Geometría Analítica

Efraín Soto Apolinar

TÉRMINOS DE USO

Soto Apolinar, Efraín.
Geometría Analítica
2010 edición.
Incluye índice.
México. 2010.

El contenido de este libro corresponde al curso de Matemáticas para Bachillerato: Tercer Semestre

Índice de contenidos

Capítulo 1

Sistemas de ejes coordenados

Por aprender...

Por qué es importante...

En el aprendizaje de cualquier ciencia, es importante concer la terminología con la que estamos hablando. En esta unidad vamos a descubrir las fórmulas que nos servirán para el resto del curso.

1.1 Coordenadas de un punto

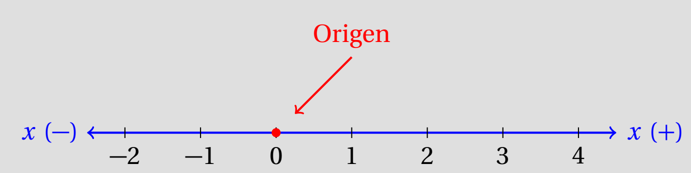
En esta sección iniciamos con las definiciones de algunos conceptos básicos sobre los cuales descansan todos los demás conceptos que utilizaremos a lo largo del curso.

1.1.1 Ejes Coordenados

Recta dirigida
Sobre una línea recta eleginos un punto al cual llamaremos origen. A partir de este punto se definen las direcciones una como positiva y la otra como negativa.
Nosotros utilizaremos una unidad de medida en cada recta dirigida.

Definición 1

Por ejemplo, la siguiente es una recta dirigida:



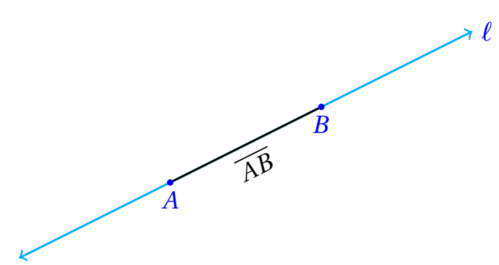
En una recta dirigida definimos una unidad de medida y un origen, donde colocamos el cero.

También definimos en qué dirección se consideran los números positivos. Una vez definida esta dirección, la otra dirección se considera que contiene los números negativos.

Segmento
Es una parte de una recta limitada por dos de sus puntos.

Definición 2

El siguiente segmento está limitado por los puntos A y B y se denota por $\overline{AB}$.



Pero no tenemos por qué conformarnos con usar solamente una recta dirigida. Algunas veces es muy conveniente considerar dos rectas dirigidas.

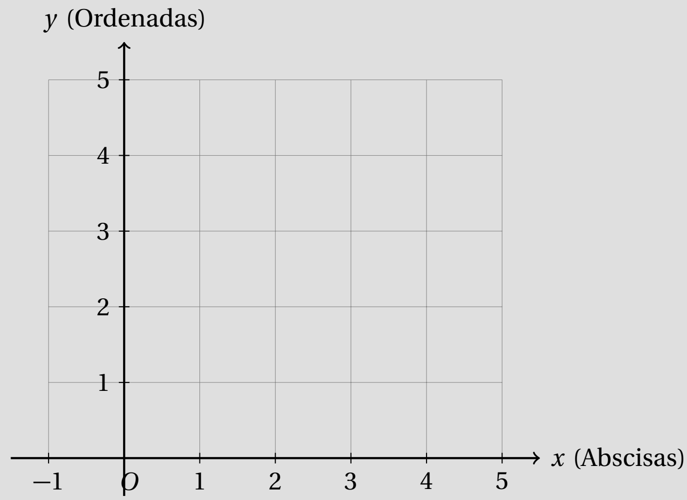
Por ejemplo, en algunas ciudades, las calles están enumeradas. De manera que una dirección puede ser, Calle 34 Entre 21 y 23. Esto ayuda a localizar de una manera más rápida una ubicación.

Definición 3

EJES COORDENADOS

Un sistema de ejes coordenados se representa por medio de dos rectas dirigidas, mutuamente perpendiculares.
Las dos rectas dirigidas se intersectan en sus respectivos orígenes.
Cada una de las rectas que forman el sistema de ejes coordenados se conoce como eje.
Es común dibujar los sistemas de ejes coordenados con un eje horizontal (abscisas) y el otro vertical (ordenadas) con la unidad de medida común a ambos.

El siguiente es un sistema de ejes coordenados:



De esta manera, cuando elegimos un punto del plano así formado, podemos asignar un único par de valores, que corresponden a la distancia del origen a la coordenada que le corresponde en cada uno de los ejes.

Por ejemplo, fácilmente podemos ubicar el punto $A(3,2)$ en el sistema de ejes coordenados. Primero recorremos a partir del origen 3 unidades y después, verticalmente avanzamos 2 unidades.

Definición 4

COORDENADA DE UN PUNTO

Cuando un punto del plano se define a través de las distancias de sus respectivos ejes al origen, se dice que cada uno de los valores son sus coordenadas.

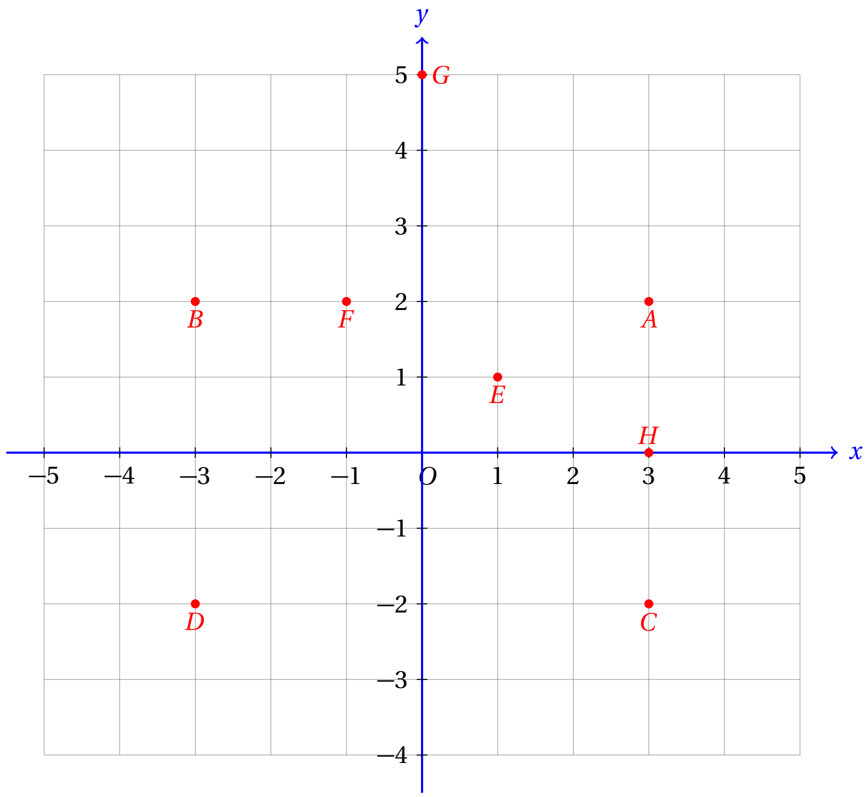
Por ejemplo, en el punto $A(3,2)$ el número 3 es la coordenada de las abscisas, o también del eje horizontal, que comúnmente llamaremos eje x y el número 2 es la coordenada de las ordenadas, o del eje vertival, que llamaremos eje y.

Ejemplo 1

Ubica los siguientes puntos en el sistema de ejes coordenados dado:

✓ $A(3,2)$	✓ $C(3,-2)$	✓ $E(1,1)$	✓ $G(0,5)$
✓ $B(-3,2)$	✓ $D(-3,-2)$	✓ $F(-1,2)$	✓ $H(3,0)$

- Recuerda, siempre debemos primero ubicar la primera coordenada sobre el eje horizontal.



- Junto a la etiqueta que corresponde a cada punto escribe sus coordenadas.

Observa que si $A(x_a, y_a)$ y $B(x_b, y_b)$, entonces, $A = B$ solamente si $x_a = x_b$ y también, $y_a = y_b$.

En palabras, dos puntos son el mismo punto si tienen exactamente las mismas coordenadas (en el mismo sistema de ejes coordenados).

En la geometría analítica frecuentemente necesitaremos calcular la distancia entre dos puntos, para lo cual nos será de gran ayuda la siguiente fórmula:

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$ dos puntos del plano. La distancia entre ellos, medido en la unidad de medida del sistema de coordenadas es igual a:

$$D = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$$

Definición 5

A partir de la fórmula anterior, podemos deducir las siguientes:

Condiciones que satisface la distancia entre dos puntos:

✓ La distancia entre dos puntos del plano cartesiano siempre es un número no negativo.

✓ La distancia de un punto a sí mismo siempre es igual a cero.

✓ La distancia de P a Q es igual a la distancia del punto Q al punto P.

Comentario

Encuentra la distancia entre los puntos $P(2,3)$ y $Q(6,6)$. **Ejemplo 2**

- Podemos aplicar directamente la fórmula y sustituir las coordenadas de los puntos:

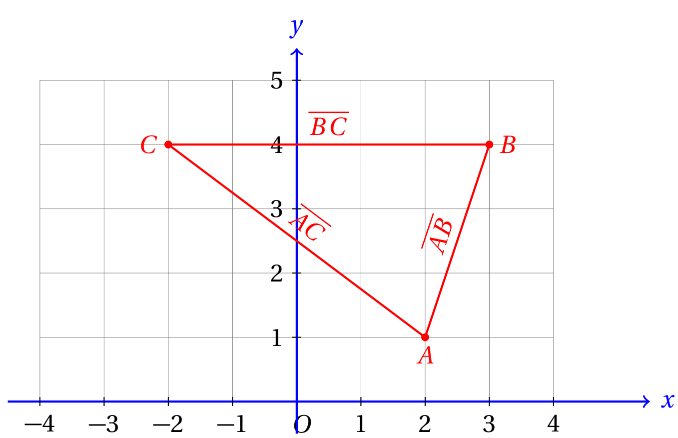
$$\begin{aligned}
D &= \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}\\
&= \sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2}\\
&= \sqrt{(4)^2 + (3)^2}\\
&= \sqrt{16+9}\\
&= \sqrt{25}\\
&= 5
\end{aligned}$$

- Entonces, si el sistema de coordenadas tiene por unidad de medida el centímetro, la distancia entre los puntos $P(2,3)$ y $Q(6,6)$ será de 5 cm.
- Se te queda como ejercicio verificar la tercera condición que satisface la distancia entre los puntos P y Q.

En este curso vamos a utilizar las definiciones de la geometría plana para poder resolver muchos problemas y probar propiedades de las figuras geométricas, pero ahora vamos a utlizar el álgebra para poder demostrar o identificar propiedades de los objetos geométricos con los que nos encontraremos.

Ejemplo 3 Verifica si el triángulo con vértices en los puntos $A(2,1)$, $B(3,4)$ y $C(-2,4)$ es isósceles.

- Para saber si es isósceles o no, debemos asegurarnos que dos de sus lados midan lo mismo.
- Así que tenemos que encontrar la longitud de cada uno de sus lados.
- Realizamos un dibujo para representar la situación:



- Al parecer, los lados que tienen la misma longitud son $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
- Ahora encontramos la longitud del lado $\overline{AC}$:

$$\begin{aligned}
D_{\overline{AC}} &= \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}\\
&= \sqrt{(-2-2)^2 + (4-1)^2}\\
&= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9}\\
&= \sqrt{25} = 5
\end{aligned}$$

- Por otra parte, la longitud del lado BC es:

$$\begin{aligned} D_{\overline{BC}} &= \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2} \\ &= \sqrt{(-2-3)^2 + (4-4)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (0)^2} = \sqrt{25+0} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

- Entonces, el triángulo sí es un triángulo isósceles.

PUNTO DE DIVISIÓN
Sean P y Q dos puntos fijos en una recta dirigida. Se dice que el punto M divide al segmento $\overline{PQ}$ en otros dos segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MQ}$.

Definición 6

Lo interesante del punto de división consiste en la proporción de los segmentos formados por él.

RAZÓN DE DIVISIÓN
La razón de división r ocasionada por el punto de división M sobre el segmento $\overline{PQ}$ es:

$$r = \frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}}$$

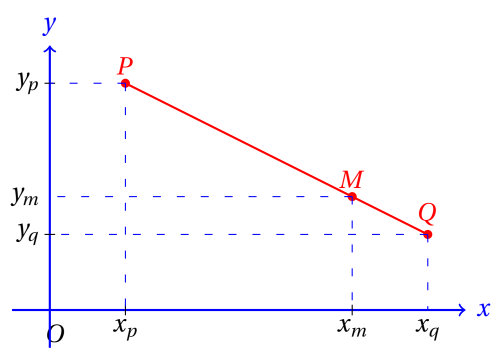
Definición 7

Si consideramos que $M(x_m, y_m)$ es el punto de división del segmento $\overline{PQ}$, entonces, podemos escribir:

$$r = \frac{x_m - x_p}{x_q - x_m}$$

y de manera semejante:

$$r = \frac{y_m - y_p}{y_q - y_m}$$



A partir de cada una de las ecuaciones podemos despejar x_m y y_m respectivamente, que es, la mayoría de las veces, lo que necesitaremos encontrar:

$$\begin{aligned} r &= \frac{x_m - x_p}{x_q - x_m} \\ r\,(x_q - x_m) &= x_m - x_p \\ r\,x_q - r\,x_m &= x_m - x_p \\ r\,x_q + x_p &= x_m + r\,x_m \\ r\,x_q + x_p &= x_m(1+r) \\ x_m &= \frac{r\,x_q + x_p}{1+r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{y_p - y_m}{y_m - y_q} = \frac{y_m - y_p}{y_q - y_m} \\ r\,(y_q - y_m) &= y_m - y_p \\ r\,y_q - r\,y_m &= y_m - y_p \\ r\,y_q + y_p &= y_m + r\,y_m \\ r\,y_q + y_p &= y_m(1+r) \\ y_m &= \frac{r\,y_q + y_p}{1+r} \end{aligned}$$

Es importante recordar que r es la proporción de las longitudes de los segmentos formados al incluir el punto de división M en el segmento.

La proporción es una constante que se define como la razón de la longitud del semento $\overline{PM}$ entre la longitud del segmento $\overline{MQ}$.

Definición 8

COORDENADAS DEL PUNTO DE DIVISIÓN CON UNA RAZÓN DADA

Las coordenadas del punto de división $M(x_m, y_m)$ del segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$ con una razón r, se calculan con las siguientes fórmulas:

$$x_m = \frac{r\,x_q + x_p}{1+r} \qquad\qquad y_m = \frac{r\,y_q + y_p}{1+r}$$

Ejemplo 4

Encuentra las coordenadas del punto $M(x_m, y_m)$ que divide al segmento cuyos extremos son los puntos $P(1,-1)$, y $Q(7,2)$ en la razón $r = 2$.

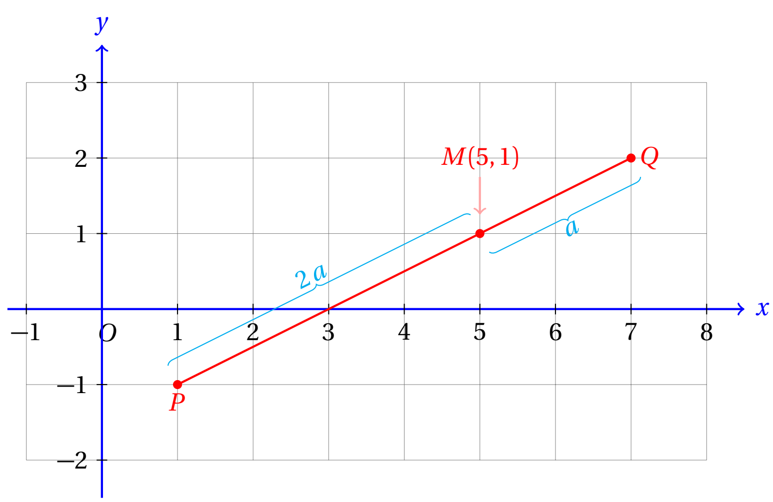
- Tenemos todos los datos:

✓ $r = 2$ ✓ $x_p = 1,\ y_p = -1$ ✓ $x_q = 7,\ y_q = 2$

- Lo único que necesitamos es sustituir en las fórmulas:

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{2(7)+1}{1+2} \\ &= \frac{15}{3} \\ &= 5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y_m &= \frac{2(2)-1}{1+2} \\ &= \frac{3}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- La siguiente figura muestra geométricamente el resultado:



Un caso particular muy importante ocurre cuando consideramos el punto medio.

Entonces, $r = 1$, porque queremos que ambos segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MQ}$ tengan la misma longitud.

En este caso:

$$\bar{x} = \frac{x_q + x_p}{2} \qquad\qquad \bar{y} = \frac{y_q + y_p}{2}$$

Punto medio

Las coordenadas del punto medio $M(\bar{x}, \bar{y})$ del segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$ se calcula con las siguientes fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{x_q + x_p}{2} \qquad \bar{y} = \frac{y_q + y_p}{2}$$

Definición 9

Una forma sencilla de memorizar esta fórmula es la siguiente:

La coordenada del punto medio se calcula con el promedio

Comentario

Observa que en cada fórmula debemos calcular el promedio de las coordenadas de los puntos extremos del segmento para calcular la coordenada de su punto medio. Así de fácil.

Gracias a la propiedad de conmutatividad, el punto medio de un segmento es independiente del orden. Es decir, no importa qué punto sustituyas primero y cuál después, siempre obtienes el mismo resultado. Después de todo, el segmento $\overline{PQ}$ es idéntico al segmento $\overline{QP}$.

Los extremos del diámetro de un círculo son los puntos $P(-4, 1)$ y $Q(2, -3)$. Encuentra las coordenadas de su centro $C(h, k)$.

Ejemplo 5

- Sabemos que el centro del círculo siempre es el punto medio del diámetro.

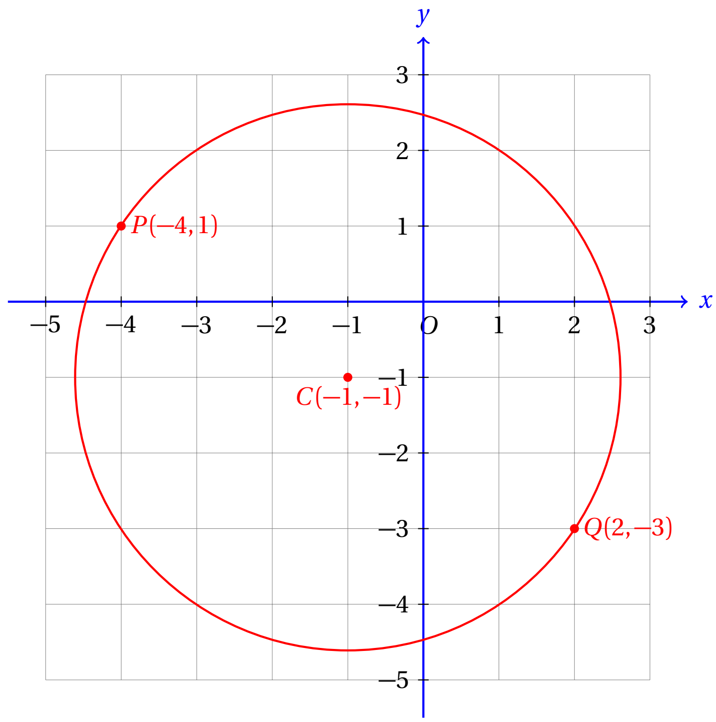
- Así que en este caso debemos encontrar el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

- Sustituimos los valores de las coordenadas de los puntos en las fórmulas:

$$\begin{aligned} h &= \frac{-4+2}{2} \\ &= \frac{-2}{3} \\ &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} k &= \frac{1-3}{2} \\ &= \frac{-2}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

- Entonces, el centro del círculo es el punto $C(-1, -1)$.

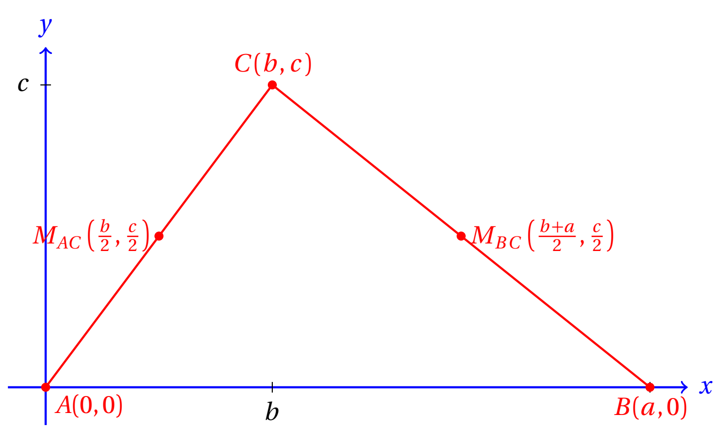
- Geométricamente, el resultado es el siguiente:



Estas fórmulas se estarán utilizando a lo largo de todo el curso, así que es mejor que las vayas memorizando.

Ejemplo 6 Demuestra que la longitud del segmento que se forma al unir los puntos medios de dos de los lados de un triángulo mide la mitad del otro lado.

- Consideramos el triángulo con vértices en los siguientes puntos:



- La distancia desde el punto medio del lado $\overline{AC}$ hasta el punto medio del lado $\overline{BC}$ es:

$$\overline{M_{AC}M_{BC}} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\right)^2}$$

- Podemos simplificar esta expresión para obtener:

$$
\begin{aligned}
\overline{M_{AC}M_{BC}} &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2+0}\\
&= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2}\\
&= \frac{|a|}{2}
\end{aligned}
$$

Que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Siempre que encuentres problemas donde requieras demostrar una aseveración, escribe las coordenadas suponiendo que son números.

Trátalos como si fueran números siempre, indicando las operaciones que debes hacer con ellos y trata de expresar tus resultados de la manera más simplificada que te sea posible.

Cuando encuentres lo que deseas demostrar has terminado.

Estos problemas tienen exactamente el mismo nivel de dificultad que en el que te dan números específicos para las coordenadas de puntos, etc., pero tienen un mayor nivel de abstracción, porque debes suponer que cada letra es un número.

El método de solución del problema no cambia en forma alguna.

Si tienes dificultad para resolver un problema usando las literales, sustituye números en su lugar, resuelve el problema y después intenta resolverlo con letras usando el método que usaste para resolverlo con números en lugar de literales.

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios. De ser posible, realiza una gráfica para cada uno de ellos. El simbolo ✌ indica que el problema tiene dos soluciones correctas. **Ejercicios 1.1.1**

1) Encuentra el punto medio para cada par de los siguientes puntos:

✓ $A(2,7), B(6,5)$
✓ $C(1,-2), D(-1,2)$
✓ $E(3,5), F(7,9)$
✓ $G(-2,10), H(2,-10)$
✓ $I(-1,-1), J(3,7)$
✓ $K(-3,-5), L(-2,0)$
✓ $M(7,3), N(5,11)$
✓ $P(1,5), Q(3,1)$
✓ $R(-5,4), S(-4,5)$

2) ¿A qué distancia del origen se encuentra el punto $A(6,8)$? A 10 unidades.

3) Dos puntos que se encuentran sobre el eje x están a 12 unidades de distancia entre sí. El primero de ellos es el punto $x=5$. ¿Cuál es el otro punto? ✌ $x=17$, $x=-7$.

4) Un cuadrado tiene dos de sus vértices en los puntos $P(1,2)$ y $Q(5,2)$. Encuentra los otros dos vértices R y S. $R(5,6)$ y $S(1,6)$.

5) Un rectángulo con base igual al doble de la altura tiene dos de sus vértices en los puntos $A(1,1)$ y $B(1,5)$. Encuentra los demás vértices si la base es un lado horizontal. $C(9,1)$ y $D(9,5)$.

6) Calcula la distancia desde el origen hasta el punto $P(x,y)$. Expresa tu resultado como una fórmula. $D_{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$.

7) Calcula las coordenadas del punto medio $M(x_m,y_m)$ entre el origen y el punto $A(6,8)$. Encuentra también la distancia desde el origen hasta M. $M(3,4)$, $|\overline{OM}|=5$ unidades.

8) Encuentra los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo cuyos vértices están sobre los puntos $A(2,1)$, $B(10,3)$ y $C(6,5)$. $M_{AC}(4,3), M_{AB}(6,2), M_{BC}(8,4)$.

9) Un estudiante estipuló: «*El triángulo con vértices en los puntos* $P(-1,2)$, $Q(2,1)$ *y* $R(2,6)$, *es isósceles.*» Verifica si tiene razón o si está equivocado, calculando las longitudes de los tres lados del triángulo. Las longitudes de los lados del triángulo son: 5, 5 y $\sqrt{10}$.

10) Calcula el área del triángulo con vérices en los puntos: $A(-1,1)$, $B(1,-1)$ y $C(3,2)$ usando la fórmula de Herón (lee el formulario de esta unidad.) 5 u^2.

11) Verifica si el cuadrilátero con vértices en los puntos $P(2,1)$, $Q(3,4)$, $R(7,4)$ y $S(6,1)$ es un paralelogramo. Sí es.

12) Calcula la longitud de las diagonales del cuadrilátero del problema anterior. Calcula también el punto medio de cada diagonal. $\overline{PR} = \sqrt{34}$ y $\overline{QS} = \sqrt{18}$. $M_{PR} = M_{QS} = (9/2, 5/2)$.

13) Los puntos medios de los lados de un triángulo $\triangle(ABC)$ son: $O(0,0)$, $P(1,2)$ y $Q(2,1)$. Calcula las coordenadas de cada vértice. $A(-1,1)$, $B(1,-1)$ y $C(3,3)$.

14) De acuerdo a la clasificación de los triángulos por la medida de sus lados, ¿qué tipo de triángulo es el del problema anterior? Isósceles.

15) Los vértices de un paralelogramo son los puntos $P(1,1)$, $Q(2,4)$, $R(6,4)$ y $S(5,1)$. Calcula la longitud de cada diagonal. **Nota.** Una diagonal es el segmento que divide al paralelogramo en dos triángulos. $\overline{QS} = 4.24$, $\overline{PR} = 5.83$.

16) Calcula el área del paralelogramo del problema anterior. **Sugerencia:** Usa la fórmula de Herón. 12 u^2.

17) Dos de los vértices de un triángulo equilátero están en los puntos $P(2,2)$ y $Q(6,2)$. Calcula las coordenadas del tercer vértice. ✌ $R(4, 2+2\sqrt{3})$ y $R(4, 2-2\sqrt{3})$.

18) El segmento de recta con extremos en los puntos: $P(-2,3)$ y $Q(4,1)$ se alarga al doble de su longitud original al agregar en ambos lados una longitud igual a la mitad de su longitud inicial. Calcula las coordenadas de los extremos del nuevo segmento. $P'(-7,7), Q'(8,-2)$.

19) El segmento de recta con extremos en los puntos: $P(-2,4)$ y $Q(3,1)$ se alarga extendiéndose en ambos lados una longitud igual a su longitud inicial. Calcula las coordenadas de los extremos del nuevo segmento. $P'(-5,4), Q'(7,0)$.

20) **Reto:** Demuestra que las longitudes de las diagonales de un rectángulo son iguales. **Sugerencia:** Considera el rectángulo con vértices en los puntos: $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,b)$ y $D(0,b)$.

21) **Reto:** ¿Existe un punto $P(x,y)$ que divida al segmento $\overline{AB}$ con $A(2,3)$ y $B(5,7)$ en la razón $r=-1$? Argumenta tu respuesta. No existe, porque no podemos dividir por cero.

22) **Reto:** Demuestra que para todo triángulo rectángulo, el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices del triángulo. **Sugerencia:** Considera los vértices del triángulo en los puntos $O(0,0)$, $A(a,0)$ y $B(0,b)$.

1.1.2 Lugares geométricos

En esta sección estudiaremos el concepto de lugar geométrico, concepto clave para el desarrollo del estudio de los conceptos de este semestre.

LUGAR GEOMÉTRICO
El conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen ciertas condiciones dadas, y solamente esos puntos, se llama el lugar geométrico de esas condiciones.

Definición 1

La curva representada por una ecuación dada (referida a un sistema de coordenadas) es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Es decir, al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación, en ésta se cumple la igualdad.

Nosotros generalmente hablaremos de la ecuación de una curva refiriéndonos a lo anterior. También frecuentemente utilizaremos las palabras «*curva*» o «*gráfica*» como sinónimo de lugar geométrico.

La geometría analítica se dedica al estudio de las propiedades algebraicas y geométricas de los lugares geométricos.

GEOMETRÍA ANALÍTICA
Es el estudio de las propiedades geométricas por medio de operaciones algebraicas sobre símbolos definidos en términos de un sistema de coordenadas. La geometría analítica también se conoce como geometría de coordenadas.

Definición 2

La idea central de la geometría analítica está basada en el concepto de lugar geométrico, en el sentido de que si conocemos cualquier punto $P(x, y)$ que pertenece al lugar geométrico dado, entonces las condiciones nos ayudan a encontrar la ecuación del lugar geométrico.

Los siguientes ejemplos aclaran esta idea.

Encuentra la ecuación de lugar geométrico cuyos puntos equidistan de los extremos del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(-1,3)$ y $B(3,1)$.

Ejemplo 1

- Para esto necesitamos escribir de manera algebraica la condición dada en el problema.
- Sabemos que si el punto $P(x, y)$ pertenece al lugar geométrico, la distancia $\overline{AP}$ es igual a la distancia $\overline{PB}$.
- Algebraicamente, la distancia del punto A al punto P es:

$$|\overline{AP}| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$$

- Por otra parte, la distancia del punto P al punto B es:

$$|\overline{PB}| = \sqrt{(3-x)^2 + (1-y)^2}$$

- El problema nos dice que estas distancias son iguales, entonces:

$$\begin{aligned} |\overline{AP}| &= |\overline{PB}| \qquad \Rightarrow \\ \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} &= \sqrt{(3-x)^2 + (1-y)^2} \end{aligned}$$

- Ahora debemos simplificar esta expresión hasta donde nos sea posible.

