高中数学 I 习题集

Johnny Tang

DEEP Team

更新：2023 年 3 月 18 日

Chapter 1

集合

1.1 集合及其运算

填空题

问题 1.1 设集合 $M=\{-1,0,1\}$, $N=\{2,3,4,5,6\}$，映射 $f:M\to N$，则对任意的 $x\in M$，使得 $x+f(x)+xf(x)$ 恒为奇数的映射 f 的个数为________.

提示 分类讨论.

问题 1.2 称有限集 S 的所有元素的乘积为 S 的“积数”，给定数集 $M=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{100}\}$，则集合 M 的所有含偶数个元素的子集的“积数”之和为________.

提示 举例分析.

解答题

问题 1.3 （2015 高联）设 a_1,a_2,a_3,a_4 是 4 个有理数，使得 $\{a_ia_j|1\leq i<j\leq 4\}=\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\}$. 求 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值.

提示 通过大小关系将 $a_1a_2,a_1a_3,a_1a_4,a_2a_3,a_2a_4,a_3a_4$ 与这六个数字对应.

问题 1.4 （2017 清华 THUSSAT）已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $a_1<a_2<a_3<a_4$，$a_i\in\mathbb{N}^*$ $(i=1,2,3,4)$. 记 $a_1+a_2+a_3+a_4=S$，集合 $B=\{(a_i,a_j):(a_i+a_j)|S,a_i,a_j\in A,i<j\}$ 中的元素个数为 4 个，求 a_1 的值.

提示 通过大小关系得出不能被 S 整除的两项.

问题 1.5 X 是非空的正整数集合, 满足下列条件: (i) 若 $x \in X$, 则 $4x \in X$; (ii) 若 $x \in X$, 则 $[\sqrt{x}] \in X$. 求证: X 是全体正整数的集合.

提示 将两种关于 X 的性质结合起来看.

问题 1.6 设 S 为非空数集，且满足：(i)$2 \notin S$；(ii) 若 $a \in S$，则 $\dfrac{1}{2-a} \in S$. 证明：
(1) 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$，有 $\dfrac{n}{n-1} \notin S$；(2)S 或者是单元素集，或者是无限集.

提示 数学归纳法.

问题 1.7 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质：(i)P 中的元素有正数，有负数；(ii)P 中的元素有奇数，有偶数；(iii)$-1 \notin P$；(iv) 若 $x, y \in P$，则 $x + y \in P$. 试证明：
(1)$0 \in P$；(2)$2 \notin P$.

提示 第一问：构造；第二问：反证法.

问题 1.8 已知数集 A 具有以下性质: (i)$0 \in A, 1 \in A$; (ii) 若 $x, y \in A$, 则 $x-y \in A$; (iii) 若 $x \in A$, $x \neq 0$, 则 $\dfrac{1}{x} \in A$.
求证：当 $x, y \in A$ 时，则 $xy \in A$.

提示 只需证明 $\dfrac{1}{xy} \in A$，然后构造.

1.2 集合元素的个数

定理 1.1 (容斥原理 1——容斥公式) 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为有限集，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$$

可以使用数学归纳法证明.

定理 1.2 (容斥原理 2——筛法公式) 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为全集 I 的子集，则

$$|\bigcap_{i=1}^{n} \complement_I A_i| = |I| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^{n} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$$

可以通过摩根律证明. 这个公式常常用来计算不满足任意给定性质的子集个数.

填空题

问题 1.9 设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^t+2^s+2^r | 0\le r<s<t,\ r,s,t\in\mathbb{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列，已知 $b_k=1160$，则 k 的值为________.

提示 分段考虑.

问题 1.10 $A=\{z|z^{18}=1\}$，$B=\{w|w^{48}=1\}$ 都是 1 的复单位根的集合，$C=\{zw|z\in A,\ w\in B\}$ 也是 1 的复单位根的集合. 则集合 C 中含有元素的个数为________.

