高中数学

作者：Johnny Tang

组织：DEEP Team

时间：January 21, 2023

请：相信时间的力量，敬畏概率的准则

写在前面

本讲义是由 DEEP Team 出品、主要面向强基竞赛学生的高中数学讲义. 本讲义注重知识体系的搭建，关于具体的解题技巧，请参考《高中数学解题指南 I》、《高中数学解题指南 II》(皆可在我们的网站上找到)；为了提升熟练度和补充，也推荐搭配如《奥数教程》等一试书籍.

提到高中数学，不得不介绍其特点：

1. 从知识体系上来看，高中数学的内容脉络更加严谨、有条理. 高中数学在初中已经接触的部分内容的基础上，进行了适当的拓展研究. 另外，其作为初等数学至高等数学的衔接课程，相较初中更具抽象性.
2. 从考题上来看，由于高中数学引入了各个具体板块的内容，较难的题目一般会以知识综合的形式出现，接近于真正的数学研究环境.

根据上述特点，本讲义在编写时即侧重于知识体系的完整性与逻辑性，尽量自然地引入各种概念与定理；本讲义给出了许多思考问题，而不是单纯的例题堆积，这会增进对知识的理解.

不同于大多数高中数学讲义，为了更好地培养抽象思维，本讲义十分注重定理和公式的证明. 关于高中考试中经常出现的二级结论，本讲义会在不脱离主干知识脉络的条件下尽量拓展 (多以"问题"表示)，以免影响对数学体系的整体认知. 关于计算能力与知识熟练度，为了尽可能较少讲义篇幅，这部分内容请读者参考《奥数教程》等练习.

本讲义包括如下内容：高中数学预备知识，函数与数列，几何，数与代数，概率、计数与组合，初等数论. 大致涵盖高中数学联赛一试、二试内容，也兼顾强基计划的知识体系.

目录

注：初等数论部分待完成.

第一部分

预备知识

第 0 章 数理逻辑与集合

内容提要

- ❑ 命题、充分条件、存在与任意
- ❑ 命题的逻辑运算
- ❑ 集合、子集与母集
- ❑ 集合间的运算及其运算律
- ❑ 区间

0.1 数理逻辑

0.1.1 命题的概念

定义 0.1 (命题)

由一个陈述句表达的、具有真值的判断称为**命题**.

♣

注 有一种特殊的命题，形如“若 p，则 q”，这种命题可以帮助我们判断很多要素.

命题之间有一些特殊关系.

定义 0.2 (充分条件与必要条件)

设命题 A 和 B. 若 A 可以推得 B，则称命题 A 是 B 的**充分条件** (sufficient condition)，B 是 A 的**必要条件** (necessary condition)，记作

$$A \Rightarrow B, \text{ 或 } B \Leftarrow A$$

若 A 可以推得 B 且 B 可以推得 A，则称命题 A 和 B 互为**充分必要条件** (necessary and sufficient condition)，简称充要条件，此时也称命题 A 和 B 等价 (A 成立当且仅当 B 成立)，记作

$$A \Leftrightarrow B$$

此时 $B \Rightarrow A$ 的过程称为充分性，$A \Rightarrow B$ 的过程称为必要性.

♣

注 还有一个类似的逻辑语言：有且仅有 (恰有)，这意味着存在一个 (存在性) 且只有一个 (唯一性). 例如，平面中，过直线外一点有且仅有一条直线与之平行.

注 类似于大于等于 (小于等于) 号，“充分 (必要) 条件”具有传递性. 即“若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$”.

可以用图像来更好理解该定义.

例题 0.1.1 (1) 一个四边形“是菱形”是“它的对角线互相垂直”的________条件.

(2)“$0 < x < 1$”是“$x < 2$”的________条件.

(3) 设有命题 p, q. 则“$p \Rightarrow q$”是“$p \Leftrightarrow q$”的________条件.

(4)“$x^2 - 5x + 6 \neq 0$”是“$x \neq 2$”的________条件.

解 (1) 充分且不必要；(2) 充分且不必要；(3) 必要且不充分；(4) 充分且不必要.

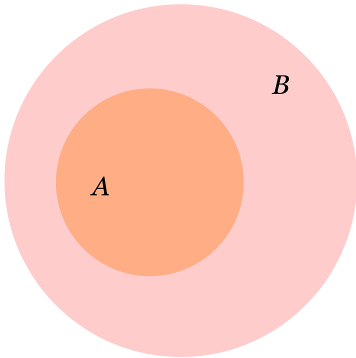


图 1: 例如，此时 A 是 B 的充分且不必要条件

不过这种直观的判断方式比较迷惑，我们可以通过命题的逻辑运算更好地思考这些问题.

定义 0.3 (命题的逻辑运算)

设命题 A 与 B,

(1) 若 A 和 B 中至少有一个命题成立，则称 A **或** (or)B，记作

$$A \vee B$$

(2) 若 A 和 B 同时成立，则称 A **且** (and)B，记作

$$A \wedge B$$

(3) 若 A 的相反形式成立，则称**非** (not)A(或称 A 的否定)，记作

$$\neg A$$

♣

注 关于"且""或"的否定，存在如下规律：

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

另外，对于任意命题的否定，有一个重要法则. 在二值逻辑中，该定律实际上告诉我们一个命题 P 要么为真、要么为假.

命题 0.1 (排中律)

对于任何命题 P，$P \vee (\neg P)$ 为真.

♠

定义 0.4 (存在，任意)

设命题 A,

(1) 若**存在** (exist)x 使得命题 A 成立，可以记作

$$\exists x \ s.t. \ A$$

(2) 若对于**任意** (for all)x 都能使得命题 A 成立，可以记作

$$\forall x, A$$

♣

注 "*s.t.*"是"*such that*"的缩写.

注 “存在”与“任意”的否定如下:

$$\neg(\forall x, A) = \exists x \; s.t. \; \neg A$$

$$\neg(\exists x \; s.t. \; A) = \forall x, \neg A$$

0.1.2 特殊的命题

我们可以对特殊的“若 p, 则 q”型命题进行更进一步的讨论.

定义 0.5 (原命题, 逆命题, 否命题, 逆否命题)

设有原命题 (primitive proposition) 可以表示为 $P \Rightarrow Q$ 的形式.

(1) 逆命题 (converse proposition) 定义为:

$$Q \Rightarrow P$$

(2) 否命题 (inverse proposition) 定义为:

$$\neg P \Rightarrow \neg Q$$

(3) 逆否命题 (contrapositive proposition) 定义为:

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

♣

注 此时否命题就是原命题的否定形式, 即 $\neg(P \Rightarrow Q) = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

回顾上一个例题的最后一问, 除了用直观的判断方式以外, 我们还可以用反证法说明“若 $x \neq 2$, 则 $x^2 - 5x + 6 \neq 0$”. 实际上, 反证法的本质就是以下命题所述:

命题 0.2 (逆否命题的真假性)

逆否命题与原命题的真假性相同.

♠

这个命题也可用图像来解释:

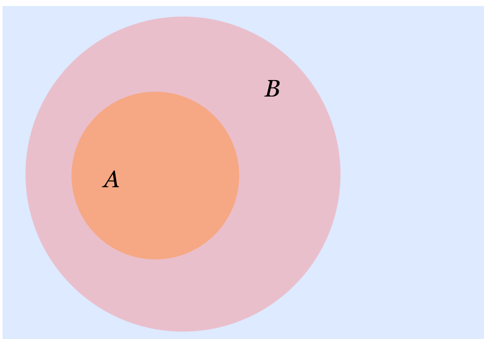


图 2: 逆否命题与原命题的真假性比较

容易发现, 其中“若 A, 则 B”就等价于“若 $\neg B$(即矩形除去大圆的区域), 则 $\neg A$(即矩形除去小圆的区域)”.

例题 0.1.2 证明: $\sqrt{2}$ 是无理数.

证明 设原命题:“所有能表示为 $\dfrac{p}{q}$ (p,q 都是正整数且互质) 的形式的数都是有理数” $\Rightarrow$ “$\sqrt{2}$ 是无理数”. 则原命题等价于“所有不能表示为 $\dfrac{p}{q}$ (p,q 都是正整数且互质) 的形式的数都是无理数” $\Rightarrow$ “$\sqrt{2}$ 是无理数”. 构造逆否命题:“$\sqrt{2}$ 是有理数” $\Rightarrow$ “存在一个不能表示为 $\dfrac{p}{q}$ (p,q 都是正整数且互质) 的形式的数是有理数”, 由“$\sqrt{2}$ 是有理数”, 设 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$ (p,q 都是正整数且互质). 两边同时平方, 有

$$2q^2=p^2$$

这要求 p 是 2 的倍数, 因而 p^2 是 4 的倍数, 故 q^2 是 2 的倍数. 又因为 q 是整数, 所以 q 是 2 的倍数, 那么 p,q 不互质, 即 $\sqrt{2}$ 不能表示为上述形式. 这就证明了“存在一个不能表示为 $\dfrac{p}{q}$ (p,q 都是正整数且互质) 的形式的数是有理数”. 由于原命题与逆否命题的真假性相同, 故原命题也成立.

0.2 集合

0.2.1 集合的概念

一般地，把一些能够确定的不同的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的**集合** (set). 其中，构成集合的每一个对象称为**元素** (element). 集合中的元素满足如下性质：确定性，互异性，无序性. 特别地，一个集合可以没有元素，这样的集合叫做空集，记作 $\varnothing$.

若 x 是集合 X 中的元素，则称 x **属于** (belongs to)X，记作 $x \in X$. 反之，x **不属于** X 记作 $x \notin X$.

对于一个集合，我们有两种方式描述集合中的元素：

1. 列举法：将集合中的元素一一列举，例如
$$\{1,2,3,\cdots\}$$
其中"$\cdots$"表示类似的元素.
2. 描述法：为了描述含有无限个元素的集合 (即无限集)，我们用所含元素的性质来表示该集合，例如
$$\{x\in E|P(x)\}, \text{或}\{x\in E:P(x)\}$$
其中 x 为这些元素的代表元素，E 是 x 的范围，$P(x)$ 表示 x 满足的性质.

另外，一些常见的数集有它们特定的表示符号：

符号	数集
$\mathbb{R}$	实数 (real number) 集
$\mathbb{Q}$	有理数 (rational number) 集
$\mathbb{Z}$	整数 (integer) 集
$\mathbb{N}$	自然数 (natural number) 集

为了描述类似于"正整数集"的集合，我们规定一些标记. 例如，$\mathbb{R}^+$(或 $\mathbb{R}_+$) 表示正实数集，$\mathbb{Z}^-$ 表示负整数集，$\mathbb{N}^*$ 表示非零自然数集 (等价于正整数集).

例题 0.2.1 (1) 集合 $A=\{2,0,1,3\}$，$B=\{x|-x\in A, 2-x^2\notin A\}$，则集合 B 中所有元素的和为________.
(2) 由三个实数构成的集合，既能表示为 $\{a,1,b/a\}$，也能表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，则 $a^{99}+b^{99}=$________.

解 (1) 由题意可知，集合 $B=\{-2,-3\}$，则 B 中所有元素的和为 -5.
(2) $\boxed{\text{解法一}}$ 由于 1 和 0 不能相等，且 $a\neq 0$，于是 $b/a=0$，即 $b=0$. 又由 $a^2\neq a$，$a^2=1$，可知 $a=-1$. 综上，$a^{99}+b^{99}=-1$.
$\boxed{\text{解法二}}$ 由题，$\begin{cases} a+1+\dfrac{b}{a}=a^2+(a+b)+0 \\ a\times 1\times\dfrac{b}{a}=a^2\times(a+b)\times 0\end{cases}$，由第二个式子可知 $b=0$，代回第一个式子，解得 $a=\pm1$，又因为 $a^2\neq a+b$，于是 $a=-1$. 综上，$a^{99}+b^{99}=-1$.

以下介绍集合之间的关系：

定义 0.6 (子集和母集)

设集合 A 和 B，若

$$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$$

则称 A **包含于** (is included in)B，或 B **包含** (includes)A；A 是 B 的**一个子集** (subset)，B 是 A 的**一个母集** (superset)，记作

$$A \subseteq B,\ 或 B \supseteq A$$

当 A 和 B 互为子集时，记作 $A = B$. 即，$A = B$ 表示

$$\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

特别地，若

$$(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

则称 A 是 B 的**一个真子集** (proper subset)，B 是 A 的**一个真母集** (proper superset)，记作

$$A \subsetneqq B,\ 或 B \supsetneqq A$$

♣

注意 上述定义中符号"$\subseteq, \subsetneqq$"在一些数学课本中也会写作"$\subset$"等. 本书均采用上述写法.

注 (真) 包含关系具有传递性，就如同逻辑运算中"充分条件"有传递性一样.

由上述定义，不难证明，空集是任意集合的子集、是任意非空集合的真子集.

有时我们需要研究某个有限集合的元素个数. 设有限集 A，可以用 $\operatorname{card}(A)$ 表示其元素个数 (card 即 *cardinal*，基数). 另外，有限集 A 的**阶**也表示其元素个数，记作 $|A|$.

问题 0.1 证明：对于一个有限集 A，它的子集个数为 $2^{|A|}$ 个，真子集个数为 $2^{|A|} - 1$ 个.

证明 $\boxed{\text{解法一}}$ 使用"贡献法". 对于给定的一个 A 的子集，任何一个 $a_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 要么在其中，要么不在其中，由乘法原理，这样做就会生成 2^n 个不同的子集. 对于一个有限集 A，其真子集恰会比其子集少一个 A，即真子集个数为 $2^n - 1$.

$\boxed{\text{解法二}}$ 设集合 $\{a_1, \cdots, a_n\}$. 对 n 较小的情况进行子集的枚举：

$$n = 1,\quad \varnothing, \{a_1\}$$

$$n = 2,\quad \varnothing, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$$

$$n = 3,\quad \varnothing, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_3, a_1\}, \{a_1, a_2, a_3\}$$

容易发现，每次从 n 增加到 $n + 1$ 时，n 的情况中的子集全部被"继承"到 $n + 1$ 的情况里，又将新增加的元素 a_{n+1} 放在每一个继承下来的子集里形成一族新的子集 (以 $n = 2 \to 3$ 为例，红色部分即为"继承"，黑色部分即为增加). 由这种递推关系，可以得到 n 元集合的子集个数为 2^n.

注：在不使用数学归纳法时，这种证明实际上是不严谨的.

0.2.2 集合间的运算与运算律

类似于上文对子集和母集的定义，我们可以从集合中元素的角度来研究集合间的运算.

定义 0.7 (集合的交、并、差、补)

设集合 A 和 B,

(1)A 与 B 的**交集** (intersection)，记作 $A\cap B$，定义为

$$A\cap B=\{x|(x\in A)\wedge(x\in B)\}$$

(2)A 与 B 的**并集** (union)，记作 $A\cup B$，定义为

$$A\cup B=\{x|(x\in A)\vee(x\in B)\}$$

(3)A 与 B 的**差集** (difference)，记作 $A-B$ 或 $A\setminus B$，定义为

$$A\setminus B=\{x|(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$$

(4) 设 U 为全集.A 的**补集** (complement)，记作 $\complement_U A$，定义为

$$\complement_U A=\{x|(x\in U)\wedge(x\notin A)\}$$

若已知该全集 (题目中明确定义)，A 的补集也可记作 $\overline{A}$.

