Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

Лабораторная работа №2

Разложение в ряд Фурье

Выполнил
студент гр. в3530904/00030 В.С. Баганов

Руководитель
доцент, к.т.н. В.С. Тутыгин

«_____»_______________ 202__ г.

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1. Цель работы. Разложение в ряд Фурье

Цель данной работы — исследовать зависимость погрешности восстановления значений нескольких функций от количества членов ряда Фурье и количества отсчетов при заданной допустимой погрешности.

2. Программа работы

Задача 2 лабораторной работы - определить зависимости погрешности восстановления значений
- гармонической функции с целым количеством периодов f(x)=sin(x);
- гармонической функции с не целым количеством периодов f(x)=sin(x);
- заданной функции f(i)=abs(x(i));

от количества членов ряда Фурье и количества отсчетов.

Интересующий диапазон допустимых погрешностей (СКО) - не более 5% Последовательность действий:

1. Задать большое количество отсчетов N - 1024;

2. Увеличивать количество членов K ряда Фурье и фиксировать погрешности восстановления. Значение K д.б. меньше, чем N/2.

3. Выбрать оптимальное количество членов K ряда Фурье и уменьшать количество отсчетов N.

Крайние значения восстановленной функции при расчете погрешности исключить.

Сверхзадача: определить причину значительной погрешности в начале и конце восстановенной функции.

3. Результаты работы

3.1. Зависимость погрешности с целым количеством периодов f(x)=sin(x)

3.1.1. При разложении в действительный ряд Фурье f(x)=sin(x)

Разложение в действительный ряд Фурье гармонической функции f(x)=sin(x) с целым числом периодов.

При разложении в действительный ряд Фурье гармонической функции f(x)=sin(x) с целым числом периодов околонулевая погрешность достигается уже при начальных входных данных (N=1024, KP=4, K=16). Она составляет 0.0000000000003.

Фактически, гармоническая функция раскладывается в ряд Фурье без погрешности, и ненулевым членом будет только тот, что равен числу периодов.

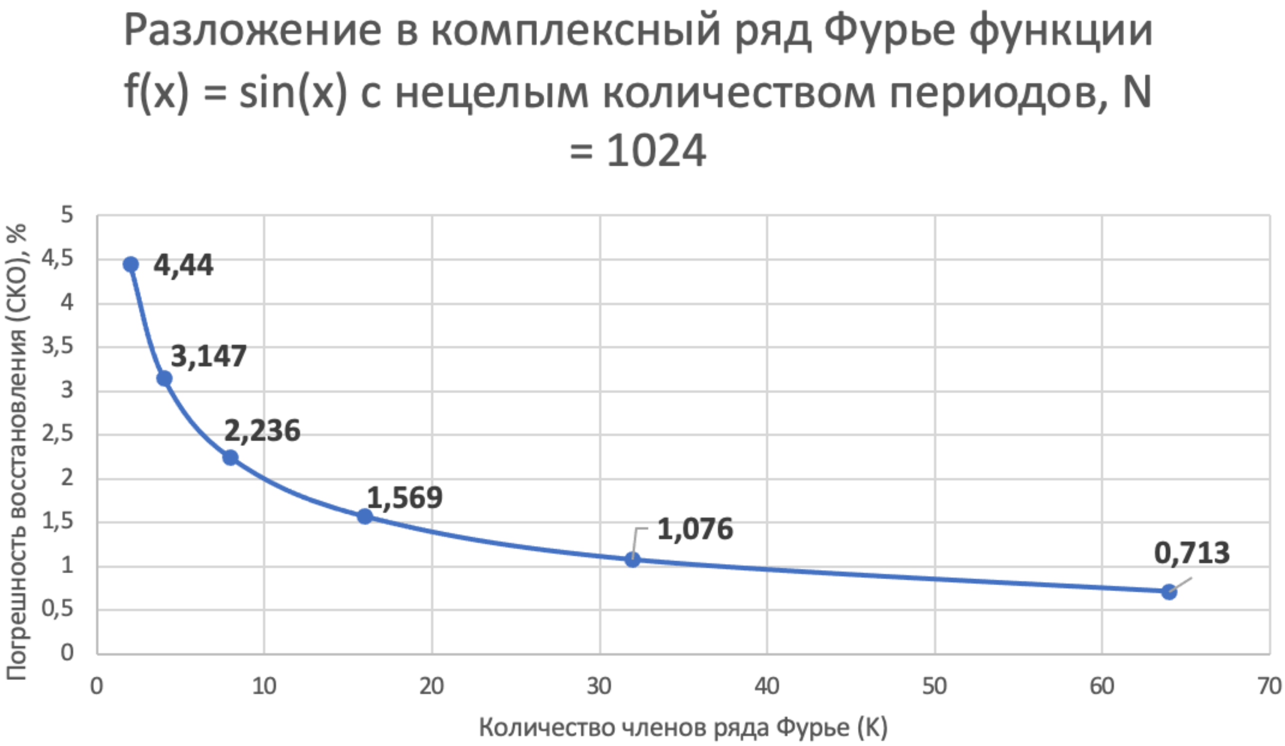
3.2. Зависимость погрешности с нецелым количеством периодов f(x)=sin(x)