- Empezamos elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{(3-x)^2+(1-y)^2}\right)^2\\ (x+1)^2+(y-3)^2 &= (3-x)^2+(1-y)^2\end{aligned}$$

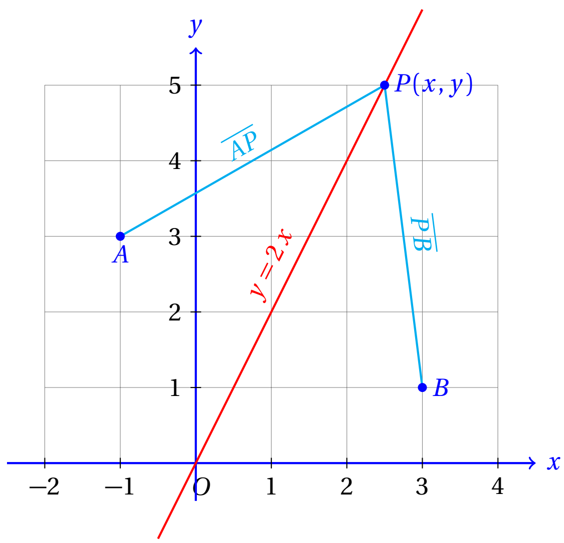
- Ahora vamos a desarrollar los binomios que aparecen elevados al cuadrado:

$$\begin{aligned}\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}-6y+\cancel{9} &= \cancel{9}-6x+\cancel{x^2}+\cancel{1}-2y+\cancel{y^2}\\ 2x-6y &= -6x-2y\end{aligned}$$

- Ahora vamos a agrupar todos los términos que tienen como factor la literal x y vamos a factorizarla.
- De manera semejante con la literal y:

$$\begin{aligned}2x+6x-6y+2y &= 0\\ 8x-4y &= 0\\ 2x-y &= 0\end{aligned}$$

- Geométricamente, tenemos la siguiente situación:



donde $\overline{AP} = \overline{PB}$.

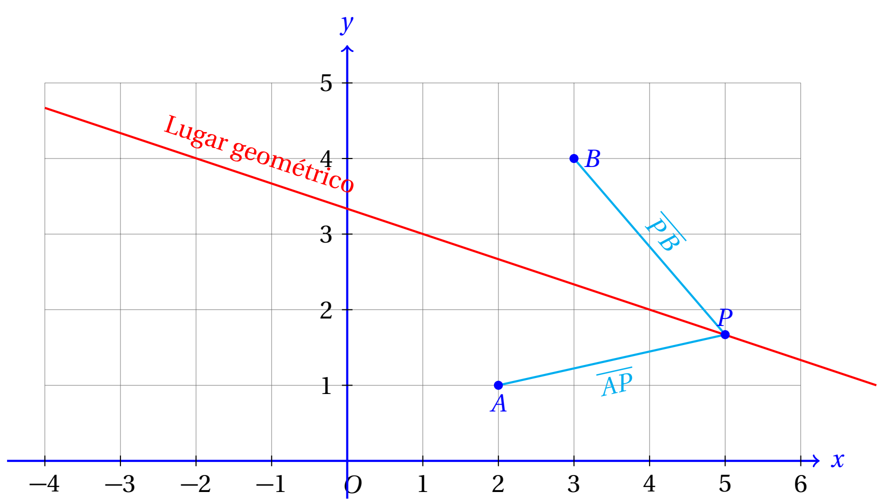
- La recta $y = 2x$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Es decir, pasa por el punto medio de los dos puntos y además es perpendicular al segmento mismo.

También podemos resolver el problema anterior de manera más general, lo cual se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Encuentra la ecuación de lugar geométrico cuyos puntos equidistan de los extremos del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(x_a, y_a)$ y $B(x_b, y_b)$.

- Para esto necesitamos escribir de manera algebraica la condición dada en el problema.

- Sabemos que si el punto $P(x, y)$ pertenece al lugar geométrico, la distancia $\overline{AP}$ es igual a la distancia $\overline{PB}$.
- Algebraicamente, la distancia del punto A al punto P es:
$$|\overline{AP}| = \sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2}$$
- Por otra parte, la distancia del punto P al punto B es:
$$|\overline{PB}| = \sqrt{(x_b-x)^2 + (y_b-y)^2}$$
- El problema nos dice que estas distancias son iguales, entonces:
$$\begin{aligned} |\overline{AP}| &= |\overline{PB}| \qquad \Rightarrow \\ \sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2} &= \sqrt{(x_b-x)^2 + (y_b-y)^2} \end{aligned}$$
- Ahora debemos simplificar esta expresión hasta donde nos sea posible.
- Empezamos elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad:
$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{(x_b-x)^2 + (y_b-y)^2}\right)^2 \\ (x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 &= (x_b-x)^2 + (y_b-y)^2 \end{aligned}$$
- Ahora vamos a desarrollar los binomios que aparecen elevados alcuadrado:
$$\begin{aligned} (x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 &= (x_b-x)^2 + (y_b-y)^2 \\ x^2 - 2\,x\,x_a + x_a^2 + y^2 - 2\,y\,y_a + y_a^2 &= x_b^2 + 2\,x_b\,x + x^2 + y_b^2 + 2\,y_b\,y + y^2 \\ \cancel{x^2} - 2\,x\,x_a + x_a^2 + \cancel{y^2} - 2\,y\,y_a + y_a^2 &= x_b^2 + 2\,x_b\,x + \cancel{x^2} + y_b^2 - 2\,y_b\,y + \cancel{y^2} \\ -2\,x\,x_a + x_a^2 - 2\,y\,y_a + y_a^2 &= x_b^2 + 2\,x_b\,x + y_b^2 + 2\,y_b\,y \end{aligned}$$
- Ahora vamos a agrupar todos los términos que tienen como factor la literal x y vamos a factorizarla.
- De manera semejante con la literal y:
$$\begin{aligned} 2\,x\,x_a + 2\,x_b\,x + 2\,y_b\,y + 2\,y\,y_a + x_b^2 + y_b^2 - x_a^2 - y_a^2 &= 0 \\ (2\,x_a + 2\,x_b)\,x + \left(2\,y_a + 2\,y_b\right)\,y + x_b^2 + y_b^2 - \left(x_a^2 + y_a^2\right) &= 0 \end{aligned}$$
- Geométricamente, tenemos la siguiente situación:



donde $\overline{AP} = \overline{PB}$.

Ahora vamos a resolver un ejemplo donde no obtendremos una recta, sino una circunferencia.

Ejemplo 3 Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal manera que su distancia al punto $C(2,4)$ siempre es igual a 4. Encuentra la ecuación de este lugar geométrico.

- La distancia desde el punto $P(x, y)$ hasta el punto $C(2,4)$ siempre es 4.
- Algebraicamente esta condición se escribe:

$$4 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}$$

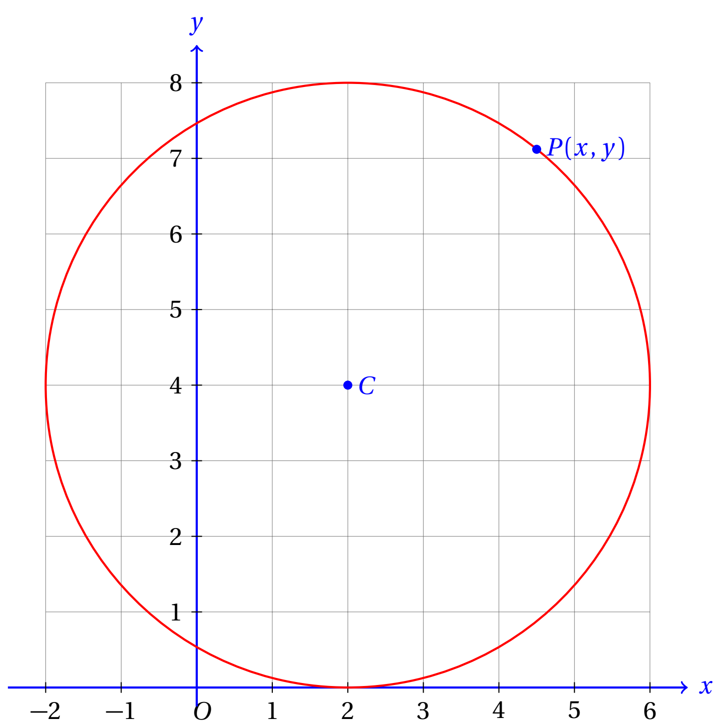
- Podemos simplificar esta expresión si elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$16 = (x-2)^2 + (y-4)^2$$

- Finalmente podemos desarrollar los binomios que quedaron indicados y simplificar la expresión:

$$\begin{aligned} 16 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

- La gráfica de este lugar geométrico es una circunferencia:



Cualquier punto $P(x, y)$ que esté sobre la circunferencia, estará a 4 unidades de distancia del punto $C(2,4)$.

Un punto $P(x,y)$ se mueve sobre el plano de manera que su distancia al punto $F(2,3)$ sea siempre la misma que la distancia a la recta $\ell:\ y+2=0$. Encuentra la ecuación que representa a este lugar geométrico.

Ejemplo 4

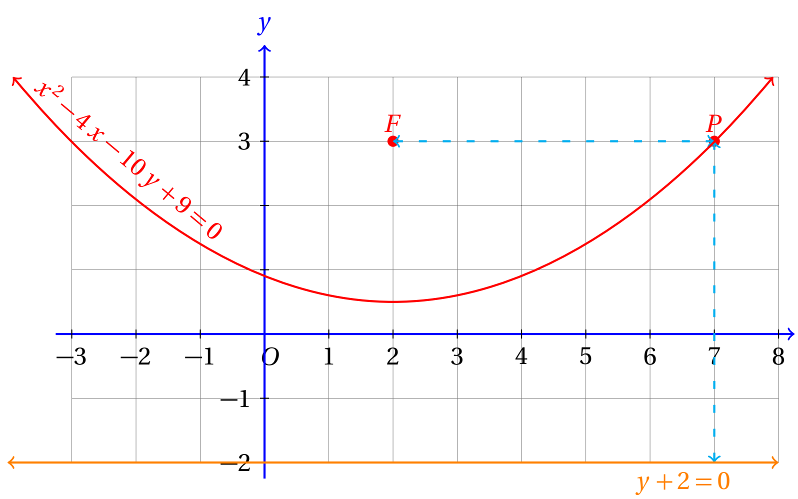
- Sabemos que el punto P está a la misma distancia de F como de la recta ℓ.
- Por otra parte, un punto que está sobre la recta $y+2=0$ tiene coordenadas $(x,-2)$, porque $y=-2$, independientemente del valor de x.
- Entonces, la condición impuesta por el lugar geométrico se representa algebraicamente como:

$$\begin{aligned} |\overline{PF}| &= |\ell P| \\ \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(y-2)^2} \\ \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} &= \sqrt{(y-2)^2} \end{aligned}$$

- Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad para desaparecer las raíces cuadradas y después desarrollamos los binomios que están elevados al cuadrado.

$$\begin{aligned} (x-2)^2+(y-3)^2 &= (y-2)^2 \\ \left[x^2-4x+4\right]+\left[\cancel{y^2}-6y+9\right] &= \cancel{y^2}-6y+9 \\ x^2-4x-10y+9 &= 0 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación que representa al lugar geométrico.
- Geométricamente, tenemos la siguiente situación:



Encuentra la ecuación del lugar geométrico que forma el punto $P(x,y)$ que se mueve de tal manera que su distancia del punto $A(8,0)$ siempre es el doble de la distancia al punto $B(2,0)$.

Ejemplo 5

- Del texto es claro que se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
\text{distancia } \overline{AP} &= 2\cdot\text{distancia } \overline{BP}\\
|\overline{AP}| &= 2|\overline{BP}|\\
\sqrt{(8-x)^2+y^2} &= 2\sqrt{(2-x)^2+y^2}
\end{aligned}$$

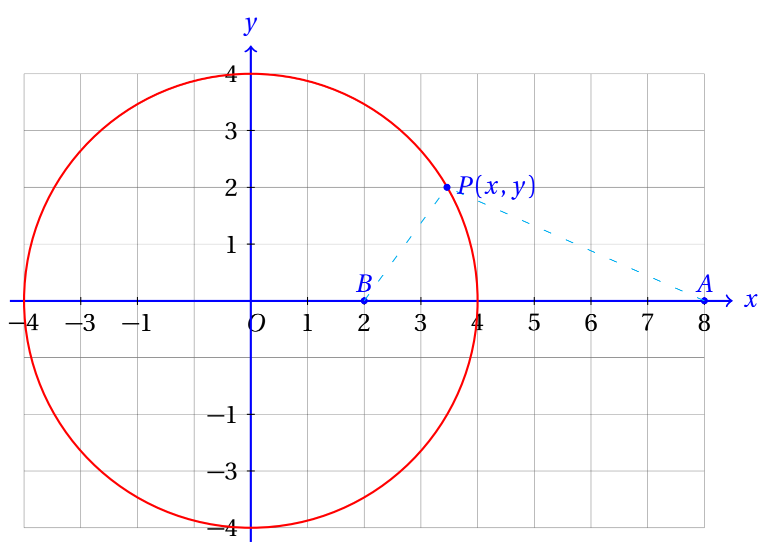
- Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$(8-x)^2+y^2=4\cdot[(2-x)^2+y^2]$$

- Podemos desarrollar los binomios al cuadrado y simplificar:

$$\begin{aligned}
(8-x)^2+y^2 &= 4\cdot[(2-x)^2+y^2]\\
64-16\,x+x^2+y^2 &= 4\cdot[4-4\,x+x^2+y^2]\\
64-\cancel{16\,x}+x^2+y^2 &= 16-\cancel{16\,x}+4\,x^2+4\,y^2\\
48 &= 3\,x^2+3\,y^2\\
x^2+y^2 &= 16
\end{aligned}$$

- Ahora nos enfrentamos al problema de visualizar el lugar geométrico.



La otra parte de la historia referente a los lugares geométricos consiste en tener una ecuación y nosotros debemos encontrar el lugar geométrico que ésta describe.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación: $2\,x+y-1=0$, nosotros debemos dibujar la gráfica de esta ecuación.

Para poder graficar de una manera rápida el lugar geométrico de una ecuación sirve apoyarnos en los siguientes conceptos.

Definición 3

SIMETRÍA RESPECTO A LOS EJES DE COORDENADAS

La gráfica de una ecuación $f(x,y)=0$ es simétrica respecto al eje x si $f(x,y)=f(x,-y)$. De manera semejante, la gráfica de la ecuación será simétrica respecto al eje y si $f(x,y)=f(-x,y)$.

Si al sustituir $-x$ en lugar de x en la ecuación y obtenemos la misma ecuación después de realizar las operaciones que han quedado indicadas, entonces la gráfica de esa ecuación es simétrica respecto al eje y.

Grafica la siguiente ecuación:

$$y - 2x^2 = 0$$

Ejemplo 6

- Primero vamos a averiguar si la gráfica de esta función es simétrica respecto a alguno de los ejes.
- Para esto, vamos a sustitur $-x$ en lugar de x y después vamos a realizar las operaciones que queden indicadas para ver si cambió la ecuación:

$$\begin{aligned} y - 2(-x)^2 &= 0 \\ y - 2x^2 &= 0 \end{aligned}$$

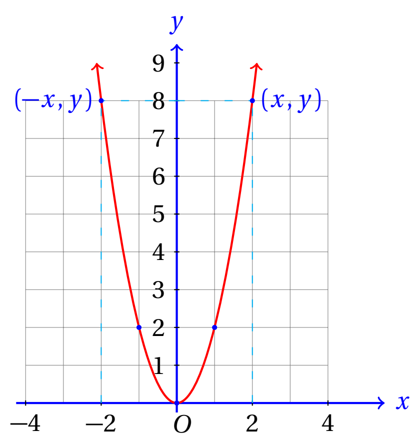
- Como la ecuación no se altera al sustituir $-x$ en lugar de x, entonces, es simétrica respecto del eje y.
- Ahora vamos a hacer lo mismo, pero ahora cambiando el signo de y en cualquier lugar que aparezca:

$$\begin{aligned} -y - 2x^2 &= 0 \\ y + 2x^2 &= 0 \end{aligned}$$

- La ecuación que obtuvimos es distinta a la ecuación que nos dieron en el problema, así que ésta no presenta simetría respecto al eje x.
- Para graficar una ecuación es una buena idea tabular valores (x, y) que satisfagan la misma.
- A continuación se muestra la gráfica de esta ecuación:

$y = 2x^2$

Punto	x	y
A	0	0
B	1	2
C	-1	2
D	2	8
E	-2	8



Intersección con los ejes

El lugar geométrico de la ecuación $f(x, y) = 0$ puede intersectar a uno o a ambos ejes. Para conocer los puntos de intersección con el eje x sustituimos $y = 0$ y resolvemos para y.
De manera semejante, para conocer las intersecciones con el eje y sustituimos $x = 0$ y resolvemos para y.

Definición 4

Arriba del eje x, los valores de y son positivos, debajo del eje x los valores de y son negativos. Exactamente sobre el eje x los valores de y son iguales a cero. Por eso, cuando queremos encontrar los puntos donde la gráfica que representa el lugar geométrico de una ecuación corta al eje x, sustituimos $y = 0$.

De manera semejante, a la izquierda del eje y, los valores de x son negativos, y su derecha son positivos. Exactamente sobre el eje y, los valores de x son iguales a cero. Esto nos ayuda a encontrar las intersecciones de la gráfica de una ecuación.

Ejemplo 7 Verifica si el lugar geométrico de la ecuación $x^2 + y^2 - 14\,x - 8\,y = 0$ es simétrico respecto de los ejes coordenados y encuentra sus intersecciones con los ejes.

- Para verificar si es simétrico respecto del eje x sustituimos $-y$ en lugar de y y verificamos si la ecuación cambia:

$$\begin{aligned} x^2 + (-y)^2 - 14\,x - 8(-y) &= 0 \\ x^2 + y^2 - 14\,x + 8\,y &= 0 \end{aligned}$$

- Como cambió el signo del último término, no es simétrica respecto del eje x.
- Ahora verificamos si es simétrica respecto del eje y.
- Para eso, sustituimos $-x$ en lugar de x:

$$\begin{aligned} (-x)^2 + y^2 - 14(-x) - 8\,y &= 0 \\ x^2 + y^2 + 14\,x - 8\,y &= 0 \end{aligned}$$

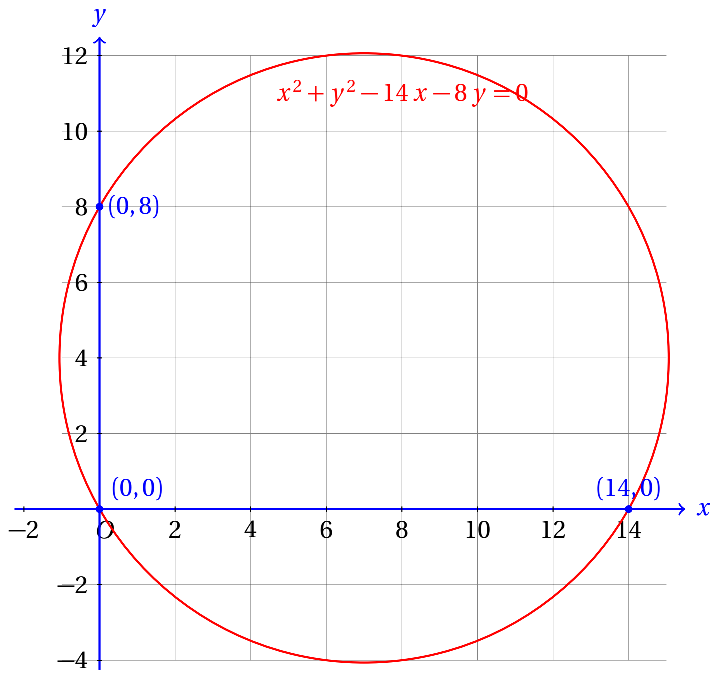
- Ahora cambió el signo del tercer término.
- Tampoco es simétrica respecto del eje y.
- Para encontrar las intersecciones del lugar geométrico con el eje x.
- Para eso sustituimos $y = 0$ en la ecuación, y resolvemos para x:

$$\begin{aligned} x^2 + 0^2 - 14\,x - 8(0) &= 0 \\ x^2 - 14\,x &= 0 \\ x\,(x - 14) &= 0 \end{aligned}$$

- Por factorización, tenemos que $x = 0$, y que $x = 14$.
- Por lo que las intersecciones del lugar geométrico con el eje x están en los puntos: $(0,0)$ y $(14,0)$.
- Ahora vamos a encontrar las intersecciones con el eje y.
- Vamos a sustituir $x = 0$ en la ecuación y resolvemos para y:

$$\begin{aligned} 0^2 + y^2 - 14\,x(0) - 8\,y &= 0 \\ y^2 - 8\,y &= 0 \\ y\,(y - 8) &= 0 \end{aligned}$$

- En este caso, $y = 0$ y también, $y = 8$.
- Entonces, las intersecciones con el eje y están en los puntos: $(0,0)$ y $(0,8)$.
- Ahora graficamos la ecuación.



- Si sustituyes cada una de las coordenadas de los puntos de intersección deben satisfacerla ecuación.
- Esto es así porque esos puntos pertenecen a ese lugar geométrico.

Calcula la ecuación para cada uno de los siguientes lugares geométricos. De ser posible, realiza una gráfica para cada uno.

Ejercicios 1.1.2

1) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que siempre está a la misma distancia de los puntos $O(0,0)$, $A(7,4)$. $14x-8y-65=0$

2) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera tal que su distancia al eje x siempre es igual al doble de la distancia al eje y. $y=2x$.

3) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera tal que su distancia al eje x siempre es igual al doble de la raíz cuadrada de la distancia al eje y. $y=2\sqrt{x}$.

4) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera tal que su distancia al eje x siempre es igual a la mitad del cubo de la distancia al eje y. $y=x^3/2$.

5) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que siempre está a la misma distancia de los puntos $A(-2,2)$ y $B(1,-1)$. $x-y+1=0$

6) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que siempre está a la misma distancia de los puntos $A(-1,4)$ y $B(3,2)$. $2x-y+1=0$

7) Un punto $P(x,y)$ se mueve de manera que siempre está a la misma distancia de los puntos $A(1,-1)$ y $B(3,3)$. $x+2y-4=0$

8) El punto $P(x,y)$ que se mueve de manera que su distancia al origen siempre es 1. $x^2+y^2=1$.

9) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que su distancia al punto $C(2,-1)$ siempre es igual a 7. $x^2+y^2-4x+2y-44=0$.

10) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que su distancia al punto $C(-5,2)$ siempre es igual a 3. $x^2+y^2+10\,x-4\,y+20=0.$

11) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que su distancia al punto $F(3,8)$ siempre es igual a la distancia al eje x. $x^2-6\,x-16\,y+73=0.$

12) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que su distancia al punto $F(2,5)$ siempre es igual a la distancia al eje y. $y^2-4\,x-10\,y+29=0.$

13) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que su distancia al punto $F(4,5)$ siempre es igual a la distancia a la recta $y+1=0$. $x^2-8\,x-12\,y+52=0.$

14) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que la suma de las distancias a los puntos $F'(0,-4)$ y $F(0,4)$ siempre es igual a 10. $144\,x^2+400\,y^2-6\,400\,x+360=0.$

15) **Reto:** Grafica el lugar geométrico que forma la ecuación: $x-y=0$.

16) **Reto:** Grafica el lugar geométrico que forma la ecuación: $x\cdot y=0$.

1.2 Rectas, segmentos y polígonos

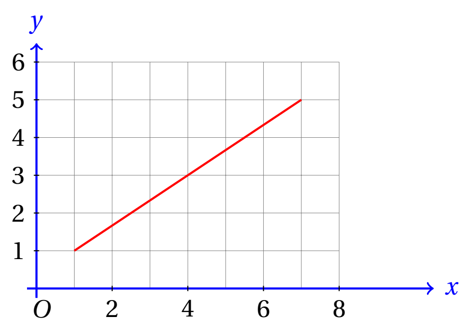
Ahora vamos a profundizar un poco más en el estudio de los segmentos.

En esta sección vamos a encontrar algunas características de los segmentos y las rectas que nos ayudarán a estudiar con mayor provecho los siguientes temas.

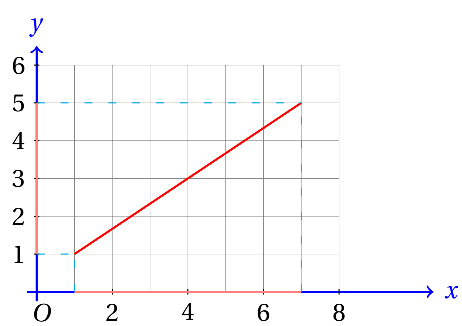
1.2.1 Segmentos Rectilíneos

Cuando consideramos un segmento rectilíneo en un sistema de coordenadas, no siempre encontraremos segmentos paralelos a alguno de los ejes.

La mayoría de las veces encontraremos segmentos con cierta inclinación. El siguiente segmento es un ejemplo de esos casos:

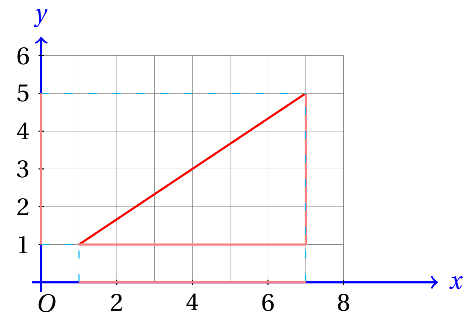


Este segmento, sin embargo, puede estudiarse de una manera más sencilla si lo descomponemos en proyecciones sobre los ejes coordenados, de la siguiente manera:



De hecho, para deducir las fórmulas que ya hemos utilizado (punto medio, distancia entre dos puntos, etc.) se deducen a partir de la descomposición que se mostró anteriormente.

Por ejemplo, para deducir la fórmula de distancia entre dos puntos, dibujamos un triángulo rectángulo, siendo las proyecciones paralelas a los ejes los catetos del triángulo y la hipotenusa el segmento inclinado, como se muestra a continuación:



Fácilmente podemos notar que la «*componente*» del segmento que es paralela al eje x mide $7-1=6$ unidades, mientras que la «*componente*» paralela alej y mide $5-1=4$ unidades de longitud.

Para encontrar la longitud del segmento, podemos utilizar el teorema de Pitágoras, que estudiamos el semestre pasado. Recuerda que este teorema se aplica solamente a triángulos rectángulos y en este caso, nuestro triángulo es rectángulo.

Para encontrar la longitud del segmento hacemos:

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2+4^2 \\ c &= \sqrt{6^2+4^2} \end{aligned}$$

Observa que para calcular las «*componentes*» del segmento paralelas a cada eje, calculamos la diferencia de las coordenadas:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2-x_1 \\ \Delta y &= y_2-y_1 \end{aligned}$$

Y estos valores son las medidas de los catetos horizontal y vertical, en nuestro caso, del triángulo rectángulo, mientras que la diagonal es la hipotenusa.

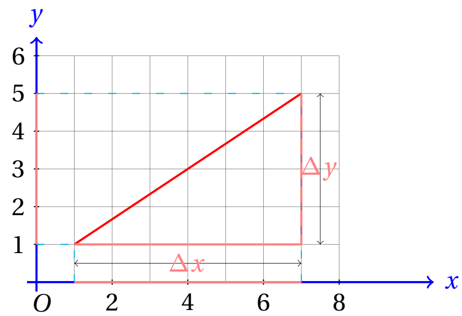
Al aplicar el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$\begin{aligned} c^2 &= (\Delta x)^2+(\Delta y)^2 \\ c &= \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{aligned}$$

que es la fórmula que utilizamos para encontrar la distancia entre los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$. Observa que c representa la longitud de la hipotenusa, que en este caso es la longitud del segmento $\overline{PQ}$.

Entonces, si tenemos dos puntos en un segmento dirigido, podemos encontrar la distancia entre ellos calculando la diferencia entre sus coordenadas. Al valor que está más a la izquierda (o más arriba) le restamos el valor que esté más a la derecha (o abajo).

Para la diferencia de las coordenadas sobre el eje x lo denotamos por Δx y a la diferencia de las coordenadas sobre el eje y se denotan por Δy:



1.2.2 Rectas

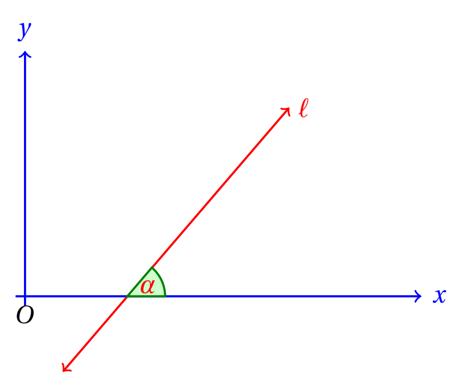
Podemos determinar de una manera única a una recta de varias formas:

- ✓ a partir de su ecuación,
- ✓ a partir de dos de sus puntos
- ✓ a partir del ángulo que forma con uno de los ejes y su distancia al origen,
- ✓ etc.

Para poder desarrollar todas estas formas, primero debemos definir algunos conceptos relacionados.

Inclinación *La inclinación de una recta es el menor ángulo positivo (medido en el sentido positivo) que ésta forma con el eje de las abscisas (x).*	**Definición 1**

El siguiente diagrama muestra la inclinación α de la recta ℓ.



Algunas veces conoceremos dos de los puntos por donde pasa la recta.

A partir de estos dos puntos siempre podremos calcular Δx y Δy.

Con estos dos valores podemos calcular otro valor que nos ayude a caracterizar la inclinación de la recta.

Definición 2

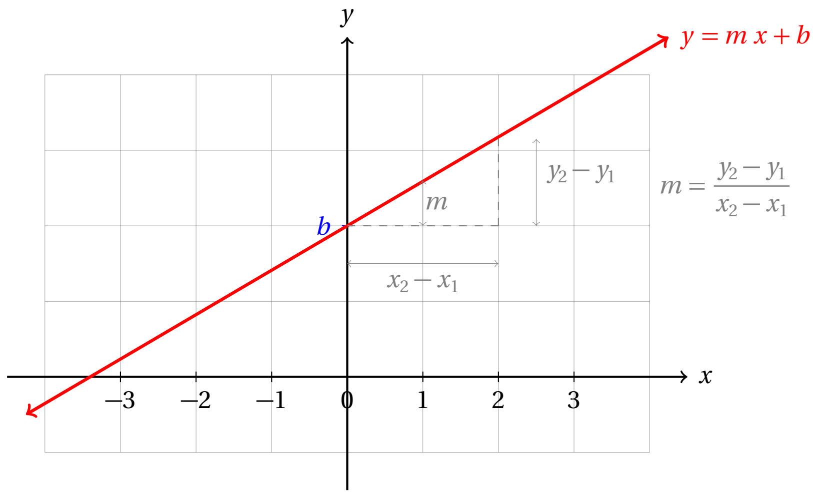
PENDIENTE

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se denota por la letra m y se calcula con la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta es igual a la tangente de su inclinación.