注意 两集合间的差集并不要求它们有包含关系，而只是从一个集合中“除去”在另一个集合中的元素.

问题 0.2 证明:

$$A\cap B=B\ \Leftrightarrow\ B\subseteq A,\quad A\cup B=A\ \Leftrightarrow\ B\subseteq A$$

证明 以第一个为例.

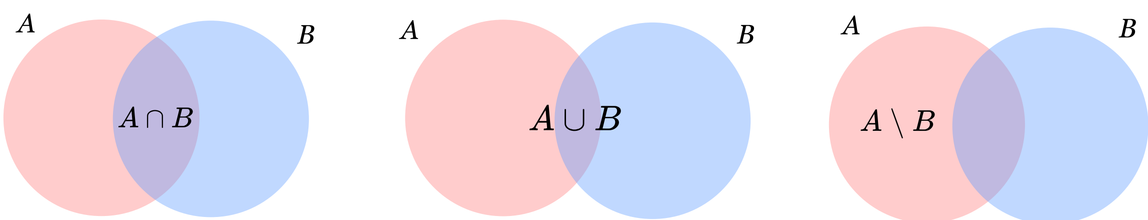
1° 充分性：由 $B\subseteq A$，有 $\forall x,x\in B\Rightarrow x\in A$. 于是

$$B=\{x|x\in B\}=\{x|(x\in B)\wedge(x\in B)\}\subseteq\{x|(x\in A)\wedge(x\in B)\}=A\cap B$$

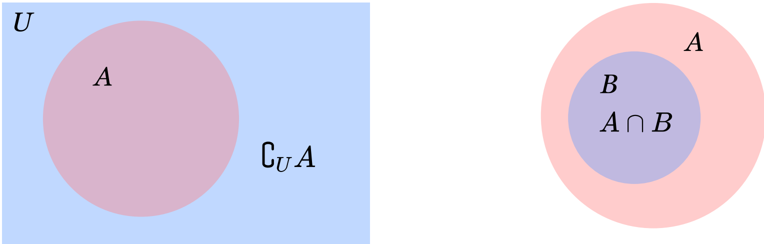
又因为 $(A\cap B)\subseteq B$，于是 $A\cap B=B$.

2° 必要性：由 $A\cap B=B$ 可得 $B\subseteq(A\cap B)$. 又因为 $(A\cap B)\subseteq A$，于是 $B\subseteq A$.

上述定义与问题如果用图像的形式来看，会自然许多:



[i] A与B的交集(中间部分)　[ii] A与B的并集(整个图形)　[iii] A与B的差集(仅左边部分)



[iv] A在U下的差集(除去小圆的部分)　　[v] 有包含关系的两集合的交集

图 3: 集合间的运算图示

就像对于加减乘除运算，我们要研究其运算律一样，集合的交、并、补运算也有类似的运算律.

命题 0.3 (集合运算的运算律)

设集合 A 和 B，全集 U.

(1) 它们的交、并运算满足交换律，即

$$A\cap B=B\cap A \qquad A\cup B=B\cup A$$

(2) 它们的交、并运算满足结合律，即

$$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

$$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

(3) 它们的交运算与并运算之间满足分配律，即

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

(4) 它们的交、并运算与补运算之间满足摩根律 (或称德摩根定理，De Morgan's theorem)，即

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \qquad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

例题 0.2.2 (1) 已知 $A=\{2,5\}$，$B=\{x|x^2+px+q=0\}$，且 $A\cup B=A$，$A\cap B=\{5\}$，则 $pq=$________.
(2) 已知 M,N 均为 $\mathbb{R}$ 的子集，且 $(\complement_{\mathbb{R}}M)\subseteq N$，则 $M\cup(\complement_{\mathbb{R}}N)=$________. (用 M,N 表示)

解 (1) 由 $A\cup B=A$，$A\cap B=\{5\}$，可知 $B\subsetneqq A$ 且 $5\in B$，即 $B=\{5\}$. 这意味着二次方程 $x^2+px+q=0$ 恰有一个解 $x=5$，于是 $p=-10$, $q=25$，进而 $pq=-250$.
(2) 可以作一个换元的操作：令 $P=\complement_{\mathbb{R}}M$，则 $M=\complement_{\mathbb{R}}P$(也即 $P\cup Q=\mathbb{R}$, $P\cap Q=\varnothing$). 于是 $P\subseteq N$，所求即为 $(\complement_{\mathbb{R}}P)\cup(\complement_{\mathbb{R}}N)$. 由命题0.2可知 $(\complement_{\mathbb{R}}N)\subseteq(\complement_{\mathbb{R}}P)$，于是原式等于 $\complement_{\mathbb{R}}P$，即为 M.

实际上，集合之间的交、并与逻辑运算中的和、或是一样的. 例如，不等式 $x^2-4x+3\geq 0$ 的取值范围为

$$\{x|(x\leq 1)\vee(x\geq 3)\}=\{x|x\leq 1\}\cup\{x|x\geq 3\}$$

为了更方便地表示上述结果，引入区间的概念：

定义 0.8 (区间)

定义 $\mathbb{R}$ 上的一种特殊数集为区间 (interval). 例如

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \quad \text{“开区间”}$$

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \quad \text{“闭区间”}$$

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \quad \text{“左开右闭区间”}$$

$$(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$

$$[a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$

$$(-\infty,+\infty) := \mathbb{R}$$

其他形式的区间定义相似. ♣

上文例子中 x 的取值范围就可以表达为

$$(-\infty,1] \cup [3,+\infty)$$

第 1 章 算术预备知识

内容提要

- 幂运算及其运算律
- 对数运算及其运算律
- 求和符号的定义与常见求和技巧

1.1 幂运算与对数运算

首先介绍**幂** (power) 的概念. 对于单项式 $a^n(n\in\mathbb{Q})$，令 $n=\frac{p}{q}$，

$$a^{\frac{p}{q}}:=\sqrt[q]{a^p}\ (p,q\in\mathbb{Z})$$

这就是有理数次幂的严格定义. 其中，a 称为底数，n 称为指数，a^n 的值称为幂值. 若 n 是无理数，可以借助指数函数进行定义 (后文会提到).

幂运算的运算律如下：

命题 1.1 (幂函数的运算律)

设 $a,b,m,n\in\mathbb{R}$.

(1) 同底数幂相乘

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

(2) 同指数幂相乘

$$a^m\times b^m=(ab)^m$$

(3) 幂的幂

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

接着介绍对数的概念. 一般地，若 $a^x=y\ (a>0,a\neq1)$，则称 x 为以 a 为底 y 的**对数** (logarithm)，记作 $x=\log_a y$，其中 a 叫做底数，y 叫做真数 (这里人为要求 $a>0$ 是因为当 $a\leq0$ 时运算不可逆，也即对数函数不单调)；读作“以 a 为底 y 的对数”.

通常把以 10 为底的对数叫做**常用对数** (化学中 pH 值的计算公式就有利用到它)，简记为 $\log_{10}N=\lg N$；把以自然常数 e 为底的对数叫做**自然对数**，简记为 $\log_e N=\ln N$.

对数运算有两条重要性质：(1) $\log_a 1=0$，$\log_a a=1$；(2) $a^{\log_a N}=N$. 第二条看起来是个废话，但是我们会在下方多次应用.

例题 1.1.1 计算：$\log_2 8=$________, $\log_{\sqrt5}125=$________, $\log_{114514}1=$________,$\log_8 16=$________.

解 3；6；0；$\dfrac{4}{3}$.

类似于指数运算，对数运算也有一些重要运算公式：

命题 1.2 (对数的运算法则)

假设下列式子都有意义.

(1) 加减法

$$\log_\alpha MN = \log_\alpha M + \log_\alpha N \qquad \log_\alpha \frac{M}{N} = \log_\alpha M - \log_\alpha N$$

(2) 换底公式

$$\log_\alpha x = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}$$

(3) 指数

$$\log_{\alpha^n} x^m = \frac{m}{n}\log_\alpha x$$

(4) 倒数

$$\log_\alpha \beta = \frac{1}{\log_\beta \alpha}$$

(5) 链式

$$\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \gamma = \log_\alpha \gamma$$

♠

证明 这里只选择部分运算法则证明:

(1) 加法：由对数的定义，$\alpha^{\log_\alpha M} = M$, $\alpha^{\log_\alpha N} = N$，于是

$$MN = \alpha^{\log_\alpha M} \cdot \alpha^{\log_\alpha N} = \alpha^{\log_\alpha M + \log_\alpha N}$$

这告诉我们 $\log_\alpha MN = \log_\alpha M + \log_\alpha N$.

(2) 换底公式：由对数的定义，$\beta^{\log_\beta x} = x$, $\beta^{\log_\beta \alpha} = \alpha$，那么

$$x = \left(\beta^{\log_\beta \alpha}\right)^{\frac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}} = \alpha^{\frac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}}$$

这告诉我们 $\log_\alpha x = \dfrac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}$.

(5) 链式：令

$$\log_\alpha \beta = \frac{\ln \beta}{\ln \alpha},\ \log_\beta \gamma = \frac{\ln \gamma}{\ln \beta}$$

所以

$$\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \gamma = \frac{\ln \beta}{\ln \alpha} \cdot \frac{\ln \gamma}{\ln \beta} = \frac{\ln \gamma}{\ln \alpha} = \log_\alpha \gamma$$

注 不难发现，在应用换底公式之后做证明变得很轻松. 可以说，如果把“重要性质”比作一个轮子，那么换底公式就是一辆车：用轮子也能向前走 (用重要性质也能写证明)，但远不及一辆车快速与舒适 (引入换底公式会十分便捷).

注 换底公式的本质是找到了一个“工具对数”作为中间量化简计算. 类似于在应用题中我们倾向于在过程中利用符号 π 来计算、只在最后一步将 π 化为小数.

注 由加减法运算法则，可以一窥常用对数的作用. 例如，

$$\lg 120 = \lg 1.2 \times 10^2 = \lg 1.2 + 2$$

$$\lg 0.012 = \lg 1.2 \times 10^{-2} = \lg 1.2 - 2$$

若要计算 $\lg 120$ 与 $\lg 0.012$，只需要知道 $\lg 1.2$ 的值. 于是 $\lg N$ 可以被用在换底公式中作为“工具对数”来近似计算.

例题 1.1.2 (1) 计算：$5^{\lg 20}\times 0.5^{\lg 0.5}=$________；$6^{\lg 40}\times 5^{\lg 36}=$________.

(2) 已知 $\log_{18}9=a$，$18^b=5$，则 $\log_{36}45=$________. (用 a,b 表示)

(3) 设 a,b,c 都是正数，且 $3^a=4^b=6^c$，则 a,b,c 的关系为________.

解 (1)

$$5^{\lg 20}\times 0.5^{\lg 0.5}=5^{\lg 20}\times 2^{\lg 2}=5\times 5^{\lg 2}\times 2^{\lg 2}=10$$

$$6^{\lg 40}\times 5^{\lg 36}=10^{\lg 6\cdot\lg 40}\times 10^{\lg 5\cdot\lg 36}=10^{\lg 6\cdot(\lg 40+\lg 25)}=216$$

(2) 由所给条件，令 $a=\frac{\ln 9}{\ln 18}=\frac{2\ln 3}{\ln 2+2\ln 3}$，$b=\frac{\ln 5}{\ln 18}=\frac{\ln 5}{\ln 2+2\ln 3}$，则

$$\ln 2=\frac{2-2a}{a}\ln 3,\ \ln 5=\frac{2b}{a}\ln 3$$

于是

$$\log_{36}45=\frac{\ln 45}{\ln 36}=\frac{\ln 5+2\ln 3}{2\ln 2+2\ln 3}=\frac{\frac{2b}{a}+2}{\frac{4-4a}{a}+2}=\frac{a+b}{2-a}$$

(3) 记 $3^a=4^b=6^c=t$，则

$$a=\log_3 t,\ b=\log_4 t,\ c=\log_6 t$$

于是

$$\frac{1}{a}=\log_t 3,\ \frac{1}{b}=\log_t 4,\ \frac{1}{c}=\log_t 6$$

故

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\log_t 9+\log_t 4=\log_t 36=\frac{2}{c}$$

1.2 求和符号

为了简明地表示一连串式子求和，定义如下求和符号：

定义 1.1 (求和符号)

对于整数 $m\le n$：

$$\sum_{i=m}^{n}x_i:=x_m+x_{m+1}+\cdots+x_n$$

更一般地，设性质 $P(x)$，

$$\sum_{P(x)}x:=\text{所有满足性质 }P(x)\text{ 的 }x\text{ 相加}$$

♣

给出几个求和符号的例子：

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=1^2+2^2+\cdots+n^2$$

$$\sum_{j=8}^{10}(4j-3)=(4\times 8-3)+(4\times 9-3)+(4\times 10-3)$$

$$\sum_{i=1}^{n}1=1+1+\cdots+1\ (\text{共 } n \text{ 个 } 1)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}a_ib_j\right)=\sum_{i=1}^{3}(a_ib_1+a_ib_2+a_ib_3)=a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2+a_3b_3$$

$$\sum_{1\le i<j\le 4}a_ia_j=a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4$$

$$\sum_{x\text{ 是素数且 }0<x\le 10}x=2+3+5+7$$

例题 1.2.1 证明下列求和恒等式:

(1)(后半部分为双重求和符号的性质)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_jb_i$$

(2)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_1$$

(3)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{n+i}-a_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n-1+i}(a_{j+1}-a_j)$$

(4)

$$\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}a_ia_j\right)=\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}a_ia_j\right)$$

(5)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j$$

(6)

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$$

注 双重求和符号可以理解为有先后顺序的求和，即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\right)$$

证明 (1) 前半部分:

$$LHS=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\sum_{j=1}^{n}b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j$$

后半部分：与上式同理可得

$$LHS=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_jb_i$$

故有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_jb_i$$

(2)

$$LHS=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1$$

(3) 对于每个 $i=1,\cdots,n$，类似于 (2) 的结论，有

$$a_{n+i}-a_i=\sum_{j=i}^{n-1+i}(a_{j+1}-a_j)$$

对 i 进行累加求和，即得

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{n+i}-a_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n-1+i}(a_{j+1}-a_j)$$

(4) 对于每个 $i=1,\cdots,n-1$，

$$\sum_{i<j\le n}a_ia_j=\sum_{j=i+1}^{n}a_ia_j$$

对 i 累加求和，即得

$$\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}a_ia_j\right)$$

由此，前半部分证毕. 类似地，对每个 $j=2,\cdots,n$，

$$\sum_{1\le i<j}a_ia_j=\sum_{i=1}^{j-1}a_ia_j$$

对 j 累加求和，即得

$$\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j=\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}a_ia_j\right)$$

后半部分即证毕.

