1720.

[5] Palamodov V. P. Reconstructive Integral Geometry. Tel Aviv University, 2003.

[6] Sharafutdinov V.A. Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data. Inverse problems. 2007. №23. Pp. 2603–2627.

[7] Sharafutdinov V.A. Integral Geometry of Tensor Fields. 1994. (Utrech: VSP).

[8] Меджидов З.Г. Обращение лучевого преобразования симметричных тензорных полей и преобразования Радона дифференциальных форм по неполным данным. Дагестанские электронные математические известия. Вып 1. 2014. С. 56–69.

[9] Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.

[10] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.

З. Г. Меджидов (Z. G. Medzjidov)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: z.medjidov@mail.ru

Поступила в редакцию
03.11.2014