3.2.1. При разложении в действительный ряд Фурье f(x)=sin(x)

При разложении функции с N=1024, KP=2.4 в действительный ряд Фурье получаем следующую зависимость погрешности отклонения от количества членов ряда:

3.2.2. При разложении в комплексный ряд Фурье f(x)=sin(x)

При разложении той же самой функции с N=1024, KP=2.4 в комплексный ряд Фурье получаем следующую зависимость погрешности отклонения от количества членов ряда:

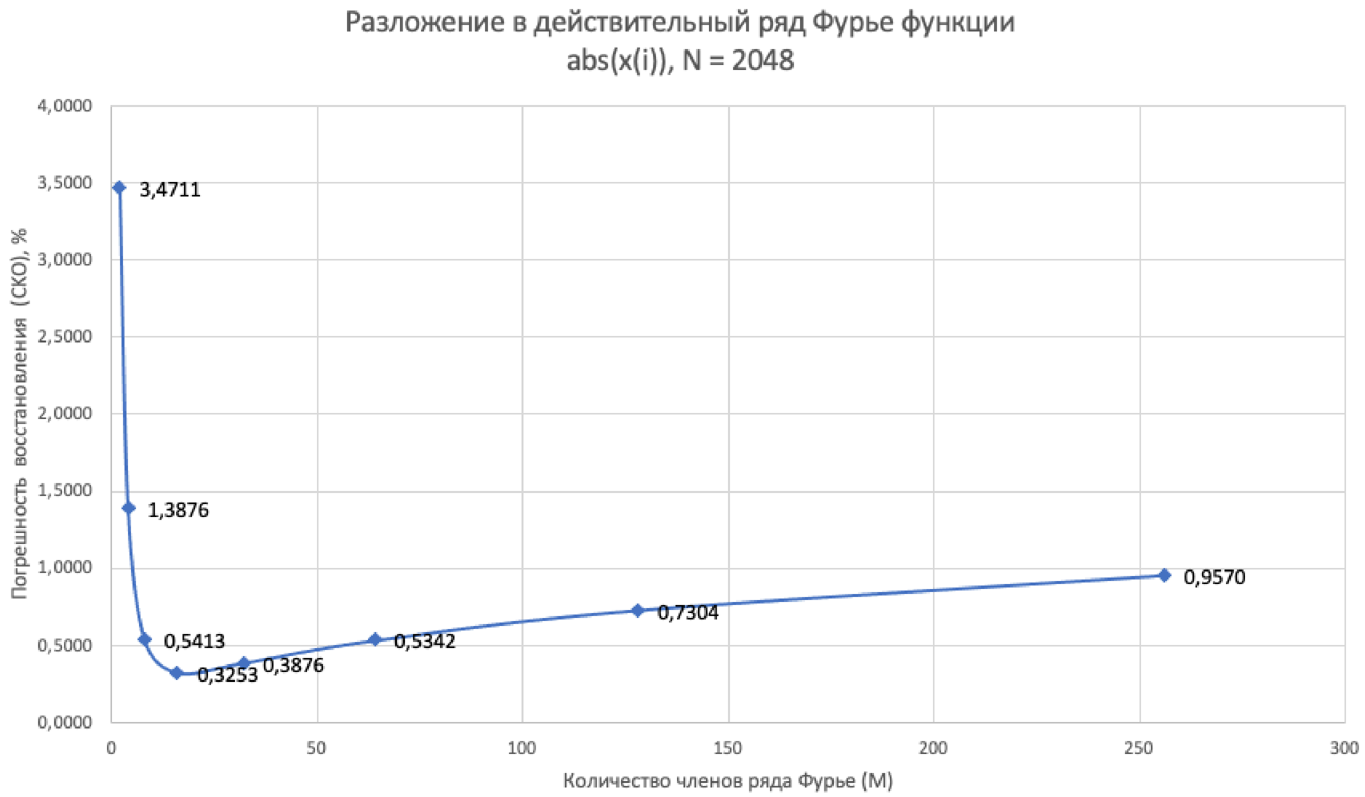


3.3. Зависимость погрешности от количества членов ряда Фурье f(i)=abs(x(i))

3.3.1. При разложении в действительный ряд Фурье f(i)=abs(x(i)) при N=2048

График зависимости погрешности восстановления от количества членов ряда для разложения в действительный ряд Фурье показан ниже.

Количество членов ряда Фурье	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**
Погрешность (СКО) , % при 2048	3,4711	1,3876	0,5413	0,3253	0,3876	0,5342	0,7304	0,9570



В результате перебора, были получены данные зависимости погрешности восстановления. Требуемая погрешность восстановления не более 5 % для N= 2048 точек, достигается при K = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. Оптимальным количеством членов ряда Фурье с самой низкой погрешностью являются K= 16, 32.

3.3.2. При разложении в действительный ряд Фурье f(i)=abs(x(i)) при N=8192

График зависимости погрешности восстановления от количества членов ряда для разложения в действительный ряд Фурье показан ниже.