(5) 由 (1) 中结论，

$$LHS=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j=\sum_{i=1}^{n}(a_ia_1+a_ia_2+\cdots+a_ia_n)$$

对于每个 $i=1,\cdots,n$，将 a_ia_i、a_ia_j $(j<i)$ 和 a_ia_j $(j>i)$ 分开求和 (注意，第二种不存在 $i=1$ 的情况，第三种不存在 $i=n$ 的情况，否则会与第一种的计数重复)，则有

$$LHS=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}a_ia_j\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}a_ia_j\right)$$

由 (4) 中结论，即

$$LHS=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j$$

(6) 对每个满足 $1\le i<j\le n$ 的 (i,j)，有

$$(a_i-a_j)^2=a_i^2+a_j^2-2a_ia_j$$

对所有这样的 (i,j) 累加，则

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=\sum_{1\le i<j\le n}(a_i^2+a_j^2-2a_ia_j)=\sum_{1\le i<j\le n}(a_i^2+a_j^2)-2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j \tag{1.1}$$

由 (5) 中结论，

$$2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j=\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2-\sum_{i=1}^n a_i^2 \tag{1.2}$$

将式1.2代入式1.1，得

$$LHS=\sum_{1\le i<j\le n}(a_i^2+a_j^2)+\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \tag{1.3}$$

对每个 $i=1,\cdots,n-1$，有

$$\sum_{i<j\le n}(a_i^2+a_j^2)=\sum_{i<j\le n}a_i^2+\sum_{i<j\le n}a_j^2=(n-i)a_i^2+a_{i+1}^2+\cdots+a_n^2$$

对 i 累加求和. 注意到，对于每个 a_k，均在 $i=k$ 时出现 $n-k$ 次、在 $i=1,\cdots,k-1$ 时分别出现 1 次，即共出现 $n-1$ 次，故

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i^2+a_j^2)=\sum_{i=1}^n\left((n-1)a_i^2\right)=(n-1)\sum_{i=1}^n a_i^2 \tag{1.4}$$

将式1.4带入式1.3，可得

$$LHS=n\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$$

第 2 章 复数与多项式

内容提要

- 复数的概念与运算
- 多项式的概念与运算
- 多项式的根与 Vieta 定理

2.1 复数初步[1]

在介绍复数之前，我们先来看看这个例子：

题目：解方程 $x^3-15x-4=0$

解答：设 $x=u+v$ ，带入原式可得 $(u+v)^3-15(u+v)-4=0$.

化简得 $u^3+v^3-4+(u+v)(3uv-15)=0$.

注意到，满足 $\begin{cases}u^3+v^3=4\\ uv=5\end{cases}$ 的 u,v 一定是满足要求的.

由上式可以得到 $\begin{cases}u^3=2+\sqrt{-121}\\ v^3=2-\sqrt{-121}\end{cases}$,

这意味着 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 是方程的一个根.

图 2.1: 解一个三次方程

这种做法看起来“大逆不道”，它居然敢对一个负数开根！但是如果仔细算一算 (暂时承认现有的运算律仍存在)，由于

$$(2+\sqrt{-1})^3=8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1}=2+11\sqrt{-1}=2+\sqrt{-121}$$

$$(2-\sqrt{-1})^3=2-\sqrt{-121}$$

可以得到 $x=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4$. 很明显 $x=4$ 的确是原方程的一个根.

就像刚才的例子一样，人们发现有些时候如果允许对负数开根并保持现有运算律不变，最终仍然可以得到正确的计算结果. 于是大家开始猜测：这种特殊的由负数开根产生的数真的存在吗？有什么性质？有什么作用？经过长年的猜想与论证，最终构成了数学中的“复数”体系.

[1]在之后还会对复数的不同表示形式及应用进行更加深入的研究.

定义 2.1 (复数，复数间的关系与运算)

- 记 $z = a + b\,\mathrm{i}\ (a, b \in \mathbb{R})$ 为一个**复数** (complex number)，其中 $\mathrm{i}^2 = -1$. 定义复数 z 的**实部**为 a，**虚部**为 b，分别记作
$$\mathrm{Re}(z) := a, \quad \mathrm{Im}(z) := b$$
- 实部为 0、虚部不为 0 的复数称为纯虚数；虚部为 0 的复数称为实数.
- 两个复数相等当且仅当其实部、虚部分别相等，即
$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2),\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$$
- 由所有复数构成的集合记为 $\mathbb{C}$.$\mathbb{C}$ 上的加法与乘法定义如下：
$$(a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i}$$
$$(a + b\,\mathrm{i})(c + d\,\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i}$$

♣

注 复数之间无法比较大小，只能比较是否相等.

命题 2.1 (复数运算的性质)

(1) 交换性质
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha\beta = \beta\alpha$$

(2) 结合性质
$$\forall \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}, (\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda), (\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda)$$

(3) 单位元
$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda + 0 = \lambda, 1\lambda = \lambda$$

(4) 加法逆元
$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \exists! \beta \in \mathbb{C}, \alpha + \beta = 0$$

(5) 乘法逆元
$$\forall \alpha \in \mathbb{C}(\alpha \neq 0), \exists! \beta \in \mathbb{C}, \alpha\beta = 1$$

(6) 分配性质
$$\forall \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$$

♠

证明 这里只选择部分性质证明：

(1) 加法交换性质：设 $\alpha = a + b\,\mathrm{i}, \beta = c + d\,\mathrm{i}\ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$，则
$$\alpha + \beta = (a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i} = (c + a) + (d + b)\,\mathrm{i}$$
$$\beta + \alpha = (c + d\,\mathrm{i}) + (a + b\,\mathrm{i}) = (c + a) + (d + b)$$

因此有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2) 乘法单位元：设 $\lambda = a + b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$，那么

$$1\lambda = (1 + 0\mathrm{i})(a + b\mathrm{i}) = a + b\mathrm{i} = \lambda$$

(3) 加法逆元：先证明存在. 设 $\alpha = a + b\mathrm{i}$，取 $\beta = (-a) + (-b)\mathrm{i}$，则 $\alpha + \beta = 0 + 0\mathrm{i} = 0$；再证明唯一. 假设 $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ 均为 α 的加法逆元，那么

$$\beta_1 = \beta_1 + 0 = \beta_1 + \alpha + \beta_2 = 0 + \beta_2 = \beta_2$$

这与假设矛盾，则 α 的加法逆元是唯一的.

由此可以引出**域**的正式定义：

定义 2.2 (域)

域是一个集合 $\mathbb{F}$, 它带有加法与乘法两种运算 (分别在加法与乘法上封闭), 且这些运算满足命题2.1所示所有性质.

♣

注 最小的域是一个集合 $\{0, 1\}$，带有通常的加法与乘法运算，但规定 $1 + 1 = 0$.

容易验证，$\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 都是域.

总是用 β 表示 α 的逆元非常不自然，因此定义出加/乘法逆元的表示与减/除法.

定义 2.3 (加法逆元，减法，乘法逆元，除法)

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

- 令 $-\alpha$ 表示 α 的加法逆元，即 $-\alpha$ 是使得
$$\alpha + (-\alpha) = 0$$
成立的唯一复数.
- 对于 $\alpha \neq 0$，令 α^{-1} 表示 α 的乘法逆元，即 α^{-1} 是使得
$$\alpha(\alpha^{-1}) = 1$$
成立的唯一复数.
- 定义 $\mathbb{C}$ 上的**减法**：
$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$$
- 定义 $\mathbb{C}$ 上的**除法**：
$$\beta/\alpha = \beta(1/\alpha)$$

♣

2.2 多项式的概念与运算

定义 2.4 (多项式，多项式的次数)

- 形如

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \ (a_n \neq 0)$$

  的表达式称为关于 x 的一元 n 次**多项式** (polynomial).

- 当 $a_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \cdots, n)$ 时，称其为实系数多项式；当 $a_i \in \mathbb{C}\ (i = 1, \cdots, n)$ 时，称其为复系数多项式. 一般取 a_i 全为复数的情况来考虑.
- 值 n 称为多项式的**次数** (degree)，记作 $\deg f(x) = n$. 规定恒等于 0 的多项式的次数为 $-\infty$. ♣

定义 2.5 (多项式间的关系与运算)

设 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，$g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$. 不妨设 $m \leq n$，规定 $b_i = 0\ (k > m)$.

- $f(x) = g(x)$ 的充要条件是 $n = m$，$a_i = b_i$.
- 多项式的加法定义如下：

$$f(x) + g(x) := \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

- 多项式的乘法定义如下：

$$f(x) \cdot g(x) := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

♣

类比于整式的带余除法，多项式间也可以有带余除法.

定理 2.1 (多项式的带余除法)

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个已知的多项式，其中 $g(x)$ 不是零多项式，那么存在唯一的一对多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$，使得

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

其中 $\deg r < \deg g$ 或 $r(x) = 0$. 称 $q(x)$ 和 $r(x)$ 分别为 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的**商式**与**余式**. ♡

注 这个定理的证明需要用到数学归纳法，我们会在之后回顾该证明.

对于已知多项式的带余除法，常常利用“长除法”计算.

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & \quad\;\; x^2 + x + 5 \\
x^2 - x + 1 & \big) \overline{x^4 + 0x^3 + 5x^2 - 14x + 6} \\
 & x^4 - x^3 + x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad x^3 + 4x^2 - 14x \\
 & \quad x^3 - x^2 + x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 5x^2 - 15x + 6 \\
 & \qquad 5x^2 - 5x + 5 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -10x + 1
\end{array}
$$

图 2.2: 长除法举例

在这个例子中，$f(x) = x^4 + 5x^2 - 14x + 6$，$g(x) = x^2 - x + 1$，商式 $q(x) = x^2 + x + 5$，余式 $r(x) = -10x + 1$.

2.3 多项式的根与 Vieta 定理

定义 2.6 (多项式的根，因式)

设多项式 $f(x)$.

- 若常数 c 满足 $f(c) = 0$，则称其为 $f(x)$ 的**一个根** (或零点).
- 若多项式 $g(x)$ 满足存在另一个多项式 $q(x)$ 使得 $f(x) = g(x) \cdot q(x)$，则称其为 $f(x)$ 的**一个因式** (factor)，亦称 $g(x)$ **整除** $f(x)$.

♣

定理 2.2 (代数基本定理)

任何一个非零的一元 n 次复系数多项式，都正好有 n 个复数根.

♡

注 这个定理的证明一般会用到复分析的知识，这里不展开.

定理 2.3 (余数定理)

- 多项式 $f(x)$ 除以 $x - c$ 时所得余式等于 $f(c)$.
- 更一般地，$f(x)$ 除以 $ax - b$ 时所得余式等于 $f(b/a)$.

♡

证明 (1) 用 $f(x)$ 除以 $x - c$，记 $f(x) = (x - c)q(x) + r(x)$. 由定理2.1可得 $\deg r(x) = 0$，即 $r(x)$ 是一个常数.

令 $x = c$，则 $f(c) = r(x)$，即余式 $r(x)$ 的值为 $f(c)$.

(2) 证明同上，请读者自行验证.

定理 2.4 (因式定理)

对于一个关于 x 的 n 次多项式

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

若存在有理根 $c=\dfrac{p}{q}$，则分子 p 是常数项 a_0 的因数，分母 q 是首项系数 a_n 的因数.

证明 由定理2.3可得，$f(x)$ 有根 $\dfrac{p}{q}$ 等价于 $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$，即 $a_n\left(\dfrac{p}{q}\right)^n+\cdots+a_1\dfrac{p}{q}+a_0=0$，变形得

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$$

两边同时对 q 取模，可得

$$a_np^n\equiv 0 \mod q$$

由于 $(p,q)=1$，则 $(p^n,q)=1$，于是 $a_n\equiv 0 \mod q$，即 q 是 a_n 的因数. 同理可得 p 是 a_0 的因数.

例题 2.3.1 (1) 分解因式：$2x^4-7x^3+4x^2+2x-1=$________；$x^3-9x^2y+26xy^2-24y^3=$________.

(2) 多项式 $f(x)$ 除以 $2x-3$ 的余数为 7，除以 $3x+1$ 的余数为 -4，则 $f(x)$ 除以 $(2x-3)(3x+1)$ 的余式为________.

(3) 多项式 $f(x)=x^{10}$ 除以 $(x-1)^2$ 所得的余式为________.

解 (1) 第一个：记 $f(x)=2x^4-7x^3+4x^2+2x-1$. 注意到，$f(1)=0$, $f(-1/2)=0$，于是 $f(x)$ 必有因式 $(x-1),(2x+1)$.

设 $f(x)=(x-1)(2x+1)\cdot q(x)$，由长除法可得 $q(x)=x^2-3x+1$，故

$$f(x)=(x-1)(2x+1)(x^2-3x+1)$$

第二个：记 $f(x)=x^3-9yx^2+26y^2x-24y^3$ 为关于 x 的多项式. 注意到，$f(2y)=0$，故 $f(x)$ 必有因式 $(x-2y)$. 同上可得

$$f(x)=(x-2y)(x^2-7xy+12y^2)=(x-2y)(x-3y)(x-4y)$$

(2) 记 $f(x)=(2x-3)(3x+1)\cdot q(x)+r(x)$. 由定理2.1可得 $\deg r(x)\leq 1$，记 $r(x)=ax+b$.

由余数定理可得 $f(3/2)=7,f(-1/3)=-4$. 带入上式，有

$$\frac{3}{2}a+b=7,\quad -\frac{1}{3}a+b=-4$$

解得 $a=6,n=-2$. 则所求余式 $r(x)=6x-2$.

(3) 记 $x^{10}=(x-1)^2\cdot q(x)+r(x)$. 由定理2.1可得 $\deg r(x)\leq 1$，记 $r(x)=ax+b$，即

$$x^{10}=(x-1)^2\cdot q(x)+ax+b$$

由余数定理可得 $f(1)=0$，即得 $a+b=1$. 带入上式，有

$$x^{10}=(x-1)^2\cdot q(x)+ax-a+1$$

作代数变形，得

$$x^{10}-1=(x-1)[q(x)\cdot(x-1)+a]$$

$$(x-1)(x^9+x^8+\cdots+x+1)=(x-1)[q(x)\cdot(x-1)+a]$$

于是 $x^9+x^8+\cdots+x+1=q(x)\cdot(x-1)+a$. 在此式中令 $x=1$，可得 $a=10$.

综上，所求余式为 $r(x)=10x-9$.

关于一元二次方程的 Vieta 定理我们在初中已经学习过，现在介绍其高阶推广版本.

定理 2.5 (Vieta 定理)

设多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 有根 $x_1,\cdots,x_n$. 则有

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \quad\cdots\cdots \\ \displaystyle\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}(x_{i_1}\cdots x_{i_k})=(-1)^k\dfrac{a_{n-k}}{a_n} \\ \quad\cdots\cdots \\ x_1\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

注 Vieta 定理适用于 $f(x)$ 为任意系数多项式的情况，因此就算某些根是复数，该定理也成立.

证明 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，将其展开并由多项式相等的定义可得.

例题 2.3.2 (1) 三个不同的实数 x,y,z 满足 $x^3-3x^2=y^3-3y^2=z^3-3z^2$，则 $x+y+z=$________.

(2) 已知 x_1,x_2,x_3,x_4 是方程 $x^4+kx^2+90x-2009=0$ 的四个根，且 $x_1x_2=49$，求 k 的值.