提示 复数的三角表示.

问题 1.11 已知集合 $\{1,2,\cdots,3n\}$ 可以分为 n 个互不相交的三元组 $\{x,y,z\}$，其中 $x+y=3z$，则满足上述要求的两个最小的正整数 n 是________.

提示 从条件 $x+y=3z$ 入手变形消元.

问题 1.12 集合 $M=\{x|\cos x+\lg\sin x=1\}$ 中元素的个数是________.

提示 有没有可能无解？

解答题

问题 1.13 设集合 $M=\{1,2,\cdots,1995\}$，A 是 M 的子集且满足条件：当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$，求 A 中元素个数的最大值.

提示 先构造最大值情况，再证明这是最大值.

问题 1.14 求最大的正整数 n，使得 n 元集合 S 同时满足：(i)S 中的每个数均为不超过 2002 的正整数；(ii) 对于 S 的两个元素 a 和 b(可以相同)，它们的乘积 ab 不属于 S.

提示 先构造最大值情况，再证明这是最大值.

问题 1.15 我们称一个正整数的集合 A 是"一致"的，是指：删除 A 中任何一个元素之后，剩余的元素可以分成两个不相交的子集，而且这两个子集的元素之和相等. 求最小的正整数 $n(n>1)$，使得可以找到一个具有 n 的元素的"一致"集合 A.

提示 将 A 中元素分奇偶讨论.

问题 1.16 设 n 是正整数，我们说集合 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 的一个排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 具有性质 P，是指在 $\{1,2,\cdots,2n-1\}$ 中至少有一个 i，使得 $|x_i-x_{i+1}|=n$，求证：对于任何 n，具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列的个数多.

提示 只需证明具有性质 P 的排列个数大于全部排列数的一半. 利用容斥原理放缩.

问题 1.17 设 $S\subsetneqq\mathbb{R}$ 是一个非空的有限实数集，定义 $|S|$ 为 S 中的元素个数，

$$m(S)=\frac{\sum_{x\in S}x}{|S|}$$

已知 S 的任意两个非空子集的元素的算术平均值都不相同. 定义

$$\dot{S}=\{m(A)|A\subseteq S,\ A\neq\varnothing\}$$

证明：$m(\dot{S})=m(S)$.

提示 贡献法.

1.3 子集的性质

填空题

问题 1.18 设 $S = \{(x,y)|x^2 - y^2$为奇数，$x,y \in \mathbb{R}\}$，$T = \{(x,y)|\sin^2(2\pi x^2) - \sin^2(2\pi y^2) = \cos^2(2\pi x^2) - \cos^2(2\pi y^2)$，$x,y \in \mathbb{R}\}$，则 S 与 T 的关系为________.

提示 变形.

解答题

问题 1.19 设 S 是集合 $\{1,2,3,\cdots,50\}$ 的非空子集，S 中任何两个数之和不能被 7 整除. 求 $\mathrm{card}(S)$ 的最大值.

提示 列举.

问题 1.20 已知集合 $A = \{1,2,\cdots,10\}$. 求集合 A 的具有下列性质的子集个数：每个子集至少含有 2 个元素，且每个子集中任何两个元素的差的绝对值大于 1.

提示 递推思想.

问题 1.21 证明：任何一个有限集的全部子集可以这样地排列顺序，使任意两个相邻的集相差一个元素.

提示 举例或递推.

问题 1.22 对于整数 n $(n \geq 2)$，如果存在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足：
(a) $i \notin A_i$，$i = 1,2,\cdots,n$；
(b) 若 $i \neq j$，$i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$，则 $i \in A_j$ 当且仅当 $j \notin A_i$；
(c) $\forall i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$，$A_i \cap A_j \neq \varnothing$.
则称 n 是“好数”. 证明：(1)7 是“好数”；(2) 当且仅当 $n \geq 7$ 时，n 是“好数”.

提示 举例与构造.