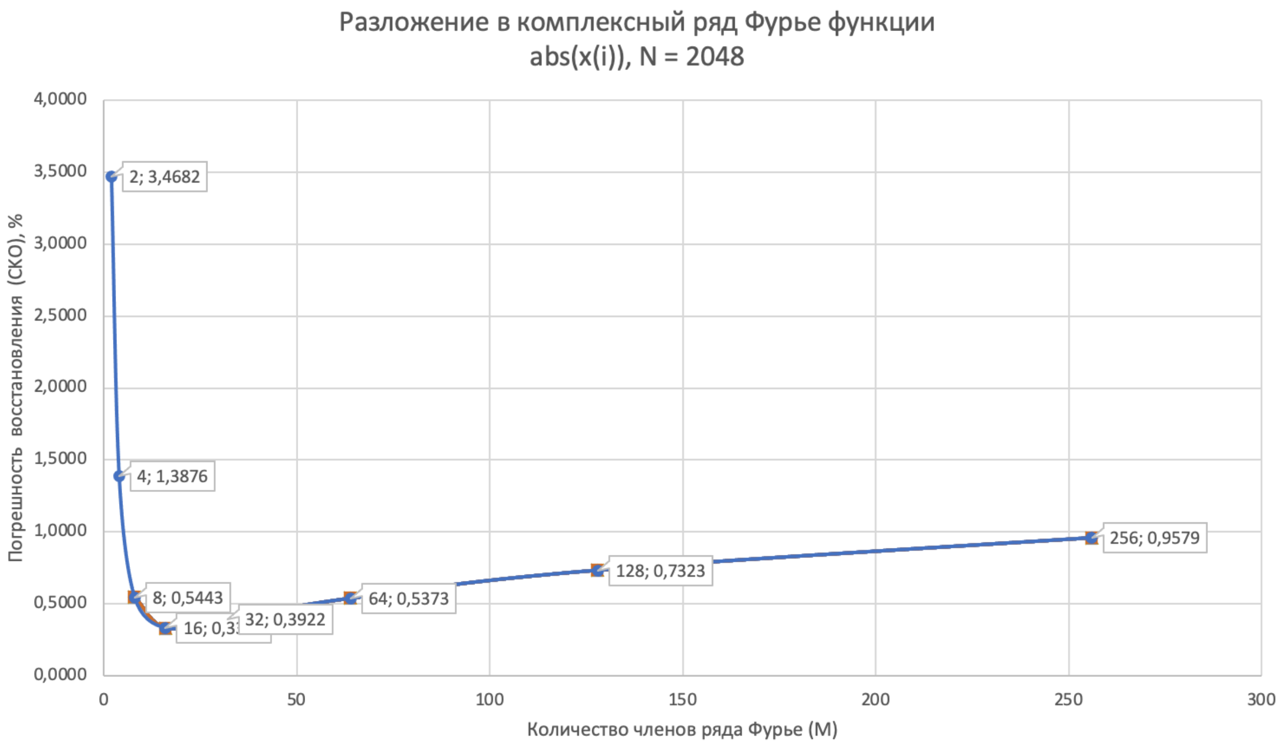
Кол-во членов ряда Фурье	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**
Погрешность (СКО) , % при 8192	3,4715	1,3837	0,5109	0,1940	0,1161	0,1385	0,1921	0,2673	0,3653	0,4784

В результате перебора, были получены данные зависимости погрешности восстановления. Требуемая погрешность восстановления не более 5 % для N= 8192 точек, достигается при K = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. Оптимальным количеством членов ряда Фурье с самой низкой погрешностью являются K= 32.

3.3.3. При разложении в комплексный ряд Фурье f(i)=abs(x(i) при N=2048

График зависимости погрешности восстановления от количества членов ряда для разложения в комплексный ряд Фурье показан ниже.

Кол-во членов ряда Фурье	2	4	8	16	32	64	128	256
Погрешность (СКО) , % при 2048	3,4682	1,3876	0,5443	0,3309	0,3922	0,5373	0,7323	0,9579