Para reconocer cómo caracteriza a una recta su pendiente nos ayudará mucho la siguiente gráfica:



Ya sabemos que la pendiente m de una recta se define así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x}$$

¿Qué nos dice esto en palabras? Dice: "*La pendiente de una recta es igual al incremento de y entre el incremento de x*".

Ahora la pregunta importante: "*... ¿y cómo debo interpretar eso?*"

Bien, empezamos primero recordando una interpretación para la división: cuando dividimos diez entre cinco obtenemos como resultado dos; esto lo podemos interpretar de varias maneras. Por ejemplo, una interpretación correcta del resultado de la división es que $2 \times 5 = 10$.

Otra interpretación correcta, equivalente a la anterior consiste en decir que el número diez es dos veces más grande que el número cinco. Pero la interpretación que más nos ayudará para el resto del curso es la siguiente: "*por cada uno que hay en el denominador de la fracción $\frac{10}{5}$, hay dos en el numerador*"; o dicho de otra manera: para tener una fracción equivalente, o el mismo valor, por cada uno que aumentemos en el denominador, tenemos que aumentar dos en el numerador.

Esto mismo podemos generalizarlo y aplicarlo a la fórmula para calcular la pendiente. En este caso, la interpretación dice: "*por cada uno que incrementamos en x, hay que incrementar m en y*". Así, la pendiente nos dice cuánto debemos subir (en la dirección del eje y) por cada unidad que avancemos hacia la derecha (en la dirección del eje x).

En otras palabras, la pendiente m de una recta es igual a la razón de los incrementos de las ordenadas Δy respecto de las abscisas Δx de dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ que se encuentren sobre la recta.

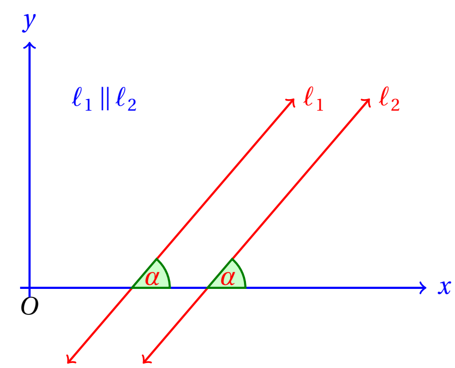
Es importante notar que no podemos definir la pendiente de una recta para la cual $x_2 = x_1$ independientemente de los puntos que elijamos. Es decir, no está definida la pendiente de una recta vertical. Esto es así porque en ese caso, $x_2 - x_1 = 0$ y tendremos división por cero. Algo que no está definido.

Sin embargo, sí es posible definir la pendiente de la recta para la cual $y_2 - y_1 = 0$ para cualesquiera dos puntos que elijamos sobre la recta. En este caso, $m = 0$.

A partir de la definición de pendiente podemos darnos cuenta de manera intuitiva que dos rectas con la misma inclinación, es decir, paralelas, deben tener la misma pendiente.

Esto es así porque para que las rectas no se corten por cada unidad que se avance en el eje x en ambas rectas deben subir la misma cantidad. De otra manera se cortaría en algún punto.

Si dos rectas son paralelas sus pendientes son iguales y recíprocamente, si dos rectas tienen sus pendientes iguales son paralelas. **Teorema 1**



Si dos rectas son tienen la misma pendiente, debemos subir en el sentido del eje y la misma cantidad por cada unidad en el sentido del eje x que avancemos. Por eso son paralelas.

Condición de paralelismo:
Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, entonces, $m_1 = m_2$ implica que $\ell_1 \parallel \ell_2$. **Comentario**

Si recuerdas, la tangente de un ángulo que se mide en un triángulo rectángulo se calcula con la razón del cateto opuesto entre el cateto adyacente. En el caso de la notación que hemos estado utilizando, tenemos:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Utilizando esta definición y algunas propiedades de las funciones trigonométricas, podemos mostrar todavía más propiedades de las rectas.

Si aprovechamos el hecho de que $m = \tan\alpha$, podemos demostrar propiedades que sería difícil demostrar solamente con el uso de las coordenadas.

Por ejemplo, el siguiente teorema, que no es para nada evidente.

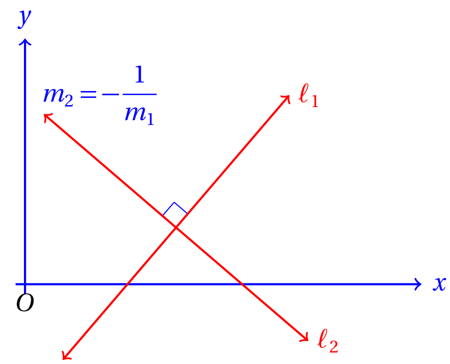
Si dos rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra recta y recíprocamente. **Teorema 2**

Si ninguna de las rectas es vertical, y α_1 es la inclinación de una, se sigue que $\alpha_2 = \alpha_1 + 90$ es la inclinación de la otra, y se tiene que,

$$\begin{aligned} m_2 &= \tan\alpha_2 = \tan(\alpha_1 + 90) \\ &= -\frac{1}{\tan\alpha_1} = -\frac{1}{m_1} \end{aligned}$$

La demostración de este teorema requiere del uso de las funciones trigonométricas, así que si no recuerdas bien las definiciones posiblemente te ocasione confusión.

Igual es una buena idea repasar los conceptos del semestre pasado, las definiciones de las funciones trigonométricas y sus propiedades.



Comentario

Condición de perpendicularidad:

Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, entonces, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ implica que $\ell_1 \perp \ell_2$.

Observa que en caso de que $m_1 = 0$, tenemos que la pendiente de la recta ℓ_2 no está definida, dado que es vertical. Lo mismo ocurre en el caso de que $m_2 = 0$. Entonces, m_1 no estará definida.

En cualquier otro caso, podemos utilizar esta fórmula para calcular la pendiente m_2 de la recta ℓ_2 a partir de la pendiente m_1 de la recta ℓ_1 sabiendo que $\ell_1 \perp \ell_2$.

Igualmente, podemos encontrar una fórmula para calcular el menor ángulo que se forma entre dos rectas que se cortan.

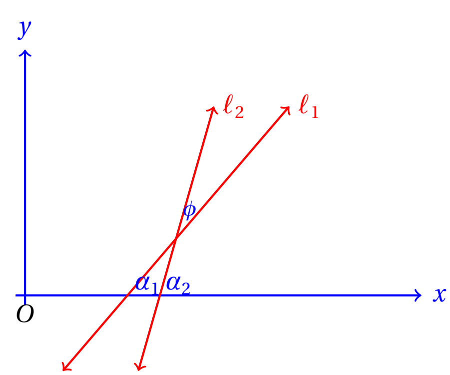
Teorema 3

Si ϕ es el ángulo (medido en contra de las manecillas del reloj) formado entre dos rectas ℓ_1, ℓ_2, cuyas pendientes son m_1 y m_2, respectivamente, entonces,

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

donde m_1 es la pendiente de la recta que sirve de lado inicial del ángulo y m_2 es la pendiente de la recta que sirve de lado terminal del ángulo.

Considerando la siguiente figura:



vemos que: $\phi+\alpha_1=\alpha_2$, o bien, $\phi=\alpha_2-\alpha_1$.
Podemos utilizar la fórmula de la tangente de la diferencia de dos ángulos:

$$\tan(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2}$$

Pero, $m_1=\tan\alpha_1$, y $m_2=\tan\alpha_2$. Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior, obtenemos:

$$\tan(\phi)=\tan(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$$

■

Esta fórmula no puede ser aplicada en el caso de una recta vertical, porque una recta vertical no tiene definida su pendiente.

No te preocupes por el momento porque no hemos mostrado ejemplos del uso de estos conceptos y fórmulas.

En la siguiente sección tendremos suficientes ejemplos para que logres entender estas ideas.

1.2.3 Polígonos

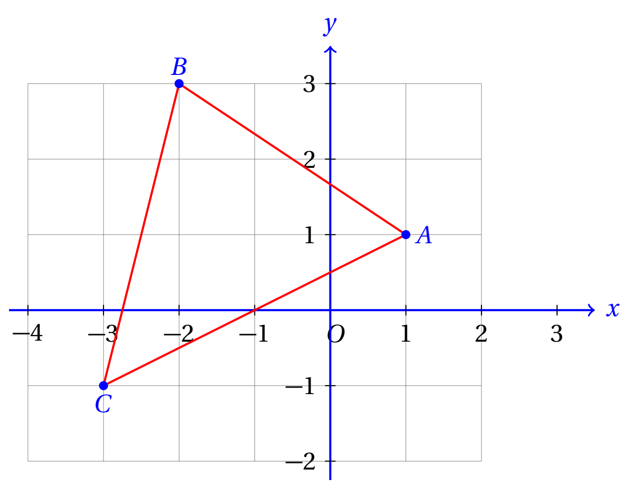
En esta sección vamos a utlizar las fórmulas que ya conocemos para calcular perímetros y áreas de polígonos.

Para esto es una buena idea recordar las fórmulas de áreas de los polígonos.

Ejemplo 1

Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $A(1,1)$, $B(-2,3)$ y $C(-3,-1)$.

- Empezamos graficando los puntos y dibujando el triángulo:



- Para encontar el área del triángulo utilizaremos la fórmula de Herón:

$$A=\sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde a,b,c son las longitudes de los lados del triángulo y p es su semiperímetro.

- Entonces, debemos primero calcular las longitudes de los lados del triángulo.

- Empezamos calculando las longitudes de cada uno de los lados del triángulo:

$$
\begin{aligned}
|\overline{AB}| &= \sqrt{(-2-1)^2+(3-1)^2} \\
&= \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3.6055 \\
|\overline{BC}| &= \sqrt{(-3-(-2))^2+(-1-3)^2} \\
&= \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \approx 4.1231 \\
|\overline{AC}| &= \sqrt{(-3-1)^2+(-1-1)^2} \\
&= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \approx 4.4721
\end{aligned}
$$

- Ahora calculamos el valor de p:

$$p = \frac{3.6055+4.1231+4.4721}{2} = 6.10035$$

- Ahora sustitumos los valores en la fórmula de Herón:

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)} \\
&= \sqrt{(6.10035)(6.10035-3.6055)(6.10035-4.1231)(6.10035-4.4721)} \\
&= \sqrt{(6.10035)(2.498)(1.9804)(1.6314} \\
&= \sqrt{49.2589} \approx 7.01846
\end{aligned}
$$

- Debido a que utilizamos aproximaciones de las raíces, hemos obtenido una aproximación al verdadero valor del área.
- El área del triángulo es exactamente 7 unidades cuadradas.
- El siguiente reto pide calcular el área del triángulo a partir de sus coordenadas de manera exacta.

Reto 1

Calcular el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $A(1,1)$, $B(-2,3)$ y $C(-3,-1)$ dibujando otros triángulos alrededor de éste para formar un cuadrilátero.

Para calcular el área de un polígono de varios lados no existe una fórmula como la de Herón para calcular el área a partir de las longitudes de sus lados.

Sin embargo, siempre que tengamos un polígono, podemos formar triángulos dentro de este polígono y calcular las áreas de cada uno de los triángulos internos al polígono. El área del polígono será igual a la suma de las áreas de todos los triángulos internos.

El problema consiste en que cada vez tenemos que calcular más longitudes, porque ahora no solamente debemos calcular las longitudes de los lados, sino también de las diagonales que se requieran para cubrir todo el polígono con triángulos.

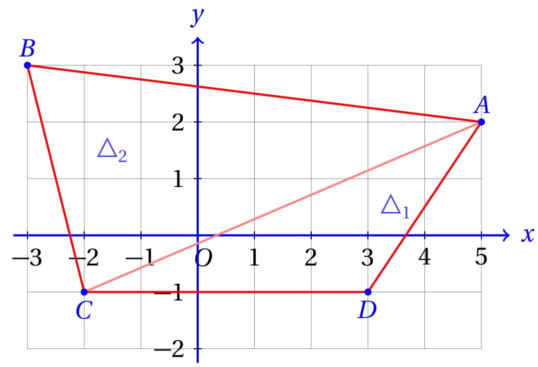
Dado que nosotros solamente tenemos fórmulas para calcular el área del triángulo, solamente podemos utilizar ese artificio.

Igual, podemos calcular el área utilizando el procedimiento utilizado para resolver el reto anterior.

Ejemplo 2

Calcula el área del cuadrilátero que tiene sus vértices en los puntos $A(5,2)$, $B(-3,3)$, $C(-2,-1)$ y $D(3,-1)$.

- Vamos a dibujar el cuadrilátero y también vamos a trazar una de sus diagonales para formar dos triángulos internos.



- Al sumar el área de los dos triángulos internos obtenemos el área del cuadrilátero.
- Vamos a calcular las longitudes de los lados del cuadrilátero y de su diagonal:

$$\begin{aligned}
|\overline{AB}| &= \sqrt{(-3-5)^2+(3-2)^2}\\
&= \sqrt{64+1}=\sqrt{65}\approx 8.062257\\
|\overline{BC}| &= \sqrt{(-2-(-3))^2+(-1-3)^2}\\
&= \sqrt{1+16}=\sqrt{17}\approx 4.1231\\
|\overline{CD}| &= \sqrt{(-3-(-2))^2+(-1-(-1))^2}\\
&= \sqrt{25}=5\\
|\overline{AD}| &= \sqrt{(3-5)^2+(-1-2)^2}\\
&= \sqrt{4+9}=\sqrt{13}\approx 3.60555\\
|\overline{AC}| &= \sqrt{(-2-5)^2+(-1-2)^2}\\
&= \sqrt{49+9}=\sqrt{58}\approx 7.61577
\end{aligned}$$

- Encontramos el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $A(5,2)$, $B(-3,3)$ y $C(-2,-1)$.
- Primero calculamos el semiperímetro del triángulo:

$$p=\frac{8.062257+4.1231+7.61577}{2}=9.9005635$$

- Sustituimos las longitudes de los lados en la fórmula de Herón:

$$\begin{aligned}
A_{\triangle_1} &= \sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}\\
&= \sqrt{(9.9005635)(1.8383)(5.77746)(2.28479)}\\
&= \sqrt{240.2478653}\approx 15.49993
\end{aligned}$$

- Ahora debemos calcular el área del otro triángulo.
- Empezamos calculando su semiperímetro:

$$p=\frac{7.61577+5+3.60555}{2}=8.11066$$

- Sustituimos en la fórmula de Herón:

$$\begin{aligned}
A_{\triangle_2} &= \sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}\\
&= \sqrt{(8.11066)(0.494883)(3.11066)(4.50511)}\\
&= \sqrt{56.24924}\approx 7.49995
\end{aligned}$$

- Y la suma de las áreas de los dos triángulos es: $15.49993 + 7.49995 = 22.99988$ unidades cuadradas, aproximadamente.
- Verifica que el área exacta del cuadrilátero es 23 unidades dibujando triángulos alrededor del cuadrilátero para formar un rectángulo.

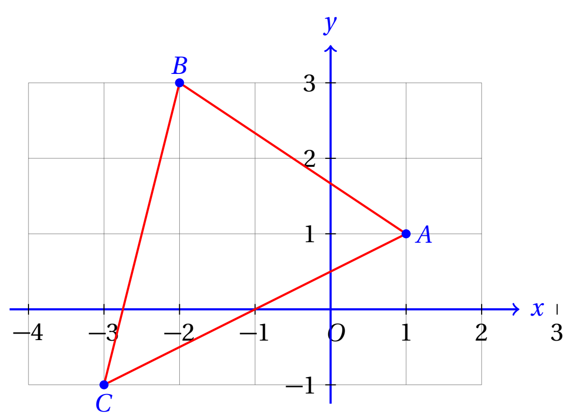
Las fórmulas que hemos encontrado en secciones anteriores nos ayudarán a describir todavía mejor los polígonos.

Por ejemplo, podemos encontrar los ángulos internos de un polígono o indicar la inclinación de sus lados.

Ejemplo 3

Calcula la medida de los ángulos internos del triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $A(1,1)$, $B(-2,3)$ y $C(-3,-1)$.

- Ya encontramos el área de este triángulo en el primer ejemplo de esta sección.
- Ahora vamos a encontrar sus ángulos internos.
- Para eso, vamos a utilizar las fórmulas de:
  - ✓ Pendiente:
  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
  - ✓ Ángulo entre dos rectas:
  $$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$
- Empezamos calculando las pendientes de los lados del triángulo.



- Para el lado $\overline{AB}$, tenemos:
$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\overline{AB}} &= \frac{3-1}{-2-1} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$
- Para el lado $\overline{BC}$, tenemos:
$$m_{\overline{BC}} = \frac{-1-3}{-3-(-2)} = \frac{-4}{-1} = 4$$

- Para el lado $\overline{AC}$, tenemos:

$$m_{\overline{AC}} = \frac{-1-1}{-3-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

- Ahora calculamos los ángulos internos del triángulo.
- Empezamos con el ángulo que se forma con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
- Recuerda que debemos medir el ángulo en contra de las manecillas del reloj.
- En este caso, $m_1 = m_{AB} = -2/3$ y $m_2 = m_{AC} = 1/2$.

$$\begin{aligned}\tan\phi_A &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\\ &= \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\left(\frac{7}{6}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{7}{4}\end{aligned}$$

- Ahora podemos calcular el ángulo, utilizando la función arctan:

$$\tan\phi_A = \frac{7}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi_A = 60^{\text{o}}\,15'\,18.43''$$

- Enseguida calculamos el ángulo formado por los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
- En este caso, $m_1 = m_{BC} = 4$ y $m_2 = m_{AB} = -2/3$.
- Ahora sustituimos en la fórmula:

$$\begin{aligned}\tan\phi_B &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\\ &= \frac{\frac{-2}{3} - 4}{1 + 4\cdot\frac{-2}{3}} = \frac{-\left(\frac{14}{3}\right)}{1-\frac{8}{3}}\\ &= \frac{-\left(\frac{14}{3}\right)}{-\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{\left(\frac{14}{3}\right)}{\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{14}{5}\end{aligned}$$

- Y el ángulo interno mide:

$$\tan\phi_B = \frac{14}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi_B = 70^{\text{o}}\,20'\,46.23''$$

- El último ángulo podemos calcularlo recordando que la suma de los tres ángulos internos del triángulo es igual a 180^{o}:

$$\begin{aligned}180 &= 60^{\text{o}}\,15'\,18.43'' + 70^{\text{o}}\,20'\,46.23'' + \phi_C\\ 180 &= 130^{\text{o}}\,36'\,4.66'' + \phi_C\\ \phi_C &= = 180 - 130^{\text{o}}\,36'\,4.66'' = 49^{\text{o}}\,23'55.34''\end{aligned}$$

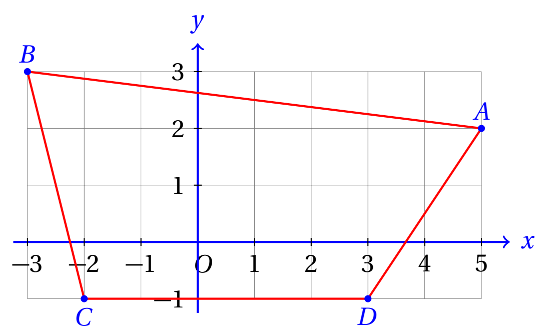
- Verifica que el ángulo ϕ_C mide $35^{\text{o}}\,35'\,57.2''$ aplicando la fórmula:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Ejemplo 4

Calcula la inclinación de cada uno de los lados del cuadrilátero que tiene sus vértices en los puntos $A(5,2)$, $B(-3,3)$, $C(-2,-1)$ y $D(3,-1)$.

- En el segundo ejemplo de esta sección calculamos el área de este cuadrilátero.
- Ahora vamos a calcular el ángulo que forma cada lado con el eje x.



- Para eso, utilizaremos la fórmula de pendiente y el hecho de que, si α es el menor ángulo que se forma entre una recta con pendiente m y el eje x, se cumple que: $m = \tan\alpha$.
- Iniciamos calculando las pendientes de todos los lados:

$$\begin{aligned}
m_{\overline{AB}} &= \frac{3-2}{-3-5} = -\frac{1}{7} \qquad \Rightarrow \\
\alpha_{\overline{AB}} &= \arctan\left(-\frac{1}{7}\right) = 171^{\text{o}}\,52'\,11.63 \\
m_{\overline{BC}} &= \frac{-1-3}{-2-(-3)} = \frac{-4}{1} = -4 \qquad \Rightarrow \\
\alpha_{\overline{BC}} &= \arctan(-4) = 104^{\text{o}}\,2'\,10.48 \\
m_{\overline{CD}} &= \frac{-1-(-1)}{-3-(-2)} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \Rightarrow \\
\alpha_{\overline{CD}} &= \arctan(0) = 0^{\text{o}} \\
m_{\overline{AD}} &= \frac{3-5}{-1-2} = \frac{-2}{-3} \qquad \Rightarrow \\
\alpha_{\overline{AD}} &= \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33^{\text{o}}\,41'\,24.24
\end{aligned}$$

Observa que el segmento $\overline{CD}$ que es paralelo al eje x tiene pendiente igual a cero.

Esto es así porque independientemente del incremento que demos a x, Δy siempre será igual a cero. Es decir, ni subimos ni bajamos conforme nos movemos sobre la recta que tiene una pendiente $m = 0$.

Ejemplo 5

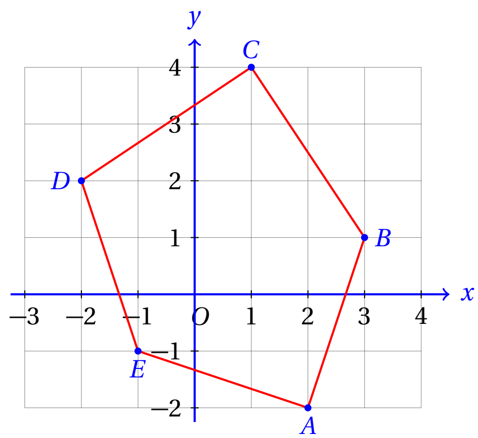
Del pentágono con vértices en los puntos $A(2,-1)$, $B(3,1)$, $C(1,4)$, $D(-2,2)$ y $E(-1,-1)$, calcula:

✓ Su perímetro.

✓ Las pendientes de todos sus lados.

✓ Sus ángulos internos.

- Empezamos dibujando el pentágono:



- Empezamos calculando las longitudes de todos sus lados para calcular el perímetro:

$$
\begin{array}{rcl}
|\overline{AB}| & = & \sqrt{(3-2)^2+(1-(-1))^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\
|\overline{BC}| & = & \sqrt{(1-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\
|\overline{CD}| & = & \sqrt{(-2-1)^2+(2-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \\
|\overline{DE}| & = & \sqrt{(-1-(-2))^2+(-1-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \\
|\overline{AD}| & = & \sqrt{(-1-2)^2+(-1-(-2))^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}
\end{array}
$$

- Ahora calcularemos las pendientes de sus lados.
- Pero vamos a intentar hacer uso de la interpretación geométrica de la pendiente:
- Escribiremos el incremento en y dividido por el incremento en x y esa fracción será la pendiente:

$$
\begin{array}{rcl}
m_{\overline{AB}} & = & \dfrac{3}{1} = 3 \\
m_{\overline{BC}} & = & \dfrac{3}{-2} = -\dfrac{3}{2} \\
m_{\overline{CD}} & = & \dfrac{2}{3} \\
m_{\overline{DE}} & = & \dfrac{-3}{1} = -3 \\
m_{\overline{AE}} & = & \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}
\end{array}
$$

- Ahora identifica qué lados del pentágono son perpendiculares entre sí a partir de los valores de sus pendientes y de la condición algebraica de perpendicularidad.
- Finalmente, vamos a calcular los ángulos internos del pentágono.

$$
\begin{array}{rcl}
\tan\phi_A & = & \dfrac{m_{AE}-m_{AB}}{1+m_{AB}\cdot m_{AE}} \\
 & = & \dfrac{-1/3-3}{1+3\cdot(-1/3)} = \dfrac{-4/3}{0}
\end{array}
$$

- Dado que $\tan\phi_A$ no está definida, concluimos que $\phi_A = 90^{\circ}$.
- Continuamos calculando el siguiente ángulo:

$$\begin{aligned}
\tan\phi_B &= \frac{m_{AB} - m_{BC}}{1 + m_{BC}\cdot m_{AB}}\\
&= \frac{3-(-3/2)}{1+(-3/2)(3)} = \frac{9/2}{-7/2} = -9/7\\
\phi_B &= \arctan(-\frac{9}{7}) = 127^{\circ}\,52'\,29.94''
\end{aligned}$$

- El ángulo ϕ_C se te queda como ejercicio.
- Continuamos con el ángulo ϕ_D:

$$\begin{aligned}
\tan\phi_D &= \frac{m_{CD} - m_{DE}}{1 + m_{DE}\cdot m_{CD}}\\
&= \frac{2/3-(-3)}{1+(-3)(2/3)} = \frac{8/3}{-1} = -8/3\\
\phi_D &= \arctan(-\frac{8}{3}) = 110^{\circ}\,33'\,21.76''
\end{aligned}$$

- Finalmente, calculamos el ángulo ϕ_E:

$$\begin{aligned}
\tan\phi_D &= \frac{m_{DE} - m_{AE}}{1 + m_{AE}\cdot m_{DE}}\\
&= \frac{-1/3-(-3)}{1+(-3)(-1/3)} = \frac{-10/3}{2} = -5/3\\
\phi_D &= \arctan(-\frac{5}{3}) = 120^{\circ}\,57'\,49.52''
\end{aligned}$$

- Se te queda como ejercicio calcular, para este pentágono:
  - ✓ Las longitudes de todas sus diagonales.
  - ✓ Su área.

Ejercicios 1.2

Para cada ejercicio, los puntos son los vértices de distintos polígonos. Para cada uno de ellos calcula: su perímetro, área, las pendientes de todos sus lados, inclinación de cada uno de sus lados y sus ángulos internos.

1) Triángulo con vértices en: $A(1,-2)$, $B(4,1)$ y $C(-3,3)$.
Determina además qué tipo de triángulo es, de acuerdo a la medida de sus ángulos. **Soluciones:**

- ✓ Perímetro: 17.93 unidades.
- ✓ Área: 13.50 unidades cuadradas.
- ✓ $m_{AB} = 1$, $m_{BC} = -1/7$, $m_{CD} = -1$.
- ✓ $\alpha_{AB} = 45^{\circ}$, $\alpha_{BC} = 171^{\circ}\,52'\,11.63''$, $\alpha_{CD} = 135$.
- ✓ $\phi_A = 53.1^{\circ}$, $\phi_B = 82.9^{\circ}$, $\phi_C = 36.9^{\circ}$.
- ✓ Clasificación: Triángulo rectángulo.

2) Cuadrilátero con vértices en: $A(4,-3)$, $B(3,4)$, $C(-1,3)$ y $D(-3,-1)$.
Soluciones:

✓ Perímetro: 22.95 unidades.

✓ Área: 30.50 unidades cuadradas.

✓ $m_{AB} = -1/7$, $m_{BC} = 1/4$, $m_{CD} = -1/2$, $m_{AD} = -2/7$.

✓ $\alpha_{AB} = 171^{\text{o}}\,52'11.63''$, $\alpha_{BC} = 14^{\text{o}}\,2'\,10.48''$, $\alpha_{CD} = 153^{\text{o}}\,26'5.82''$, $\alpha_{AD} = 164^{\text{o}}\,3'\,16.57''$,

✓ $\phi_A = 65.9^{\text{o}}$, $\phi_B = 84.1^{\text{o}}$, $\phi_C = 130.6^{\text{o}}$, $\phi_D = 79.4^{\text{o}}$.

3) Pentágono con vértices en: $A(3,-1)$, $B(4,2)$, $C(-1,3)$, $D(2,0)$ y $E(1,-2)$.
Soluciones:

✓ Perímetro: 17.27 unidades.

✓ Área: 19.50 unidades cuadradas.

✓ $m_{AB} = 3$, $m_{BC} = -1/5$, $m_{CD} = 3$, $m_{DE} = -2/3$, $m_{AE} = 1/2$.

✓ $\alpha_{AB} = 71^{\text{o}}\,33'54.18''$, $\alpha_{BC} = 168^{\text{o}}\,41'\,24.24''$, $\alpha_{CD} = 71^{\text{o}}\,33'54.18''$, $\alpha_{DE} = 146^{\text{o}}\,18'\,35.76''$, $\alpha_{AE} = 26^{\text{o}}\,33'\,54.18''$.

✓ $\phi_A = 135^{\text{o}}$, $\phi_B = 82.9^{\text{o}}$, $\phi_C = 97.1^{\text{o}}$, $\phi_D = 105.3^{\text{o}}$, $\phi_E = 119.7^{\text{o}}$.

Formulario

Unidad Uno

Distancia entre dos puntos: La longitud D del segmento $\overline{PQ}$ siendo $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, es:

$$D = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$$

Punto de división: Las coordenadas del punto $M(x_m, y_m)$ que divide al segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, en la razón r son:

$$x_m = \frac{r\,x_q + x_p}{1+r} \qquad\qquad y_m = \frac{r\,y_q + y_p}{1+r}$$

Punto medio: Las coordenadas del punto medio $M(\bar{x}, \bar{y})$ del segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, son:

$$\bar{x} = \frac{x_q + x_p}{2} \qquad\qquad \bar{y} = \frac{y_q + y_p}{2}$$

Pendiente: La pendiente m de la recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Condición de paralelismo: Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, entonces, $m_1 = m_2$ implica que $\ell_1 \parallel \ell_2$.

Condición de perpendicularidad: Si m_1 y m_2 son las pendientes de dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 perpendiculares ($\ell_1 \perp \ell_2$), entonces,

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Ángulo entre dos rectas: Si ϕ es el ángulo entre las rectas ℓ_1, ℓ_2, con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Fórmula de Herón: El área del triángulo con lados de longitud a, b, c, respectivamente y semiperímetro p es:

$$A = \sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Nota: El semiperímetro es igual a la mitad del perímetro:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Capítulo 2

La línea recta

Por aprender...

Por qué es importante...

En la construcción de planos arquitectónicos, en el diseño de nuevas máquinas, etc., siempre encontramos ecuaciones que deben pasar por dos puntos o que deben tener una cierta inclinación, además, las ecuaciones de rectas sirven para modelar algunas aplicaciones que ya hemos estudiado previamente y muchas más que estudiaremos más adelante.

2.1 Ecuaciones y propiedades de la recta

En esta sección estudiaremos la caracterización de la recta desde el punto de vista algebraico.