问题 1.23 设 S 是一个有 6 个元素的集合，能有多少种方法选取 S 的两个 (不必不相同) 子集，使得这两个子集的并是 S? 选取的次序无关紧要，例如，一对子集 $\{a,c\},\{b,c,d,e,f\}$ 与一对子集 $\{b,c,d,e,f\},\{a,c\}$ 表示同一种取法.

提示 对 $\mathrm{card}\,(A \cap B)$ 进行讨论.

问题 1.24 （2018 山东预赛）设集合 A, B 满足：$A \cup B = \{1, 2, \cdots, 10\}$，$A \cap B = \varnothing$. 若集合 A 中的元素个数不是 A 中的元素，集合 B 中的元素个数不是 B 中的元素，求满足条件的所有不同的集合 A 的个数.

提示 对 $|A|, |B|$ 进行讨论.

问题 1.25 设 k, n 为给定的整数，$n > k \geq 2$，对任意 n 元的数集 P，作 P 的所有 k 元子集的元素和，记这些和组成的集合为 Q，集合 Q 中元素个数是 C_Q. 求 C_Q 的最大值和最小值.

提示 数学归纳法.

问题 1.26 设集合 $S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. 若 X 是 S_n 的子集，把 X 中所有数的和为 X 的“容量”(规定空集的容量为 0)，若 X 的容量为奇（偶）数，则称 X 为 S_n 的奇（偶）子集.

(1) 证明：S_n 的奇子集与偶子集的个数相等；

(2) 证明：当 $n > 2$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和等于所有偶子集的容量之和；

(3) 当 $n > 2$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

提示 贡献法.

Chapter 2

函数

2.1 函数的极值

2.1.1 恒等变形

问题 2.1 求函数 $f(x)=\sqrt{8x-x^2}-\sqrt{14x-x^2-48}$ 的最值.

解 先求定义域：因为

$$x(8-x)\geq 0,\quad (8-x)(x-6)\geq 0$$

所以 $6\leq x\leq 8$. 再看最值：因为

$$f(x)=\sqrt{8-x}\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{x-6})=\frac{6\sqrt{8-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}}$$

这个函数在 $[6,8]$ 上显然单调递减，则 $f(x)\in[0,2\sqrt{3}]$，取等条件分别为 $x=8,6$.

问题 2.2 若 $x\neq 0$，求

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{x^4+1}}{x}$$

的最大值.

解 容易发现，$f(x)$ 是一个奇函数，故最大值只需考虑 $x>0$ 的情况.
因为

$$f(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$$

令 $t=x+\dfrac{1}{x}\geq 2$，故 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2\geq 2$. 为了将不等号反向，作变换

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\leq\frac{1}{\sqrt{2+1}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

取等条件为 $x=1$.

2.1.2 先猜后凑与配方估计

问题 2.3 设 $x\in\mathbb{R}_+$，求 $y=x^2+x+\dfrac{3}{x}$ 的最小值.

解 先估计函数值的下界：因为

$$y=(x^2-2x+1)+\left(3x+\frac{3}{x}-2\right)+5$$

所以

$$y=(x-1)^2+3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+5\geq 5$$

因为在 $x=1$ 时这个下界可以取到，可知 $y\geq 5$.

注 在对 y 进行配凑时，需要让最后的常数项尽可能大.

问题 2.4 已知 $x,y\in\mathbb{R}$，则 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-x-y$ 的最小值为________.

解 令 $x=y$，则 $f(x,y)=3x^2-2x$，在 $x=\dfrac{1}{3}$ 时取最小值.

作如下变形：

$$f(x,y)=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{2}(x-y)^2-\frac{1}{3}\geq-\frac{1}{3}$$

取等条件为 $x=y=\dfrac{1}{3}$.

问题 2.5 设 x,y 是实数，且 $x^2-2xy+y^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+6=0$，求 $u=x+y$ 的最小值.

