Konrad Idzik

Spis treści

1. Problem

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = 4\pi\rho(x)$$

$$\Phi(0) = 5$$

$$\Phi(3) = 2$$

$$\rho(x) = \begin{cases} -10 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 1 & \text{dla } x \in (1,2] \\ -10 & \text{dla } x \in (2,3] \end{cases}$$

2. Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

$$\Phi''(x) = 4\pi\rho(x)$$

Z obu stron mamy warunki Dirichleta, więc za przestrzeń funkcji V przyjmujemy te funkcje v, które zerują się na brzegach. Mnożę równanie przez $v \in V$, następnie całkuję na $[0,3]$

$$\int_0^3 \Phi''(x)v(x)dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)dx$$

Całkuję lewą stronę przez części

$$[\Phi'(x)v(x)]_0^3 - \int_0^3 \Phi'(x)v'(x)dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)dx$$

Ponieważ $v \in V$, to $v(0) = v(3) = 0$

$$-\int_0^3 \Phi'(x)v'(x)dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)dx$$

Ponieważ warunki brzegowe są nie zerowe, będziemy szukać funkcji postaci:

$$\Phi(x) = \tilde{\Phi}(x) + w(x)$$

gdzie $w \in V$ oraz $\tilde{\Phi}(x)$ to funkcja spełniająca warunki brzegowe. Możemy przyjąć

$$\tilde{\Phi}(x) = 5 - x$$

Więc

$$-\int_0^3 (\tilde{\Phi}(x) + w(x))'v'(x)dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)dx$$

$$-\int_0^3 (5 - x + w(x))'v'(x)dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)dx$$

$$\underbrace{-\int_0^3 w'(x)v'(x)dx}_{B(w,v)} = \underbrace{\int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)dx - \int_0^3 v'(x)dx}_{L(v)}$$

3. Funkcje bazowe

Aby wyznaczyć rozwiązanie, będziemy dzielić przedział $[0, 3]$ na N równych części o długości $h = \frac{3}{N}$. Funkcje bazowe przyjmą następującą postać

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_i - x_{i-1}} & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [x_{i-1}, x_{x+1}] \end{cases}$$

Korzystając, że $x_{i+1} - x_i = h$ oraz $x_i = hi$

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x - h(i-1)}{h} = \frac{x}{h} - i + 1 & \text{dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{h(i+1) - x}{h} = i + 1 - \frac{x}{h} & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [x_{i-1}, x_{x+1}] \end{cases}$$

$$e_i{}'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h} & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [x_{i-1}, x_{x+1}] \end{cases}$$

4. Metoda Galerkina

Ideą metody jest aproksymacja rozwiązania liniową kombinacją funkcji bazowych $e_i = e_i(x)$

$$w \approx w_h = \sum_{j=1}^{N-1} w_i e_i$$

Ponieważ mamy po obu stronach warunki Dirichleta

$$U_h = \text{span}\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$$

$w_h \in U_h$ oraz $v \in U_h$

$$B(w_h, v) = L(v)$$

$$B\left(\sum_{i=1}^{N-1} w_i e_i, v\right) = L(v)$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} w_i B(e_i, v) = L(v)$$

Ponieważ równanie musi być spełnionej dla każdej funkcji testowej v. Otrzymujemy $N - 1$ równań

$$\sum_{i=1}^{N-1} w_i B(e_i, e_j) = L(e_j), \text{ dla } j \in \{1, 2, ..., N-1\}$$

Możemy zapisać układ równań za pomocą macierzy

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & ... & B(e_{N-1}, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_{N-1}, e_1) & ... & B(e_{N-1}, e_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_{N-1}) \end{bmatrix}$$

Po obliczeniu $w_1, ..., w_{N-1}$rozwiązanie przybliżone to

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{N-1} w_i e_i + 5 - x$$

5. Spostrzeżenia

1. **Symetria macierzy**: Zachodzi własność $B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$, co oznacza, że macierz jest symetryczna.
2. **Rzadkość macierzy**: $\forall_{|i-j|>1} B(e_i, e_j) = 0$, ponieważ $e_i{}' e_j{}' = 0$. Oznacza to, że większość elementów macierzy jest równa zeru, co pozwala pominąć ich obliczanie. Zostaną jedynie elementy $B(e_i, e_{i+1})$ oraz $B(e_i, e_i)$.