(3) 若实数 $x_1,\cdots,x_9$ 同时满足

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{11}+\dfrac{x_2}{12}+\cdots+\dfrac{x_9}{19}=1 \\ \dfrac{x_1}{21}+\dfrac{x_2}{22}+\cdots+\dfrac{x_9}{29}=1 \\ \quad\cdots\cdots \\ \dfrac{x_1}{91}+\dfrac{x_2}{92}+\cdots+\dfrac{x_9}{99}=1 \end{cases}$$

求 $x_1+\cdots+x_9$ 的值.

解 (1) 记 $x^3-3x^2=y^3-3y^2=z^3-3z^2=k$，则 x,y,z 是关于 t 的方程 $t^3-3t^2-k=0$ 的三个不同根. 由 Vieta 定理，$x+y+z=3$.

(2) 由 Vieta 定理，

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0,\quad x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=90,\quad x_1x_2x_3x_4=-2009$$

由于 $x_1x_2=49$，有 $x_3x_4=-41$，带入前两式可得

$$(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=0,\quad -41(x_1+x_2)+49(x_3+x_4)=-90$$

解得 $x_1+x_2=1,\ x_3+x_4=-1$. 由 Vieta 定理,

$$k=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=8+(x_1+x_2)(x_3+x_4)=7$$

(3) 注意到, $1,\cdots,9$ 是关于 t 的方程

$$\frac{x_1}{10t+1}+\frac{x_2}{10t+2}+\cdots+\frac{x_9}{10t+9}=1$$

的 9 个不同根. 将上式整理为

$$10^9\cdot t^9+(1+\cdots+9-x_1-\cdots-x_9)\cdot 10^8\cdot t^8+\cdots=0$$

由 Vieta 定理可得

$$1+\cdots+9=\frac{(x_1+\cdots+x_9-1-\cdots-9)\cdot 10^8}{10^9}$$

化简得 $x_1+\cdots+x_9=495$.

第二部分

函数与数列

第 3 章 函数

3.1 映射与函数

3.1.1 映射与函数的概念

定义 3.1 (映射)

- 设 A 和 B 为两个集合，若对 A 中每个元素 x，都存在 B 中唯一的元素 y 与之对应，则称此对应关系为一个**映射** (map)，记作

$$f : A \to B, \ \ x \mapsto y$$

- x 在 B 中的对应元素 y 称为 x 在 f 下的**象** (image)，x 称为 y 在 f 下的**原象** (preimage)，记作

$$f(x) = y, \ x \in A$$

- 集合 A 称作映射 f 的**定义域** (domain)，记作 D_f；集合 B 称为映射 f 的**陪域** (codomain)；A 中所有元素在 f 下的象组成的集合称为 f 的**值域** (range)，记作 R_f 或 $f(A)$.
- 两个映射相等，当且仅当它们的定义域、对应关系、值域相同.

♣

定义域、陪域与值域的关系如下：

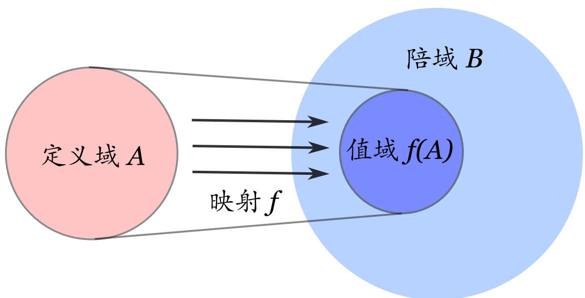


图 3.1: 定义域、陪域、值域的关系

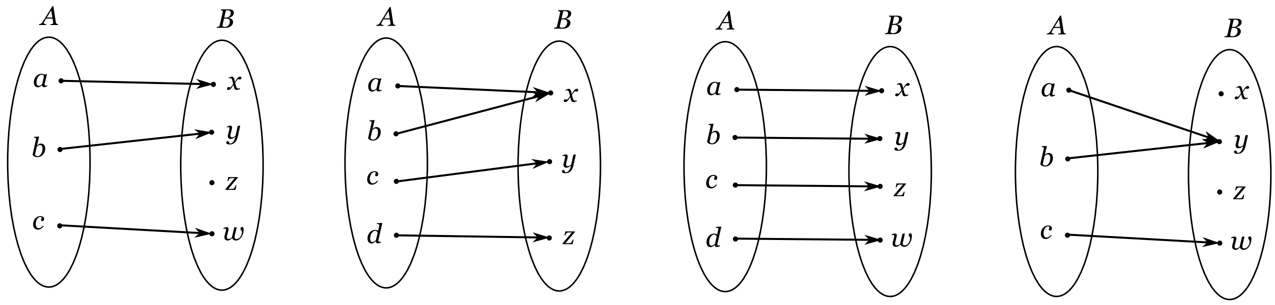
定义 3.2 (特殊的映射)

设映射 $f : A \to B$.

- 若 A 中的每一个 x 的唯一对应 B 中的一个 $f(x)$，则称 f 是**单射** (injection).
- 若对于 B 中的每一个元素 y，总能找到 A 中的一个 x 使得 $f(x) = y$，则称 f 是**满射** (surjection).
- 若 f 既是单射，又是满射，则称 f 是**双射** (bijection).

♣

单射、满射、双射举例如下：



[i] 单射但非满射　[ii] 满射但非单射　[iii] 双射(单射且满射)　[iv] 既非单射也非满射

图 3.2: 单射、满射、双射举例

利用映射，可以确定集合间元素个数的关系 (下列命题其实是另一种理解映射的方法)：

命题 3.1 (集合的对应原理)

设 A, B 为有限集，f 为从 A 到 B 的一个映射.

- 如果 f 为单射，则 $|A| \leq |B|$.
- 如果 f 为满射，则 $|A| \geq |B|$.
- 如果 f 为双射，则 $|A| = |B|$.

3.1.2 映射与函数的运算

先介绍一种由定义自然产生的运算：

定义 3.3 (逆映射与反函数)

设映射 $f: A \to B$，如果 f 是一个双射，则对任意的 $y \in B$，都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $y = f(x)$. 这就产生了一个从 B 到 A 的映射，称为 f 的**逆映射** (inverse mapping)，记作

$$f^{-1}: B \to A$$

对于这样的逆映射，它的定义域是 B，值域是 A.

同样地，设函数 $f: A \mapsto B$，如果 f 是一个双射，则 f 的逆映射 f^{-1} 称为函数 f 的**反函数** (inverse function)，其定义域是 B，值域是 A.

不难发现，如果两个函数互为反函数，它们的图像关于 $y = x$ 对称.

函数间加减法的定义很符合直觉.

定义 3.4 (函数的加减法)

对于 $f, g: A \to B$，对所有 $x \in A$，规定函数的加减法 $f \pm g$ 满足

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

函数 $f \pm g$ 的定义域为 A，陪域不定.

那么函数之间的乘法该是如何的？实际上，如果单纯地将 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值相乘，得到的新函数很难

研究. 我们更倾向于研究一种特殊的“乘法”:

定义 3.5 (映射与函数的复合)

设映射 $f: A \to B$，$g: B \to C$，则它们的**复合映射** (composite mapping)$gf: A \to C$ 定义为

$$(gf)(x) = g(f(x))\ (x \in A)$$

注意复合运算有先后顺序. 容易说明映射 gf 的定义域为 A，值域为 C.

当集合 A, B, C 均为数集时，可以得到类似的复合函数定义.

注 为了强调复合运算，gf 也可记作 $g \circ f$.

3.2 函数的性质

3.2.1 单调性

先介绍单调性的概念:

定义 3.6 (函数的单调性)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$.

若对任意 $x_1, x_2 \in I$，且 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ **单调递增** (monotonically increasing)，也称 $f(x)$ 为增函数.

反之，若对任意 $x_1, x_2 \in I$，且 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ **单调递减** (monotonically decreasing)，也称 $f(x)$ 为减函数.

如果函数 $f(x)$ 在某个区间 I 上是增函数或减函数，那么就说函数 $f(x)$ 在这个区间上具有**单调性** (monotonicity). 区间 I 叫做 $f(x)$ 的单调区间.

注 有些时候，将定义中的条件分别改为 $f(x_1) \le f(x_2)$、$f(x_1) \ge f(x_2)$ 的函数，也被称为不减函数、不增函数.

注意 要注意描述单调区间的语言：例如，

函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在 $(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$ 上单调递减. 它有两个单调区间，而不能看做一整个，这是因为存在例如 $f(-1) < f(1)$ 的情况；

函数

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$上单调递增. 它只有一个单调区间.

注意到，如果一个函数在某个区间上连续且单调，它在这个区间上一定是个单射.(注：所有初等函数都是连续的)

命题 3.2 (函数单调性的变化规律)

设函数 $f(x), g(x)$，为了方便计算，假定它们的定义域相同、单调区间相同.

(1) 函数的加法 $f(x)+g(x)$：增函数 + 增函数 $\Rightarrow$ 增函数；减函数 + 减函数 $\Rightarrow$ 减函数.

(2) 函数的减法 $f(x)-g(x)$：增函数 − 减函数 $\Rightarrow$ 增函数；减函数 − 增函数 $\Rightarrow$ 减函数.

(3) 函数的乘法、除法、乘方、开方：具体情况分析.

(4) 函数的复合 $f(x)\circ g(x)$：增函数 $\circ$ 增函数 $\Rightarrow$ 增函数；增函数 $\circ$ 减函数 $\Rightarrow$ 减函数；减函数 $\circ$ 增函数 $\Rightarrow$ 减函数；减函数 $\circ$ 减函数 $\Rightarrow$ 增函数.

证明 XXX

定理 3.1 (区间根定理)

假设函数 $f(x)$ 满足以下条件：

1. 在区间 $a \le x \le b$ 上连续；
2. $f(a)\cdot f(b) < 0$.

则在区间 $a < x < b$ 上必定存在至少一个 c，使得 $f(c)=0$.

或者说，当一个函数在 $x=a$ 时有 $f(x)<0$ 且在 $x=b$ 时有 $f(x)>0$，那么它必然有至少一个零点 c，其中 $a<c<b$. 反之亦然.

3.2.2 奇偶性与对称性

先介绍奇偶性的概念：

定义 3.7 (奇偶性)

设函数 $f(x)$，其定义域 D 关于原点对称.

若对任意 $x\in D$，$f(x)=-f(-x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数** (odd function).

反之，若对任意 $x\in D$，$f(x)=f(-x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数** (even function).

显然，奇函数的图像沿原点中心对称，偶函数的图像沿 y 轴轴对称.

命题 3.3 (函数奇偶性的变化规律)

设函数 $f(x), g(x)$，为了方便计算，假定它们的定义域相同.

(1) 同奇偶性函数的加减法 $f(x)\pm g(x)$：奇函数 $\pm$ 奇函数 $\Rightarrow$ 奇函数；偶函数 $\pm$ 偶函数 $\Rightarrow$ 偶函数.

(2) 不同奇偶性函数的加减法：具体情况分析.

(3) 函数的乘法 $f(x)\cdot g(x)$：奇函数 $\cdot$ 奇函数 $\Rightarrow$ 偶函数；偶函数 $\cdot$ 偶函数 $\Rightarrow$ 偶函数；奇函数 $\cdot$ 偶函数 $\Rightarrow$ 奇函数.

(4) 函数的除法：$\frac{1}{\text{奇函数}} \Rightarrow$ 奇函数；$\frac{1}{\text{偶函数}} \Rightarrow$ 偶函数. 可以通过函数的乘法推广到任意两函数相除.

(5) 函数的复合 $f(x)\circ g(x)$：奇函数 $\circ$ 奇函数 $\Rightarrow$ 奇函数；奇函数 $\circ$ 偶函数 $\Rightarrow$ 偶函数；偶函数 $\circ$ 奇函数 $\Rightarrow$ 偶函数；偶函数 $\circ$ 偶函数 $\Rightarrow$ 偶函数.

注 如果把复合看做乘法，那么可以把“增减”看做“正负”，“奇偶”看做“奇偶”

证明 XXX

对称性其实就是奇偶性在部分区间上的推广. 因此，它在定义域上比较自由.

定义 3.8 (对称性)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$.

类似于偶函数，函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ **轴对称**等价于

$$\forall x \in I, f(a+x) = f(a-x)$$

类似于奇函数，函数 $f(x)$ 的图像关于点 (a, b) **中心对称**等价于

$$\forall x \in I, f(a+x) + f(a-x) = 2b$$

♣

注 轴对称的定义等价于

$$\forall x \in I, f(x) = f(2a-x)$$

中心对称的定义等价于

$$\forall x \in I, f(x) = 2b - f(2a-x)$$

命题 3.4 (函数的对称变换)

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$. 假设其定义域满足下方自然要求.

(1)$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称，等价于

$$f(a+x) = g(a-x) \iff f(x) = g(2a-x)$$

(2)$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于直线 $y = b$ 对称，等价于

$$b + f(x) = b - g(x) \iff f(x) = 2b - g(x)$$

(3)$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于点 (a, b) 对称，等价于

$$b + f(a+x) = b - g(a-x) \iff f(x) = 2b - g(2a-x)$$

♠

3.2.3 周期性

定义 3.9 (周期性)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

当 $f(x)$ 满足

$$\forall x \in D, \exists T \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+T)$$

称这样的 T 为函数 $f(x)$ 的**周期** (period)，称 $f(x)$ 为**周期函数** (periodic function). 当 $f(x)$ 有一个最小的正数 T 作为周期，这样的 T 称作最小正周期.

♣

注 一个周期函数不一定有最小正周期，例如函数 $f(x) = 1$.

注 当一个函数 $f(x)$ 同时有周期 T_1, T_2，则 $aT_1 + bT_2 (a, b \in \mathbb{Z})$ 也为它的周期.

3.3 常见初等函数

初等函数，是指用基本初等函数进行有限次加减乘除、乘方、开方、复合操作后得到的函数.

在中学阶段可以遇见的基本初等函数，大致可以分为以下几类：常值函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、反三角函数. 对于这些函数的概念、图像与性质，我们逐一介绍.(注：三角函数与反三角函数在下一章介绍)

3.3.1 基本初等函数

定义 3.10 (常值函数)

形如

$$f(x) = C \ (C \in \mathbb{R}, C\text{是常数})$$

的函数称为**常值函数** (constant function). 它的定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $\{C\}$. ♣

定义 3.11 (幂函数)

形如

$$f(x) = x^{\alpha} \ (\alpha\text{是常数})$$

的函数称为**幂函数** (power function). ♣

注 请注意，当 $\alpha = 0$ 时，$f(x) = x^0$ 并不是常值函数，因为该函数的定义域不包括 0.

幂函数的性质不过多介绍. 只需知道例如 $f(x) = x^3$ 或 $f(x) = \sqrt[4]{x}$ 的函数都是幂函数.