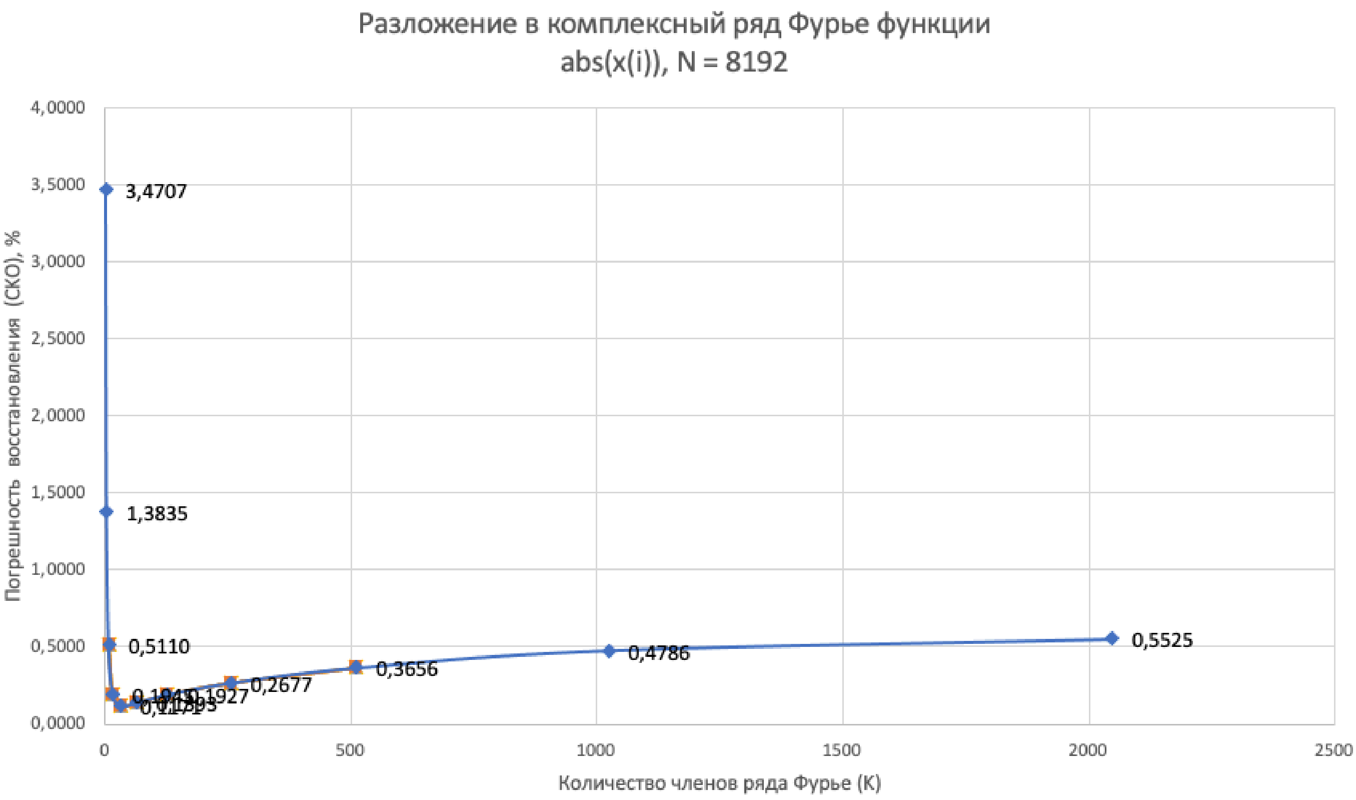


В результате перебора, были получены данные зависимости погрешности восстановления. Требуемая погрешность восстановления не более 5 % для N= 2048 точек, достигается при K = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. Оптимальным Кол-вом членов ряда Фурье с самой низкой погрешностью являются K= 32, 64.

3.3.4. При разложении в комплексный ряд Фурье f(i)=abs(x(i) при N=8192

График зависимости погрешности восстановления от количества членов ряда для разложения в комплексный ряд Фурье показан ниже.

Кол-во членов ряда Фурье	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**
Погрешность (СКО) , % при 8192	3,4707	1,3835	0,5110	0,1945	0,1171	0,1393	0,1927	0,2677	0,3656	0,4786



В результате перебора, были получены данные зависимости погрешности восстановления. Требуемая погрешность восстановления не более 5 % для N= 8192 точек, достигается при K = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048. Оптимальным количеством членов ряда Фурье с самой низкой погрешностью являются K= 32, 64.

4. Вывод

Кол-во членов комплекс. ряда Фурье	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**
Погрешность (СКО) , % при 2048	3,4711	1,3876	0,5413	0,3253	0,3876	0,5342	0,7304	0,9570	1,1052	
Погрешность (СКО) , % при 8192	3,4715	1,3837	0,5109	0,1940	0,1161	0,1385	0,1921	0,2673	0,3653	0,4784

Кол-во членов действит. ряда Фурье	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**
Погрешность (СКО) , % при 2048	3,4682	1,3876	0,5443	0,3309	0,3922	0,5373	0,7323	0,9579	1,1055	
Погрешность (СКО) , % при 8192	3,4707	1,3835	0,5110	0,1945	0,1171	0,1393	0,1927	0,2677	0,3656	0,4786

При разложении гармонической функции с целым числом периодов погрешность порядка 10-13 достигается уже при любых входных данных, учитывая N/4>=K>KP. Фактически, гармоническая функция раскладывается в ряд Фурье без погрешности, и ненулевым членом будет только тот, что равен числу периодов.

