Torres Oropeza Diego Alberto Grupo: 23.

Serie 1. Sucesiones y Series²

Escribe cuatro términos más de cada sucesión y una expresión que represente el término general (término enésimo).

(1) $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \ldots = \left\{\frac{n-1}{n+2}\right\}$

$\ldots, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{9}, \frac{7}{10}, \ldots$

(3) $1, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \ldots = \left\{\frac{n}{2^{n-1}}\right\}$

$\ldots, \frac{5}{16}, \frac{6}{32}, \frac{7}{64}, \frac{8}{128}, \ldots$

$\frac{11}{}$

$\ldots, \frac{5}{16}, \frac{3}{16}, \frac{7}{64}, \frac{1}{16}, \ldots$

Indica en cada caso si la sucesión es creciente o es decreciente, justificando la respuesta.

(5) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$ DECRECE

$1, 0.5, 0.3, 0.25, 0.2, \ldots$

(7) $\{2n-1\} = \{\underbrace{1, 3}_{+2}, \underbrace{5}_{+2}, \underbrace{7}_{+2}, \underbrace{9}_{+2}, \ldots, 2n-1\}$ CRECE

Determina si las siguientes están acotadas o no, si lo están indica sus cotas, si no lo están explica por qué.

(9) $\left\{\frac{3}{\sqrt[n]{3}}\right\} = \left\{\frac{3}{3^{(\frac{1}{n})}}\right\} = \left\{1, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt[3]{3}}, \frac{3}{\sqrt[4]{3}}, \ldots, \frac{3}{\sqrt[n]{3}}\right\}$ Está acotada

$3 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3^{(\frac{1}{n})}} = 3\left(\frac{1}{3^{(\frac{1}{\infty})}}\right) = 3\left(\frac{1}{3^0}\right) = 3\left(\frac{1}{1}\right) = 3$

cot. sup. = 3 cot. inf. = 1

11.- $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n}{n+1}\right\}$ Está acotada

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Cot. sup. $= 1$      cot. inf. $= \frac{1}{2}$

Mediante el cálculo del límite de la expresión que representa las sumas parciales de las siguientes series, determinar su carácter.

13.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$S_3 = \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$S_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{64}{80} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$S_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$   $S_n = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \rightarrow$ CONVERGE

La suma tiende a 1

(15): $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$S_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$S_4 = \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$S_n = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots \right\} = \left\{ \frac{2^n - 1}{2^n} \right\}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^n} - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = \underline{1}$

Las sumas parciales tienden a 1

**CONVERGE**

Sabiendo que

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ es convergente.

y que

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} = \frac{3}{2(4)} + \frac{4}{3(5)} + \frac{5}{4(6)} + \frac{6}{5(7)} + \dots + \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} + \dots$

es divergente

Determina el carácter de la serie dada aplicando el criterio de comparación:

17: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots$

$¿\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}? \rightarrow$ Se cumple ✓

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow$ ES CONVERGENTE //

19: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{32} + \dots$

$¿\frac{1}{2n^2} < \frac{1}{n^2}? \rightarrow$ Se cumple ✓

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \Rightarrow$ ES CONVERGENTE //

Determina si la serie dada converge o diverge. Si es convergente, calcular su suma.

(21.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n 3}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \left(\frac{3}{2}\right)$

$\Downarrow$

DIVERGE

$= \underbrace{\frac{9}{2}}_{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\downarrow$

$r > 1$

$\hookrightarrow$ DIVERGE //

$\hookrightarrow$ No se puede calcular la suma //

(23.) Expresa el número decimal ilimitado periódico 0.6666...

como una serie geométrica y determinar su suma si es convergente.

$6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 6\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} \left(\frac{1}{10}\right) = \underbrace{\frac{3}{5}}_{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

$r < 1$

$\hookrightarrow$ CONVERGE //

$S_n = \frac{a}{1-r}$

$S_n = \frac{\frac{3}{5}}{1-\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{30}{45} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ //

La suma es $\frac{2}{3}$ //

Norma

25°) Investiga si la serie de signos alternados $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+4}$ es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+4} \quad a_n$$

$$a_n = \frac{n}{n^2+4}$$

i) ¿$a_{n+1} < a_n$?

$$\underbrace{\frac{n+1}{(n+1)^2+4}}_{a_{n+1}} < \underbrace{\frac{n}{n^2+4}}_{a_n} \Rightarrow$$

Para $n=1 \Rightarrow \frac{2}{8} < \frac{1}{5}$

Para $n=2 \Rightarrow \frac{3}{13} < \frac{2}{8}$

Se cumple $a_{n+1} < a_n$

ii) ¿$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+4} = \frac{0}{}$$

Se cumple $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

# La serie es convergente

Obtén el intervalo de convergencia de las siguientes series, en cada caso incluir el análisis de los extremos.

27.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$

$$r_A = \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1+2}}{\frac{x^n}{n+2}} = \frac{\cancel{x^n}\, x(n+2)}{(n+3)\cancel{x^n}} = \underline{\frac{x(n+2)}{(n+3)}}$$

$$x \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = x(1) = x = \delta \Rightarrow |x| = |\delta|$$

Para ser convergente:

$|\delta| < 1 \therefore |x| < 1 \Rightarrow |x| < a;\ a > 0 \Rightarrow -a < x < a$

$|x| < 1$

$\Downarrow$

$\underline{-1 < x < 1}$ Extremos

- Si $x = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n+2} = \frac{1}{n+2} \to$ Serie armónica, $\therefore$, diverge

- Si $x = -1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} \to$ Criterio de Leibnitz

i) $\left\{ \frac{1}{n+1+2} < \frac{1}{n+2} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+2} \right\}$ Se cumple ✓