定义 3.12 (指数函数)

形如

$$f(x) = a^x,\ a > 0, a \neq 1$$

的函数称为**指数函数** (exponential function). ♣

命题 3.5 (指数函数的性质)

指数函数 $f(x) = a^x$ 具有以下性质：

- 定义域：$\mathbb{R}$
- 值域：$\mathbb{R}^+$
- 单调性：当 $0 < a < 1$ 时，为减函数；当 $a > 1$ 时，为增函数
- 图像：恒过定点 $(0, 1)$

♠

定义 3.13 (对数函数)

形如

$$f(x) = \log_a x,\ a > 0, a \neq 1$$

的函数称为**对数函数** (logarithmic function). 它的定义域为 $\mathbb{R}^+$，值域为 $\mathbb{R}$ ♣

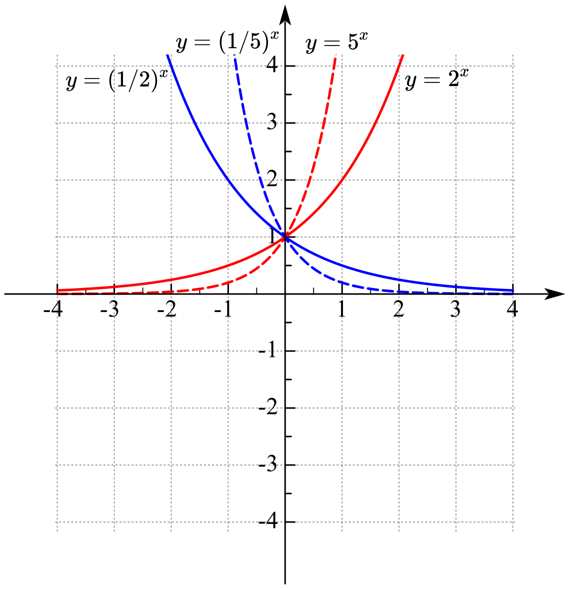


图 3.3: 指数函数的图像

命题 3.6 (对数函数的性质)

对数函数 $f(x)=\log_a x$ 具有以下性质：

- 定义域：$\mathbb{R}^+$
- 值域：$\mathbb{R}$
- 单调性：当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数
- 图像：恒过定点 $(1,0)$

实际上，我们发现对数函数 $f(x)=\log_a x$ 与指数函数 $f=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 互为反函数. 它们的图像关于 $y=x$ 对称.

3.3.2 对勾函数与飘带函数

有两类特殊的初等函数，在研究最值问题时很常见.

问题 3.1 设函数

$$f(x)=mx+\frac{n}{x}\ (m,n>0)$$

请指出它的定义域、值域并作出示意图.

解 XXX

还有一种类似于对勾函数，但没什么研究价值的函数. 我们可以形象地称之为“垃圾函数”，虽然大多数人都会叫它“飘带函数”.

问题 3.2 设函数

$$f(x)=mx-\frac{n}{x}\ (m,n>0)$$

请指出它的定义域、值域并作出示意图.

解 XXX

3.4 函数图像的变换

命题 3.7 (绝对值对函数图像的影响)

设函数 $f(x)$，以下解析式不一定是函数.

(1) 当 $y=f(|x|)$，即将 $f(x)$ 的图像在 y 轴右侧部分沿 y 轴对称，作为在 y 轴左侧的图像.

(2) 当 $y=|f(x)|$，即将 $f(x)$ 的图像在 x 轴下方部分沿 x 轴翻折.

(3) 当 $|y|=f(x)$，即将 $f(x)$ 的图像在 x 轴上方部分沿 x 轴对称，作为在 x 轴下方的图像.

作为练习，接着探究以下更加复杂的解析式.

(4) 当 $|y|=|f(x)|$，即将 (2) 中得到的图像按 (3) 的法则变换.

(5) 当 $y=|f(|x|)|$，即将 (2) 中得到的图像按 (1) 的法则变换.

(6) 当 $|y|=|f(|x|)|$，即将 (5) 中得到图像按 (3) 的法则变换.

命题 3.8 (函数图像的拉伸)

设函数 $f(x)$.

(1) 当 $y=af(x)$，即将 $f(x)$ 的图像沿竖直方向拉伸 a 倍（当 $a\in(0,1)$ 时，则为向小拉伸）.

(2) 当 $y=f(bx)$，即将 $f(x)$ 的图像沿水平方向拉伸 b 倍.

问题 3.3 有了上方的命题，我们可以对于函数图像拉伸进行一些思考：

假设在函数 $f(x)$ 的图像上存在 n $(n\geq 2)$ 个点.

(1) 经过其中两个点的一条直线，它的斜率在拉伸前后如何变化?

(2) 连接其中 m 个点 $(m\leq n)$ 所构成的平面图形，它的面积在拉伸前后如何变化?

(3) 将其中 m 个点 $(m\leq n)$ 两两之间连接，这样一些线段的长度所构成的一组比值在拉伸前后如何变化?

命题 3.9 (函数的平移变换)

设函数 $f(x)$，变换后的函数为 $g(x)$. 假设其定义域满足下方自然要求.

(1)$f(x)$ 的图像向上或向下平移 m 个单位，等价于

$$g(x)=f(x)+m \text{ 或 } g(x)=f(x)-m$$

(2)$f(x)$ 的图像向左或向右平移 n 个单位，等价于

$$g(x)=f(x+n) \text{ 或 } g(x)=f(x-n)$$

证明 XXX

命题 3.10 (函数图像的轴对称变换)

设函数 $f(x), g(x)$，直线 $l: Ax+By+C=0$，记 $y=f(x)$

当 $f(x), g(x)$ 的图像关于该直线对称时，满足

$$y=g\left(x-\frac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\right)+\frac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}$$

化简一下，即

$$f\left(x+\frac{A(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\right)-\frac{B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}=g\left(x-\frac{A(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\right)+\frac{B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}$$

证明 XXX

上面的式子非常不对称. 因而我们来讨论一下单个函数关于自己对称的情况 (即某函数有一个对称轴).

命题 3.11 (图像有轴对称性的函数)

设函数 $f(x)$，它的图像的对称轴为直线 $l: Ax+By+C=0$.

那么这个函数满足

$$f(x)=f\left(x-\frac{2A(Ax+Bf(x)+C)}{A^2+B^2}\right)+\frac{2B(Ax+Bf(x)+C)}{A^2+B^2}$$

化简之后，即

$$f\left(x+\frac{A(Ax+Bf(x)+C)}{A^2+B^2}\right)-\frac{B(Ax+Bf(x)+C)}{A^2+B^2}=f\left(x-\frac{A(Ax+Bf(x)+C)}{A^2+B^2}\right)+\frac{B(Ax+Bf(x)+C)}{A^2+B^2}$$

3.5 函数迭代与函数方程

3.5.1 函数的迭代与不动点

函数迭代的概念，函数不动点的概念

3.5.2 简单的函数方程

函数方程问题，Cauchy 方程

第 4 章 三角函数

4.1 三角函数的概念

在研究更高深的三角函数之前，要对初中所学过的“角”的概念进行推广.

定义 4.1 (任意角与弧度制)

角的一边从 x 轴正方向开始旋转（以逆时针为正方向），最终旋转过的角度即为该角的角度. 这样，我们就把角的概念推广到了**任意角** (any angle).

像这样旋转生成的角上，某一点旋转产生的弧长 l 与到原点距离 r 之比，定义为该角的**弧度** (radian). 弧度的单位为 rad(一般省略). 由于这样做出的比值是用 $k\pi$ 表示的，我们可以用一个比较规整的数值表示角度. 容易发现，π 等价于 $180°$.

♣

利用任意角，可以得到更加广阔的三角函数定义：

定义 4.2 (三角函数)

设平面直角坐标系中的单位圆 $\odot O$，记角的终边与该单位圆的交点为 $P(x, y)$，记 $OP = r$.

分别定义

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \tan\alpha = \frac{y}{x} \quad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$

其中，函数

$$f(x) = \sin x \qquad f(x) = \cos x \qquad f(x) = \tan x \qquad f(x) = \cot x$$

分别称为**正弦函数** (sine function)，**余弦函数** (cosine function)，**正切函数** (tangent function)，**余切函数** (cotangent function). 这些函数统称为**三角函数** (trigonometric function).

♣

注 正切与余切函数满足：$\tan x \cdot \cot x = 1$.

注 类似于正 (余) 弦、正 (余) 切函数，正割函数 $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ 与余割 $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ 函数也有定义，但并不常用.

注 不同角的终边可以相同. 终边相同的角的角度不一定相同，但它们的三角函数值一定相同.

4.1.1 三角函数的性质

由于其定义的特殊性，三角函数会有一些独特的性质：

命题 4.1 (三角函数诱导公式)

通过上述三角函数的定义，我们不难发现不同角的三角函数有时会有一些关系，这也是三角函数部分性质的体现.

(1) 关于 2π 的周期性

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad \tan(\alpha + 2k\pi) = \tan\alpha \quad \cot(\alpha + 2k\pi) = \cot\alpha$$

(2) 关于 π 的性质

$$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha \quad \cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha \quad \tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha \quad \cot(\alpha+\pi)=\cot\alpha$$

(3) 奇偶性

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha \quad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

(4) 在单位圆中角的终边关于 y 轴的对称性

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \quad \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

(5) 在单位圆中角的终边关于直线 $y=x$ 的对称性

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

(6) 关于 $\frac{\pi}{2}$ 的性质

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha \quad \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha \quad \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\alpha$$

作为一种函数，自然要研究其函数性质：

命题 4.2 (三角函数的函数性质)

三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ 具有以下性质：

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
定义域	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{x\mid x\in\mathbb{R}, x\neq k\pi+\frac{1}{2}\pi, k\in\mathbb{Z}\}$	$\{x\mid x\in\mathbb{R}, x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
奇偶性	偶函数	奇函数	奇函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$

为了更好地记忆以上性质，我们需要作出不同三角函数的图像.

回忆函数章节里介绍的“函数图像的变换”内容，通过对正弦函数进行这种操作，可以得到类正弦函数：

定义 4.3 (类正弦函数)

函数

$$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$$

称为**类正弦函数** (sinusoidal function)，也叫波函数.

该函数的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$. 最大值 (波峰)、最小值 (波谷) 分别为 $|A|,-|A|$.

类正弦函数在物理学中有很多应用.

4.2 三角函数的计算

4.2.1 三角恒等变形

在三角函数中，自变量的变化能够相应地得到值的变化. 这样的变化规律就是三角恒等变形.

定理 4.1 (三角函数和差角公式)

正弦和差角公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

余弦和差角公式

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

正切和差角公式

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

证明 XXX

有了这些公式，下面的的倍角公式就很容易推导出来.

命题 4.3 (三角函数倍角公式)

正弦二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

余弦二倍角公式

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$$

特别地，可以推导出另外一个形式的公式：$\cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2 - 1 = 1 - 2\sin\alpha^2$. 这个形式可以直接跳过对同角的另一个三角函数值的求解.

正切二倍角公式

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan\alpha^2}$$

降角升幂.

命题 4.4 (三角函数半角公式)

正弦半角公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

余弦半角公式

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

正切半角公式

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

降幂升角.

命题 4.5 (三角函数的三倍角公式)

(1) 正弦三倍角公式

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin\alpha\cdot\sin\left(60^\circ - \alpha\right)\cdot\sin\left(60^\circ + \alpha\right)$$

(2) 余弦三倍角公式

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4\cos\alpha\cdot\cos\left(60^\circ - \alpha\right)\cdot\cos\left(60^\circ + \alpha\right)$$

注 正切、余切三倍角公式可以由上方正弦、余弦公式推得.

证明 XXX

命题 4.6 (万能公式)

(1) 正弦万能公式

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

(2) 余弦万能公式

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

(3) 正切“万能公式”——实际上是正切二倍角公式

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

(4) 余切万能公式

$$\cot\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$$

证明 XXX

命题 4.7 (辅助角公式)

(1) 正弦形式

$$a\cdot\sin\alpha + b\cdot\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin\left(\alpha+\varphi\right)$$

其中 φ 满足 $\tan\varphi = \frac{b}{a}$.

(2) 余弦形式 (不常用)

$$a\cdot\sin\alpha + b\cdot\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\left(\alpha-\varphi\right)$$

其中 φ 满足 $\tan\varphi = \frac{a}{b}$.

证明 XXX

命题 4.8 (积化和差公式)

(1)

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

(2)

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

证明 XXX

命题 4.9 (和差化积公式)

(1)

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(2)

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

证明 XXX

注 细心的读者已经发现，和差化积公式的左半部分总是同名三角函数. 那么不同名三角函数之和该如何转化呢？请自行证明：

$$\sin\alpha+\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2}$$

提示：利用诱导公式.

4.2.2 正弦定理与余弦定理

定理 4.2 (正弦定理)

在 ΔABC 中，记 $\angle A$ 所对的边长为 a，那么有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

其中 R 为该三角形外接圆半径.

这个定理适用于把三角形中边长比例与三角函数比例互相转化.

定理 4.3 (余弦定理)

在 ΔABC 中，记 $\angle A$ 所对的边长为 a，那么有

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

因而可以推导出 a 的大小

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

这个定理适用于用三角形中的边长表示三角函数. 尽管它可以求出某边的长度，但是如你所见，带有根号和二次方的式子显然不如正弦定理的结果美观.

4.3 三角函数的应用

4.3.1 三角换元

命题 4.10 (三角换元常用公式)

(1)

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$a^2 - b^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1$$

另一种常见的形式

$$b = \sqrt{1 - a^2} \quad \longrightarrow \quad a = \sin x, b = \cos x$$

$$b = \sqrt{1 + a^2} \quad \longrightarrow \quad a = \tan x, b = \frac{1}{\cos x}$$

如果是多元的也可以进行换元，这里以三元的情况为例

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad (\sin x \sin y)^2 + (\sin x \cos y)^2 + \cos^2 x = 1$$

(2)

$$ab + bc + ca = 1 \quad \longrightarrow \quad \tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2} \quad (A + B + C = \pi)$$

$$or \longrightarrow \quad \cot A\cdot\cot B + \cot B\cdot\cot C + \cot C\cdot\cot A = 1 \quad (A + B + C = k\pi)$$

(3)

$$a + b + c = abc \quad \longrightarrow \quad \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C \quad (A + B + C = k\pi)$$

(4) 双曲函数换元

$$a^2 - b^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad \cosh^2 x - \sinh^2 y = 1$$

注 有关双曲函数的内容会在复数章节仔细研究.

4.3.2 三角恒等式、三角不等式

命题 4.11 (三角形中的三角恒等式)
在 $\triangle ABC$ 中 (即 $A+B+C=\pi$ 时):

(1) 不同名和、积转换

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

(2) 同名和、积转换

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$$

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$$

(3) 正切和、积转换

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

(4) 正切、正割转换

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

命题 4.12 (三角形中的三角不等式)
在 $\triangle ABC$ 中 (即 $A+B+C=\pi$ 时):

(1)

$$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}\qquad\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{2}{3}$$

(2)

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}\qquad\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$$

(3)

$$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}\qquad\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\le\frac{1}{8}$$

特别地，当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时

$$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\ge 3\sqrt{3}$$

(4)

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}\qquad\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\ge-\frac{3}{2}$$

(5)

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}\qquad\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}\qquad\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$$

(6)

$$\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}\geq\frac{3}{4}\qquad\qquad\cos^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

4.4 反三角函数

三角函数是将角度映射为距离之比的函数. 相应地，将距离之比映射到角度的函数叫做反三角函数 (arc 的意思即为"弧长").

定义 4.4 (反三角函数)

函数

$$f(x)=\arcsin x\qquad f(x)=\arccos x\qquad f(x)=\arctan x\qquad f(x)=\operatorname{arccot} x$$

分别称为**反正弦函数** (arcsine function)，**反余弦函数** (arccosine function)，**反正切函数** (arctangent function)，**反余切函数** (arccotangent function). 这些函数统称为**反三角函数** (inverse trigonometric function).