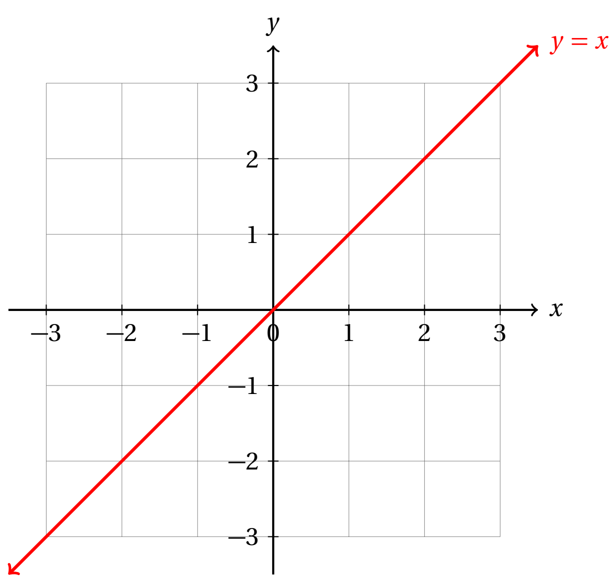
A partir del concepto de pendiente podremos entender mejor lo que nos dice en palabras la ecuación de una recta.

2.1.1 Forma punto-pendiente

Empezaremos a estudiar la ecuación de la recta a partir de la forma más sencilla.

Grafica la recta con ecuación: $y = x$. **Ejemplo 1**

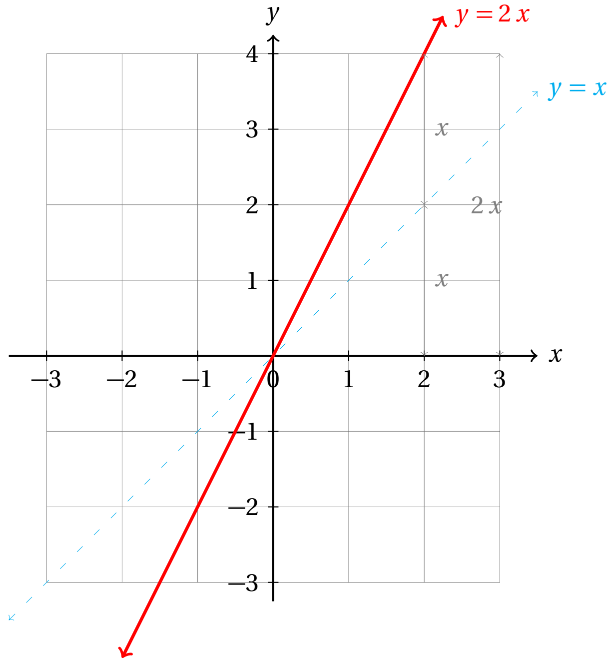
- La gráfica de esta ecuación es inmediata.
- En realidad no requerimos tabular distintos valores de x y calcular los valores de y.
- La gráfica de esta ecuación forma un ángulo de 45° con ambos ejes:



- En la gráfica se observa claramente que a cada valor de x le corresponde un valor de y.

Grafica la ecuación: $y = 2x$. **Ejemplo 2**

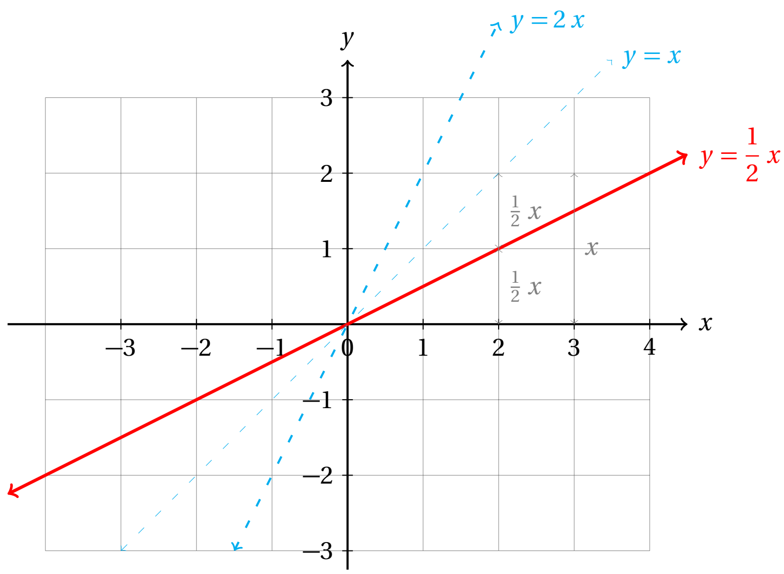
- Esta ecuación en palabras dice: *"al valor que me des de x lo multiplicaré por 2, y ese valor se lo asignaré a la variable y.*



- Al comparar las dos gráficas, vemos que esta gráfica tiene distinta inclinación que la anterior, y por tanto, distinta pendiente.

Ejemplo 3 Grafica la ecuación: $y = \dfrac{1}{2}\,x$.

- La gráfica de esta ecuación es el reflejo de: $y = 2\,x$ respecto a la recta: $y = x$.



- En el ejemplo anterior el coeficiente de x era 2, los valores de y siempre eran el doble de los valores de x.

- En este caso el coeficiente de x es $1/2$, esto causa que los valores de y siempre sean la mitad de los valores correspondientes de x.

Para determinar de manera única una recta necesitamos dos condiciones.

En este caso, las condiciones serán: (**1**) las coordendas de un punto y (**2**) la pendiente de la recta.

Definición 1

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA PUNTO-PENDIENTE

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y que tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Debido a que esta ecuación se encuentra a partir de esos datos se conoce como la ecuación en la forma punto-pendiente.

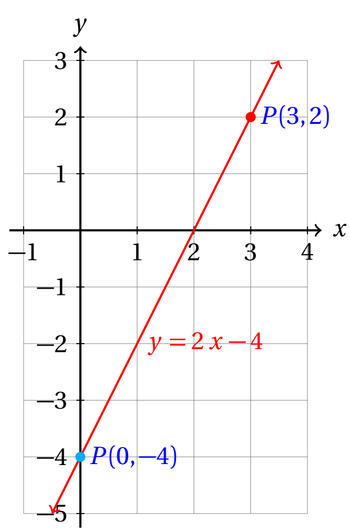
Ejemplo 4

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ con pendiente $m = 2$.

- Para encontrar la ecuación de la recta sustituimos los valores de los datos conocidos:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 2 &= 2\,(x - 3) \\ y - 2 &= 2\,x - 6 \\ y &= 2\,x - 4 \end{aligned}$$

- Ahora graficamos la recta.



- Observa que si $x = 0$, entonces, $y = -4$.
- Además, $m = 2$, por lo que por cada unidad que avancemos en la dirección del eje x debemos subir 2 en la dirección del eje y.

Ejemplo 5

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,5)$ con pendiente $m = 2$.

- Aquí usaremos la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
- Sabemos, para empezar que la pendiente $m=2$, y que pasa por el punto $A(2,5)$. Sustituimos estos datos en la ecuación:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-5 &= 2(x-2) \\ y &= 2x-4+5 \end{aligned}$$

- Esto resulta ser: $y=2x+1$.
- Ahora grafica la recta.

Ejemplo 6 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,5)$ con pendiente $m=2$.

- Aquí usaremos la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
- Sabemos, para empezar que la pendiente $m=2$, y que pasa por el punto $A(2,5)$. Sustituimos estos datos en la ecuación:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-5 &= 2(x-2) \\ y &= 2x-4+5 \end{aligned}$$

- Esto resulta ser: $y=2x+1$.
- Observa que si $x=0$, entonces $y=1$.
- Ahora grafica la recta.

Ejemplo 7 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0,-5)$ con pendiente $m=3$.

- Aquí usaremos la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
- Sustituimos los datos en la ecuación:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-(-5) &= 3(x-0) \\ y+5 &= 3x \\ y &= 3x-5 \end{aligned}$$

- Observa que en este caso, si $x=0$, $y=-5$
- Se te queda como ejercicio graficar la recta.

Ejemplo 8 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(3,4)$.

- Este problema es distinto de los ejemplos que hemos estudiado.
- Para resolverlo, primero intentaremos reducirlo a un problema parecido a alguno de los que ya hemos resuelto.
- Para este fin, primero debemos conocer la pendiente.
- Porque dado un punto por el cual pasa una recta (conocemos dos, tendremos que elegir un punto de entre los dos) y la pendiente de la misma, podremos utilizar la ecuación en su forma punto-pendiente y finalmente obtendremos su ecuación.
- Primero, utilizamos la fórmula para calcular la pendiente de una recta conocidos dos puntos por los que pasa.
- Conocemos dos puntos por los cuales pasa la recta: $A(1,2)$ y $B(3,4)$.
- Con estos datos calculamos su pendiente:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{4-2}{3-1} \\ &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

- Ahora que conocemos la pendiente, podemos utilizar la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente, ya que conocemos ambos datos.
- Nota que podemos usar cualquiera de los puntos que conocemos, puesto que el requisito impuesto es que la recta pase por el punto dado y en este caso, pasa por ambos puntos.
- Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= 1(x-1) \\ y &= x - 1 + 2 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

- Con lo que la ecuación buscada es: $y = x + 1$.

Es claro que podemos sustituir en la ecuación el valor de m a partir de las coordenadas de los puntos por los cuales pasa la recta. Así obtenemos la ecuación en su forma dos puntos.

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA DOS PUNTOS

La ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Definición 2

Observa también que la ecuación de la recta en su forma punto pendiente sustituimos el valor de m en función de las coordenadas de los dos puntos por donde pasa:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \quad m \quad (x - x_1) \\ y - y_1 &= \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) \end{aligned}$$

Ahora, consideremos solamente la definición de pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si suponemos que no concemos más que un punto y dejamos las coordenadas del punto $Q(x_2, y_2)$ como incógnitas, obtenemos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente, despejando $y - y_1$:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{x - x_1} &= m \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \end{aligned}$$

Así que no tendrás que memorizar ninguna de estas fórmulas.

A partir de la definición de pendiente puedes fácilmente deducir las otras dos.

Inclusive, la fórmula de pendiente puedes recordarla a partir de su interpretación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x}$$

Así que es mejor entender la información que nos da la pendiente y así podremos deducir su fórmula y a partir de ésta las demás ecuaciones.

2.1.2 Forma pendiente-ordenada al origen

Si una recta corta el eje de las ordenadas (eje y) en el punto $B(0, b)$, entonces decimos que la ordenada al origen de la recta es b.

Conociendo este punto es muy sencillo encontrar la ecuación de la recta, que es lo que vamos a estudiar en esta sección.

Ejemplo 1 Calcula la ecuación de la recta con pendiente $m = 3$ que corta al eje y en el punto $B(0, 5)$.

- Sabemos que en el eje y los valores de x son iguales a cero, independientemente de la posición.
- A la izquierda del eje y los valores de x son negativos y que a la derecha son positivos.
- Precisamente sobre el eje x no son ni negativos ni positivos: es la frontera entre los positivos y negativos, esto es, la coordenada de x vale cero para cada punto.
- Entonces, la recta pasa por el punto $B(0, 5)$, y tiene pendiente $m = 3$.
- De nuevo sustituimos los valores conocidos en la ecuación de la recta en su forma punto - pendiente.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 5 &= 3(x - 0) \\ y &= 3x + 5 \end{aligned}$$

- Con lo que la ecuación de la recta es: $y = 3x + 5$.

Ejemplo 2 Clcula la ecuación de la recta con pendiente $m = -3$ que corta al eje y en $B(0, 7)$.

- De nuevo, en este caso, por intersectar al eje y en $y = 2$, la recta pasa por el punto $B(0,7)$ y tiene pendiente $m = -3$.

- Utilizamos la ecuación en su forma punto - pendiente.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 7 &= -3(x - 0) \\ y &= -3x + 7 \end{aligned}$$

- Con lo que la ecuación buscada es: $y = -3x + 7$.

A partir de los dos ejemplos anteriores podemos darnos cuenta que en la ecuación $y = mx + b$, m es la pendiente de la recta y b es la coordenada del punto de intersección de la recta con el eje y.

Debido a esto a esta forma también se le conoce con el nombre de ecuación en su forma pendiente-ordendada al origen.

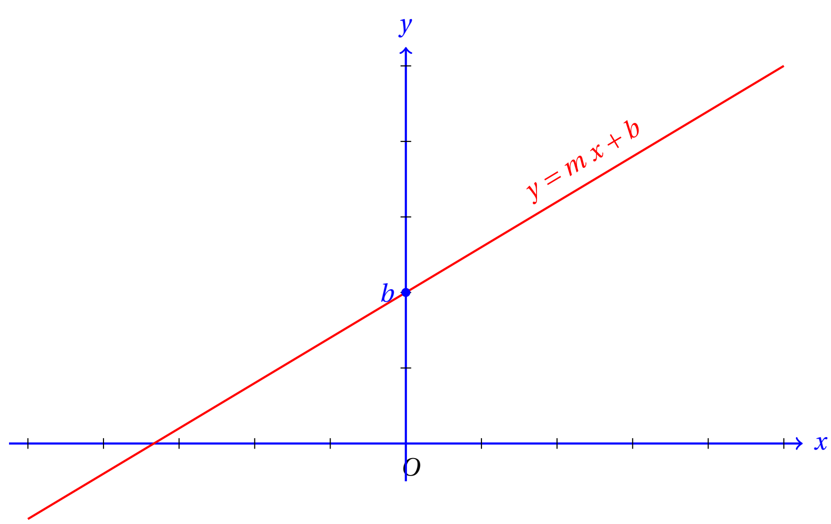
ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA PENDIENTE-ORDENADA AL ORIGEN

La ecuación de la recta que tiene pendiente m y corta al eje y en el punto $(0, b)$ es:

$$y = mx + b$$

Definición 1

Observa que en la ecuación $y = mx + b$, cuando $x = 0$ tenemos que $y = b$. Esto nos dice que la recta pasa por el punto $B(0, b)$.



A partir de esta interpretación geométrica del valor de b de la ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada al origen, fácilmente podemos graficar la recta: $y = mx + b$.

Para este fin, empezamos dibujando un punto en $(0, b)$. A partir de ese punto y con la interpretación geométrica de la pendiente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x}$$

podemos avanzar m unidades verticalmente por cada unidad que avancemos hacia la derecha. Si m es positivo la recta subirá, si m es negativo la recta bajará y si $m = 0$ tendremos una recta horizontal.

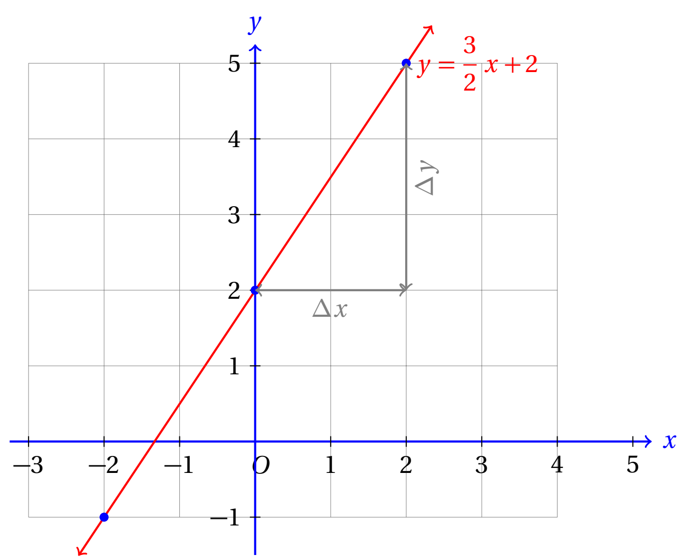
Otra forma de explicar el mismo procedimiento es: «*Avanzamos Δy unidades en el sentido del eje y y Δx unidades en el sentido del eje x*», así graficamos varios puntos y podremos fácilmente graficar la recta a partir de su ecuación.

Ejemplo 3 Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $3/2$ y que intersecta al eje y en $B(0,2)$. Grafica la recta a partir de su ecuación.

- Empezamos notando que en este caso la pendiente no es un número entero, sino una fracción.
- Para empezar, ya conocemos el valor de b, en este caso $b = 2$, porque la recta corta al eje de las ordenadas en $(0,2)$.
- Para encontrar la ecuación de la recta sustituimos los valores en la ecuación:

$$\begin{aligned} y &= m\,x + b \\ y &= \frac{3}{2}\,x + 2 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a interpretar la pendiente para graficar la recta de una manera sencilla.
- Sabemos que: $m = \Delta y / \Delta x = 3/2$, esto indica que $\Delta y = 3$ y que $\Delta x = 2$.
- Y eso sugiere que por cada 2 unidades que nos movamos hacia la derecha (sentido positivo del eje x) debemos subir 3 unidades (sentido positivo del eje y).
- Así podemos ubicar varios puntos del plano por donde pasa la recta y a partir de ellos graficarla:



Ejemplo 4 Luis fue a comprar refrescos. Cada refresco costaba \$5.00 pesos y además, había quedado a deber \$12.00 pesos al tendero. Encuentra la ecuación de la recta que modela esta situación.

- En este caso, si Luis compra cero refrescos, entonces debe pagar al tendero lo que había quedado a deber, esto es, \$12.00 pesos.
- Este valor representa la ordenada al origen, es decir, $b = 12$.

- Por cada refresco que Luis compre, el importe aumenta en \$5.00
- Este valor representa la pendiente de la recta.
- Entonces, la ecuación de la recta es:
$$y = 5\,x + 12$$
- Si denotamos por I el importe que Luis debe pagar al tendero y n el número de refrescos que comprará, la ecuación se puede escribir como:
$$I = 5\,n + 12$$
- Por ejemplo, si compra 6 refrescos, deberá pagar:
$$I = 5(6) + 12 = 30 + 12 = 42 \text{ pesos.}$$
- Ahora grafica la recta en tu cuaderno.

A partir del ejemplo anterior podemos dar una nueva interpretación (física) de la pendiente.

En este caso, Δx representa la cantidad de refrescos que Luis va a comprar y Δy el importe cuando compre Δx refrescos. Entonces, $m = \Delta y / \Delta x$ representa el precio de un refresco.

Nosotros podemos sustituir valores para Δy y Δx que satisfagan las condiciones del ejemplo anterior, pero siempre va a ocurrir que al simplificar la fracción con la que calculamos el valor de m se simplifique a 5, que es el precio de un refresco.

Verifica con algunos ejemplos numéricos que esto es verdad.

Un inversionista desea comprar una parte de un terreno que tenga un metro más del doble de largo que de ancho. Si a es el ancho, ¿cuál es la ecuación que modela esta situación? **Ejemplo 5**

- Si el ancho es a, el largo, será un metro mayor al doble del ancho.
- El doble del ancho lo obtenemos multiplicando el ancho por dos: $2\,a$
- Sabemos que el largo es un metro mayor a esa cantidad: $L = 2\,a + 1$
- Esa es la ecuación que modela la situación:
$$L = 2\,a + 1$$
- Si x representara el ancho del terreno y la variable y representara el largo, la ecuación sería:
$$y = 2\,x + 1$$
- La cual es muy fácil de graficar.
- Explica con palabras cómo gráficar esta ecuación.

En este último ejemplo la pendiente representa la condición «*el doble de largo que de ancho*». La ordenada al origen corresponde a la condición de que el largo debe ser *un metro* mayor al doble del ancho.

Considera valores de a y calcula los valores del largo del terreno. Observa que primero multiplicas por dos para obtener el doble. La pendiente tiene esa función en la ecuación.

Por otra parte, cuando sumas uno (la ordenada al origen) al doble del ancho, terminas con la condición del problema: «*el largo sea un metro mayor al doble del ancho*».

Reto 1 Transforma la ecuación de la recta de su forma punto-pendiente a la forma pendiente-ordenada al origen.

Ejemplo 6 Se sabe que 0º Centígrados equivalen a 32º Farenheit. Por otra parte, 100º Centígrados equivalen a 212º Farenheit. Encuentra la ecuación que sirve de conversión entre una escala de temperatura y otra.

- Podemos colocar sobre el eje x los grados Centígrados y sobre el eje y los grados Farenheit.
- En ese caso tenemos los dos puntos: $A(0,32)$ y $B(100,212)$.
- La primera coordenada indica la temperatura en grados Centígrados.
- La segunda coordenada indica la temperatura en grados Farenheit.
- Ahora debemos encontrar la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos.
- Empezamos calculando la pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$$

- Ahora que conocemos la pendiente de la recta, podemos sustituir este valor con uno de los puntos en la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente y encontrar la ecuación:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 32 &= \left(\frac{9}{5}\right)(x-0) \\ y &= \frac{9}{5}x + 32 \end{aligned}$$

- Como en el eje x están los grados Centígrados, podemos cambiar el nombre de la literal x por C para poder relacionar la variable con la escala centígrada.
- A su vez, en el eje y están los grados Farenheit, por eso es mejor escribir F en lugar de y:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

- Esta ecuación nos ayuda a calcular el valor de F (grados Farenheit) equivalente(s) a C grados Centígrados.
- Observa que si $C = 0$, se sigue que $F = 32$, concordando con los datos iniciales.
- También, si $C = 100$, entonces, $F = 900/5 + 32 = 180 + 32 = 212$.
- Si deseas calcular C a partir de F basta despejar F en términos de C:

$$\begin{aligned} F &= \frac{9}{5}C + 32 \\ F - 32 &= \frac{9}{5}C \\ \frac{5(F-32)}{9} &= C \end{aligned}$$

- Ahora, si $F = 32$, tenemos que $C = 0$.
- También puedes comprobar que si $F = 212$ se cumple que $C = 100$.

Como puedes ver, podemos aplicar las ecuaciones lineales en muchas situaciones distintas.

Es importante observar que las literales x, y en las aplicaciones tienen un significado físico. Trata de recordar cómo definiste cada variable para no confundir sus significados cuando debas realizar cálculos.

Por ejemplo, en el ejemplo anterior, si no cambiamos las literales por algunas que nos sugirieran qué significan cada una, podemos confundir sus significados y realizar cálculos incorrectos.

2.1.3 Forma simétrica

Ahora vamos a utilizar una forma más de la ecuación de la recta.

La ecuación de la recta que estudiamos en la sección anterior solamente nos daba información acerca de la intersección con el eje y.

Sería mucho mejor tener una forma de la ecuación que nos diera información sobre las intersecciones con los dos ejes y no solamente con uno.

Entonces, en este caso deseamos escribir la ecuación de manera que nos incluya las intersecciones con los ejes.

Recuerda que con dos condiciones nosotros podemos determinar de manera única la ecuación de la recta. Nosotros conocemos dos puntos por donde pasa la recta, que corresponden a las intersecciones de la recta con los ejes: $A(a, 0)$ y $B(0, b)$.

A partir de estas condiciones vamos a encontrar la ecuación de la recta y vamos a tratar de reconocer esa información conocida.

Utilizamos la ecuación de la recta en la forma dos puntos:

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)\\
y - 0 &= \left(\frac{b - 0}{0 - a}\right)(x - a)\\
y &= \left(-\frac{b}{a}\right)(x - a)\\
a\,y &= -b\,x + a\,b\\
a\,y + b\,x &= a\,b
\end{aligned}$$

Ahora podemos dividir ambos lados de la igualdad entre $a\,b$ y así obtener:

$$\begin{aligned}
\frac{\cancel{a}\,y}{\cancel{a}\,b} + \frac{\cancel{b}\,x}{a\,\cancel{b}} &= \frac{\cancel{a\,b}}{\cancel{a\,b}}\\
\frac{y}{b} + \frac{x}{a} &= 1\\
\frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1
\end{aligned}$$

Esta es la ecuación de la recta en su forma simétrica.

Definición 1

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA SIMÉTRICA

La ecuación de la recta en su forma simétrica es:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

donde $a\neq 0$ es la intersección con el eje de las abscisas (eje x) y $b\neq 0$ es la intersección con el eje de las ordenadas (eje y).

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la recta que corta al eje x en $x=3$ y al eje y en $y=5$.

- Sabemos que la recta pasa por los puntos $A(3,0)$ y $B(0,5)$.
- En este caso sustituimos los valores en la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b} &= 1\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{5} &= 1\end{aligned}$$

- Esta ecuación es muy sencilla de graficar.
- Ubica los puntos $A(3,0)$ y $B(0,5)$ en el plano y traza la recta que pasa por éstos.

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta en su forma simétrica que tiene pendiente $3/2$ y que intersecta al eje y en $(0,2)$. Grafica la recta a partir de su ecuación.

- Ya hemos encontrado la ecuación de esta recta en su forma pendiente-ordenada al origen en la página 48.
- Pero ahora vamos a dar más información además de $b=2$.
- Vamos a proceder como hicimos para encontrar la ecuación en la forma simétrica en la introducción de esta sección.
- Utilizamos la ecuación en su forma pendiente-ordenada al origen, y de ahí encontramos la forma simétrica:

$$\begin{aligned}y &= m\,x+b\\ y &= \left(\frac{3}{2}\right)x+2\\ 2\,y &= 3\,x+4\\ 2\,y-3\,x &= 4\end{aligned}$$

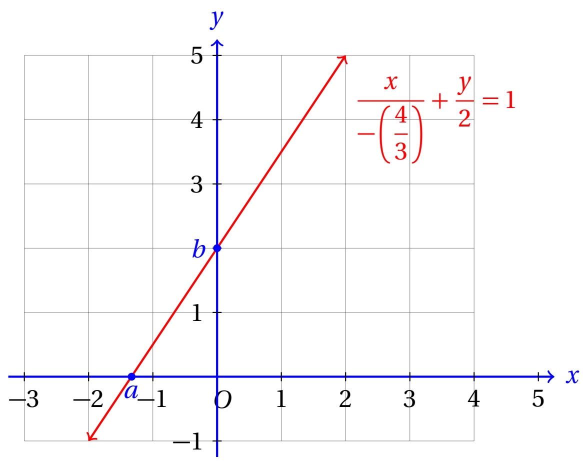
- Ahora dividimos ambos lados de la igualdad entre 4 y obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\cancel{2}\,y}{\cancel{4}}-\frac{3\,x}{4} &= \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}}\\ \frac{y}{2}+\frac{x}{-4/3} &= 1\end{aligned}$$

- Observa que hemos utilizado el hecho de que:

$$\frac{1}{\left(\dfrac{p}{q}\right)} = \frac{q}{p}$$

- Ahora conocemos la intersección de la recta con el eje x, y ésta es: $a = -4/3$.



- Pudimos obtener esta misma información a partir de la ecuación en su forma pendiente-ordenada al origen.
- Para esto, sustituimos $y = 0$ y despejamos x (¿por qué?)

$$\begin{array}{rcccl} y = \dfrac{3}{2}\,x + 2 & \Rightarrow & 0 = \dfrac{3}{2}\,x + 2 & \Rightarrow \\ -2 = \dfrac{3}{2}\,x & \Rightarrow & -4 = 3\,x & \Rightarrow \\ & \Rightarrow & x = -\dfrac{4}{3} & \end{array}$$

- La gráfica de esta misma ecuación aparece en la sección anterior, en la página antes mencionada.
- Puedes verificar que la pendiente es $m = 3/2$ a partir de la gráfica, igual que $a = -4/3$.

Considerando la pendiente $m = \Delta y / \Delta x$, transforma la ecuación de la recta de su forma pendiente-ordenada al origen a su forma simétrica. **Reto 1**

Transforma la ecuación de la recta $y = 2\,x - 4$ a su forma simétrica. **Ejemplo 3**

- Para hacer la transformación necesitamos conocer los valores de a y b, es decir, las intersecciones de la recta con los ejes.
- De la ecuación, nos damos cuenta que $b = -4$.
- Para encontrar la intersección con el eje x sustituimos $y = 0$ en la ecuación y despejamos x:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 2\,x - 4 \\ 2\,x & = & 4 \\ x & = & 2 \end{array}$$

- Entonces, la intersección con el eje x es $a = 2$.
- Ahora solamente sustituimos los valores en la ecuación en su forma simétrica:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} &= 1 \end{aligned}$$

- La gráfica de esta ecuación se queda como ejercicio.

Ejemplo 4 Encuentra la ecuación de la recta (forma simétrica) que pasa por el punto $P(3,2)$ y tiene pendiente $m = 1/3$.

- Resolvemos este problema en dos fases:
  A: Encontramos la ecuación en su forma punto-pendiente.
  B: Transformamos esta ecuación a la forma simétrica.
- Sabemos que $m = 1/3$ y que pasa por el punto $P(3,2)$.
- Sustituimos estos valores en la ecuación de la recta en forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 2 &= \left(\frac{1}{3}\right)(x - 3) \end{aligned}$$

- Multiplicamos ambos lados de la igualdad por 3:

$$\begin{aligned} 3\,(y - 2) &= \cancel{3}\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)(x - 3) \\ 3\,y - 6 &= x - 3 \\ x - 3\,y &= -3 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación de la recta, pero en la forma punto-pendiente.
- Empezamos con la fase **B**.
- Dividimos ambos lados de la ecuación entre -3:

$$\begin{aligned} \frac{x}{-3} + \frac{-3\,y}{-3} &= \frac{-3}{-3} \\ \frac{x}{-3} + \frac{y}{1} &= 1 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación en su forma simétrica.
- Las intersecciones con los ejes son $A(-3,0)$ y $B(0,1)$.
- Dibuja la gráfica de esa ecuación en tu cuaderno.

Observa que no importa en qué forma se encuentre la ecuación, con cualquiera vas a obtener la misma gráfica.

Por eso decimos que las ecuaciones corresponden al mismo lugar geométrico.

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{3}\right) x + 1 \\ x - 3\,y &= -3 \\ \frac{x}{-3} + \frac{y}{1} &= 1 \end{aligned}$$

Para verificar que esto es verdad tendrás que transformar la primera ecuación ecuación en la segunda, la segunda en la tercera y la tercera en la primera. Se te queda de tarea verificar que es verdad.