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \to$ Se cumple ✓ $\to$ Converge

EL INTERVALO DE CONVERGENCIA ES:

$\underline{-1 \leq x < 1}$ ///

29c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n\, 2^n}$

$$r_A = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)(2^{n+1})}}{\frac{x^n}{n\,2^n}} = \frac{\cancel{x^n}\,x\,(n)\cancel{2^n}}{(n+1)\,(\cancel{2^n})(2)(\cancel{x^n})} = \frac{xn}{2n+2}$$

$$x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = x\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{x}{2}\right| = |L|$$

Para ser convergente:

$$|L| < 1 \therefore \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{x}{2}\right| < a;\ a > 0 \Rightarrow -a < \frac{x}{2} < a$$

$$\left(-1 < \frac{x}{2} < 1\right)2 = \underline{-2 < x < 2}$$ EXTREMOS

• Si $x = -2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2)^n}{n\,2^n} = \frac{\cancel{2^n}}{n\cancel{2^n}} = \frac{1}{n} \rightarrow$$ Serie armónica

Diverge

• Si $x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\cancel{2^n}}{n\,\cancel{2^n}} = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow$$ Criterio de Leibnitz

i) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ Se cumple ✓

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ Se cumple ✓

$\rightarrow$ Converge

Finalmente, el intervalo de convergencia del ejercicio 29.- es:

$$-2 < x \leq 2$$

31.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n (n+1)}$

$$r_A = \frac{\frac{(x-5)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1+1)}}{\frac{(x-5)^n}{3^n(n+1)}} = \frac{\cancel{(x-5)^n}(x-5)\cancel{3^n}(n+1)}{\cancel{3^n}(3)(n+2)\cancel{(x-5)^n}}$$

$$r_A = \frac{(x-5)(n+1)}{3(n+2)}$$

$$\frac{x-5}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}^{\nearrow 1} = \frac{x-5}{3}(1) = \frac{x-5}{3} = |\delta|$$

$$|\delta| < 1 \therefore \left|\frac{x-5}{3}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{x-5}{3}\right| < a ; a > 0 \Rightarrow -1 < \frac{x-5}{3} < 1$$

$$\left(-1 < \frac{x-5}{3} < 1\right) 3 \Rightarrow (-3 < x-5 < 3) + 5$$

$2 < x < 8$ EXTREMOS

- Si $x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-5)^n}{3^n(n+1)} = \frac{(-3)^n}{3^n(n+1)} = \frac{(-1)^n(3)^n}{3^n(n+1)} = \frac{(-1)^n}{n+1} \Rightarrow \text{Criterio de Leibnitz}$$

i) $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ ✓ se cumple

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ✓ se cumple

$\Rightarrow$ Converge

• Si $x=8$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(8-5)^n}{3^n(n+1)} = \frac{3^n}{3^n(n+1)} = \frac{1}{n+1} \rightarrow \text{Serie armónica}$$

Diverge

Finalmente, el intervalo de convergencia es:

$$2 \leq x < 8$$

Obtener la representación en serie de Maclaurin de las sig funciones:

33c) $f(x) = \text{sen}\,2x$

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

$$f(0) = \cancel{\text{sen}(2(0))}^{\,0} + 2\cos(2\cdot0)x - \frac{\cancel{4\,\text{sen}(2\cdot0)}^{\,0}}{2!}x^2 - \frac{8\cos(2\cdot0)}{3!}x^3 +$$

$$\frac{\cancel{16\,\text{sen}(2\cdot0)}^{\,0}}{4!}x^4 + \frac{32\cos(2\cdot0)}{5!}x^5 - \frac{\cancel{64\,\text{sen}(2\cdot0)}^{\,0}}{6!}x^6 + \dots$$

$$f(x) = \text{sen}\,2x = 2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32}{5!}x^5 - \frac{128x^7}{7!} + \frac{512x^9}{9!} + \dots$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Obtener la representación en serie de Taylor de las siguientes funciones:

35°) $f(x)=\cos x$ alrededor de $x=\pi=a$

$f(x)=a_0(x-\pi)^0+a_1(x-\pi)^1+a_2(x-\pi)^2+a_3(x-\pi)^3+a_n(x-\pi)^n$

$\Rightarrow a_n=\frac{f^n(\pi)}{n!} \leftarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$

$n=0 \Rightarrow f(x)=\cos x \Rightarrow f(\pi)=-1 \Rightarrow a_0=-1$

$n=1 \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(\pi)=0 \Rightarrow a_1=0$

$n=2 \Rightarrow f''(x)=-\cos x \Rightarrow f''(\pi)=1 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2!}$

$n=3 \Rightarrow f'''(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow f'''(\pi)=0 \Rightarrow a_3=\frac{0}{3!} \rightarrow 0$

$n=4 \Rightarrow f^{IV}(x)=\cos x \Rightarrow f^{IV}(\pi)=-1 \Rightarrow a_4=-\frac{1}{4!}$

$a_5=0,\ a_6=\frac{1}{6!},\ a_7=0,\ a_8=-\frac{1}{8!}$

$\cos x=a_0+a_1(x-\pi)^1+a_2(x-\pi)^2+a_3(x-\pi)^3+a_4(x-\pi)^4+\ldots$

$=-1+0+\frac{1}{2!}(x-\pi)^2+0-\frac{1}{4!}(x-\pi)^4+0+\frac{1}{6!}(x-\pi)^6+0+\ldots$

$=-1+\frac{1}{2!}(x-\pi)^2-\frac{1}{4!}(x-\pi)^4+\frac{1}{6!}(x-\pi)^6-\frac{1}{8!}(x-\pi)^8+\ldots$

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}(x-\pi)^{2n}$ //