解 令 $x=y$，则 $x=3\sqrt{2}$. 由于取等条件是 $x=y$，尝试配凑 $(x-y)^2$.

因为

$$(x-y)^2=\sqrt{2}u-6\geq 0$$

可得 $u\geq 3\sqrt{2}$. 取等条件为 $x=y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

问题 2.6 已知 x,y 是正实数，求

$$f(x,y)=\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

的最小值.

解 令 $x=y$，可知 $f(x,y)\geq 2$.
作如下变形：

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\left(\frac{x^4}{y^4}-2\frac{x^2}{y^2}+1\right)+\left(\frac{y^4}{x^4}-2\frac{y^2}{x^2}+1\right)+\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)+2\\&=\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^2+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)^2+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2+2\\&\geq 2\end{aligned}$$

又因为当 $x=y=1$ 时可以取等，于是 $f(x,y)$ 的最小值为 2.

> **问题 2.7** 设 x,y 是实数，求 $u=x^2+xy+y^2-x-2y+3$ 的最小值.

解 以 x 为主元，因为

$$\begin{aligned}u&=x^2+(y-1)x+y^2-2y+3\\&=\left(x+\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2+2\end{aligned}$$

于是 $u\geq 2$，取等条件为 $x=0,y=1$.

2.1.3 利用函数的性质

> **问题 2.8** 设函数
> $$f(x)=\frac{(x+\sqrt{2013})^2+\sin 2013x}{x^2+2013}$$
> 已知其最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$________.

解 可知

$$f(x)=1+\frac{2\sqrt{2013}x+\sin 2013x}{x^2+2013}$$

容易发现，$f(x)$ 的后一部分是一个奇函数，故 $f(x)$ 关于 $(1,0)$ 对称，即 $M+m=2$.

> **问题 2.9** 求函数 $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2x}$ 的最小值.

解 先看定义域：因为

$$2x^2-3x+4\geq 0,\quad x^2-2x\geq 0$$

可知 $x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$. 由于 $f(x)$ 的两个部分均在 $(-\infty,0]$ 上单调递减、在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，可知 $f(x)$ 也在 $(-\infty,0]$ 上单调递减、在 $[2,+\infty)$ 上单调递增. 于是

$$f(x)\geq\min\{f(0),f(2)\}=f(0)=2$$

2.1.4 综合练习

问题 2.10 求函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值.

解 看到两个如此不规整的根号相加，想到数形结合，然而根号下是四次多项式，不方便直接进行构造. 不过，注意到 $x^4-x^2+1=(x^2-1)^2+x^2$，可以从点 (x,x^2) 入手.

因为

$$f(x)=\sqrt{(x^2-2)^2+(x-3)^2}-\sqrt{(x^2-1)^2+x^2}$$

这表示抛物线 $y=x^2$ 上的一点 $P(x,x^2)$ 到定点 $A(3,2)$ 与 $B(0,1)$ 的距离之差. 因为

$$|PA|-|PB|\le|AB|=\sqrt{10}$$

于是 $f(x)\le\sqrt{10}$，取等条件为 A,B,P 三点共线，即 $x=\dfrac{1-\sqrt{37}}{6}$ 时.

问题 2.11 求函数 $y=x^2+x\sqrt{x^2-1}$ 的值域.

解 注意到，该函数的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 令 $t=\dfrac{1}{x}$ $(t\in[-1,0)\cup(0,1])$，这样的 x 即可满足定义域要求. 于是 $y=\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{1-t^2}{t^2}}$.

当 $t>0$ 时，$y=\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}=\dfrac{1}{1-\sqrt{1-t^2}}$. 由 $\sqrt{1-t^2}\in[0,1)$，可知 $y\in[1,+\infty)$.

当 $t<0$ 时，$y=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}=\dfrac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}$，同理可得 $y\in(\dfrac{1}{2},1]$.

综上，$y\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$.