В случае нецелого количества периодов, требуемая погрешность (не выше 1%) для взятой гармонической функции достигается при K=64, N=1024 (СКО=0.71%), как при разложении в комплексный, так и при разложении в действительный ряд Фурье.

Как видно из таблиц и графиков, для действительного и комплексного ряда Фурье значения погрешности функции Фурье f(i)=abs(x(i)) совпадают.

При разложении функции f(i)=abs(x(i)) в действительный и комплексный ряды Фурье, минимальных значений погрешности удается достигнуть при K = от 16 до 32.

Для гармонической функции с целым числом периодов погрешность восстановления значений от количества членов ряда Фурье и количества отсчетов зависит незначительно.

Для произвольной функции, для которой возможно построить разложение в ряд Фурье, погрешность восстановления значений от количества членов ряда Фурье и количества отсчетов может существенно зависеть, разложение отдельных разложимых в ряд Фурье функций может быть нецелесообразно на практике в связи с низкой скоростью сходимости ряда.

5. Листинг Matlab. Разложение в действительный ряд Фурье.

```
% Разложение функции t в ряд Фурье
%в дискретизированном виде на интервале [-T,T], например,[-pi,pi]

clc;
N = 8192; %Количество отсчетов (элементов массива y(t))
K = 2048;%Количество членов ряда Фурье
T=pi;
%T=5;
T=0.9*pi; %диапазон изменения функции f(i) равен +/-T
kp=1.1; %количество периодов гармонической функции
y=zeros(1,N+1);
Sa = zeros(1,K);
Sb = zeros(1,K);
p=1;% показатель степени функции t^p
f=zeros(1,N+1);
Sa0=0;
%for i=1:N+1
for i=2:N
% f(i)=sin(2*pi*kp*(i-1)/N); % гармоническая функция
x(i)=(2*T*(((i-1-N/2))/N));
%f(i)=sign(sin(2*pi*kp*(i-1)/N));
% f(i)=x(i)*cos(x(i));
%f(i)=(-tan(x(i)/2))/2;
% f(i)=log(2+cos(x(i)/2));%вариант 10
%f(i)=log(2+cos(x(i)/2));%вариант 10
% f(i)=log(1+x(i)^p);
% f(i)= (2*T*(((i-1-N/2))/N))^p; %функция t^p
% f(i)=x(i)^3-1;
% f(i)=x(i)^p;
% f(i) s(x(i));
% f(i)=sinh(x(i));
% f(i)=sin(x(i));
%f(i)=cosh(x(i)); %Вариант 14 - f(x)=ch(x)
% f(i)=x(i)*exp(x(i));
%f(i)=exp(x(i));
%f(i)=x(i)*sin(x(i));

Sa0=Sa0+f(i);
end
Sa0=Sa0/N; %вычисленный коэф. a0/2
%Saa0=pi^2/3 %%теоретически определенные коэф. a0/2 для функции t^2
figure
i=1:N;
plot(i,f(i));
title('f(i)');
axis tight;
for i=1:N+1
for j=1:K
Sa(j) = (Sa(j)+f(i)*cos((j)*2*T*(i-1-N/2)/N));%**********
Sb(j) = (Sb(j)+f(i)*sin((j)*2*T*(i-1-N/2)/N)); %**********
end

end
for j=1:K
Sa(j)=Sa(j)*(1/(N/2));
```

```
Sb(j)=Sb(j)*(1/(N/2));
% Saa(j)= 4*(-1)^j/(j^2);%теоретически определенный коэф. ak для функции t^2
end
SSa=Sa; %коэффициенты ak
SSb=Sb %коэффициенты bk
%SSaa=Saa %теоретически определенные коэф. ak для функции t^2
% i=1:K;
% figure
% plot(i,Sa);
% title('Коэффициенты Sa');
%Вычисление и отображение спектра амплитуд (начало)
for j=1:K
Sab(j)=sqrt(Sa(j)^2+Sb(j)^2);
end
K1=K;
i=1:K1;
figure
plot(i,Sab(i));
stem(Sab(1:K1)); %вывод графика дискретной последовательности данных
axis([1 8 -0.2 1.2]);%задание осей: [xmin xmax ymin ymax]
title('Амплитуды частотных составляющих спектра');
xlabel('Количество периодов')
axis tight;
%Вычисление и отображение спектра амплитуд (конец)
y=zeros(1,N+1);
for i=1:N+1
for j=1:K
y(i)= y(i)+Sa(j)*cos(j*2*T*(i-1-N/2)/N)+Sb(j)*sin(j*2*T*(i-1-N/2)/N); %%%%%%%%
end
y(i)=(Sa0+y(i));
end
i=1:N+1;
figure
plot(i,f);
axis tight;
hold on;
plot(i,y,'r-')
hold off;

for i=2:N
dy(i)=y(i)-f(i);%абсолютная погрешность восстановления
end
dy_proc=dy/(max(f)-min(f))*100;
CKO=std(dy);
CKO_proc=std(dy_proc)%CKO в процентах

pause;
close all;
clear;
```