注意 反正弦函数、反余弦函数不是正弦函数、余弦函数的反函数，而是与其中的某一段互为反函数.

命题 4.13 (反三角函数的函数性质)

反三角函数 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$ 具有以下性质：

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\operatorname{arccot} x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
值域	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$
对称性	沿 $(0,0)$ 中心对称	沿 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中心对称	沿 $(0,0)$ 中心对称	沿 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中心对称

第 5 章 数列与数学归纳法

数列，顾名思义，就是将一组数按顺序排为一列的形式. 为了区别于集合与组，一般直接将每一项列出来而不加括号，例如 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 也可以用通项公式或递推公式表示，例如

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad a_{n+k} = f(a_{n+1}, \cdots, a_{n+k-1})$$

其中第一种表示形式的“$_{n=1}^{\infty}$”常省略不写.

或者，利用映射可以严格地定义数列：

定义 5.1 (序列，数列)

从自然数集 $\mathbb{N}$ 到任意非空集合 A 的一个映射称为 A 中元素的一个**序列** (sequence). 特别地，当 A 是数集时，称该序列为**数列** (number sequence).

数列可按以下标准分类：

1. 单调性：若 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $a_{n+1} \geq (>)\ a_n$，称 $\{a_n\}$ 为 **(严格) 递增数列**；反之，若 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $a_{n+1} \leq (<)\ a_n$，称 $\{a_n\}$ 为 **(严格) 递减数列**；若 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $a_{n+1} = a_n$，称 $\{a_n\}$ 为**常数数列**.
2. 有限性：若数列 $\{a_n\}$ 的项数有限，称其为**有限数列**；反之，若数列 $\{a_n\}$ 的项数无限，称其为**无限数列**.
3. 有界性：以上界为例. 若数列 $\{a_n\}$ 满足

   $$\exists M > 0\ s.t.\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n < M$$

   则称其为**有界数列**，其中它的**上界**是 M；若满足

   $$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*\ s.t.\ a_n > M$$

   则称其为**无界数列**. 下界的定义类似.

对于一个给定的数列，我们会研究它的递推公式、通项公式、前 n 项和 S_n、前 n 项积 T_n，等等.

5.1 等差数列与等比数列

5.1.1 等差数列

我们定义满足递推式 $a_{n+1} = a_n + d$ 的数列 $\{a_n\}$ 为**等差数列** (又名算术数列)，并称 a_1 为**首项**，d 为**公差**.

等差数列的通项公式可以表达为 $a_n = a_1 + (n-1)d$. 若将 a_n 看做关于 n 的函数，容易发现任何一个形如 $a_n = pn + q$ 的式子都代表一个等差数列.

等差数列的前 n 项和公式表达为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [a_1 + (k-1)d] = na_1 + d[0 + 1 + \cdots + (n-1)] = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

若将 S_n 看做关于 n 的函数，容易发现任何一个形如 $S_n = pn^2 + qn$ 的式子都代表一个等差数列.

以下列出等差数列的部分性质：

命题 5.1 (等差数列的性质)

设等差数列 $\{a_n\}$，

1. 若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$.
2. $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}, \cdots$ 也为等差数列，且其公差为 m^2d.
3. $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$.

证明

在证明一个数列是等差数列或利用题目中关于等差数列的条件时，常常利用等差数列的定义，即相邻两项之差为定值.

5.1.2 等比数列

类似于等差数列，定义满足递推式 $a_{n+1}=qa_n\ (q\neq 0)$ 的数列 $\{a_n\}$ 为**等比数列** (又名几何数列)，称 a_1 为**首项**，q 为**公比**.

等比数列的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$. 任何一个形如 $a_n=pq^n$ 的式子都代表一个等比数列.

等比数列的前 n 项和公式推导过程如下：

当 $q\neq 1$ 时，

$$\begin{cases} S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1} \\ qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^n \end{cases} \implies (q-1)S_n=a_1q^n-a_1,\ i.e.\ S_n=\frac{1-q^n}{1-q}a_1$$

当 $q=1$ 时，显然 $S_n=a_n$.

特别地，当 $-1<q<1$ 时，注意到 $\lim_{n\to\infty}q^n=0$，于是可得**无穷递降等比数列**的求和公式：$S_\infty=\dfrac{1}{1-q}a_1$.

以下列出等比数列的部分性质：

命题 5.2 (等比数列的性质)

设等比数列 $\{a_n\}$，

1. 若 $m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$.
2. $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}, \cdots$ 也为等比数列，且其公比为 q^m.
3. $\{\log_b a_n\}$ 为等差数列，且其公差为 $\log_b q$.

由等比数列与等差数列的别名不难联想到 $AM-GM$ 不等式. 实际上，对于等比数列 $\{b_n\}$，有 $b_{n+1}=(\sqrt{q\cdot b_n})^2\leq\left(\dfrac{b_n+q}{2}\right)^2$，从而可以与另一个等差数列进行比较/放缩.

5.2 数列的变形

5.2.1 数列递推求通项

以下给出几种常见的由递推求通项的方式:

命题 5.3 (由递推求通项基本方法)

1. 求满足下列递推式的数列的通项公式: $a_{n+1}=a_n+f(n)$.

   解法一 利用类似于等差数列求和的递推累加法, 即

$$a_n=a_{n-1}+f(n-1)=a_{n-2}+f(n-1)+f(n-2)=\cdots=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$$

   解法二 构造裂项形成常数列, 作 $f(n)=g(n+1)-g(n)$, 则

$$a_n-g(n)=a_{n-1}-g(n-1)=\cdots=a_1-g(1)\quad\Rightarrow\quad a_n=a_1-g(1)+g(n)$$

2. 求满足下列递推式的数列的通项公式: $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)\ (a_i\neq 0)$.

   解法一 利用递推累乘法, 即

$$a_n=f(n-1)\cdot a_{n-1}=f(n-1)\cdot f(n-2)\cdot a_{n-1}=\cdots=a_1\cdot\prod_{k=1}^{n-1}f(k)$$

   解法二 构造裂项形成常数列, 作 $f(n)=\dfrac{g(n+1)}{g(n)}$, 则

$$\frac{a_n}{g(n)}=\frac{a_{n-1}}{g(n-1)}=\cdots=\frac{a_1}{g(1)}\quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{g(n)}{g(1)}a_1$$

3. 求满足下列递推式的数列的通项公式: $a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq 1,q\neq 0)$.

   解法一 化为等比数列, 构造 $a_{n+1}-t=p(a_n-t)$, 其中 $t=\dfrac{q}{1-p}$.

   解法二 化为等差数列, 构造 $\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{a}{p^{n+1}}$ 即可.

4. 求满足下列递推式的数列的通项公式: $a_{n+1}=p(n)a_n+q(n)$.

   解法一 化为等比数列, 构造 $a_{n+1}-f(n+1)=p(n)(a_n-f(n))$.(这种构造方法不太好用)

   解法二 化为等差数列, 作 $p(n)=\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$, 则 $\dfrac{a_{n+1}}{f(n+1)}=\dfrac{a_n}{f(n)}+\dfrac{q(n)}{f(n+1)}$.

不过以上方法只是抛砖引玉, 具体如何进行构造还要靠代数变形的技巧.

5.2.2 数列求和与 $\sum$ 符号运算

本节我们着重于研究数列求和的一些例题.

5.3 数学归纳法与无穷递降法

5.3.1 数学归纳法

回顾前文等差数列的定义. 我们发现, 只需要规定数列中第一个元素以及整个数列满足的递推关系, 就可以唯一地确定这个数列, 即这两个条件是该数列的特征. 运用同样的思路, 可以用首项、递推关系来证明一个关于正整数 n 的命题. 这就是数学归纳法.

公理 5.1 (归纳公理)

设 S 是正整数集 $\mathbb{N}^*$ 的一个子集, 满足条件:

(i)$1 \in S$; (ii) 若 $n \in S$, 则 $n+1 \in S$.

那么 $S = \mathbb{N}^*$.

注 归纳公理是 Peano 提出的关于正整数的五条公理的最后一条, 是本节所有形式数学归纳法的基础.

定理 5.1 (第一数学归纳法)

设 $P(n)$ 是关于正整数 n 的一个命题 (或性质). 如果

(i) 当 $n = 1$ 时, $P(n)$ 成立; (ii) 由 $P(n)$ 成立可以推出 $P(n+1)$ 成立.

那么, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ 都成立.

证明

在应用数学归纳法时, 我们可以对“跨度”有轻微的调整, 这就是跳跃数学归纳法:

推论 5.1 (跳跃数学归纳法)

设 $P(n)$ 是关于正整数 n 的一个命题 (或性质). 如果

(i) 当 $n = 1, 2, \cdots, k$ 时, $P(n)$ 成立; (ii) 由 $P(n)$ 成立可以推出 $P(n+k)$ 成立.

那么, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ 都成立.

证明

还有一种略有不同的归纳法:

定理 5.2 (第二数学归纳法)

设 $P(n)$ 是关于正整数 n 的一个命题 (或性质). 如果

(i) 当 $n = 1, 2, \cdots, k$ 时, $P(n)$ 成立; (ii) 由“对一切小于 n 的整数 k, $P(k)$ 都成立”可以推出 $P(n)$ 成立.

那么, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ 都成立.

证明

5.3.2 最小数原理与无穷递降法

第 6 章 极限与导数

6.1 极限的概念与运算

在上一章，我们定义了数列的界限，其中可以类比得到一个重要思想:“无穷小的正数”就是一个比任何正数都要小的数. 为了定义函数在某处的极限 (也就是当 $x+\Delta x$ 中的 Δx 无穷小时 $f(x+\Delta x)$ 的值)，同样可以利用这种思想.

为了方便思考，我们先讨论一个最特殊的情况：数列在项数趋于无穷时的极限.

6.1.1 数列的极限

定义 6.1 (数列的极限)

设数列 $\{a_n\}$. 若对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^*$，使得当 $n>N$ 时总有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

其中 a 是给定的实数. 则称数列 $\{a_n\}$ **收敛** (convergent) 于 a，亦称 $\{a_n\}$ 的**极限** (limit) 为 a. 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \quad \text{或} \quad a_n\to a\ (n\to\infty)$$

否则，称该数列**发散** (divergent).

♣

注 以上定义称为“$\varepsilon-N$”定义.

注 定义中的 $|a_n-a|$ 即相当于上文所说的“无穷小的正数”.

注 定义中的 N 其实是依赖于 ε 的. 也就意味着，对于任意正数 ε，只要能保证一定找到一个 N 符合要求即可.(你可以将 N 粗略看做 ε 的一个函数，虽然往往对应 ε 的 N 无法保证只有一个)

例题 6.1.1 求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

解 为了证明上述极限为 0，只需找到一个 N 使当 $n>N$ 时，对于给定的 $\varepsilon>0$，有

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$$

这要求 $N>\dfrac{1}{\varepsilon}$，考虑到 N 为整数，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 即可满足上式. 由数列极限的定义可知上述极限为 0.

但是每遇到一个数列就用 $\varepsilon-N$ 写一遍是很麻烦的. 为了将未知数列的极限化为已知，可以利用数列极限的运算:

定理 6.1 (数列极限的运算)

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$，$\lim_{n\to\infty} b_n=b$，则

(1) 加减法

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

(2) 标量乘法 (其中 c 为给定的实数)

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$$

(3) 乘法

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$$

(4) 除法 (当 $b \neq 0$ 时)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

(5) 绝对值

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

♡

证明 XXX

6.1.2 函数的极限

类比数列极限，自然引出函数极限的定义 (因为数列只不过是特殊的函数):

定义 6.2 (函数的极限)

设函数 f 在 x_0 附近有定义. 若对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时总有

$$|f(x) - a| < \varepsilon$$

则称 f 在 x_0 处的极限为 a，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{或} \quad f(x) \to a\ (x \to x_0)$$

♣

注 以上定义称为“$\varepsilon - \delta$”定义.

注 讨论函数 f 在 x_0 处的极限，不必要求 f 在 x_0 处有定义.

注 描述“x_0 附近”需要借助邻域的概念，这里不展开说明.

同样地，函数的极限存在运算.

定理 6.2 (函数极限的运算)

设函数 f, g. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$，$\lim_{x\to x_0} g(x) = b$，则

(1) 加减法

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = a \pm b$$

(2) 乘法

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab$$

(3) 除法 (当 $b \neq 0$ 时)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$

(4) 绝对值

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |a|$$

注 证明这些性质有可能会用到更高级的定理，因此这里不证明了.

注 函数极限中其实也有"标量乘法"，即设函数 f 满足 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$，则对于实数 c，

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = ca$$

该运算可以由乘法推出 (只用令 $g(x) = 1, \forall x$).

6.2 导数的概念与运算

定义 6.3 (导数)

设函数 f 在 x_0 附近有定义. 若存在实数 a 使得

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = a$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**可导** (derivable)，a 称为 f 在 x_0 处的**导数** (derivative)，记作 $f'(x_0) = a$.

定义 6.4 (曲线的切线)

若曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导，则过点 $P(x_0, f(x_0))$ 的斜率为 $f'(x_0)$ 的直线

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

称为曲线 $y = f(x)$ 在 P 处的**切线** (tangent line).

利用导数定义曲线的切线很合乎逻辑，如下图所示：

请注意，在接触导数之前，我们从未严格定义过曲线的切线. 因此，比起称"切线斜率是导数的几何意义"，不如说"曲线的切线是由导数严格刻画的".

现在我们知道了一个函数 $f(x)$ 在某一点处的导数. 如果一个函数在某个区间 I 上全部可导，则区间上的每个点都应该对应一个导数值. 可以建立一个新的映射来表述每个 x_0 与 $f'(x_0)$ 的关系.

定义 6.5 (导函数)

- 设函数 $f(x)$ 在某个区间 I 上全部可导. 将 I 作为定义域，求导的过程作为对应法则，得到一个新的函数 $f'(x)$. 称该函数为原函数的**导函数**，也可以简称为原函数的导数.
- 在可导的前提下，$f(x)$ 的 n **阶导函数**是其 $n-1$ 阶导函数的导函数，记作 $f^{(n)}(x)$. 即，

$$f^{(0)}(x) = f(x) \quad f^{(1)}(x) = f'(x) \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

注 对于 $f(x)$ 的 2 阶导数，也可用 $f''(x)$ 来表示.

定理 6.3 (导函数的运算法则)

(1) 加减法

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

(2) 标量乘法 (c 为常数)

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

(3) 乘法

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

(4) 除法

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

(5) 复合函数

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(6) 反函数

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

♡

证明 XXX

命题 6.1 (基本初等函数的导函数)

(1) 常值函数：(c 为常数)

$$(c)' = 0$$

(2) 幂函数：

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

(3) 指数函数：

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

(4) 对数函数：

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

(5) 三角函数：

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

(6) 反三角函数：

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

♠

证明 XXX

6.3 导数的应用

先来看看一阶导数的几何意义.

定理 6.4 (函数的单调性与其导函数的关系)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$，$f(x)$ 在 I 上可导.

- 若对任意 $x \in I$ 都有 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 I 上单调递增.
- 若对任意 $x \in I$ 都有 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 I 上单调递减.