问题 2.12 证明：函数 $f(x)=3x^2$ 可以表示为两个单调递增的多项式函数之差.

解 为了使得作差后得到 $3x^2$ 且两个多项式函数均单调递增，考虑某两个三次函数.

给定两个多项式函数 $\varphi_1(x)=(x+1)^3$ 与 $\varphi_2(x)=x^3+3x+1$. 容易证明，它们都是单调递增的函数，且 $f(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$.

2.2 二次函数相关问题

2.2.1 参变互换

问题 2.13 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.

(1) 当 $x \in (0, x_1)$ 时，证明：$f(x) < x_1$；

(2) 设函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = x_0$ 对称，证明：$x_0 < \frac{1}{2}x_1$.

解 (1) 因为 $f(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的两根 x_1, x_2 满足

$$x_1 + x_2 = \frac{1-b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) - x_1 &= ax^2 + [1 - a(x_1 + x_2)]x + ax_1x_2 - x_1 \\ &= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] + x - x_1 \\ &= (ax - ax_2 + 1)(x - x_1) \end{aligned}$$

其中，$x - x_1 < 0$，$ax - ax_2 + 1 > 0$，则 $f(x) - x_1 < 0$，即 $f(x) < x_1$.

(2) 由 (1)，此时 $x_0 = \frac{b}{-2a} = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{1}{2a}$. 由 $x_2 < \frac{1}{a}$，显然有 $x_0 < \frac{1}{2}x_1$.

问题 2.14 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 在 $[0, 1]$ 上的函数值的绝对值不超过 1，求 $|a| + |b| + |c|$ 的最大值.

解 因为 $f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1) \in [-1, 1]$，且

$$a = 2f(1) + 2f(0) - 4f\left(\frac{1}{2}\right), \quad b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - 3f(0) - f(1), \quad c = f(0)$$

所以

$$S_0 = |2f(1) + 2f(0) - 4f\left(\frac{1}{2}\right)| + |4f\left(\frac{1}{2}\right) - 3f(0) - f(1)| + |f(0)|$$

且这个式子在 $f(0), f(1)$ 增大时增大，在 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 增大时减小. 故

$$S_0 \leq 8 + 8 + 1 = 17$$

取等条件为 $f(1) = 1, f(0) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$，即 $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$.

问题 2.15 求函数 $y = 2x - 3 + \sqrt{x^2 - 12}$ 的值域.

解 该函数的定义域为 $(-\infty, -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$. 于是，关于 x 的方程 $2x - 3 + \sqrt{x^2 - 12} - y = 0$ 在该定义域上有解. 该方程等价于

$$3x^2 - (4y + 12)x + y^2 + 6y + 21 = 0$$

2.2.2 调整

问题 2.16 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a > b > c)$ 的图像上有两点 $A(m_1, f(m_1))$，$B(m_2, f(m_2))$，且满足

$$f(1) = 0, \quad a^2 + [f(m_1) + f(m_2)]a + f(m_1)f(m_2) = 0$$

(1) 求证：$b \geq 0$；
(2) 求证：$f(x)$ 的图像被 x 轴截得线段长的取值范围是 $[2, 3)$；
(3) 问能否得出 $f(m_1 + 3), f(m_2 + 3)$ 中至少有一个为正?