6. Листинг Matlab. Разложение в комплексный ряд Фурье.

```
%Разложение функции t^p в комплексный ряд Фурье
%в дискретизированном виде на интервале [-T,T]
clear;
clc;
N=8192; %количество значений функции на интервале [-T,T]
M=16; %количество членов ряда Фурье
%T=pi;
%T=0.9*pi;
T=pi;
%p=4; %показатель степени функции x^p
%kp=2.4; %количество периодов гармонического сигнала
C0=0;

for i=1:N+1 %генерация модельной функции
%f(i)=sin(2*pi*kp*(i-1)/N); %гармоническая функция
x(i)= 2*T*((i-1-N/2)/N);%для интервала от -T до T
%f(i)=sin(x(i));
% f(i)=(x(i)*cos(x(i)));
f(i)=abs(x(i));
%f(i)= (x(i))^p; %функция t^p
% f(i)=x(i)*exp(x(i));
% f(i)=sinh(x(i));
 C0=C0+f(i);
end
C0=C0*(2/N);
for k=1:M
   C(k)=0;
end
for i=1:N+1
    for k=1:M
    C(k)=C(k)+f(i)*exp(-j*2*T*k*(i-1)/N);%%%%%%%%
    end
end
for k=1:M
    C(k)=C(k)*(2/N);
end
%Вычисление и отображение спектра амплитуд (начало)
for k=1:M
Cab(k)=abs(C(k)); %коэффициенты Cab(k)- комплексные числа вида a+jb,
%функция abs вычисляет sqrt(a^2+b^2 )
end
k=1:M;
figure
plot(k,Cab);
stem(Cab(1:M));%вывод графика дискретной последовательности данных
axis([1 8 -0.2 1.2]); %задание осей: [xmin xmax ymin ymax]
title('Амплитуды частотных составляющих спектра');
xlabel('Количество периодов')
axis tight;
%Вычисление и отображение спектра амплитуд (конец)
for i=1:N+1
    y(i)=0;
    for k=1:M
        y(i)=y(i)+C(k)*exp(j*2*T*k*(i-1)/N);
    end
```

```
    y(i)=C0/2+y(i);
end
i=1:N+1;
figure
plot(i,f);
axis tight;
title('Исходная и восстановленная функция')
xlabel('Номер элемента массива')
hold on;
plot(i,real(y),'r-');
axis tight;
hold off;



for i=2:N
    dy(i)=real(y(i))-f(i); %абсолютная погрешность восстановления
end
dy_proc=dy/(max(f)-min(f))*100;
СКО=std(dy);
СКО_proc=std(dy_proc) %СКО в процентах

pause
close all;
clear;
```