Encuentra la ecuación de la recta (forma simétrica) que pasa por los puntos $P(3,2)$ y $Q(1,6)$. **Ejemplo 5**

- Este problema, como el anterior, lo resolvemos en dos fases:
  A: Encontramos la ecuación en su forma punto-pendiente.
  B: Transformamos esta ecuación a la forma simétrica.
- Empezamos la fase **A**.
- Primero encontramos la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-3)}{1-(-2)} = \frac{6+3}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$$

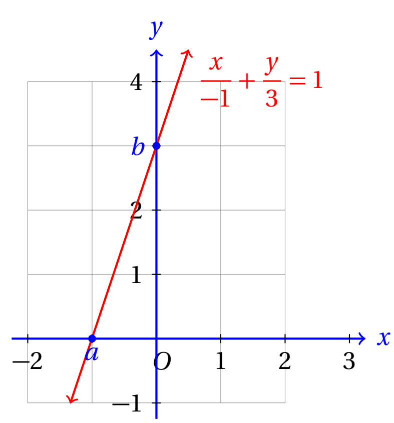
- Ahora sustituimos en la ecuación en la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 6 &= 3\,(x - 1) \\ y &= 3\,x - 3 \\ -3\,x + y &= 3 \end{aligned}$$

- Ahora vamos por la fase **B**.
- Dividimos ambos lados de la ecuación entre 3:

$$\begin{aligned} \frac{-3\,x}{3} + \frac{y}{3} &= \frac{3}{3} \\ \frac{x}{-1} + \frac{y}{3} &= 1 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación en su forma simétrica.



- Observa que como la recta corta a los ejes en los puntos: $A(-1,0)$ y $B(0,3)$, es muy fácil calcular la pendiente a partir de su gráfica.
- En este caso, $\Delta x = 1$ y $\Delta y = 3$.
- Si sustituimos estos valores en la fórmula para calcular la pendiente obtenemos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$$

En todos los ejemplos que hemos resuelto hemos tenido suerte, porque en ninguno de los casos tuvimos $a = 0$ ó $b = 0$.

En cualquiera de esos casos la forma simétrica de la recta no puede escribirse, dado que no podemos dividir entre cero.

Cuando te pidan que escribas la ecuación de la recta en la forma simétrica y la recta pase por el origen, entonces, la respuesta a esa pregunta es: «*La ecuación de la recta no puede transformarse a la forma simétrica, porque tenemos división entre cero, dado que* $a = 0$ *y* $b = 0$.»

Un ejemplo de esos casos es la recta $y = x$. Dado que pasa por el origen, $a = 0$ y $b = 0$.

Cuando sustituimos en la ecuación de la recta en la forma simétrica obtenemos:

$$\frac{x}{0} + \frac{y}{0} = 1$$

Pero eso es imposible, porque la división entre cero **no** está definida.

2.1.4 Forma general

La forma general de la ecuación de la recta es la que considera todos los casos de las rectas: horizontales, verticales e inclinadas.

En otros casos no siempre es posible escribir la ecuación de una recta dada.

Por ejemplo, en el caso de la ecuación de la recta en la forma simétrica, en caso de que cualquiera de las intersecciones fuera, bien $a = 0$, bien $b = 0$, la ecuación simétrica no puede escribirse.

En el caso de la ecuación vertical, no puede escribirse ni en forma punto-pendiente, ni en forma pendiente-ordenada al origen.

Esto se debe a que la recta vertical no tiene definida la pendiente. (¿Por qué?)

Así que surge la necesidad de estudiar una clase más de forma de la recta.

Considera la ecuación de la recta en su forma simétrica:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Si multiplicamos ambos lados por ab obtenemos:

$$\begin{aligned} ab\cdot\left(\frac{x}{a}\right) + ab\cdot\left(\frac{y}{b}\right) &= ab \\ bx + ay &= ab \\ bx + ay - ab &= 0 \end{aligned}$$

Ahora que hemos transformado la ecuación para evitarnos las fracciones, podemos cambiar los nombres de los coeficientes y escribir:

$$Ax + By + C = 0$$

Esta es la ecuación de la recta en su forma general.

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA GENERAL

La ecuación de la recta en su forma general es:

$$A x + B y + C = 0$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$, y los coeficientes A, B no pueden ser cero simultánemente.

Definición 1

Podemos encontrar la ecuación de cualquier recta del plano en su forma general. De ahí viene el adjetivo «*general*».

Hallar la ecuación (forma general) de la recta que pasa por los puntos $A(7,1)$ y $B(3,8)$.

Ejemplo 1

- Primero encontraremos la pendiente de la recta.
- Después utilizaremos la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
- **Pendiente de la recta:**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-1}{3-7} = \frac{7}{-4}$$

- Ahora sustituimos los datos conocidos en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 7 &= -\frac{7}{4}(x-1) \\ 4(y-7) &= -7(x-1) \\ 4y - 28 &= -7x + 7 \\ 7x + 4y - 28 - 7 &= 0 \\ 7x + 4y - 35 &= 0 \end{aligned}$$

- En este caso no nos conviene despejar y, porque eso implicaría tener coeficientes fraccionarios.

Observa que en este caso hemos dejado la ecuación de la recta en la forma $A x + B y + C = 0$. En este caso particular, $A = 7$, $B = 4$ y $C = -35$.

Transforma la ecuación de la recta de su forma punto-pendiente a la forma general usando $m = \Delta y / \Delta x$.

Reto 1

Encuentra la ecuación en forma general de la recta que tiene pendiente $m = 3$ y pasa por el punto $P(-1,3)$.

Ejemplo 2

- Empezamos sustituyendo los valores en la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 3 &= 3(x - (-1)) \\ y - 3 &= 3x + 3 \\ -3x + y - 6 &= 0 \\ 3x - y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

- Se sugiere que el coeficiente de x sea positivo. Por eso se multiplicó la ecuación por -1 al final.

Reto 2 Transforma la ecuación de la recta en su forma general a la forma punto-ordenada al origen.

Ejemplo 3 Transforma la ecuación de la recta en forma simétrica:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{7}=1$$

a la forma general.

- Es muy sencillo hacer la conversión: multiplicamos por el mínimo común múltiplo de los denominadores y después expresamos la ecuación en la forma general:

$$\begin{aligned} 21\left(\frac{x}{3}\right)+21\left(\frac{y}{7}\right) &= 21 \\ 7\,x+3\,y-21 &= 0 \end{aligned}$$

- Grafica la ecuación. Para eso es mejor basarse en la forma simétrica que en la general.

Reto 3 Transforma la ecuación en su forma general a la forma simétrica.

Ejemplo 4 Encuentra la ecuación en su forma general de la recta que pasa por el punto $P(5,4)$ y es paralela a la recta: $3\,x+2\,y-5=0$.

- Ya conocemos un punto por donde pasa la recta.
- Nos falta conocer la pendiente.
- Como ambas rectas son paralelas, la pendiente de la recta que buscamos es igual a la pendiente de la recta cuya ecuación conocemos.
- Para calcular la pendiente de las rectas, vamos a expresar la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} 3\,x+2\,y-5 &= 0 \\ 2\,y &= -3\,x+5 \\ y &= -\frac{3}{2}\,x+\frac{5}{2} \end{aligned}$$

- Ahora sabemos que la pendiente de la recta es: $m=-3/2$.
- Sustituimos los datos en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m\,(x-x_1) \\ y-4 &= -\left(\frac{3}{2}\right)(x-5) \\ 2\,(y-4) &= -3\,x+15 \\ 2\,y-8 &= -3\,x+15 \\ 3\,x+2\,y-23 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora se queda como ejercicio que transformes esta ecuación a la forma simétrica y la grafiques.

En este ejemplo hemos utilizado la condición de paralelismo entre dos rectas:

$$\text{Si } \ell_1 \parallel \ell_2 \qquad \text{entonces,} \qquad m_1 = m_2$$

Al tratar de resolver un problema debes reconocer qué parte de la teoría te ayuda a resolverlo.

El siguiente ejemplo requerirá que recuerdes la condición de perpendicularidad entre dos rectas.

Encuentra la ecuación (forma general) de la recta que es perpendicular a la recta $5\,x - 3\,y + 21 = 0$ y que pasa por el punto $P(7,-1)$.	**Ejemplo 5**

- Sabemos que las rectas son perpendiculares, entonces sus pendientes son recíproco de signo cambiado una de la otra.
- Primero encontramos la pendiente de la recta cuya ecuación conocemos.
- Para eso basta despejar y, así obtenemos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} 5\,x - 3\,y + 21 &= 0 \\ 5\,x + 21 &= 3\,y \\ \frac{5}{3}\,x + 7 &= y \end{aligned}$$

- Entonces, la pendiente de esta recta es $m = 5/3$.
- Encontramos la pendiente de la recta cuya ecuación deseamos calcular con la condición de perpendicularidad entre dos rectas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \qquad \Rightarrow \qquad m_2 = -\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)} = -\frac{3}{5}$$

- Ahora que conocemos su pendiente un punto por el cual pasa, podemos calcular su ecuación:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 7 &= -\frac{3}{5}\,(x - (-1)) \\ 5\,(y - 7) &= -3\,(x + 1) \\ 5\,y - 35 &= -3\,x - 3 \\ 3\,x + 5\,y - 32 &= 0 \end{aligned}$$

- Esa es la ecuación que necesitabamos calcular.

Supón que deseas encontrar la pendiente de una recta perpendicular al eje x. ¿Qué información arroja la condición de perpendicularidad entre dos rectas?

Observa que la pendiente del eje x es cero. (¿Por qué?) Cuando aplicamos la condición de perpendicularidad tenemos una división entre cero. Esto nos indica que la pendiente de una recta vertical no está definida.

Debes tener cuidado y observar esos casos antes de empezar con los cálculos.

2.1.5 Forma normal

Todavía nos falta una última forma de la ecuación de la recta que nos ayudará a estudiar el último tema de esta unidad.

Definición 1

Ecuación de la recta en su forma normal

La ecuación de la recta en su forma normal es:

$$\frac{A\,x+B\,y+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ y los coeficientes A, B no pueden ser cero simultáneamente.

Para obtener esta ecuación basta dividir ambos lados de la ecuación de la recta en su forma general entre $\sqrt{A^2+B^2}$.

Ejemplo 1 Encuentra la ecuación en forma normal de la recta: $12\,x-5\,y+1=0$.

- En este ejemplo necesitamos convertir la ecuación de la recta en forma general a la forma normal.
- Para eso basta calcular el valor del denominador: $\sqrt{A^2+B^2}$ y dividir ambos lados de la ecuación (en su forma general) por ese valor.

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{(12)^2+(-5)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$$

- Entonces, la ecuación simétrica la obtenemos dividiendo entre 13:

$$\frac{12}{13}\,x-\frac{5}{13}\,y+\frac{1}{13}=0$$

En este primer ejemplo obtuvimos un valor entero para $\sqrt{A^2+B^2}$, pero eso no siempre ocurrirá.

La mayoría de las veces encontraremos raíces de números que no se podrán simplificar.

En esos casos es mejor dejar indicada la raíz y no escribir decimales. Es más fácil de entender la ecuación mientras menos decimales contenga y es más fácil de escribir la ecuación cada vez.

El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos.

Ejemplo 2 Encuentra la ecuación (forma normal) de la recta que tiene pendiente $m=-4$ y que pasa por el punto $P(1,3)$.

- Empezamos calculando la ecuación en forma punto-pendiente, así obtenemos su forma general y finalmente calculamos la ecuación en la forma normal.
- **Fase A:** Ecuación en forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m\,(x-x_1)\\ y-3 &= -4\,(x-1)\\ y-3 &= -4\,x+4\\ 4\,x+y+1 &= 0 \end{aligned}$$

- **Fase B:** Convertimos a la forma normal.

- Calculamos el valor de $\sqrt{A^2+B^2}$:

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

- Dividimos ambos lados de la ecuación en forma general entre $\sqrt{17}$ y así obtenemos la ecuación en la forma normal:

$$\frac{4}{\sqrt{17}}\,x+\frac{1}{\sqrt{17}}\,y+\frac{1}{\sqrt{17}}=0$$

- Esta es la ecuación que deseabamos calcular.

Calcula la ecuación (forma normal) de la recta que pasa por los puntos $P(5,1)$ y $Q(1,5)$. **Ejemplo 3**

- Primero debemos calcular la pendiente de la recta, después utilizar la forma punto-pendiente y finalmente convertir a la forma normal.
- **Fase A:** Encontramos la pendiente de la recta:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-1}{1-5}=\frac{4}{-4}=-1$$

- **Fase B:** Sustituimos en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m\,(x-x_1) \\ y-1 &= (-1)(x-5) \\ y-1 &= -x+5 \\ x+y-6 &= 0 \end{aligned}$$

- **Fase C:** Convertimos a la forma normal.
- Primero calculamos el valor del denominador:

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

- Finalmente dividimos la ecuación de la recta en su forma general entre $\sqrt{2}$ para convertirla a la forma normal:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,x+\frac{1}{\sqrt{2}}\,y-\frac{6}{\sqrt{2}}=0$$

- Y terminamos.

Calcula la ecuación de la recta que es paralela a la recta $3\,x-y+12=0$ y que pasa por el punto $P(-1,1)$. **Ejemplo 4**

- Dado que las rectas son paralelas, sus pendientes son iguales.
- Para conocer la pendiente de la recta cuya ecuación conocemos, despejamos y:

$$y=3\,x+12$$

- Entonces, $m_1=3$ y $b=12$.

- Ahora vamos a sustituir $m=3$ y $P(-1,1)$ en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-1 &= 3(x-(-1)) \\ y-1 &= 3x+1 \\ -3x+y-2 &= 0 \\ 3x-y+2 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a convertirla a la forma normal.
- Calculamos el valor del denominador:

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{(3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$$

- Ahora dividimos la ecuación en la forma general entre $\sqrt{10}$ para obtener la forma normal:

$$\frac{3}{\sqrt{10}}x-\frac{1}{\sqrt{10}}y+\frac{2}{\sqrt{10}}=0$$

- Esta es la ecuación de la recta en su forma normal.

Ejemplo 5 Calcula la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $x+2y-2=0$ y que pasa por el punto $P(2,-1)$.

- Sabemos que las rectas son perpendiculares, por eso podemos usar la condición de perpendicularidad para encontrar la pendiente de la recta cuya ecuación queremos encontrar.
- Primero calculamos la pendiente de la recta que conocemos, para eso despejamos y:

$$\begin{aligned} x+2y-2 &= 0 \\ x-2 &= -2y \\ -\frac{1}{2}x+1 &= y \end{aligned}$$

- Entonces, $m_1=-1/2$ y $b=1$.
- Ahora encontramos la pendiente de la recta perpendicular a ésta con la condición de perpendicularidad:

$$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=2$$

- Ahora sustituimos los datos conocidos en la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-2 &= 2(x-(-1)) \\ y-2 &= 2x+2 \\ -2x+y-4 &= 0 \\ 2x-y+4 &= 0 \end{aligned}$$

- Y finalmente, la vamos a convertir a la forma normal.

- Calculamos el valor del denominador:

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$

- Ahora dividimos ambos lados de la ecuación en forma general entre $\sqrt{5}$ y terminamos:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\,x - \frac{1}{\sqrt{5}}\,y + \frac{4}{\sqrt{5}} = 0$$

Esta forma de la recta nos ayuda a calcular la distancia de un punto $P(x_1, y_1)$ hasta una recta cuando concemos su ecuación: $A\,x + B\,y + C = 0$, que es lo que estudiaremos en el siguiente y último tema de esta unidad.

2.1.6 Distancia entre un punto y una recta

Frecuentemente en geometría nos encontramos con el problema de calcular la distancia desde un punto a una recta.

Definición 1

Distancia de un punto a una recta
La fórmula para calcular la mínima distancia medida desde el punto $P(x_1, y_1)$ hasta la recta $\ell:\ A\,x + B\,y + C = 0$, es:

$$D_{P\ell} = \frac{|A\,x_1 + B\,y_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Obviamente, suponemos que el punto en cuestión no está sobre la recta, porque en ese caso, la distancia buscada es cero.

Observa que si el punto $P(x_1, y_1)$ está sobre la recta, entonces satisface su ecuación y como su ecuación, tanto en forma general como en forma normal, están igualadas a cero, al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la recta en forma normal (que corresponde a fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta) obtenemos cero:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Ejemplo 1

Calcula la distancia desde la recta $5\,x - 12\,y - 10 = 0$ hasta el punto $P(4,3)$.

- Sustituimos los datos conocidos en la fórmula:

$$\begin{aligned} D &= \frac{|A\,x_1 + B\,y_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &= \frac{|5(4) - 12(3) - 10|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{|20-36-10|}{\sqrt{25+144}} \\ &= \frac{|26|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2 \end{aligned}$$

- Entonces, desde la recta $5\,x - 12\,y - 10 = 0$ hasta el punto $P(4,3)$ hay 2 unidades de distancia.

Ejemplo 2

¿A qué distancia pasa la recta $3\,x + 4\,y + 15 = 0$ del origen?

- Este problema es equivalente a la siguiente solicitud:

Calcula la distancia desde la recta $3\,x+4\,y+15=0$ hasta el punto $P(0,0)$. **Comentario**

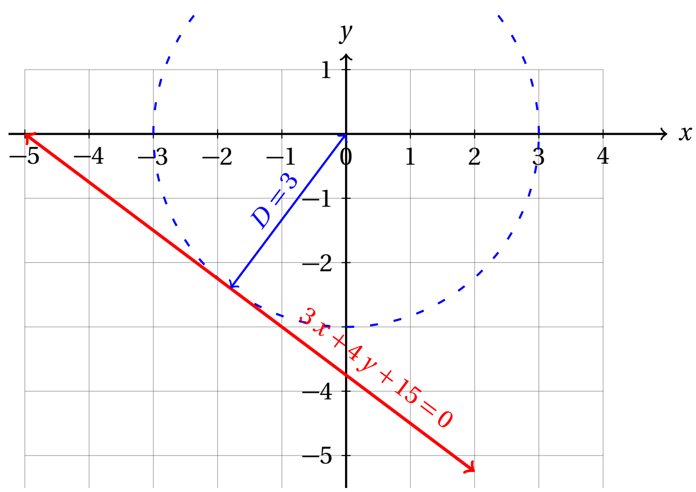
- Ahora que conocemos los datos, basta sustituir en la fórmula de distancia de un punto a una recta y realizar las operaciones que quedan indicadas:

$$\begin{aligned} D &= \frac{|A\,x_1+B\,y_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &= \frac{|3\,(0)-4\,(0)+15|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|0-0+15|}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{|15|}{5} = 3 \end{aligned}$$

- Entonces, la recta pasa a 3 unidades del origen.
- Para graficar la recta podemos transformarla a la forma simétrica:

$$\begin{aligned} 3\,x+4\,y+15 &= 0 \\ 3\,x+4\,y &= -15 \\ \frac{3\,x}{-15}+\frac{4\,y}{-15} &= \frac{-15}{-15} \\ \frac{x}{-5}+\frac{y}{-15/4} &= 1 \end{aligned}$$

- Ahora podemos graficar la recta y mostrar que la distancia al origen es de 3 unidades:



La fórmula para encontrar la distancia de un punto a una recta tiene muchas aplicaciones, sobre todo en problemas de lugar geométrico.

En la siguiente unidad vamos a encontrar el lugar geométrico del punto $P(x,y)$ que se mueve de tal manera que su distancia a una recta es igual a la distancia a otro punto $F(h,k)$ que no se encuentra sobre la recta.

Los problemas que podemos resolver con esta fórmula son muy diversos.

Las rectas $\ell_1:\ 3\,x+4\,y-20=0$, y $\ell_2:\ 3\,x+4\,y+20=0$ son paralelas. Encuentra la distancia que hay entre ellas. **Ejemplo 3**

- Nosotros no tenemos una fórmula para calcular la distancia entre dos rectas, pero podemos transformar este problema en uno que sí podamos resolver.

- Nosotros ya sabemos cómo encontrar la distancia de un punto a una recta.

- Así que vamos a encontrar un punto que esté sobre cualquiera de las rectas y de ahí vamos a calcular la distancia del punto a la otra recta.

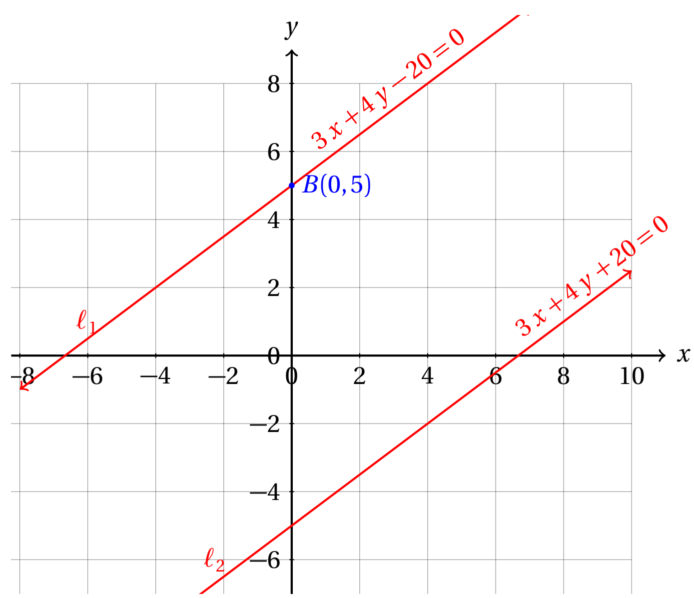
- Podemos encontrar, por ejemplo, la intersección de la recta ℓ_1 con el eje y sustituyendo $x=0$:

$$3(0)+4y-20=0 \qquad \Rightarrow \qquad y=\frac{20}{4}=5$$

- Esto nos indica que la recta corta al eje y en el punto $B(0,5)$.

- Igualmente, podemos encontrar el punto de intersección con el eje x, por ejemplo, de la recta ℓ_2 y calcular su distancia a la recta ℓ_1.

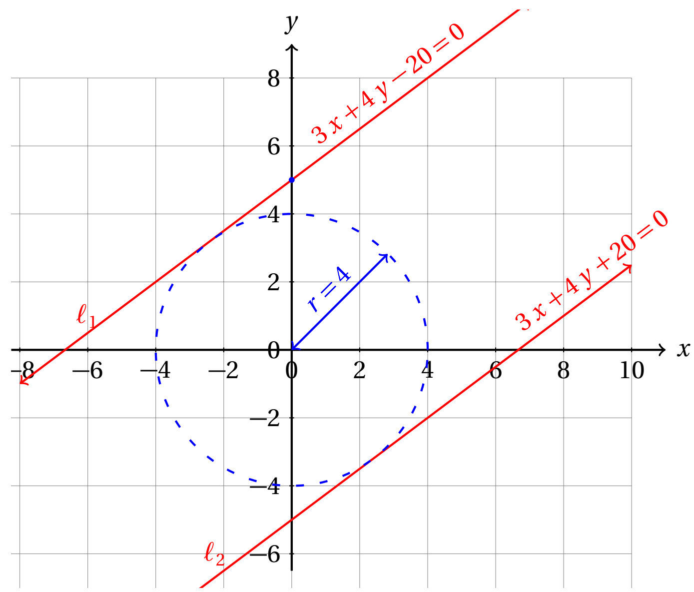
- En ambos casos obtendremos el mismo resultado porque la distancia de ℓ_1 a ℓ_2 es la misma que de la recta ℓ_2 a la recta ℓ_1.



- Ahora podemos encontrar la distancia del punto $B(0,5)$ a la recta ℓ_2:

$$\begin{aligned} D &= \frac{|A\,x_1+B\,y_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &= \frac{|3(0)+4(5)+20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|20+20|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|40|}{\sqrt{25}}=\frac{40}{5}=8 \end{aligned}$$

- Entonces, las rectas se encuentran alejadas una de otra a 8 unidades de distancia.



Un ejemplo de aplicación se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A(1,3)$, $B(-3,1)$ y $C(2,-2)$.

- La fórmula para calcular el área de un triángulo es base × altura entre dos.
- Podemos calcular la longitud de la base del triángulo con la fórmula de distancia entre dos puntos.
- La altura la calculamos con la fórmula de distancia de un punto a una recta.
- Pero primero debemos calcular la ecuación de la base del triángulo que elijamos.
- Elegiremos la base $\overline{BC}$.
- La longitud de este lado es:

$$\begin{aligned}
|\overline{BC}| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\
&= \sqrt{(2-(-3))^2+(-2-1)^2}\\
&= \sqrt{(2+3)^2+(-3)^2}\\
&= \sqrt{25+9}=\sqrt{34}
\end{aligned}$$

- Ahora vamos a calcular la altura del triángulo...
- Primero encontramos la ecuación de la recta en forma general que pasa por los puntos B y C (porque esos puntos elegimos para la base).
- Calculamos la pendiente de esa recta:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-1}{2-(-3)}=-\frac{3}{5}$$

- Ahora sustituimos la pendiente y un punto para encontrar la ecuación de la recta:

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1)\\
y - (-3) &= -\left(\frac{3}{5}\right)(x - 1)\\
5(y - 1) &= -3(x - (-3))\\
5y - 5 &= -3x - 9\\
3x + 5y + 4 &= 0
\end{aligned}$$

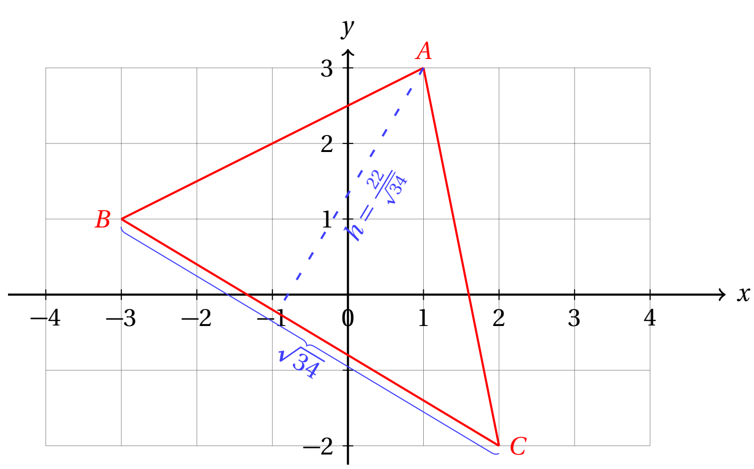
- Ahora que conocemos la ecuación de la base, podemos calcular la distancia de la base al vértice opuesto, que es el punto $A(1,3)$:

$$\begin{aligned}
D &= \frac{|A x_1 + B y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\\
&= \frac{|3(1) + 5(3) + 4|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{|3 + 15 + 4|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{22}{\sqrt{34}}
\end{aligned}$$

- Ahora sustituimos los valores de las longitudes de la base y la altura en la fórmula para encontrar el área del triángulo:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}\\
&= \frac{\left(\cancel{\sqrt{34}}\right) \times \left(\frac{22}{\cancel{\sqrt{34}}}\right)}{2}\\
&= \frac{22}{2} = 11
\end{aligned}$$

- Es decir, el área del triángulo es de 11 unidades cuadradas.

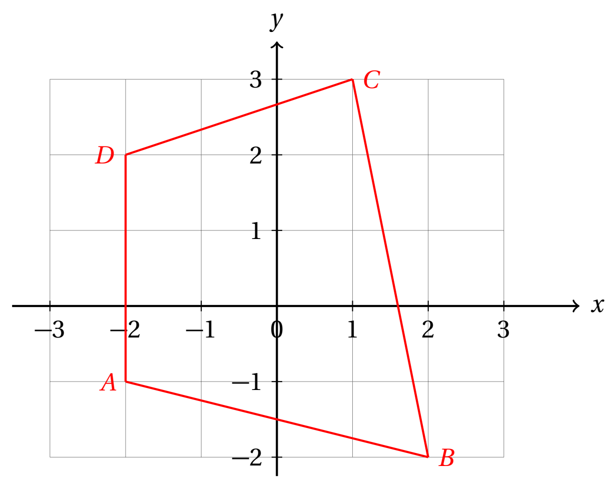


- Se te queda como ejercicio verificar que el área de este triángulo es 11 unidades cuadradas utilizando triángulos envolventes para formar un rectángulo alrededor del mismo.

Ejemplo 5

Encuentra el área del cuadrilátero que tiene sus vértices en los puntos $A(-2,-1)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$ y $D(-2,2)$.

- Para resolver este problema, vamos a reducirlo a un problema que ya sabemos resolver.
- Vamos a encontrar la ecuación de una de las diagonales del cuadrilátero para formar dos triángulos internos.
- Vamos a calcular la longitud de esa diagonal para que sirva de base a los dos triángulos.
- Después calculamos las alturas de los triángulos con la fórmula de distancia de un punto a una recta.
- Conociendo la base y las alturas de los triángulos, podremos calcular el área de cada triángulo.
- Finalmente calculamos el área del cuadrilátero sumando las áreas de los triángulos.
- Empezamos dibujando el cuadrilátero.



- Vamos a calcular la longitud de la diagonal $\overline{AC}$ usando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos:

$$
\begin{aligned}
|\overline{AC}| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\
&= \sqrt{(3-(-1))^2+(1-(-2))^2}=\sqrt{(4)^2+(3)^2}\\
&= \sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5
\end{aligned}
$$

- Ahora conocemos la longitud de la base de los triángulos.
- Vamos a calcular la ecuación de la recta ℓ que pasa por los puntos A y C.
- Primero encontramos su pendiente:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4}{3}$$

- Ahora calculamos la ecuación con la forma punto-pendiente:

$$
\begin{aligned}
y-y_1 &= m(x-x_1)\\
y-3 &= \frac{4}{3}(x-1)\\
3(y-3) &= 4(x-1)\\
3y-9 &= 4x-4\\
-4x+3y-5 &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ell: \quad 4x-3y+5=0
\end{aligned}
$$

- Ahora calculamos la altura del triángulo $\triangle ACD$ usando la fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta:

$$\begin{aligned} D_{D\ell} &= \frac{|A\,x_1 + B\,y_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &= \frac{|4(-2)-3(2)+5|}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}} = \frac{|-8-6+5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

- Ahora puedo calcular el área de este triángulo:

$$A_{\triangle ACD} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\cancel{5} \times \left(\frac{9}{\cancel{5}}\right)}{2} = \frac{9}{2}$$

- Ahora calculamos el área del triángulo $\triangle ACB$.
- Empezamos calculando su altura:

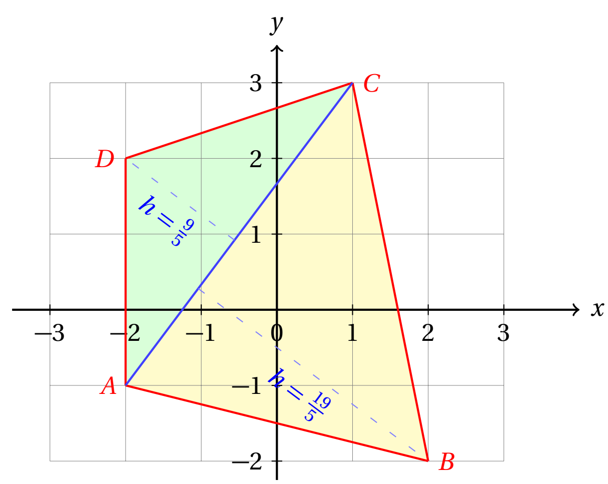
$$\begin{aligned} D_{B\ell} &= \frac{|A\,x_1 + B\,y_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &= \frac{|4(2)-3(-2)+5|}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}} = \frac{|8+6+5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{19}{5} \end{aligned}$$

- Y el área de este triángulo es:

$$A_{\triangle ACB} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\cancel{5} \times \left(\frac{19}{\cancel{5}}\right)}{2} = \frac{19}{2}$$

- Finalmente, como ya sabemos que el área del cuadrilátero es igual a la suma de las áreas de los dos triángulos, sumamos esas áreas:

$$A_{ABCD} = \frac{19}{2} + \frac{9}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ unidades cuadradas.}$$



- Verifica que este cálculo es correcto usando triángulos envolventes.