♡

注 即使函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调，在区间 I 内仍然可能存在 x_0 使得 $f'(x_0) = 0$. 例如，函数 $f(x) = x^3$ 在 0 处的导数为 0.

证明 XXX(需要用到 Lagrange 中值定理)

定义 6.6 (极值与极值点)

- 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 比它在点 x_0 附近的其它点的函数值都小，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**极小值点**，称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的**极小值**.
- 极大值点、极大值定义类似.

♣

注 区别于最值 (在一段区间上的)，极值反映的是某一点附近的大小情况，刻画的是函数的局部性质.

定理 6.5 (极值点的判定)

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0) = 0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个驻点 (亦称稳定点).
- 对于 $f(x)$ 的一个驻点 x_0，若在 x_0 的左侧 $f'(x) < 0$，右侧 $f'(x) > 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点. 最大值点判定类似.

♡

注 正如上个定理的注记，驻点不一定是极值点.

再来看看二阶导数的几何意义.

定义 6.7 (函数的凹凸性)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$.

- 若对任意 $x_1, x_2 \in I$ 都有
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$
则称 $f(x)$ 在 I 上为**上凸函数** (凹函数，concave function)[a].
- 若对任意 $x_1, x_2 \in I$ 都有
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$
则称 $f(x)$ 在 I 上为**下凸函数** (凸函数，convex function).
- 若上述不等式的等号只在 $x_1 = x_2$ 时取得，则称这样的凹凸性是严格的.

[a] “凹 (凸)”在中文语境里定义不一，此处“凹函数”在图像上实际是“凸着的”. 为了避免混淆，建议使用“上 (下) 凸”描述.

♣

定理 6.6 (函数的凹凸性与其导函数的关系)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$，$f(x)$ 在 I 上存在二阶导数.

- 若对任意 $x \in I$ 都有 $f''(x) \geq 0$，则 $f(x)$ 在 I 上为下凸函数.
- 若对任意 $x \in I$ 都有 $f''(x) \leq 0$，则 $f(x)$ 在 I 上为上凸函数.

♡

证明 XXX

第三部分

几何

第 7 章 平面向量

在物理学中，我们常常需要处理一些同时具有方向特征与距离特征的量，例如一个力 F. 在探究几个力的合力时，一般可以进行正交分解 (即“建系”)，但是这样的方法会产生很多繁杂的三角函数运算.

有没有一种方法能够更加合理地分解这样一个几何元素呢？更进一步，我们能否构造一个“平面非直角坐标系”?

7.1 平面向量的几何定义

如前文所述，像一个力 F 一样，既有大小，又有方向的量叫做**向量** (vector)，物理学上也称为矢量. 与向量相对的量，即那些只有大小、没有方向的量叫做**标量** (scalar).

一个向量通常用加向右箭头的小写字母表示，如 $\vec{a}, \vec{v}$；有时也会用大写字母，例如在物理学中的电场强度 $\vec{E}$、力 $\vec{F}$. 在平面几何中，若给定两点 A, B，也可以用 $\overrightarrow{AB}$ 来表示从点 A 出发、结束于点 B 的向量. 另外，一些印刷材料会使用粗体小写字母表示，如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x_i}$.

我们称一个向量 $\vec{a}$ 的大小为它的**模长** (或绝对值)，记作 $|\vec{a}|$. 特别地，称模长为 1 的向量为单位向量，模长为 0 的向量为零向量. 规定零向量的方向为任意方向.

当两个向量相等，即 $\vec{a} = \vec{b}$ 时，意味着它们的模长相等、方向相同；当两个向量相反，即 $\vec{a} = -\vec{b}$ 时，意味着它们的模长相等、方向相反. 容易发现，在平面中，向量的大小与方向不受其位置所影响. 因此当两个向量平行时，等价于它们共线，即它们的方向相同或相反，记作 $\vec{a} \,//\, \vec{b}$. 由于零向量的方向为任意方向，可知零向量平行于任意向量.

类似于物理学中对力的合成与分解，向量的加法与减法符合“三角形法则”与“平行四边形法则”:

容易想到，如果要把一个向量拉伸、缩小，即只改变其大小而不改变其方向，只需要乘以一个系数 λ 即可. 实际上，定义向量的标量乘法 (数乘) 如下：记 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$，则 $\vec{b}$ 的模长满足 $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$. 当 $\lambda > 0$ 时，$\vec{b}$ 的方向与 $\vec{a}$ 相同；当 $\lambda = 0$ 时，$\vec{b}$ 的方向为任意方向 (即，$\vec{b}$ 为零向量)；当 $\lambda < 0$ 时，$\vec{b}$ 的方向为 $-\vec{a}$ 的方向.

接着，定义向量间的乘法. 第一种乘法称作内积 (或点乘)，定义 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 为一个实数，满足

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

其中，$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 表示向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角. 内积的几何意义如下:

由内积的定义，不难发现以下结论:

命题 7.1 (向量内积的常用结论)

(1) 对于向量 $\vec{a}$，其模长满足

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2$$

(2) 对于向量 $\vec{a}, \vec{b}$，有

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

另一种乘法称作外积 (或叉乘). 定义 $\vec{a}\times\vec{b}$ 得到一个向量 $\vec{c}$，其模长满足

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$$

而其方向满足“右手定则”，如图所示：

向量的外积用代数形式定义其实更明了，我们会在下一节说明.

7.2 向量的代数定义

7.2.1 平面向量基本定理

定理 7.1 (向量共线定理)

若向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 共线，则存在唯一 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. ♡

证明 1° 存在性：构造 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $|\lambda|=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，且当 $\vec{a},\vec{b}$ 同向 (反向) 时，λ 的方向为正 (负). 这样的 λ 恰能满足条件.

2° 唯一性：设有不同的 λ_1,λ_2 满足条件，那么 $\vec{b}=\lambda_1\vec{a}=\lambda_2\vec{a}$. 两式相减，可得 $\vec{0}=(\lambda_1-\lambda_2)\vec{a}$. 由于 $\vec{a}$ 不是零向量，必然有 $\lambda_1-\lambda_2=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2$，与假设矛盾.

定理 7.2 (平面向量基本定理)

若 $\vec{c}$ 与非零不共线向量 $\vec{a},\vec{b}$ 共面，则存在唯一的 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ 使得 $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$.

此处的 $\vec{a},\vec{b}$ 常称作基底 (bases). ♡

证明 1° 存在性：将 $\vec{c}$ 沿 $\vec{a},\vec{b}$ 方向分解为 $\vec{c_a},\vec{c_b}$，即构造如下图所示平行四边形. 由定理7.1，取 λ_1,λ_2 使得 $\lambda_1\vec{a}=\vec{c_a},\lambda_2\vec{b}=\vec{c_b}$. 这样的 λ_1,λ_2 恰能满足条件.

2° 唯一性：假设不同的 $(\lambda_1,\lambda_2),(\lambda_1',\lambda_2')$ 均满足条件，那么

$$\vec{c}=\begin{cases}\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}\\ \lambda_1'\vec{a}+\lambda_2'\vec{b}\end{cases}$$

两式相减，得 $\vec{0}=(\lambda_1-\lambda_1')\vec{a}+(\lambda_2-\lambda_2')\vec{b}$. 由于 $\vec{a},\vec{b}$ 均不为零向量且不共线，可知 $\lambda_1-\lambda_1'=\lambda_2-\lambda_2'=0$，即 $(\lambda_1,\lambda_2)=(\lambda_1',\lambda_2')$，与假设矛盾.

类似于“算术基本定理”，平面向量基本定理实际上为我们提供了一种分解任意向量的方法. 当基底选成互相垂直的单位向量时，$\vec{c}$ 就是平面直角坐标系中从原点出发、到某个点结束的有向线段.

关于平面向量基本定理，有一个重要推论：

推论 7.1 (定比分点公式)

给定平面上的三点 A,B,C，记 $|AC|=a,|BC|=b$. 若存在该平面上的另一点 P，则

$$\overrightarrow{PC}=\frac{b}{a+b}\cdot\overrightarrow{PA}+\frac{a}{a+b}\cdot\overrightarrow{PB}\iff A,B,C\text{ 三点共线}$$

♡

证明 1° 充分性：如下图所示，在 AP,BP 上取点 B',A'，使得 $\dfrac{|AB'|}{|AP|}=\dfrac{a}{a+b},\dfrac{|BA'|}{|BP|}=\dfrac{b}{a+b}$，由相似三

角形可知 $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{PA'}, \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{PB'}$. 由平行四边形法则，上式即成立.

2° 必要性：用同一法很好说明，详细证明留给读者.

7.2.2 向量的代数定义

让我们来重温“自由度”的概念：自由度，就是描述一个问题所需不相关的变量的个数. 例如，想要在地球表面确定一个人的位置，至少需要经度、纬度，故这个问题的自由度是 2；在坐标系中想要确定点 $P(x,x)$ 的位置，只需要一个量 x，这个问题的自由度就是 1.

不难发现，当把向量分解为两个非零不共线向量的倍数之和时，总能用两个量 λ_1, λ_2 来描述这个向量. 当我们将 λ_1, λ_2 用数组 (λ_1, λ_2) 时，就会产生向量在坐标系下的意义.

更特殊地，取基底 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$，满足 $\vec{e_1} = (1,0), \vec{e_2} = (0,1)$. 于是任意一个向量 $\vec{c}$ 可以表示为如下形式：(其中，$x, y \in \mathbb{R}$)

$$\vec{c} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = x(1,0) + y(0,1) = (x,0) + (0,y) = (x,y)$$

这就构建出一个完整的表示体系 (尽管这种说明过程有循环论证的意味). 借助这种想法，可以用坐标形式定义向量.

定义 7.1 (向量)

在给定的 2 维直角坐标系中，定义任意一个点 (x,y) 为一个**向量** (vector).

对于向量 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 与标量 $\lambda \in \mathbb{R}$：

(1) 向量之间的加减法定义如下：

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

(2) 向量的标量乘法定义如下：

$$\lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

(3) 向量之间的内积定义如下：

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

(4) 向量之间的外积定义如下：将 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 表示为矩阵的形式，即

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & x_2 y_1 \\ x_1 y_2 & y_1 y_2 \end{pmatrix}$$

(5) 向量的模长定义为：

$$|(x_1, y_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

♣

注 可以证明，该定义与上一节所述几何定义是等价的.

注 这个定义可以推广到任意维度.

注意 在应用向量的减法时，例如取 $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$，由 $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$，实际上有 $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$，这与直觉上将两个向量相减是反着的.

利用代数形式定义向量的好处就在于，这种定义是统一的，因而比几何定义要简单的多.

第 8 章 平面几何中的距离与角度

8.1 常用平面几何结论——边长与三角

定理 8.1 (Menelaus 定理)

设 D,E,F 分别是 ΔABC 的三边 BC,CA,AB 或其延长线上的点，则

$$D,E,F\text{三点共线} \iff \frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$

它还有一个角元形式，即

$$D,E,F\text{三点共线} \iff \frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle BDE}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}\cdot\frac{\sin\angle CDF}{\sin\angle ADF}=1$$

♡

证明 XXX

对应“三点共线”问题，还有一类“三线共点”问题，可以利用 Ceva 定理解决.

定理 8.2 (Ceva 定理)

设 D,E,F 分别是 ΔABC 的三边 BC,CA,AB 或其延长线上的点，则

$$AD,BE,CF\text{三线共点或平行} \iff \frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$$

它还有一个角元形式，即

$$AD,BE,CF\text{三线共点或平行} \iff \frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE}\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF}=1$$

♡

证明 XXX

特殊的四点共圆情景可以考虑 Ptolemy 定理或三弦定理.

定理 8.3 (Ptolemy 定理)

给定一圆内接四边形 $ABCD$，则其两组对边乘积之和等于两对角线的乘积，即

$$AB\times CD+BC\times DA=AC\times BD$$

♡

证明 XXX

推论 8.1 (三弦定理)

设 A 是圆上任意一点，AB,AC,AD 是该圆上顺次的三条弦，则

$$AC\cdot\sin\angle BAD=AB\cdot\sin\angle DAC+AD\cdot\sin\angle BAC$$

♡

限制 P 点位置 (求解 AP 长度) 可以利用 Stewart 定理.

定理 8.4 (Stewart 定理)

设 P 为 ΔABC 的边 BC 上任一点，则

$$AP^2 = \frac{PC}{BC} \cdot AB^2 + \frac{BP}{BC} \cdot AC^2 - \frac{BP}{BC} \cdot \frac{PC}{BC} \cdot BC^2$$

♡

证明 XXX

推论 8.2

设 AP 为 ΔABC 的边 BC 上的中线，则

$$AP^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$$

♡

推论 8.3

设 P 为 ΔABC 的边 BC 上一点，满足 AP 为 $\angle A$ 的内角平分线，则

$$AP^2 = AB \cdot AC - BP \cdot PC$$

♡

注 AP 为外角平分线的情况类似，请读者自行证明.

"角元"形式的 Stewart 定理.

定理 8.5 (张角定理)

设 P 为 ΔABC 的边 BC 上任一点，连接 AP，则

$$\frac{\sin \angle BAP}{CP} + \frac{\sin \angle CAP}{BP} = \frac{\sin \angle BAC}{AP}$$

♡

8.2 常用平面几何结论——平面向量

极化恒等式，奔驰定理，三角形五心

第 9 章 解析几何

9.1 平面基本元素

9.1.1 点与直线

在初中，我们曾接触到了“一次函数的图像”，这种形如 $\{(x,y):y=kx+b\}$ 的式子可以用来表达任意不垂直于 x 轴的直线. 为了将形如 $x=a$ 的直线表示出来，规定直线方程的**一般式**为如下形式:

$$Ax+By+C=0\ (A^2+B^2\neq 0)$$

为了方便计算，直线方程还衍生出了如下各种形式:

名称	形式	限制条件
点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	不能表示垂直于 x 轴的直线
斜截式	$y=kx+b$	不能表示垂直于 x 轴的直线
横截式	$x=my+b$	不能表示垂直于 y 轴的直线
两点式	$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$	不能表示垂直于 x 轴的直线
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\ (ab\neq 0)$	不能表示垂直于 x 轴、y 轴或经过原点的直线
参数式	$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases}$，其中$t$为参数	无

其中，斜截式用来表达直线的倾斜角非常合适；横截式在处理过 x 轴上定点的问题时会简化计算.

定义 9.1 (直线的倾斜角、斜率与解析式)

对于直线 l，我们把它向上的方向与 x 轴正方向所成的夹角定义为它的**倾斜角**，一般记作 α，注意应该满足 $0^\circ\leq\alpha<180^\circ$；

那么就可以推出斜率的定义：直线倾斜角 α 的正切值叫做这条直线的**斜率**，一般记作 k，倾斜角为 90° 的直线没有斜率；

因而，若已知 l 在 y 轴上的截距 b（即 l 与 y 轴的交点纵坐标）及它的斜率 k，我们可以把 l 用一个函数关系式表达出来：

$$y=kx+b$$

♣

平面中与点和直线相关的定理如下.