解 (1) 由第二个式子，$a = -f(m_1)$ 或 $-f(m_2)$，也即 $f(x) = -a$ 的两根为 m_1, m_2. 这告诉我们方程

$$ax^2 + bx + a + c = 0$$

有两个实数解，即 $\Delta = b^2 - 4a(a + c) \geq 0$.
由 $f(1) = 0$，有 $b = -a - c$，故 $(a + c)^2 - 4a(a + c) \geq 0$，即 $(3a - c)(a + c) \leq 0$. 又因为 $a + b + c = 0$ 中必有一正一负，且 $a > b > c$，故 $a > 0 > c$，于是必有 $a + c \leq 0$，即 $b \geq 0$.
(2) 由于 $f(1) = 0$，又 $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$，可知 $f(x)$ 的零点为 $1, \dfrac{c}{a}$. 下证 $1 - \dfrac{c}{a} \in [2, 3)$：
因为 $a > b = -a - c$，可知 $\dfrac{c}{a} > -2$；因为 $b = -a - c \geq 0$，可知 $\dfrac{c}{a} \leq -1$. 带入上式，即 $1 - \dfrac{c}{a} \in [2, 3)$.
(3) 不妨设 $a = -f(m_1)$，即 $f(m_1) = a(m_1 - 1)(m_1 - \dfrac{c}{a}) = -a$，可得 $(m_1 - 1)(m_1 - \dfrac{c}{a}) = -1 < 0$，所以 $\dfrac{c}{a} < m_1 < 1$，于是 $\dfrac{c}{a} + 3 < m_1 + 3 < 4$，即 $m_1 + 3 > 2$. 又因为 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a} + 1\right), +\infty\right)$ 上单调递增，即 $f(x)$ 一定在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，于是

$$f(m_1 + 3) > f(1) = 0$$

同理，对于 $a = -f(m_2)$ 的情况，可以得到 $f(m_2 + 3) > 0$. 原题即证毕.

Chapter 3

三角函数

3.1 有关三角函数概念的问题

问题 3.1 (2015 高联) 设 w 是正实数，若存在 a, b $(\pi \leq a < b \leq 2\pi)$，使得 $\sin\omega a + \sin\omega b = 2$，求 ω 的取值范围.

解 由 $\sin\omega a, \sin\omega b \leq 1$，$\sin\omega a = \sin\omega b = 1$. 记 $\omega a = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\omega b = 2l\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $(k, l \in \mathbb{Z})$，则存在 k, l 使得

$$\omega\pi \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2l\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2\omega\pi$$

当区间 $[\omega\pi,\ 2\omega\pi]$ 的长度 $\geq 4\pi$ 时，总存在 k, l 满足上式；当 $\omega \in (0, 4)$ 时:

1° 若 $\omega\pi \leq \dfrac{1}{2}\pi < \dfrac{5}{2}\pi \leq 2\omega\pi$，此时 ω 无解；

2° 若 $\omega\pi \leq \dfrac{5}{2}\pi < \dfrac{9}{2}\pi \leq 2\omega\pi$，此时 $\omega \in \left[\dfrac{9}{4}, \dfrac{5}{2}\right]$；

3° 若 $\omega\pi \leq \dfrac{9}{2}\pi < \dfrac{13}{2}\pi \leq 2\omega\pi$，此时 $\omega \in \left[\dfrac{13}{4}, \dfrac{9}{2}\right]$，该上界已经超出 4，故 $\omega \in \left[\dfrac{9}{4}, 4\right)$.

综上，$\omega \in \left[\dfrac{9}{4}, \dfrac{5}{2}\right] \cup \left[\dfrac{9}{4}, +\infty\right)$

问题 3.2 设函数 $f(x) = \sin\left(\dfrac{11}{6}\pi x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

(1) 对于任意的正数 α，是否总能找到不小于 α，且不大于 $(\alpha+1)$ 的两个数 a, b，使 $f(a) = 1, f(b) = -1$? 给出答案并证明.

(2) 若 α 是任意自然数，再次讨论上述问题.

解 (1) 答案是否定的. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{12}{11} > 1$，故在一段长度为 1 的区间上不一定能同时给出极大值与极小值. 现在进行反例构造:

取 $f(a) = 1$，例如 $a = \dfrac{1}{11}$. 找一个以 $x = a$ 为中心、长度为 1 的区间，即区间 $\left(-\dfrac{9}{22}, \dfrac{13}{22}\right)$. 在该区间上取

不到最小值 -1.