2.2 Ec. rectas notables en un triángulo

Como recordarás del curso de geometría plana (segundo semestre), las rectas notables de un triángulo son:

Medianas: Una mediana es la recta que pasa por el punto medio de un lado del triángulo y el vértice opuesto.

Alturas: Una altura es la recta que es perpendicular a un lado y pasa por el vértice opuesto.

Mediatrices: Una mediatriz es la recta que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular al mismo.

Bisectrices: Una bisectriz es la recta que divide a un ángulo en dos partes iguales.

En esta sección encontraremos las ecuaciones de las rectas notables de triángulos.

De manera analítica verificaremos algunas cosas que ya estudiamos en geometría plana.

1. Medianas

Como ya se dió la definición de mediana, vamos directamente a un ejemplo.

El triángulo $\triangle ABC$ tiene sus vértices en los puntos $A(-3,-2)$, $B(3,0)$ y $C(-1,2)$. Encuentra la ecuación de la mediana que pasa por el punto medio del lado $\overline{AB}$. **Ejemplo 6**

- Empezamos calculando las coordenadas del punto medio del lado $\overline{AB}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{-3+3}{2} \\ \bar{x} &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{-2+0}{2} \\ \bar{y} &= -1 \end{aligned}$$

- Ahora sabemos que esa mediana pasa por los puntos $M(0,-1)$ y el vértice opuesto al lado $\overline{AB}$, es decir, por el punto $C(-1,2)$.
- Ya tenemos dos puntos, podemos encontrar la ecuación de la recta.
- Calculamos la pendiente de la mediana:

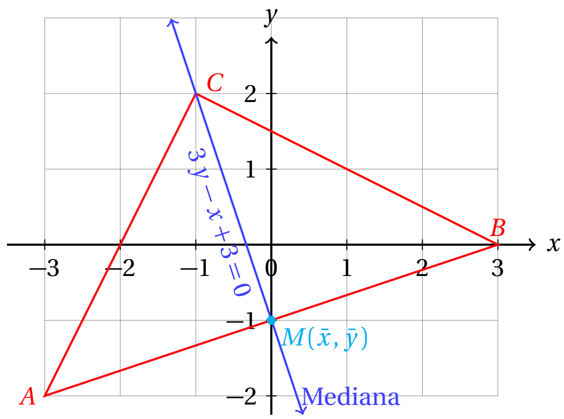
$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0+2}{3+3} = \frac{1}{3}$$

- Ahora encontramos la ecuación de la recta usando la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-(-1) &= \left(\frac{1}{3}\right)(x-0) \\ y+1 &= \frac{1}{3}x \\ 3(y+1) &= x \\ 3y+3-x &= 0 \end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación de esa mediana es: $x-3y-3=0$.

- La siguiente figura muestra la situación del problema:



Reto 1 Simplemente observando la figura del ejemplo anterior y sin utilizar álgebra, encuentra la ecuación de la mediana que pasa por el punto medio del lado $\overline{AC}$.

Podemos generalizar este problema un poco más si en lugar de encontrar la ecuación de una mediatriz solamente, nos avocamos a calcular las ecuaciones de las tres mediatrices del triángulo.

Podemos generalizar todavía más este problema si nos decidimos calcular la mediatriz de un triángulo que pasa por el punto medio de un lado dadas las coordenadas de sus vértices: $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ y $C(x_c, y_c)$.

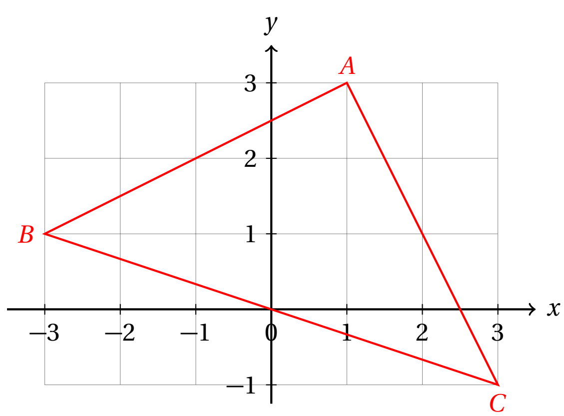
Siempre que tengas que calcular una ecuación, particularmente en estos problemas, se sugiere que siempre dibujes primero un gráfico que ilustre la situación.

Así tendrás acceso a información que no es evidente del texto del problema.

La gráfica siempre te ayudará de guia para tener orden en tus procedimientos y cálculos.

Ejemplo 7 Calcula las ecuaciones de las tres medianas del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A(1,3)$, $B(-3,1)$ y $C(3,-1)$.

- Vamos a dibujar un gráfico para ordenar ideas:

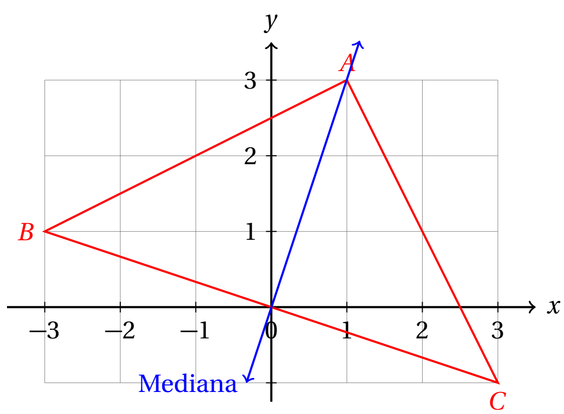


- Para tener un orden, primero vamos a calcular la mediana que pasa por el vértice A, después la mediana que pasa por el punto B y finalmente la que pasa por el punto C.

- **Mediana que pasa por** $A(1,3)$
- Calculamos las coordenadas del punto medio del lado $\overline{BC}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{-3+3}{2} \\ \bar{x} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{1-1}{2} \\ \bar{y} &= 0 \end{aligned}$$

- El punto medio del lado $\overline{BC}$ es el origen del sistema de coordenadas.



- Ahora encontramos la pendiente de la mediana que pasa por los puntos $M_{BC}(0,0)$ y $A(1,3)$:

$$m = \frac{3-0}{1-0} = 3$$

- Ahora sustituimos los datos conocidos en la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 0 &= 3(x-0) \\ y &= 3x \end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación de la mediana que pasa por el punto medio del lado $\overline{BC}$ y por el vértice $A(1,3)$ es:

$$3x - y = 0$$

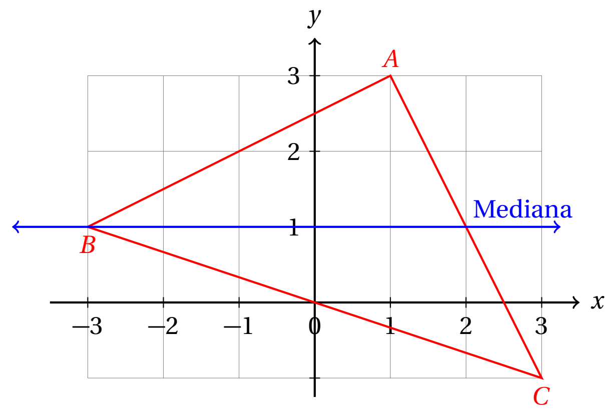
- **Mediana que pasa por** $B(-3,1)$
- Calculamos el punto medio del lado $\overline{AC}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{1+3}{2} \\ \bar{x} &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{3-1}{2} \\ \bar{y} &= 1 \end{aligned}$$

- El punto medio del segmento es: $M_{AC}(2,1)$.
- Calculamos la pendiente de la mediana que pasa por los puntos: $M_{AC}(2,1)$ y $B(-3,1)$

$$m = \frac{1-1}{-3-2} = 0$$

- La pendiente de esta recta es cero.
- Esto nos indica que la recta es horizontal.



- Calculamos la ecuación con la ecuación en su forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= 0(x - (-3)) \\ y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación de la mediana.

- **Mediana que pasa por $C(3,-1)$**
- Calculamos el punto medio del lado $\overline{AB}$:

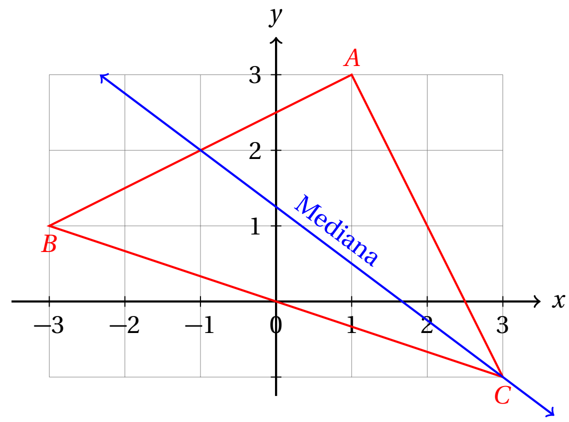
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{1-3}{2} \\ \bar{x} &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{3+1}{2} \\ \bar{y} &= 2 \end{aligned}$$

- Es decir, $M_{AB}(-1,2)$.
- Ahora calculamos la pendiente de la mediana, sabiendo que pasa por los puntos $M_{AB}(-1,2)$ y $C(3,-1)$:

$$m = \frac{-1-2}{3-(-1)} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

- Ahora calculamos la ecuación de la mediana usando los datos que ya conocemos:

$$\begin{aligned} y - (-1) &= \left(-\frac{3}{4}\right)(x-3) \\ 4(y+1) &= -3(x-3) \\ 4y + 4 &= -3x + 9 \\ 3x + 4y - 5 &= 0 \end{aligned}$$



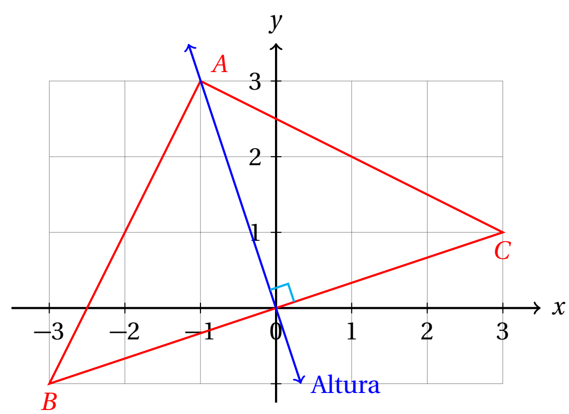
Verifica que las tres medianas del triángulo del ejemplo anterior se cortan en un solo punto. **Reto 2**

2. ALTURAS

Debes recordar que una altura es la recta que es perpendicular a un lado del triángulo y que pasa por el vértice opuesto al lado considerado.

Un triángulo tiene sus vértices en los puntos $A(-1,3)$, $B(-3,-1)$ y $C(3,1)$. Calcula la ecuación de la altura del triángulo que pasa por el vértice A. **Ejemplo 8**

- Dado que la altura es perpendicular a la base, tenemos que encontrar la pendiente de la base y podremos entonces calcular la pendiente de la altura con la condición de perpendicularidad.



- En este caso, las base es el lado $\overline{BC}$.
- Calculamos su pendiente:

$$m_{BC} = \frac{1-(-1)}{3-(-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- La pendiente de la altura es igual al recíproco de signo cambiado de la pendiente del lado $\overline{BC}$:

$$m_{\perp BC} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = -3$$

- Ahora podemos calcular la ecuación de la recta, porque sabemos que pasa por el punto $A(-1,3)$ y tiene pendiente $m=3$.

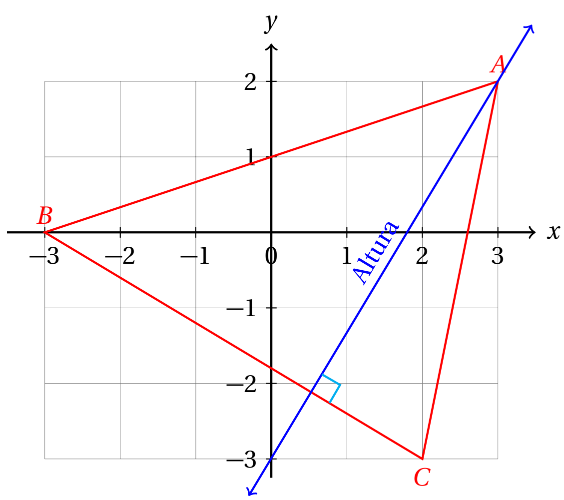
$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-3 &= -3(x-(-1)) \\ y-3 &= -3x-3 \\ 3x+y &= 0 \end{aligned}$$

Ahora vamos a calcular las ecuaciones de las tres alturas de un triángulo.

Ejemplo 9 Un triángulo tiene sus vértices en los puntos $A(3,2)$, $B(-3,0)$ y $C(2,-3)$. Calcula las ecuaciones de cada una de sus alturas.

- Iniciamos calculando en el orden alfabético.
- Primero calculamos la ecuación de la altura que pasa por el punto $A(3,2)$ y es perpendicular al lado $\overline{BC}$.

- **Altura que pasa por el punto** $A(3,2)$



- Calculamos la pendiente del lado $\overline{BC}$

$$m_{BC} = \frac{-3-0}{2-(-3)} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

- La pendiente de la altura es el recíproco de signo cambiado, porque es perpendicular al lado $\overline{BC}$:

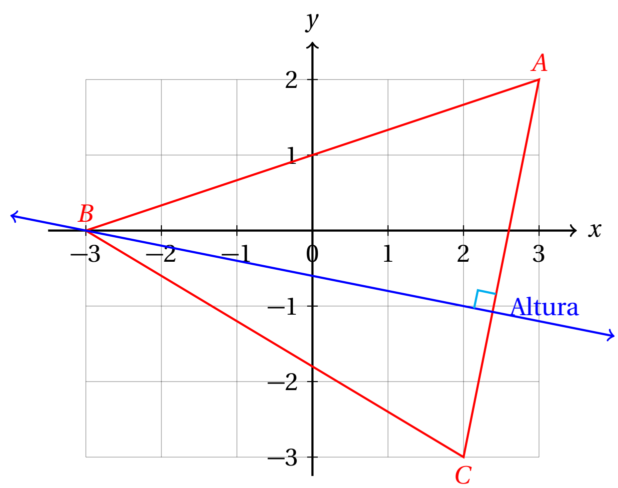
$$m_{h_A} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{3}$$

- Ahora podemos calcular la ecuación de esa altura, porque ya conocemos su pendiente y un punto por el cual pasa:

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1)\\
y - 2 &= \left(\frac{5}{3}\right)(x - 3)\\
3(y - 2) &= 5(x - 3)\\
3y - 6 &= 5x - 15\\
-5x + 3y + 9 &= 0
\end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación de la altura es: $5x - 3y - 9 = 0$.
- Vamos con el siguiente caso.

- **Altura que pasa por el punto $B(-3, 0)$**



- Calculamos la pendiente del lado AC:

$$m_{AC} = \frac{-3-2}{2-3} = \frac{-5}{-1} = 5$$

- La pendiente de esta altura es:

$$m_{h_B} = -\frac{1}{m_{AC}} = -\frac{1}{5}$$

- Y la ecuación de esta altura es:

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1)\\
y - 0 &= -\frac{1}{5}(x - (-3))\\
5y &= -x - 3\\
x + 5y + 3 &= 0
\end{aligned}$$

- Vamos con el último caso

- **Altura que pasa por el punto** $C(2,-3)$
- Calculamos la pendiente del lado $\overline{AB}$:

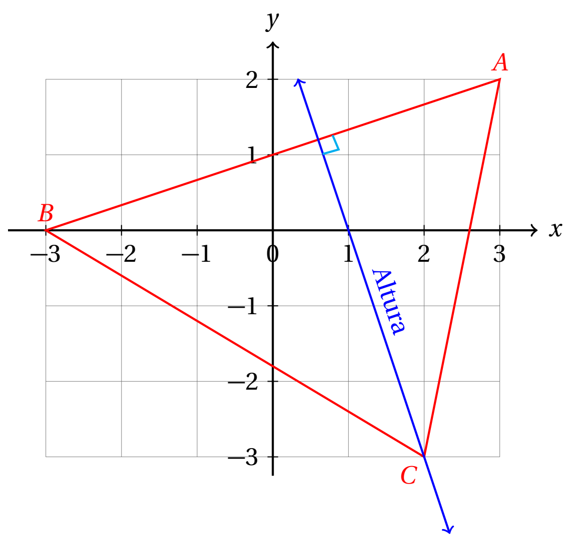
$$m_{AB} = \frac{2-0}{3-(-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- Ahora podemos conocer la pendiente de esta altura:

$$m_{h_C} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = -3$$

- Finalmente, calculamos la ecuación de esta altura:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y-(-3) &= -3(x-2) \\ y+3 &= -3x+6 \\ 3x+y-3 &= 0 \end{aligned}$$



3. MEDIATRICES

Ya sabemos que la mediatriz de un segmento es la recta que pasa por su punto medio y además es perpendicular al mismo.

Ejemplo 10

Un triángulo tiene sus vértices en los puntos $A(0,-3)$, $B(3,2)$ y $C(-1,1)$. Encuentra la mediatriz del lado $\overline{AB}$.

- Sabemos que la mediatriz pasa por el punto medio del lado $\overline{AB}$.
- Por eso necesitamos conocer la pendiente de ese lado:

$$m_{AB} = \frac{2-(-3)}{3-0} = \frac{5}{3}$$

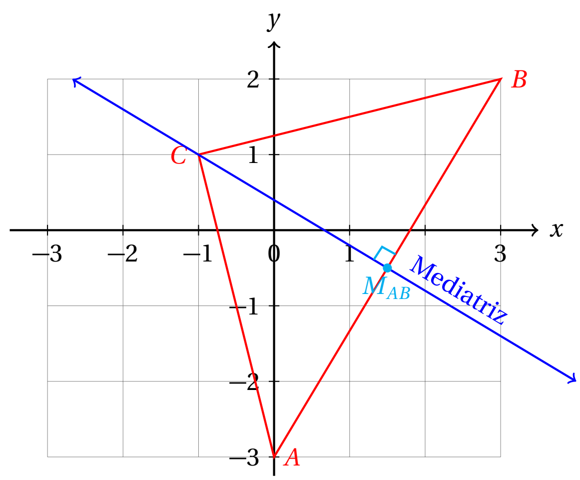
- La pendiente de la mediatriz, por ser perpendicular al lado $\overline{AB}$ es:

$$m_{\perp AB} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)} = -\frac{3}{5}$$

- Ya conocemos la pendiente de la mediatriz, pero necesitamos conocer, además, un punto por el cual pase.

- Ese punto es el punto medio del lado $\overline{AB}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{0+3}{2} \\ \bar{x} &= \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{-3+2}{2} \\ \bar{y} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



- Ahora podemos calcular la ecuación de esta altura:

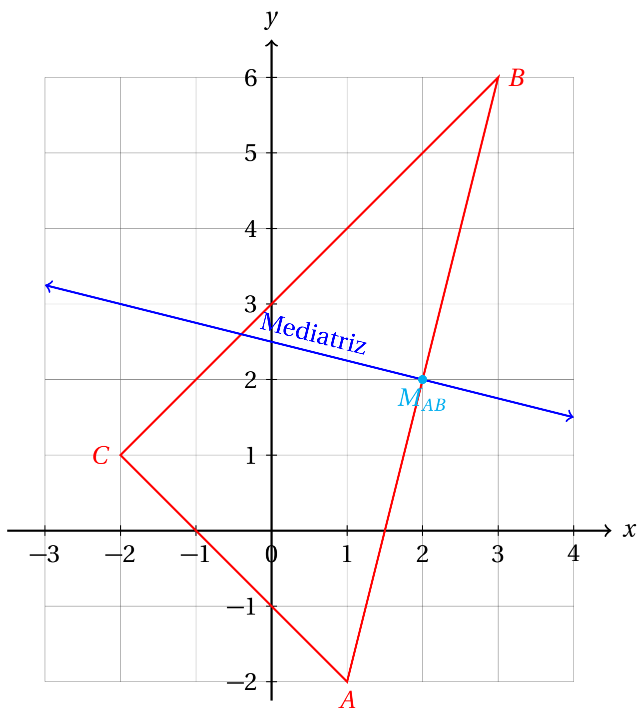
$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - \frac{1}{2} &= \left(-\frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ 5\left(y - \frac{1}{2}\right) &= -3,\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ \\ 5\,y - \frac{5}{2} &= -3\,x + \frac{9}{2} \\ 3\,x + 5\,y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación de la mediatriz del lado $\overline{AB}$.

Un triángulo tiene sus vértices en los puntos $A(1,-2)$, $B(3,6)$ y $C(-2,1)$. Encuentra las ecuaciones de las mediatrices de todos sus lados. **Ejemplo 11**

- De nuevo, iniciamos en orden alfabético.

- **Mediatriz del lado $\overline{AB}$**



- Calculamos la pendiente del lado $\overline{AB}$:

$$m = \frac{6-(-2)}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$$

- La pendiente de la mediatriz la calculamos con la condición de perpendicularidad:

$$m_{\perp AB} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{4}$$

- Conocemos una condición. (La pendiente de la mediatriz)

- Falta la segunda: un punto por donde debe pasar la mediatriz.

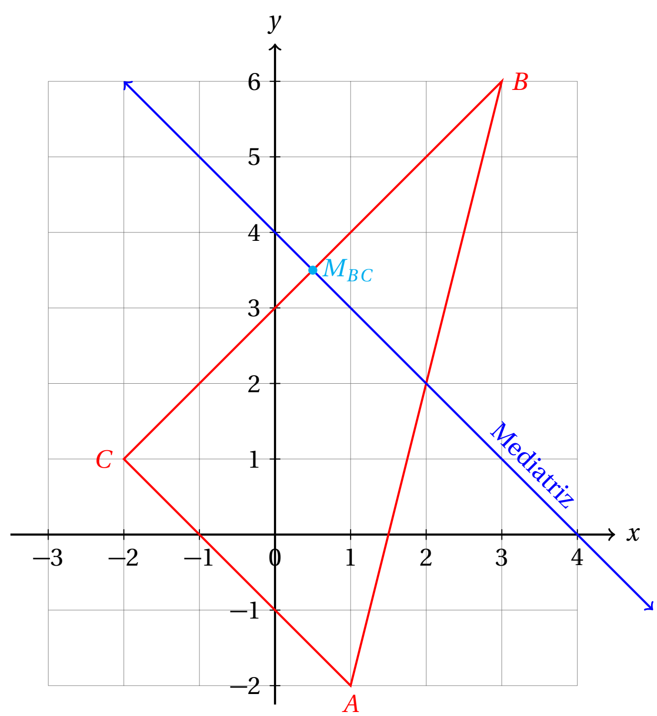
- Calculamos el punto medio de ese mismo lado:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{1+3}{2} \\ \bar{x} &= 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{-2+6}{2} \\ \bar{y} &= 2 \end{aligned}$$

- Ahora calculamos la ecuación de la recta con la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 2 &= \left(-\frac{1}{4}\right)(x-2) \\ 4(y-2) &= -(x-2) \\ 4\,y - 8 &= -x + 2 \\ x + 4\,y - 10 &= 0 \end{aligned}$$

- **Mediatriz del lado $\overline{BC}$**



- Encontramos el valor de la pendiente del lado $\overline{BC}$:

$$m = \frac{1-6}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

- La pendiente de la mediatriz de este lado debe ser -1.

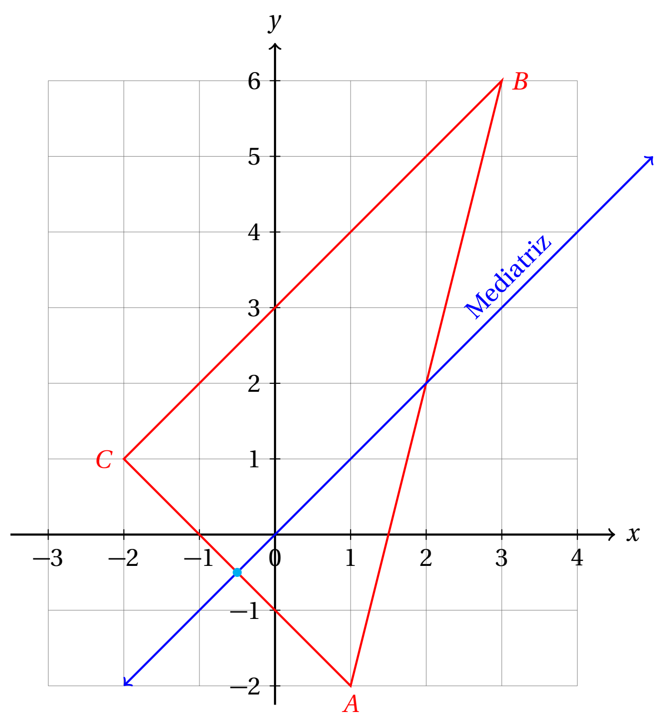
- Ahora calculamos las coordenadas del punto medio de ese lado.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{3-2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{6+1}{2} \\ \bar{y} &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

- Ahora podemos calcular la ecuación de la mediatriz de ese lado:

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m\,(x - x_1)\\
y - \frac{7}{2} &= (-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\\
y - \frac{7}{2} &= -x + \frac{1}{2}\\
2\,y - 7 &= -2\,x + 1\\
2\,x + 2\,y - 8 &= 0\\
x + y - 4 &= 0
\end{aligned}$$

- **Mediatriz del lado $\overline{AC}$**



- Empezamos calculando la pendiente de este lado:

$$m = \frac{1-(-2)}{-2-1} = \frac{3}{-3} = -1$$

- La pendiente de la mediatriz de este lado es: 1
- Ahora calculamos el punto medio de este lado:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2}\\
\bar{x} &= \frac{-2+1}{2}\\
\bar{x} &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2}\\
\bar{y} &= \frac{-2+1}{2}\\
\bar{y} &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- Finalmente, calculamos la ecuación de la mediatriz con los datos que acabamos de encontrar:

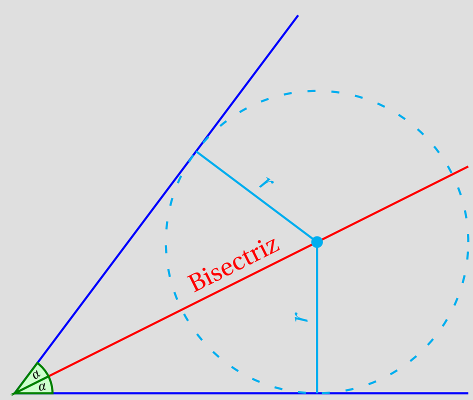
$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - \left(-\frac{1}{2}\right) &= (1)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ y + \frac{1}{2} &= x + \frac{1}{2} \\ y &= x \end{aligned}$$

Verifica que las tres mediatrices del triángulo del ejemplo anterior se cortan en un solo punto. **Reto 3**

4. BISECTRICES

Una bisectriz es la recta que divide a un ángulo en dos partes iguales. Podemos decir que la bisectriz es el eje de simetría del ángulo. Vamos a encontrar bisectrices de los ángulos de triángulos. Para eso, primero tenemos que recordar la siguiente propiedad de la bisectriz de un ángulo:

Cada punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo:



También vamos a necesitar la siguiente propiedad del valor absoluto:

$$|x| = a \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$$

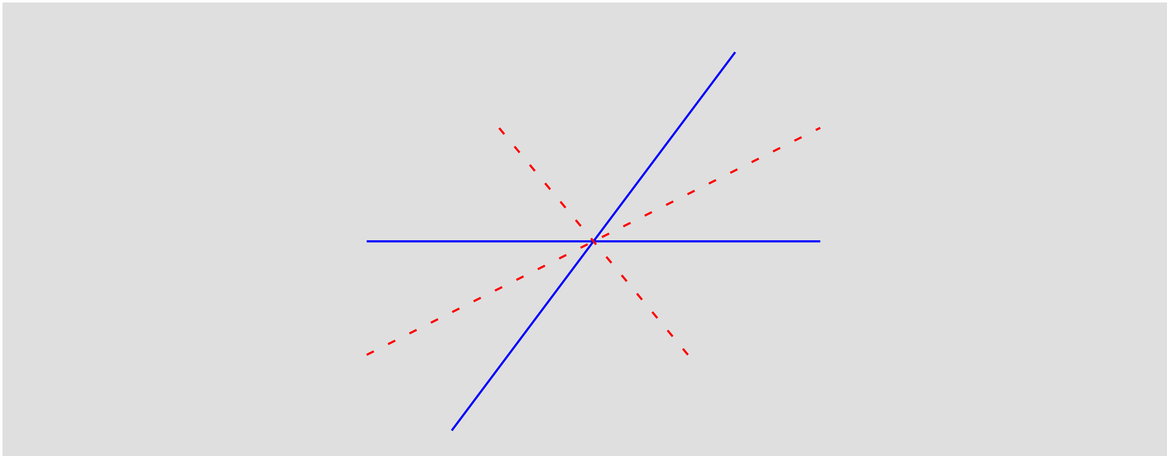
Para verificar que esto se cumple, puedes dar valores al número a y sustituir en la propiedad.

Por ejemplo, supongamos que $a = 5$. Entonces, $|x| = 5$ se cumple para $x = 5$ y para $x = -5$, porque $|5| = 5$ y también $|-5| = 5$.

Vamos a utilizar esta propiedad en la fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta. En esta fórmula está incluida la función valor absoluto (en el numerador).

Entonces, tendremos dos soluciones, una cuando el argumento de esa función sea positivo y otra cuando el argumento sea negativo.