定理 9.1 (定比分点公式)

已知点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，若点 $P(x,y)$ 分 AB 的比为 $\dfrac{AP}{BP}=\lambda$，则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

♡

定理 9.2 (点到直线距离公式)

设点 $P(x_0, y_0)$，直线 $l: Ax+By+C=0$，则

$$d_{P-l}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

直线间的位置关系判断如下 (以一般式为例):

命题 9.1 (直线间的位置关系)

设 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,\ l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$

(1) $l_1 \parallel l_2$ 等价于

$$\begin{cases} A_1B_2-A_2B_1=0 \\ A_1C_2-A_2C_1\neq 0 \end{cases}$$

(2) $l_1 \perp l_2$ 等价于

$$A_1A_2+B_1B_2=0$$

如例题中所示，有些时候为了使用待定系数法，需要进行一系列繁杂的计算. 通过直线系 (一系列具有相同性质直线的集合) 可以很好地表达出这种约束关系.

命题 9.2 (常见直线系的方程形式)

设 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,\ l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$

(1) 所有平行于 l_1 的直线构成集合

$$\{l|l: A_1x-B_1y+m=0\}\ (m\neq C_1)$$

(2) 所有垂直于 l_1 的直线构成集合

$$\{l|l: B_1x-A_1y+n=0\}$$

(3) 所有经过 l_1, l_2 交点的直线构成集合

$$\{l|l: A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0\}\cup l_2$$

问题 9.1 求空间中直线方程的一般形式.

9.1.2 圆

圆方程的各种形式如下:

名称	形式	几何含义
标准方程	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	其中 (a,b) 为圆心，r 为半径
一般方程	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ (D^2+E^2-4F>0)$	无
参数方程	$\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\cos\theta \end{cases}$，其中$\theta$为参数	其中 (a,b) 为圆心，r 为半径

为了判断直线与圆的位置关系，可以利用以下两种方法：

1. 利用几何特征：设圆心的直线的距离为 d，圆半径大小为 r. 则

$$d < r \iff 相交 \qquad d = r \iff 相切 \qquad d > r \iff 相离$$

2. 利用代数特征：联立圆的方程与直线方程，得到一个一元二次方程. 设该方程的判别式为 Δ，则

$$\Delta > 0 \iff 相交 \qquad \Delta = 0 \iff 相切 \qquad \Delta < 0 \iff 相离$$

由于联立求判别式的计算量较大，一般采用几何特征来判断.

同样地，对于圆之间的位置关系，也有两种判断方法：(设圆 O_1, O_2 半径分别为 r_1, r_2，圆心距离为 d)

位置关系	几何特征	代数特征 (联立方程得到解的个数)
外离	$d > r_1 + r_2$	无解
外切	$d = r_1 + r_2$	一组实数解
相交	$\lvert r_1 - r_2\rvert < d < r_1 + r_2$	两组实数解
内切	$d = \lvert r_1 - r_2\rvert$	一组实数解
内含	$0 \le d < \lvert r_1 - r_2\rvert$	无解

注意到，若用代数特征描述，容易出现多情况，故这里还是倾向于用几何特征.

关于圆的切线有一个方便计算的命题：

命题 9.3 (圆的切线方程)

设点 $P(x_0, y_0)$，圆 $O : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

(1) 当 P 在圆上时，过 P 点的圆的切线方程为

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$$

(2) 当 P 在圆外时，设过 P 点的直线与圆切于 A, B 两点，则直线 AB 的方程为

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$$

9.2 圆锥曲线

在三维空间中，一个圆锥与任意给定平面的交集被称为**圆锥曲线** (conic section). 我们知道，当该平面与圆锥底面平行时，它们的交集就是一个圆. 但如果该平面倾斜一下，会“割”出怎样的图形?

9.2.1 椭圆

我们不妨先采用一种特殊的化归思想来研究椭圆：设平面直角坐标系 xOy 中有圆 $C : x^2 + y^2 = 1$. 现在将整个坐标系进行“压缩”, 对圆上的任意一点 $P(x_0, y_0)$, 令 $P'(x_0', y_0')$ 满足 $x_0' = \frac{1}{a}x_0$, $y_0' = \frac{1}{b}y_0$ $(a, b > 0)$. 于是这个圆 C 被压缩为了椭圆 C'，其方程满足

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

这种伸缩变换的过程如下所示:

不过，直观的定义总是不严谨. 幸运的是，人们发现椭圆还有一种等价定义:

定义 9.2 (椭圆的第一定义)

设平面内一点 P，若 P 到两个定点 F_1, F_2 的距离之和为大于 $|F_1F_2|$ 的常数，则称所有这样的 P 构成的点集为**椭圆** (ellipse).

称这两个定点 F_1, F_2 为椭圆的**焦点** ([单]focus;[复]foci)，$|F_1F_2|$ 称作**焦距** (focal length)，F_1F_2 的中点 C 为椭圆的**中心** (center).

注 后文为了方便计算，总是假设一个中心在坐标原点的椭圆.

既然是等价定义，这样的椭圆必然可以化为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的形式. 设椭圆 C 的中心在坐标原点，两焦点分别为 $F_1(-c,0), F_2(c,0)$，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，椭圆上一点 $P(x,y)$. 由定义可得

$$|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

作代数变形:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2+y^2}&=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\(x+c)^2+y^2&=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\cx-a^2&=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\a^4-2a^2cx+c^2x^2&=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2\\(a^2-c^2)x^2+a^2y^2&=a^2(a^2-c^2)\end{aligned}$$

若令 $b^2=a^2-c^2$，即得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a>b>0$. 该形式称作椭圆的标准方程.

同样地，对于焦点在 y 轴的椭圆，其方程可表示为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

这个等价定义阐释了椭圆的几何性质. 以焦点在 x 轴上的椭圆为例，其与 x 轴的两个交点分别称作左顶点、右顶点，与 y 轴的两个交点称作上顶点、下顶点；连接左、右顶点的线段称作长轴，连接上、下顶点的线段称作短轴. 满足长轴长为 $2a$，短轴长为 $2b$.

另外，定义椭圆的**离心率** (eccentricity) 为 $e=\dfrac{c}{a}\in(0,1)$. 容易发现，e 在越靠近 0 时，椭圆越像圆；越靠近 0 时，椭圆越扁.

两种椭圆的图像如下:

例题 9.2.1 已知一圆形纸片的圆心为 O，F 是圆内一定点，M 是圆周上一动点，把纸片折叠使 M 与 F 重合，然后抹平纸片，折痕为 CD，设 CD 与 OM 交与点 P，则点 P 的轨迹是________.

关于椭圆，有两个方便的命题:

命题 9.4 (椭圆的切线方程)

设点 $P(x_0,y_0)$，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

(1) 当 P 在椭圆上时，过 P 点的椭圆的切线方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

(2) 当 P 在椭圆外时，设过 P 点的直线与椭圆切于 A, B 两点，则直线 AB 的方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

证明

命题 9.5 (椭圆常用结论)

(1) 椭圆的焦点弦 (即过焦点的弦) 中最短的为通径 (过焦点且垂直于长轴的弦)，且其长为 $\dfrac{2b^2}{a^2}$.

(2) 设椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

则两焦点 F_1, F_2 与椭圆上任一点 P 所围成的三角形 (称为焦点三角形)，满足其面积为

$$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}$$

证明

9.2.2 双曲线

类似于椭圆的第一定义，所有到两个定点距离之差为定值的点构成的集合，就是双曲线.

定义 9.3 (双曲线的第一定义)

设平面内一点 P，若 P 到两个定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值为小于 $|F_1F_2|$ 的常数，则称所有这样的 P 构成的点集为**双曲线** (hyperbola).

称这两个定点 F_1, F_2 为双曲线的**焦点** ([单]focus;[复]foci)，$|F_1F_2|$ 称作**焦距** (focal length)，F_1F_2 的中点 C 为双曲线的**中心** (center).

利用和椭圆相似的方式，可以证明双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0) \quad 或 \quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$$

分别表示焦点在 x 轴、y 轴上的双曲线.

双曲线的几何性质也与椭圆类似，以焦点在 x 轴上的椭圆为例，其与 x 轴的两个交点 A_1A_2 分别称为左顶点、右顶点，线段 A_1A_2 称作实轴. 相应地，定义 $B_1(0,b), B_2(0,-b)$ 称作上顶点、下顶点，线段 B_1B_2 称作虚轴.

定义双曲线的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}\in(1,+\infty)$. 定义双曲线的渐进线 (即双曲线的图像在 x 很大时不断趋近于这条线) 为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

两种双曲线的图像如下:

例题 9.2.2 已知定点 $F_1(-2,0), F_2(2,0)$，N 是圆 $O: x^2+y^2+1$ 上任意一点，点 F_1 关于点 N 的对称点为 M，线段 F_1M 的中垂线与直线 F_2M 相交于点 P，则点 P 的轨迹是________.

例题 9.2.3 证明：反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是经过旋转的等轴双曲线 (即实轴长与虚轴长相等的双曲线).

关于双曲线，有一些常用结论：

命题 9.6 (双曲线的切线方程)

设点 $P(x_0, y_0)$，双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(1) 当 P 在双曲线上时，过 P 点的双曲线的切线方程为

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

(2) 当 P 在双曲线外时，设过 P 点的直线与双曲线切于 A, B 两点，则直线 AB 的方程为

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

证明 证明与椭圆类似，详细过程留给读者.

命题 9.7 (双曲线常用结论)

设双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a, b > 0)$.

(1) 双曲线的焦点到其渐近线的距离为 b.

(2) 双曲线同支的焦点弦 (即过焦点的弦) 中最短的为通径 (过焦点且垂直于实轴的弦)，且其长为 $\dfrac{2b^2}{a^2}$.

(3) 两焦点 F_1, F_2 与双曲线上任一点 P 所围成的三角形 (称为焦点三角形)，满足其面积为

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\angle F_1PF_2}{2}}$$

9.2.3 第二定义与抛物线

定义 9.4 (圆锥曲线的第二定义)

设 C 为到定点与到定直线的距离之比为常数 e 的点所构成的集合.

(1) 当 $0 < e < 1$ 时，C 为离心率为 e 的椭圆，该定点为椭圆的一个焦点；

(2) 当 $e > 1$ 时，C 为离心率为 e 的双曲线，该定点为双曲线的一个焦点；

(3) 当 $e = 1$ 时，C 为**抛物线** (parabola)，该定点为抛物线的焦点.

其中，该定直线常称作圆锥曲线的**准线** (directrix).

由于统一了椭圆与双曲线的定义，可以得到一些通用结论.

命题 9.8 (关于椭圆与双曲线的焦点、准线的结论)

对于椭圆与双曲线：

(1) 在第二定义中，当定点为左焦点 $(-c, 0)$ 时，准线方程为 $x = -\dfrac{a^2}{c}$；当定点为右焦点 $(c, 0)$ 时，准线方程为 $x = \dfrac{a^2}{c}$.

(2) 称椭圆与双曲线上一点 $P(x_0, y_0)$ 到一个焦点 F 的距离为**焦半径** (focal radius). 对于左焦点 F_1，焦半径 $|PF_1| = |a + ex_0|$；对于右焦点 F_2，焦半径 $|PF_2| = |a - ex_0|$.

圆锥曲线的第二定义图像如下：

接着，我们来研究一下抛物线的性质.

由第二定义，容易得到双曲线的标准方程为

$$x^2 = 2py \quad 或 \quad y^2 = 2px$$

分别表示对称轴是 y 轴、x 轴的双曲线.

抛物线的几何性质比较特殊，它只具有轴对称性而没有中心对称性. 对于抛物线 $x^2 = 2py$，其焦点坐标为 $\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$，准线方程为 $y = -\dfrac{p}{2}$；对于抛物线 $y^2 = 2px$，其焦点坐标为 $\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$，准线方程为 $x = -\dfrac{p}{2}$.

抛物线的图像如下：

关于抛物线的结论更多：

命题 9.9 (抛物线常用结论)

以抛物线 $y^2 = 2px\ (p > 0)$ 为例.

(1) 其上一点 $P(x_0, y_0)$ 到焦点的距离 (即焦半径) 为 $|PF| = x_0 + \dfrac{p}{2}$.

(2) 设 AB 是过焦点的弦，其中 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，直线 AB 的倾斜角为 α，则有

$$x_1x_2 = \frac{p^2}{4}, \quad y_1y_2 = -p^2$$

$$|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{2p}{\sin^2\alpha}$$

以 AB 为直径的圆与准线相切；以 AF, BF 为直径的圆与 y 轴相切.

(3) 焦点弦中最短的为通径 (过焦点且垂直于对称轴的弦)，且其长为 $2p$. ♠

问题 9.2 证明：在三维空间中，一个圆锥与任意给定平面的交集总是圆、椭圆、双曲线、抛物线中的一种，并且给出每种交集的出现条件.

第 10 章 立体几何

10.1 空间中的几何体

空间中的几何体及其表面积、体积计算

10.2 空间中的位置关系

公理体系，空间中的平行关系，空间中的垂直关系

10.3 空间中的距离与角度

空间中的距离，空间中的角度

10.4 多面体与球

正方体，正四面体

10.5 空间向量与空间直角坐标系

空间向量基本定理，法向量与夹角计算

第四部分

数与代数

第 11 章 复数

11.1 复数的概念

11.1.1 复数的表示

复数的几何表示，复数的三角表示

11.1.2 复数的运算

复数的四则运算，共轭复数的运算

11.2 复数的应用

引理 11.1

任意定义域关于原点对称的函数都可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和，且表示方法为

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

♡

证明 XXX

定义 11.1 (双曲函数)

我们可以将 $f(x)=e^x$ 按照上述引理的方式进行分解，即

$$e^x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

由此，我们定义奇函数部分为**双曲正弦函数** (hyperbolic sine function)，即

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

偶函数部分为**双曲余弦函数** (hyperbolic cosine function)，即

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

通过双曲正弦与双曲余弦做比得出的函数，定义为**双曲正切函数** (hyperbolic tangent function)，即

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

♣

在本节中，我们先来看看双曲函数的恒等变形式，详细的研究放在复数部分.

命题 11.1 (双曲恒等变形公式)

(1)

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

(2) 和差角公式

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

(3) 倍角公式

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

注 不难发现，双曲函数恒等变形公式与三角函数的变形公式很类似，只是部分符号不同.

这里给出一种巧妙的记忆方法：Osborne's Rule. 即，当你看到三角公式中有两个 sin 相乘时，就把前面的符号反向. 例如：

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \longrightarrow \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \longrightarrow \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

同样，证明留在复数部分讲解.

第 12 章 不等式

12.1 常用不等式

12.1.1 均值不等式

均值不等式，加权均值不等式

12.1.2 Cauchy 不等式

Cauchy 不等式

12.1.3 排序不等式

排序不等式，切比雪夫不等式

12.1.4 函数的凹凸性与 Jensen 不等式

函数的凹凸性，Jensen 不等式，加权 Jensen 不等式

12.2 若干著名不等式

Hölder 不等式，Young 不等式，Schur 不等式，权方和不等式，Bernoulli 不等式

12.3 常见代数不等式

一些常见的代数不等式

12.4 常见几何不等式

一些常见的几何不等式

第五部分

概率、计数与组合

第 13 章 概率、计数与组合

13.1 概率与数学期望

13.2 排列组合模型

计数原理，无重排列与组合，可重排列与组合，圆排列

13.3 二项式定理

二项式定理，组合恒等式

第六部分

初等数论