(2) 假设找不到这样的 a,b，由于使 $f(x)$ 函数值为 -1 的自变量 x 的集合为 $\left\{x \mid x=\dfrac{12}{11}k+\dfrac{7}{11},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$，故存在一个 α 使得

$$\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}-\frac{12}{11}<\alpha<\alpha+1<\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}$$

即要求 $\dfrac{12k-5}{11}<\alpha<\dfrac{12k-1}{11}$. 由于 α 是自然数，这样的 α 便不存在，与假设矛盾. 原命题即得证.

问题 3.3 求证：存在唯一的一对实数 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\alpha<\beta$，使得 $\sin(\cos\alpha)=\alpha$，$\cos(\sin\beta)=\beta$.

解 从 $\sin$ 入手：记 $f(x)=\sin(\cos x)-x$. 由于 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，且 $f(0)>0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，故 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一一个 α 满足 $\sin(\cos\alpha)=\alpha$.

为了凑出 $\cos(\sin\beta)$，令 $\alpha=\sin\beta$，即 $\sin(\cos(\sin\beta))=\sin\beta$，由于 $\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，故 $\cos(\sin\beta)=\beta$，而这样的 β 由 α 唯一确定，即 β 满足题意. 最后，由于 $\sin(\cos\alpha)=\sin(\cos(\sin\beta))=\sin\beta<\beta$，可知 $\alpha<\beta$.

问题 3.4 (1983 高联) 函数 $F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$ 在 $\left[0,\dfrac{3}{2}\pi\right]$ 上的最大值 M 与参数 A,B 有关. 问 A,B 取什么值时，M 为最小？并证明你的结论.

解 化简 $F(x)$，则 $F(x)=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|$. 观察 $F(x)$ 的图像，其是一个正弦型函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 与一次函数 $g(x)=Ax+B$ 之和的绝对值，极值只能在 $\dfrac{\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{9\pi}{8}$ 处取到. 以 $\dfrac{\pi}{8}$ 为例：

1° 当 $g\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\neq 0$ 时，不妨令 $g\left(\dfrac{\pi}{8}\right)>0$，即 $\dfrac{\pi}{8}A+B>0$：当 $A>0$ 时，$M=\sqrt{2}+\dfrac{9\pi}{8}A+B>\sqrt{2}+A>\sqrt{2}$；当 $A\le 0$ 时，$M=\sqrt{2}+\dfrac{\pi}{8}A+B>\sqrt{2}$.

2° 当 $g\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=0$ 时，即 $\dfrac{\pi}{8}A+B=0$：当 $A\neq 0$ 时，$M=\sqrt{2}+\dfrac{9\pi}{8}A+B$ 或 $\sqrt{2}+\dfrac{5\pi}{8}A+B>\sqrt{2}$；当 $A=0$ 时，$B=0$，则 $M=\sqrt{2}$.

综上，M 的最小值为 $\sqrt{2}$.

Chapter 4

平面向量

填空题

问题 4.1 在边长为 8 的正方形 $ABCD$ 中，M 是 BC 的中点，N 是 AD 边上的一点，且 $DN = 3NA$，若对于常数 m，在正方形 $ABCD$ 的边上恰有 6 个不同的点 P，使 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = m$，则实数 m 的取值范围为________.

问题 4.2 已知点 P, Q 在 $\triangle ABC$ 内，且 $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{QA} + 3\overrightarrow{QB} + 5\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{0}$，则 $\dfrac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AB}|}$ 的值为________.

问题 4.3 已知向量 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$，且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 24$. 若 $t \in [0, 1]$，则 $|t\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}| + |\dfrac{5}{12}\overrightarrow{BO} - (1-t)\overrightarrow{BA}|$ 的最小值为________.

Chapter 5

复数

Chapter 6

数列

Chapter 7

极限与导数

Chapter 8

不等式

Chapter 9

概率统计与计数

Chapter 10

解析几何

Chapter 11

立体几何