Y esto tiene sentido geométricamente, porque para dos rectas que se cortan, podemos encontrar dos bisectrices:

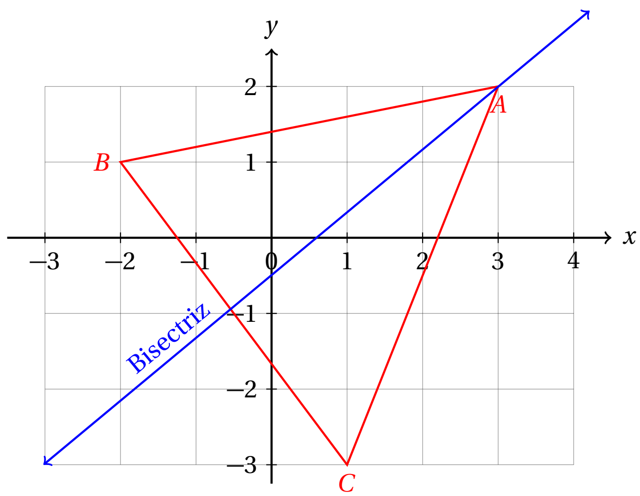


Nosotros solamente nos preocuparemos en que la bisectriz realmente esté dentro del triángulo. Para esto, vamos a necesitar graficar la ecuación de la bisectriz que hayamos obtenido de nuestros cálculos y verificar que es así.

Otra forma de verificar consiste en calcular la distancia a un punto y ver gráficamente que la medida tiene sentido con respecto a la bisectriz que calculamos y que no tendría sentido con respecto a la otra bisectriz.

Ejemplo 12 Calcula la ecuación de la bisectriz que pasa por el vértice A del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A(3,2)$, $B(-2,1)$ y $C(1,-3)$

- Empezamos graficando el triángulo y vemos de qué lados equidistan los puntos de esa bisectriz:



- De la figura es evidente que la bisectriz equidista de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
- Entonces, primero debemos encontrar las ecuaciones de esos lados del triángulo.

- **Ecuación del lado $\overline{AB}$**
- Primero calculamos su pendiente:

$$m_{AB} = \frac{2-1}{3+2} = \frac{1}{5}$$

- Ahora podemos calcular su ecuación:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= \left(\frac{1}{5}\right)(x-3) \\ 5(y-2) &= x - 3 \\ 5y - 10 &= x - 3 \\ x - 5y + 7 &= 0 \end{aligned}$$

- Ya encontramos la ecuación del lado $\overline{AB}$.

- **Ecuación del lado $\overline{AC}$**
- Calculamos su pendiente:

$$m_{AC} = \frac{-3-2}{1-3} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

- Ahora calculamos su ecuación:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \left(\frac{5}{2}\right)(x-3) \\ 2(y-2) &= 5(x-3) \\ 2y - 4 &= 5x - 15 \\ 5x - 2y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

- **Ecuación de la bisectriz**
- Sabemos que todo punto $P(x, y)$ sobre la bisectriz, equidista de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
- Algebraicamente, esto se representa como:

$$\frac{|5x - 2y - 11|}{\sqrt{25+4}} = \frac{|x - 5y + 7|}{\sqrt{1+25}}$$

- Vamos a resolver esta ecuación.
- Observa que tenemos dos valores absolutos.
- **Caso I**
- Primero vamos a considerar los argumentos de ambos valores absolutos positivos.

$$\begin{aligned} \frac{5x - 2y - 11}{\sqrt{29}} &= \frac{x - 5y + 7}{\sqrt{26}} \\ \sqrt{26}(5x - 2y - 11) &= \sqrt{29}(x - 5y + 7) \\ 5\sqrt{26}\,x - 2\sqrt{26}\,y - 11\sqrt{26} &= \sqrt{29}\,x - 5\sqrt{29}\,y + 7\sqrt{29} \end{aligned}$$

- Ahora podemos simplificar esta ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left(5\sqrt{26} - \sqrt{29}\right)x + \left(5\sqrt{29} - 2\sqrt{26}\right)y - \left(11\sqrt{26} + 7\sqrt{29}\right) &= 0 \\ 20.1099\,x + 16.7278\,y - 93.7854 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora debemos verificar que esta ecuación es la de la mediatriz que corta al ángulo interno del triángulo.
- Para eso, despejamos y y obtenemos:

$$y = \frac{-20.1099\,x + 93.7854}{16.7278} = -1.2\,x + 5.6$$

- En esta ecuación la pendiente es negativa, lo que nos indica que la recta es decreciente.
- Es decir, cuando incrementamos en x hay una disminución en y.
- Pero la gráfica de la bisectriz es creciente, por lo que tenemos que ir al siguiente caso.

- **Caso II**
- Ahora vamos a intentar resolver con un argumento de la función valor absoluto positivo y el otro negativo.

$$\begin{aligned}
\frac{-(5\,x - 2\,y - 11)}{\sqrt{29}} &= \frac{x - 5\,y + 7}{\sqrt{26}}\\
\frac{-5\,x + 2\,y + 11}{\sqrt{29}} &= \frac{x - 5\,y + 7}{\sqrt{26}}\\
\sqrt{26}\left(-5\,x + 2\,y + 11\right) &= \sqrt{29}\left(x - 5\,y + 7\right)\\
-5\sqrt{26}\,x + 2\sqrt{26}\,y + 11\sqrt{26} &= \sqrt{29}\,x - 5\sqrt{29}\,y + 7\sqrt{29}
\end{aligned}$$

- Simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned}
-\left(5\sqrt{26} + \sqrt{29}\right)x + \left(2\sqrt{26} + 5\sqrt{29}\right)y + \left(11\sqrt{26} - 7\sqrt{29}\right) &= 0\\
-30.8803\,x + 37.1239\,y + 18.3931 &= 0
\end{aligned}$$

- Al despejar y para conocer la pendiente y ordenada al origen de esta ecuación obtenemos:

$$y = \frac{30.8803\,x - 18.3931}{37.1239} = 0.8318\,x - 0.4955$$

- Esta es la ecuación de la mediatriz del ángulo $\angle A$.

En cualquier ejercicio, siempre bastará con probar los dos casos. Pues en estos dos casos están contenidos los 4 posibles casos de la igualdad:

$$\begin{aligned}
\frac{|A_1\,x + B_1\,y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= \frac{|A_2\,x + B_2\,y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\\
\frac{|\ell_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= \frac{|\ell_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}
\end{aligned}$$

Los cuatro casos posibles consisten en que el argumento de las funciones valor absoluto sean, bien positivo, bien negativo.

Ejercicios 2.2 A partir de los puntos dados, calcula la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados y exprésala en cada una de las formas que se indica.

1) $P(-8,2)$ y $Q(6,8)$.

F. Punto-pendiente: $y-2=\frac{3}{7}(x+8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\frac{3}{7}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{-\frac{38}{3}}+\frac{y}{\frac{38}{7}}=1$

F. General: $3x-7y+38=0$

F. Normal: $\frac{3x}{\sqrt{58}}-\frac{7y}{\sqrt{58}}+\frac{38}{\sqrt{58}}=0$

2) $P(1,3)$ y $Q(2,-1)$.

F. Punto-pendiente: $y-3=-4(x-1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-4x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{7}{4}}+\frac{y}{\frac{7}{1}}=1$

F. General: $-4x-1y+7=0$

F. Normal: $\frac{-4x}{\sqrt{17}}-\frac{1y}{\sqrt{17}}+\frac{7}{\sqrt{17}}=0$

3) $P(-9,7)$ y $Q(8,-1)$.

F. Punto-pendiente: $y-7=-\frac{8}{17}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\frac{8}{17}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{47}{8}}+\frac{y}{\frac{47}{17}}=1$

F. General: $-8x-17y+47=0$

F. Normal: $\frac{-8x}{\sqrt{353}}-\frac{17y}{\sqrt{353}}+\frac{47}{\sqrt{353}}=0$

4) $P(-9,6)$ y $Q(8,3)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=-\frac{3}{17}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\frac{3}{17}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{75}{3}}+\frac{y}{\frac{75}{17}}=1$

F. General: $-3x-17y+75=0$

F. Normal: $\frac{-3x}{\sqrt{298}}-\frac{17y}{\sqrt{298}}+\frac{75}{\sqrt{298}}=0$

5) $P(-4,4)$ y $Q(9,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y-4=-\dfrac{12}{13}(x+4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{12}{13}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{4}{12}}+\dfrac{y}{\frac{4}{13}}=1$

F. General: $-12\,x-13\,y+4=0$

F. Normal: $\dfrac{-12\,x}{\sqrt{313}}-\dfrac{13\,y}{\sqrt{313}}+\dfrac{4}{\sqrt{313}}=0$

6) $P(-7,2)$ y $Q(9,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y-2=-\dfrac{5}{8}(x+7)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{5}{8}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{19}{5}}+\dfrac{y}{-\frac{19}{8}}=1$

F. General: $-5\,x-8\,y-19=0$

F. Normal: $\dfrac{-5\,x}{\sqrt{89}}-\dfrac{8\,y}{\sqrt{89}}-\dfrac{19}{\sqrt{89}}=0$

7) $P(-3,5)$ y $Q(2,-7)$.

F. Punto-pendiente: $y-5=-\dfrac{12}{5}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{12}{5}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{11}{12}}+\dfrac{y}{-\frac{11}{5}}=1$

F. General: $-12\,x-5\,y-11=0$

F. Normal: $\dfrac{-12\,x}{\sqrt{169}}-\dfrac{5\,y}{\sqrt{169}}-\dfrac{11}{\sqrt{169}}=0$

8) $P(3,8)$ y $Q(5,4)$.

F. Punto-pendiente: $y-8=-2(x-3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-2\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{14}{2}}+\dfrac{y}{\frac{14}{1}}=1$

F. General: $-2\,x-1\,y+14=0$

F. Normal: $\dfrac{-2\,x}{\sqrt{5}}-\dfrac{1\,y}{\sqrt{5}}+\dfrac{14}{\sqrt{5}}=0$

9) $P(5,7)$ y $Q(7,1)$.

F. Punto-pendiente: $y-7=-3(x-5)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-3\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{22}{3}} + \dfrac{y}{\frac{22}{1}} = 1$

F. General: $-3\,x - 1\,y + 22 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-3\,x}{\sqrt{10}} - \dfrac{1\,y}{\sqrt{10}} + \dfrac{22}{\sqrt{10}} = 0$

10) $P(-9,1)$ y $Q(9,-7)$.

F. Punto-pendiente: $y - 1 = -\dfrac{4}{9}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{4}{9}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{27}{4}} + \dfrac{y}{-\frac{27}{9}} = 1$

F. General: $-4\,x - 9\,y - 27 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-4\,x}{\sqrt{97}} - \dfrac{9\,y}{\sqrt{97}} - \dfrac{27}{\sqrt{97}} = 0$

11) $P(-9,2)$ y $Q(9,-6)$.

F. Punto-pendiente: $y - 2 = -\dfrac{4}{9}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{4}{9}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{18}{4}} + \dfrac{y}{-\frac{18}{9}} = 1$

F. General: $-4\,x - 9\,y - 18 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-4\,x}{\sqrt{97}} - \dfrac{9\,y}{\sqrt{97}} - \dfrac{18}{\sqrt{97}} = 0$

12) $P(-9,4)$ y $Q(5,-1)$.

F. Punto-pendiente: $y - 4 = -\dfrac{5}{14}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{5}{14}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{11}{5}} + \dfrac{y}{\frac{11}{14}} = 1$

F. General: $-5\,x - 14\,y + 11 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-5\,x}{\sqrt{221}} - \dfrac{14\,y}{\sqrt{221}} + \dfrac{11}{\sqrt{221}} = 0$

13) $P(-9,7)$ y $Q(7,9)$.

F. Punto-pendiente: $y - 7 = \dfrac{1}{8}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \dfrac{1}{8}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{65}{1}} + \dfrac{y}{\frac{65}{8}} = 1$

F. General: $1\,x - 8\,y + 65 = 0$

F. Normal: $\dfrac{1\,x}{\sqrt{65}} - \dfrac{8\,y}{\sqrt{65}} + \dfrac{65}{\sqrt{65}} = 0$

14) $P(8,2)$ y $Q(2,-4)$.

F. Punto-pendiente: $y - 2 = 1\,(x - 8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = 1\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{18}{3}} + \dfrac{y}{-\frac{18}{3}} = 1$

F. General: $-3\,x + 3\,y + 18 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-3\,x}{\sqrt{18}} + \dfrac{3\,y}{\sqrt{18}} + \dfrac{18}{\sqrt{18}} = 0$

15) $P(4,9)$ y $Q(8,-5)$.

F. Punto-pendiente: $y - 9 = -\dfrac{7}{2}\,(x - 4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{7}{2}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{46}{7}} + \dfrac{y}{\frac{46}{2}} = 1$

F. General: $-7\,x - 2\,y + 46 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-7\,x}{\sqrt{53}} - \dfrac{2\,y}{\sqrt{53}} + \dfrac{46}{\sqrt{53}} = 0$

16) $P(-9,4)$ y $Q(9,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y - 4 = -\dfrac{6}{9}\,(x + 9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{6}{9}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{18}{6}} + \dfrac{y}{-\frac{18}{9}} = 1$

F. General: $-6\,x - 9\,y - 18 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-6\,x}{\sqrt{117}} - \dfrac{9\,y}{\sqrt{117}} - \dfrac{18}{\sqrt{117}} = 0$

17) $P(-9,6)$ y $Q(3,8)$.

F. Punto-pendiente: $y - 6 = \dfrac{1}{6}\,(x + 9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \dfrac{1}{6}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{45}{1}} + \dfrac{y}{\frac{45}{6}} = 1$

F. General: $1\,x - 6\,y + 45 = 0$

F. Normal: $\dfrac{1\,x}{\sqrt{37}} - \dfrac{6\,y}{\sqrt{37}} + \dfrac{45}{\sqrt{37}} = 0$

18) $P(-3,2)$ y $Q(7,-7)$.

F. Punto-pendiente: $y-2=-\dfrac{9}{10}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{9}{10}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{7}{9}}+\dfrac{y}{-\frac{7}{10}}=1$

F. General: $-9x-10y-7=0$

F. Normal: $\dfrac{-9x}{\sqrt{181}}-\dfrac{10y}{\sqrt{181}}-\dfrac{7}{\sqrt{181}}=0$

19) $P(-8,5)$ y $Q(1,-9)$.

F. Punto-pendiente: $y-5=-\dfrac{14}{9}(x+8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{14}{9}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{67}{14}}+\dfrac{y}{-\frac{67}{9}}=1$

F. General: $-14x-9y-67=0$

F. Normal: $\dfrac{-14x}{\sqrt{277}}-\dfrac{9y}{\sqrt{277}}-\dfrac{67}{\sqrt{277}}=0$

20) $P(2,6)$ y $Q(1,-3)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=9(x-2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=9x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{12}{9}}+\dfrac{y}{-\frac{12}{1}}=1$

F. General: $-9x+1y+12=0$

F. Normal: $\dfrac{-9x}{\sqrt{82}}+\dfrac{1y}{\sqrt{82}}+\dfrac{12}{\sqrt{82}}=0$

21) $P(-2,7)$ y $Q(2,-3)$.

F. Punto-pendiente: $y-7=-\dfrac{5}{2}(x+2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{5}{2}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{4}{5}}+\dfrac{y}{\frac{4}{2}}=1$

F. General: $-5x-2y+4=0$

F. Normal: $\dfrac{-5x}{\sqrt{29}}-\dfrac{2y}{\sqrt{29}}+\dfrac{4}{\sqrt{29}}=0$

22) $P(-5,8)$ y $Q(4,2)$.

F. Punto-pendiente: $y-8=-\dfrac{6}{9}(x+5)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{6}{9}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{42}{6}} + \dfrac{y}{\frac{42}{9}} = 1$

F. General: $-6\,x - 9\,y + 42 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-6\,x}{\sqrt{117}} - \dfrac{9\,y}{\sqrt{117}} + \dfrac{42}{\sqrt{117}} = 0$

23) $P(6,3)$ y $Q(7,-2)$.

F. Punto-pendiente: $y - 3 = -5(x - 6)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -5\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{33}{5}} + \dfrac{y}{\frac{33}{1}} = 1$

F. General: $-5\,x - 1\,y + 33 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-5\,x}{\sqrt{26}} - \dfrac{1\,y}{\sqrt{26}} + \dfrac{33}{\sqrt{26}} = 0$

24) $P(-1,8)$ y $Q(8,-9)$.

F. Punto-pendiente: $y - 8 = -\dfrac{17}{9}(x + 1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{17}{9}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{55}{17}} + \dfrac{y}{\frac{55}{9}} = 1$

F. General: $-17\,x - 9\,y + 55 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-17\,x}{\sqrt{370}} - \dfrac{9\,y}{\sqrt{370}} + \dfrac{55}{\sqrt{370}} = 0$

25) $P(4,3)$ y $Q(7,5)$.

F. Punto-pendiente: $y - 3 = \dfrac{2}{3}(x - 4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \dfrac{2}{3}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{1}{2}} + \dfrac{y}{\frac{1}{3}} = 1$

F. General: $2\,x - 3\,y + 1 = 0$

F. Normal: $\dfrac{2\,x}{\sqrt{13}} - \dfrac{3\,y}{\sqrt{13}} + \dfrac{1}{\sqrt{13}} = 0$

26) $P(4,7)$ y $Q(9,6)$.

F. Punto-pendiente: $y - 7 = -\dfrac{1}{5}(x - 4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{1}{5}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{39}{1}} + \dfrac{y}{\frac{39}{5}} = 1$

F. General: $-1\,x - 5\,y + 39 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-1\,x}{\sqrt{26}}-\dfrac{5\,y}{\sqrt{26}}+\dfrac{39}{\sqrt{26}}=0$

27) $P(-4,7)$ y $Q(7,-3)$.

F. Punto-pendiente: $y-7=-\dfrac{10}{11}(x+4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{10}{11}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{37}{10}}+\dfrac{y}{\frac{37}{11}}=1$

F. General: $-10\,x-11\,y+37=0$

F. Normal: $\dfrac{-10\,x}{\sqrt{221}}-\dfrac{11\,y}{\sqrt{221}}+\dfrac{37}{\sqrt{221}}=0$

28) $P(-9,6)$ y $Q(5,7)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=\dfrac{1}{14}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{1}{14}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{93}{1}}+\dfrac{y}{\frac{93}{14}}=1$

F. General: $1\,x-14\,y+93=0$

F. Normal: $\dfrac{1\,x}{\sqrt{197}}-\dfrac{14\,y}{\sqrt{197}}+\dfrac{93}{\sqrt{197}}=0$

29) $P(9,3)$ y $Q(3,-5)$.

F. Punto-pendiente: $y-3=\dfrac{4}{3}(x-9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{4}{3}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{27}{4}}+\dfrac{y}{-\frac{27}{3}}=1$

F. General: $-4\,x+3\,y+27=0$

F. Normal: $\dfrac{-4\,x}{\sqrt{25}}+\dfrac{3\,y}{\sqrt{25}}+\dfrac{27}{\sqrt{25}}=0$

30) $P(8,3)$ y $Q(1,-2)$.

F. Punto-pendiente: $y-3=\dfrac{5}{7}(x-8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{5}{7}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{19}{5}}+\dfrac{y}{-\frac{19}{7}}=1$

F. General: $-5\,x+7\,y+19=0$

F. Normal: $\dfrac{-5\,x}{\sqrt{74}}+\dfrac{7\,y}{\sqrt{74}}+\dfrac{19}{\sqrt{74}}=0$

31) $P(-3,1)$ y $Q(4,3)$.

F. Punto-pendiente: $y-1=\frac{2}{7}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\frac{2}{7}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{-\frac{13}{2}}+\frac{y}{\frac{13}{7}}=1$

F. General: $2x-7y+13=0$

F. Normal: $\frac{2x}{\sqrt{53}}-\frac{7y}{\sqrt{53}}+\frac{13}{\sqrt{53}}=0$

32) $P(-9,6)$ y $Q(8,1)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=-\frac{5}{17}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\frac{5}{17}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{57}{5}}+\frac{y}{\frac{57}{17}}=1$

F. General: $-5x-17y+57=0$

F. Normal: $\frac{-5x}{\sqrt{314}}-\frac{17y}{\sqrt{314}}+\frac{57}{\sqrt{314}}=0$

33) $P(1,1)$ y $Q(5,-1)$.

F. Punto-pendiente: $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\frac{1}{2}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{3}{1}}+\frac{y}{\frac{3}{2}}=1$

F. General: $-1x-2y+3=0$

F. Normal: $\frac{-1x}{\sqrt{5}}-\frac{2y}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}=0$

34) $P(4,6)$ y $Q(2,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=7(x-4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=7x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{22}{7}}+\frac{y}{-\frac{22}{1}}=1$

F. General: $-7x+1y+22=0$

F. Normal: $\frac{-7x}{\sqrt{50}}+\frac{1y}{\sqrt{50}}+\frac{22}{\sqrt{50}}=0$

35) $P(1,6)$ y $Q(8,9)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=\frac{3}{7}(x-1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \frac{3}{7}\,x - 2$

F. Simétrica: $\frac{x}{-\frac{39}{3}} + \frac{y}{\frac{39}{7}} = 1$

F. General: $3\,x - 7\,y + 39 = 0$

F. Normal: $\frac{3\,x}{\sqrt{58}} - \frac{7\,y}{\sqrt{58}} + \frac{39}{\sqrt{58}} = 0$

36) $P(-8,9)$ y $Q(8,-7)$.

F. Punto-pendiente: $y - 9 = -1\,(x+8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -1\,x - 2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{1}{1}} + \frac{y}{\frac{1}{1}} = 1$

F. General: $-1\,x - 1\,y + 1 = 0$

F. Normal: $\frac{-1\,x}{\sqrt{2}} - \frac{1\,y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

37) $P(4,9)$ y $Q(9,-7)$.

F. Punto-pendiente: $y - 9 = -\frac{16}{5}(x-4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\frac{16}{5}\,x - 2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{109}{16}} + \frac{y}{\frac{109}{5}} = 1$

F. General: $-16\,x - 5\,y + 109 = 0$

F. Normal: $\frac{-16\,x}{\sqrt{281}} - \frac{5\,y}{\sqrt{281}} + \frac{109}{\sqrt{281}} = 0$

38) $P(-6,1)$ y $Q(3,6)$.

F. Punto-pendiente: $y - 1 = \frac{5}{9}(x+6)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \frac{5}{9}\,x - 2$

F. Simétrica: $\frac{x}{-\frac{39}{5}} + \frac{y}{\frac{39}{9}} = 1$

F. General: $5\,x - 9\,y + 39 = 0$

F. Normal: $\frac{5\,x}{\sqrt{106}} - \frac{9\,y}{\sqrt{106}} + \frac{39}{\sqrt{106}} = 0$

39) $P(-3,5)$ y $Q(9,-9)$.

F. Punto-pendiente: $y - 5 = -\frac{7}{6}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\frac{7}{6}\,x - 2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{9}{7}} + \frac{y}{\frac{9}{6}} = 1$

F. General: $-7\,x-6\,y+9=0$

F. Normal: $\dfrac{-7\,x}{\sqrt{85}}-\dfrac{6\,y}{\sqrt{85}}+\dfrac{9}{\sqrt{85}}=0$

40) $P(-3,9)$ y $Q(5,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y-9=-\dfrac{17}{8}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{17}{8}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{21}{17}}+\dfrac{y}{\frac{21}{8}}=1$

F. General: $-17\,x-8\,y+21=0$

F. Normal: $\dfrac{-17\,x}{\sqrt{353}}-\dfrac{8\,y}{\sqrt{353}}+\dfrac{21}{\sqrt{353}}=0$

41) $P(9,1)$ y $Q(4,-2)$.

F. Punto-pendiente: $y-1=\dfrac{3}{5}(x-9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{3}{5}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{22}{3}}+\dfrac{y}{-\frac{22}{5}}=1$

F. General: $-3\,x+5\,y+22=0$

F. Normal: $\dfrac{-3\,x}{\sqrt{34}}+\dfrac{5\,y}{\sqrt{34}}+\dfrac{22}{\sqrt{34}}=0$

42) $P(-3,5)$ y $Q(2,-1)$.

F. Punto-pendiente: $y-5=-\dfrac{6}{5}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{6}{5}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{7}{6}}+\dfrac{y}{\frac{7}{5}}=1$

F. General: $-6\,x-5\,y+7=0$

F. Normal: $\dfrac{-6\,x}{\sqrt{61}}-\dfrac{5\,y}{\sqrt{61}}+\dfrac{7}{\sqrt{61}}=0$

43) $P(5,9)$ y $Q(6,8)$.

F. Punto-pendiente: $y-9=-1(x-5)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-1\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{14}{1}}+\dfrac{y}{\frac{14}{1}}=1$

F. General: $-1\,x-1\,y+14=0$

F. Normal: $\dfrac{-1\,x}{\sqrt{2}}-\dfrac{1\,y}{\sqrt{2}}+\dfrac{14}{\sqrt{2}}=0$

44) $P(2,3)$ y $Q(3,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y-3=-11\,(x-2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-11\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{25}{11}}+\dfrac{y}{\frac{25}{1}}=1$

F. General: $-11\,x-1\,y+25=0$

F. Normal: $\dfrac{-11\,x}{\sqrt{122}}-\dfrac{1\,y}{\sqrt{122}}+\dfrac{25}{\sqrt{122}}=0$

45) $P(-4,6)$ y $Q(3,4)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=-\dfrac{2}{7}(x+4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{2}{7}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{34}{2}}+\dfrac{y}{\frac{34}{7}}=1$

F. General: $-2\,x-7\,y+34=0$

F. Normal: $\dfrac{-2\,x}{\sqrt{53}}-\dfrac{7\,y}{\sqrt{53}}+\dfrac{34}{\sqrt{53}}=0$

46) $P(-2,5)$ y $Q(9,-5)$.

F. Punto-pendiente: $y-5=-\dfrac{10}{11}(x+2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{10}{11}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{35}{10}}+\dfrac{y}{\frac{35}{11}}=1$

F. General: $-10\,x-11\,y+35=0$

F. Normal: $\dfrac{-10\,x}{\sqrt{221}}-\dfrac{11\,y}{\sqrt{221}}+\dfrac{35}{\sqrt{221}}=0$

47) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(-1,9)$, y es paralela a la recta: $-5\,x+9\,y-2=0$.

F. Punto-pendiente: $y+9=\dfrac{5}{9}(x-1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{5}{9}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\frac{-86}{-5}\right)}+\dfrac{y}{\left(\frac{-86}{9}\right)}$

F. General: $-5\,x+9\,y-86=0$

F. Normal: $\dfrac{-5}{\sqrt{106}}\,x+\dfrac{9}{\sqrt{106}}\,y-\dfrac{86}{\sqrt{106}}=0$

48) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(-4,8)$, y es paralela a la recta: $-8\,x-7\,y-7=0$.

F. Punto-pendiente: $y+8=\dfrac{8}{-7}(x-4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{8}{-7}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{3}{-1}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{24}{-7}\right)}$

F. General: $-8\,x-7\,y+24=0$

F. Normal: $\dfrac{-8}{\sqrt{113}}\,x-\dfrac{7}{\sqrt{113}}\,y+\dfrac{24}{\sqrt{113}}=0$

49) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(2,9)$, y es perpendicular a la recta: $8\,x-6\,y-4=0$.

F. Punto-pendiente: $y+9=-\dfrac{3}{4}(x+2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{3}{4}\,x-24$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{14}{-1}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{21}{-2}\right)}$

F. General: $-6\,x-8\,y+84=0$

F. Normal: $\dfrac{-6}{\sqrt{100}}\,x-\dfrac{8}{\sqrt{100}}\,y+\dfrac{84}{\sqrt{100}}=0$

50) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(6,2)$, y es paralela a la recta: $4\,x-5\,y-3=0$.

F. Punto-pendiente: $y+2=-\dfrac{4}{-5}(x+6)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{4}{-5}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{-7}{2}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{-14}{-5}\right)}$

F. General: $4\,x-5\,y-14=0$

F. Normal: $\dfrac{4}{\sqrt{41}}\,x-\dfrac{5}{\sqrt{41}}\,y-\dfrac{14}{\sqrt{41}}=0$

51) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(3,3)$, y es perpendicular a la recta: $-3\,x-8\,y-1=0$.

F. Punto-pendiente: $y+3=\dfrac{8}{3}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{8}{3}\,x-24$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{15}{-8}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{5}{1}\right)}$

F. General: $-8\,x+3\,y+15=0$

F. Normal: $\dfrac{-8}{\sqrt{73}}\,x+\dfrac{3}{\sqrt{73}}\,y+\dfrac{15}{\sqrt{73}}=0$

52) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(-3,9)$, y es perpendicular a la recta: $8\,x-2\,y-8=0$.

F. Punto-pendiente: $y+9=-\dfrac{1}{4}(x-3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{1}{4}\,x+25$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{33}{-1}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{33}{-4}\right)}$

F. General: $-2\,x-8\,y+66=0$

F. Normal: $\dfrac{-2}{\sqrt{68}}\,x-\dfrac{8}{\sqrt{68}}\,y+\dfrac{66}{\sqrt{68}}=0$

53) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(2,9)$, y es paralela a la recta: $-8\,x-6\,y+1=0$.

F. Punto-pendiente: $y+9=\dfrac{4}{-3}(x+2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{4}{-3}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{35}{-4}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{35}{-3}\right)}$

F. General: $-8\,x-6\,y+70=0$

F. Normal: $\dfrac{-8}{\sqrt{100}}\,x-\dfrac{6}{\sqrt{100}}\,y+\dfrac{70}{\sqrt{100}}=0$

54) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(3,2)$, y es paralela a la recta: $-3\,x+8\,y-4=0$.

F. Punto-pendiente: $y+2=\dfrac{3}{8}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{3}{8}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{-7}{-3}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{-7}{8}\right)}$

F. General: $-3\,x+8\,y-7=0$

F. Normal: $\dfrac{-3}{\sqrt{73}}\,x+\dfrac{8}{\sqrt{73}}\,y-\dfrac{7}{\sqrt{73}}=0$

55) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(1,8)$, y es perpendicular a la recta: $8\,x-6\,y-8=0$.

F. Punto-pendiente: $y+8=-\dfrac{3}{4}(x+1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{3}{4}\,x+25$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{35}{-3}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{35}{-4}\right)}$

F. General: $-6\,x-8\,y+70=0$

F. Normal: $\dfrac{-6}{\sqrt{100}}\,x-\dfrac{8}{\sqrt{100}}\,y+\dfrac{70}{\sqrt{100}}=0$

56) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(1,8)$, y es paralela a la recta: $-9\,x-2\,y-1=0$.

F. Punto-pendiente: $y+8=\dfrac{9}{-2}(x+1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{9}{-2}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{25}{-9}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{25}{-2}\right)}$

F. General: $-9\,x-2\,y+25=0$

F. Normal: $\dfrac{-9}{\sqrt{85}}\,x-\dfrac{2}{\sqrt{85}}\,y+\dfrac{25}{\sqrt{85}}=0$

57) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(8,4)$, y es paralela a la recta: $6\,x-4\,y+8=0$.

F. Punto-pendiente: $y+4=-\dfrac{3}{-2}(x+8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{3}{-2}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{-16}{3}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{-8}{-1}\right)}$

F. General: $6\,x-4\,y-32=0$

F. Normal: $\dfrac{6}{\sqrt{52}}\,x-\dfrac{4}{\sqrt{52}}\,y-\dfrac{32}{\sqrt{52}}=0$

58) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(-3,2)$, y es perpendicular a la recta: $-5\,x-2\,y-5=0$.

F. Punto-pendiente: $y+2=\dfrac{2}{5}(x-3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{2}{5}\,x+25$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{-8}{-1}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{-16}{5}\right)}$

F. General: $-2\,x+5\,y-16=0$

F. Normal: $\dfrac{-2}{\sqrt{29}}\,x+\dfrac{5}{\sqrt{29}}\,y-\dfrac{16}{\sqrt{29}}=0$

59) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(-1,3)$, y es perpendicular a la recta: $4\,x+9\,y+5=0$.

F. Punto-pendiente: $y+3=\dfrac{9}{4}(x-1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{9}{4}\,x+25$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{7}{3}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{21}{-4}\right)}$

F. General: $9\,x-4\,y+21=0$

F. Normal: $\dfrac{9}{\sqrt{97}}\,x-\dfrac{4}{\sqrt{97}}\,y+\dfrac{21}{\sqrt{97}}=0$

60) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(1,6)$, y es paralela a la recta: $8\,x+5\,y-5=0$.

F. Punto-pendiente: $y+6=-\dfrac{8}{5}(x+1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{8}{5}\,x-79$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{-19}{4}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{-38}{5}\right)}$

F. General: $8\,x+5\,y-38=0$

F. Normal: $\dfrac{8}{\sqrt{89}}\,x+\dfrac{5}{\sqrt{89}}\,y-\dfrac{38}{\sqrt{89}}=0$

Formulario

Unidad Dos

Ec. Recta F. Punto-pendiente: La recta pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ con pendiente m:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Ec. Recta F. Dos puntos: La recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Ec. Recta F. Pendiente-ordenada al origen: La recta tiene pendiente m y corta al eje y en el punto $B(0, b)$:

$$y = m\,x + b$$

Ec. Recta F. Simétrica: Las intersecciones con los ejes son $A(a, 0)$ y $B(0, b)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ec. Recta F. General: La ecuación de cualquier recta se puede escribir con:

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

donde A y B no son simultáneamente cero.

Ec. Recta F. Normal: Útil para calcular la distancia de un punto a una recta:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Distancia de un punto a una recta: La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $\ell:\ A\,x + B\,y + C = 0$, es:

$$D_{P\ell} = \frac{A\,x_1 + B\,y_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Capítulo 3

La circunferencia

Por aprender...

Por qué es importante...

En la naturaleza, cuando lanzas una piedra en el agua, las ondas viajan en formas de circunferencias, además, las circunferencias tienen amplias aplicaciones: discos, bocinas, llantas, rodamientos (baleros), etc., por eso la circunferencia representa el modelo de muchas situaciones que estudiremos en semestres posteriores.

3.1 Caracterización geométrica

En la sección *Lugares Geométricos* se muestra cómo caracterizar una circunferencia geométricamente, a través de la solución de un ejemplo.

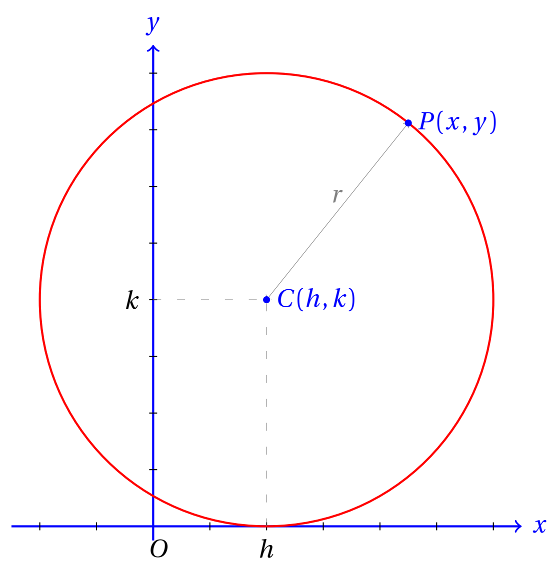
En esta sección vamos a resolver el mismo problema para el caso más general y vamos a detallar un poco más esa solución.

Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal manera que su distancia al punto $C(h, k)$ siempre es igual a r unidades. Encuentra la ecuación de este lugar geométrico. **Ejemplo 13**

- La distancia desde el punto $P(x, y)$ hasta el punto $C(h, k)$ siempre es r.
- Utilizamos la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos.

$$\begin{aligned}
\overline{PC} = r &= \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}\\
r^2 &= (x-h)^2+(y-k)^2\\
r^2 &= x^2-2\,h\,x+h^2+y^2-2\,k\,y+k^2\\
0 &= x^2+y^2-2\,h\,x-2\,k\,y+h^2+k^2-r^2
\end{aligned}$$

- Esta ecuación corresponde a una circunferencia de radio r y centro en el punto $C(h, k)$.



Entonces, la ecuación:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

corresponde a una circunferencia de radio r con centro en el punto $C(h, k)$.

Esta misma ecuación puede desarrollarse y obtenemos:

$$x^2+y^2-2\,h\,x-2\,k\,y+h^2+k^2-r^2=0$$

la cual podemos reescribir como:

$$x^2+y^2+D\,x+E\,y+F=0$$

donde $D = -2\,h$, $E = -2\,k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

Esta forma de escribir la ecuación de la recta nos permitirá resolver más problemas aún.

El caso particular más sencillo para esta ecuación se obtiene cuando el centro de la circunferencia está en el origen de coordenadas.

Entonces, $C(h,k)$ es $C(0,0)$ y la ecuación de la circunferencia se reduce a:

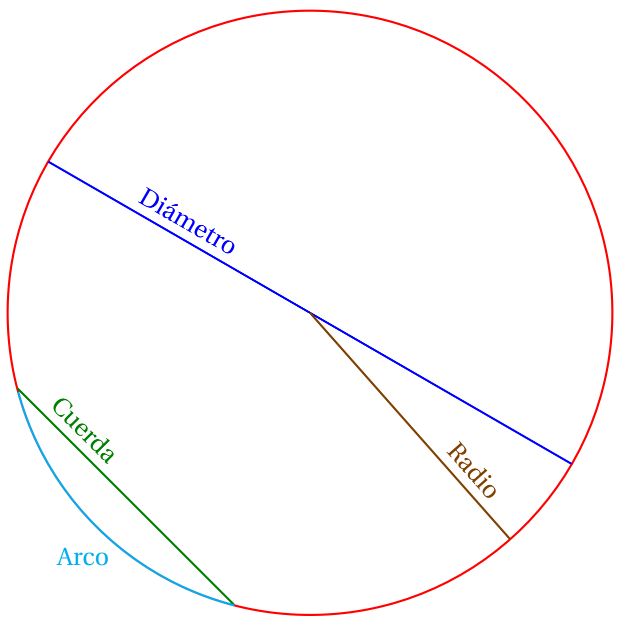
$$\begin{aligned}(x-0)^2 + (y-0)^2 &= r^2\\ x^2 + y^2 &= r^2\end{aligned}$$

Esta es la ecuación que vamos a estudiar para iniciar el estudio de la circunferencia.

5. ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

Ahora vamos a definir algunos elementos que son importantes para el estudio de la circunferencia.

En la siguiente figura se muestran los elementos de la circunferencia.



A continuación se dan las definiciones de cada uno de los elementos mostrados en la figura anterior.

Definición 2

RADIO
El radio de una circunferencia es el segmento de recta que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera sobre ésta.

Definición 3

CUERDA
Es un segmento de recta que une dos puntos cualesquiera que pertenecen a la circunferencia.

Definición 4

DIÁMETRO
Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Todo diámetro de una circunferencia es el eje de simetría de la misma. El diámetro es la mayor cuerda que se puede trazar a una circunferencia.

Arco *Es una parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de la misma que se llaman extremos del arco.*	**Definición 5**

Círculo *Es la superficie plana limitada por una circunferencia.*	**Definición 6**

El círculo es el área encerrada por la circunferencia. Desde el punto de vista algebraico corresponde a todos los puntos que satisfacen la desigualdad:

$$(x-h)^2+(y-k)^2<r^2$$

Es decir, el círculo son todos los puntos internos a la circunferencia.

Tangente *Es una recta que toca a la circunferencia en uno de sus puntos. El punto donde toca a la circunferencia se llama punto de tangencia.* *Una tangente siempre es perpendicular al radio que va desde el punto de tangencia hasta el centro de la circunferencia.*	**Definición 7**

Secante *Una recta secante a una circunferencia es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos.*	**Definición 8**

Es muy fácil observar que una recta toca a una circunferencia en dos puntos cuando su distancia al centro de la circunferencia es menor al radio, en un solo punto cuando su distancia es igual al radio, o en ningún punto cuando su distancia al centro de la circunferencia es mayor al radio.

Punto interno *Un punto es interno o interior a una circunferencia cuando su distancia al centro de la misma es menor al radio.*	**Definición 9**

Punto externo *Un punto es externo o exterior a una circunferencia cuando su distancia al centro de la misma es mayor al radio.*	**Definición 10**

3.2 Ecuación ordinaria de la circunferencia

En esta sección estudiatemos la ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria.

Cuando hablemos de la forma ordinaria de una cónica, generalmente nos referiremos a un problema sencillo.

3.2.1 Circunferencia con centro en el origen

Definición 1

Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplo 1

La ecuación $x^2 + y^2 = 36$ corresponde a una circunferencia con radio 6 con centro en el origen. ¿Cuáles de los siguientes puntos son internos a la circunferencia?

✓ $A(0,0)$ ✓ $D(3,3)$ ✓ $G(6,6)$

✓ $B(1,1)$ ✓ $E(4,4)$

✓ $C(2,2)$ ✓ $F(5,5)$

- Necesitamos calcular la distancia desde el origen a cada uno de los puntos A, B, C, D, E, F, G.
- Sabemos que el radio de la circunferencia mide 6 unidades.
- Para empezar, la distancia desde un punto a sí mismo es cero, por eso, el punto A es interno a la circunferencia.
- Pues para que fuera externo se requiriera que la distancia desde el origen hasta él fuera mayor a 6, que es el radio de la circunferencia.
- Ahora calculamos la distancia desde el origen al punto B:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

- Para probar que $\sqrt{2} < 6$ elevamos al cuadrado ambos lados de la desigualdad y obtenemos otra desigualdad válida.
- Ahora estudiamos el caso del punto C:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es interno, porque $\sqrt{8} < 6 \qquad \Rightarrow \qquad 8 < 36$
- Ahora estudiamos el caso del punto D:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2} \\ &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es interno, porque $\sqrt{18} < 6 \quad \Rightarrow \quad 18 < 36$
- Ahora estudiamos el caso del punto E:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2} \\ &= \sqrt{32} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es interno, porque $\sqrt{32} < 6 \quad \Rightarrow \quad 32 < 36$
- Ahora estudiamos el caso del punto F:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(5-0)^2 + (5-0)^2} \\ &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es externo, porque $\sqrt{50} > 6 \quad \Rightarrow \quad 50 > 36.$
- Finalmente, el caso del punto G:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(6-0)^2 + (6-0)^2} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es externo, porque $\sqrt{72} > 6 \quad \Rightarrow \quad 72 > 36$
- Realiza una gráfica para verificar que esto es verdad.

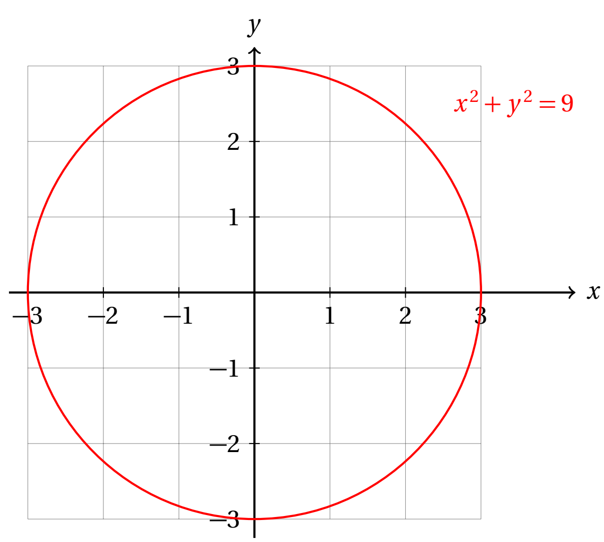
Ejemplo 2 Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio $r = 3$ cm.

- Sabemos que el centro está en el origen, por eso la ecuación tiene la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- Ahora solamente falta sustituir el valor de r en la ecuación para terminar con nuestro problema:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 &= (3)^2 \\ x^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$



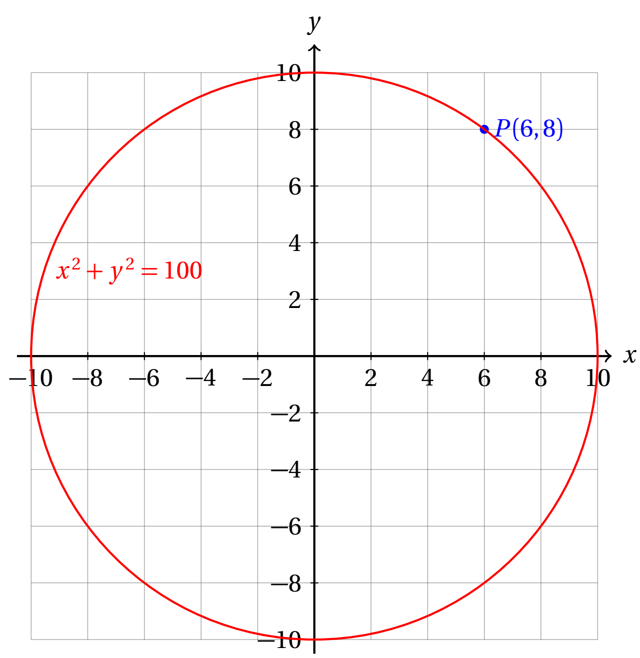
Este ejemplo sirvió solamente para introducir la idea de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.

Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y pasa por el punto $P(6,8)$. **Ejemplo 3**

- Ya sabemos que la circunferencia tiene su centro en el origen, además que pasa por el punto $P(6,8)$.
- Para calcular su radio, basta encontrar la distancia del origen al punto P:

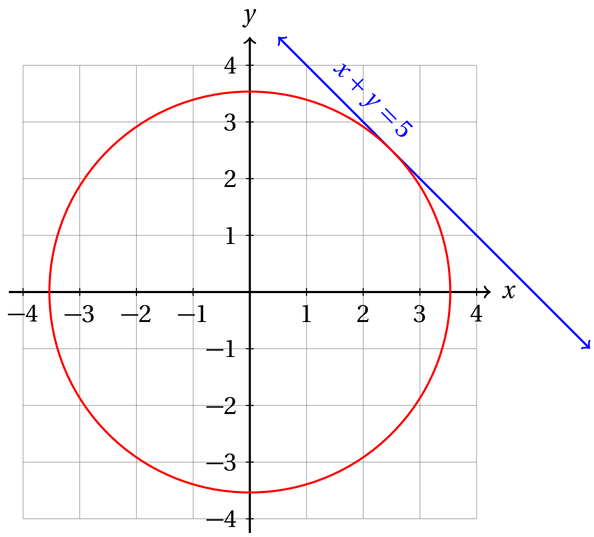
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(6-0)^2+(8-0)^2} \\ &= \sqrt{36+64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

- Esto nos indica que el radio de la circunferencia es $r=10$.
- Entonces, la ecuación buscada es: $x^2+y^2=100$.
- La siguiente gráfica muestra a esta circunferencia:



Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y es tangente a la recta $x+y=5$. **Ejemplo 4**

- Para resolver el problema es una buena idea empezar dibujando la situación en un plano cartesiano:



- Para encontrar la ecuación de la circunferencia debemos conocer el valor de r.
- Pero r es la distancia del origen a la recta $x + y - 5 = 0$.
- Es decir, necesitamos encontrar la distancia desde el origen a esa recta.
- Para eso utilizamos la fórmula de distancia de un punto a una recta:

$$\begin{aligned} r &= \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|(1)(0) + (1)(0) - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Lo cual implica que $r^2 = 25/2 = 12.5$
- Y la ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 = \dfrac{25}{2}$.

Ejemplo 5 Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos: $(4, -3)$ y $(-4, 3)$. Encuentra la ecuación de la circunferencia.

- En este caso no conocemos ni el centro de la circunferencia ni su radio.
- Para conocer su centro, basta calcular las coordenadas del punto medio del diámetro.

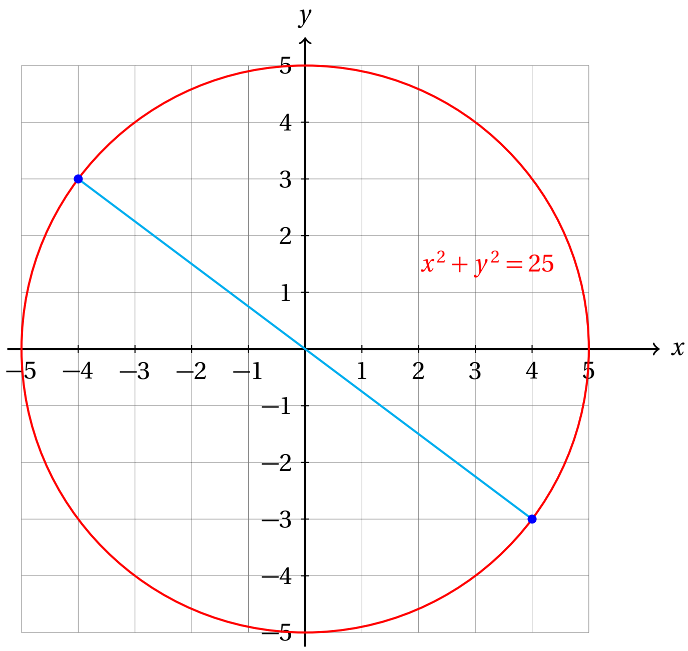
$$x_C = \frac{4-4}{2} = 0 \qquad\qquad y_C = \frac{-3+3}{2} = 0$$

- Esto nos indica que la circunferencia está en el origen.
- Ahora necesitamos calcular el radio de la circunferencia.
  - ✓ Podemos calcular la distancia desde el centro a cualquiera de los extremos del diámetro.
  - ✓ Igual, podemos calcular la longitud del diámetro y calculamos después su mitad.

- Calculamos la distancia desde el centro de la circunferencia a cualquiera de los extremos del diámetro:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} \end{aligned}$$

- Entonces, $r=5$, y la ecuación de la circunferencia es: $x^2+y^2=25$.



Recuerda que elaborar una figura o gráfica para empezar a resolver un problema te ayuda a ordenar las ideas.

Generalmente será fácil resolver problemas de geometría analítica si empiezas dibujando en un sistema de coordenadas la información que el problema te provee. Inclusive este truco te ayuda a entender mejor el problema.

Así que la sugerencia es: en cada problema de geometría analítica empieza siempre la solución dibujando la información en un sistema de coordenadas.

3.2.2 Centro fuera del origen

Ya conoces la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen.

Si trasladamos el centro de la circunferencia h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba, obtenemos una circunferencia que está fuera del origen.

En este caso obtenemos la circunferencia que obtuvimos en la sección *Caracterización geométrica y elementos de la circunferencia*.

Definición 1

Ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen

La ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(h,k)$ y radio r es:

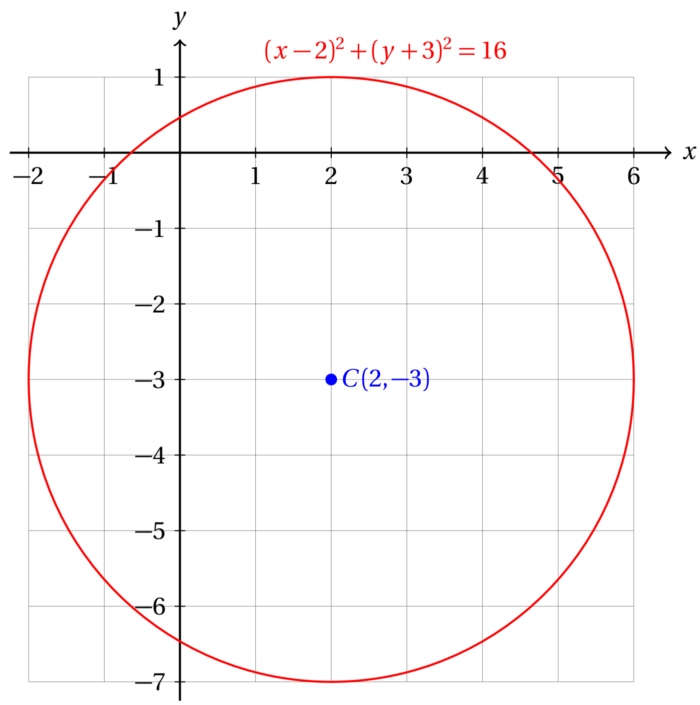
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(2,-3)$ y radio $r=4$.

- Ya sabemos que el centro es $C(2,-3)$ y el radio es 4.
- Solamente debemos sustituir los datos en la fórmula:

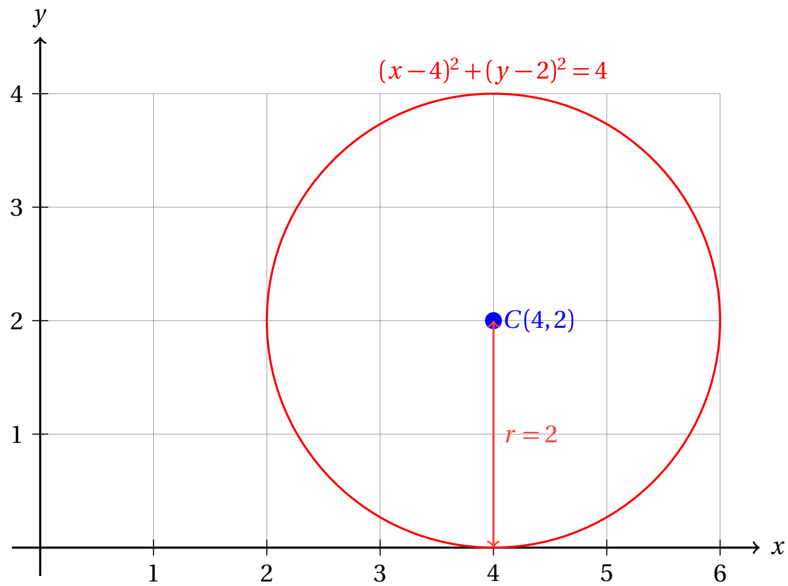
$$(x-2)^2+(y+3)^2=(4)^2$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2=16$$



Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(4,2)$ y es tangente al eje x.

- En este caso sabemos que la circunferencia es tangente al eje x.
- Esta información nos ayudará a calcular el radio de la circunferencia.
- Empezamos dibujando la situación:



- Del dibujo se deduce que el radio de la circunferencia es 2.

- Ahora que conocemos dónde está el centro y la medida del radio de la circunferencia, podemos calcular su ecuación:

$$(x-4)^2+(y-2)^2=(2)^2$$
$$(x-4)^2+(y-2)^2=4$$

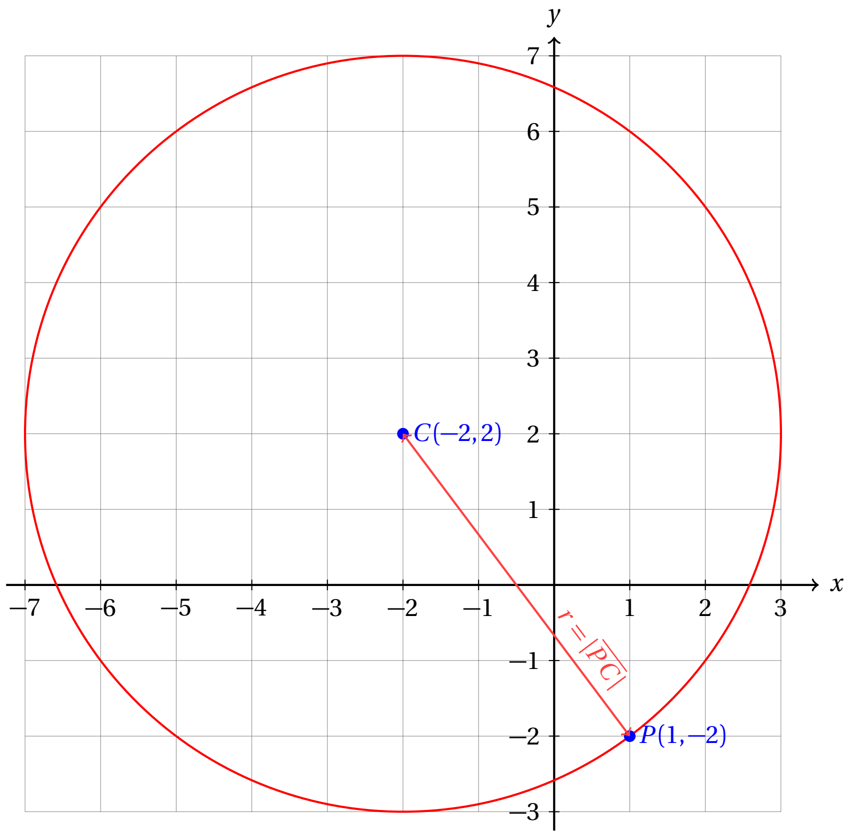
Observa cómo la figura indica de inmediato la medida del radio. En este caso sencillo, también es posible darse cuenta imaginándose la figura. Pero eso no siempre ocurrirá.

En otros problemas te verás obligado a realizar la figura para poder encontrar cómo están relacionados los datos contenidos en el texto del problema.

En algunos casos tendremos que utilizar fórmulas que ya conoces, principalmente las que estudiamos en la primera unidad del curso. El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos.

Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(-2,2)$ y que pasa por el punto $P(1,1)$	**Ejemplo 3**

- Empezamos dibujando la situación en un sistema de ejes coordenados:



- Ahora vemos que el radio de la circunferencia es la distancia desde el centro de la circunferencia $C(-2,2)$ hasta el punto $P(1,-2)$.
- Vamos a calcular esta distancia usando la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(1-(-2))^2+(-2-2)^2} \\ &= \sqrt{(1+2)^2+(-4)^2} \\ &= \sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5 \end{aligned}$$

- Ahora podemos calcular la ecuación de la circunferencia:

$$\begin{aligned} (x-(-2))^2+(y-2)^2 &= (5)^2 \\ (x+2)^2+(y-2)^2 &= 25 \end{aligned}$$

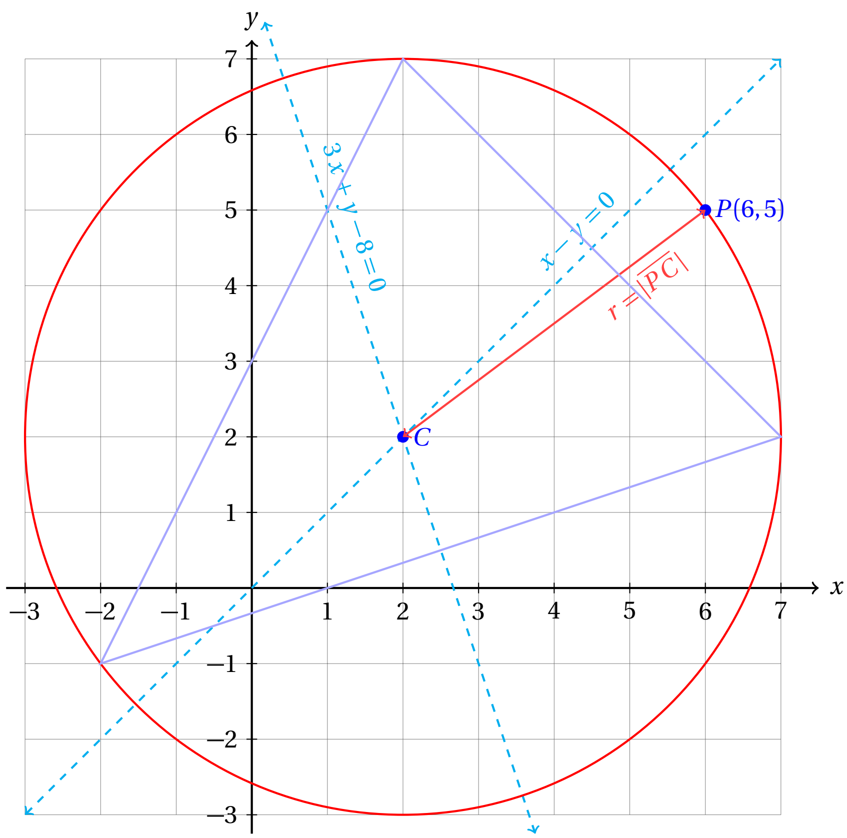
- Esta es la ecuación buscada.

En otros problemas nos encontraremos con la necsidad de aplicar conocimientos de semestres anteriores.

Ejemplo 4 Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita a un triángulo, sabiendo que dos de sus mediatrices son las rectas $\ell_1: 3x+y-8=0$ y $\ell_2: x-y=0$, y pasa por el punto $P(6,5)$.

- De nuevo, es mejor empezar dibujando la situación.

- Pero debemos primero graficar las rectas.
- La mediatriz ℓ_2 $x - y = 0$ es muy sencilla de graficar.
- La mediatriz ℓ_1 : $3\,x + y - 8 = 0$ pasa por los puntos $A(1,5)$ y $B(3,-1)$



- Debemos calcular el punto donde se intersectan las dos mediatrices del triángulo.
- Para eso debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales formado por sus ecuaciones.

$$\begin{cases} 3\,x + y = 8 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

- Al sumar ambas ecuaciones obtenemos: $4\,x = 8$, que implica $x = 2$.
- Pero ya sabemos por la mediatriz ℓ_2 que $y = x = 2$.
- Entonces, el centro de la circunferencia es $C(2,2)$.
- Ahora solamente falta calcular su radio.
- Sabemos que la circunferencia pasa por el punto $P(6,5)$.
- El radio es la distancia entre los puntos $C(2,2)$ y $P(6,5)$.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(6-2)^2 + (5-2)^2} \\ &= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

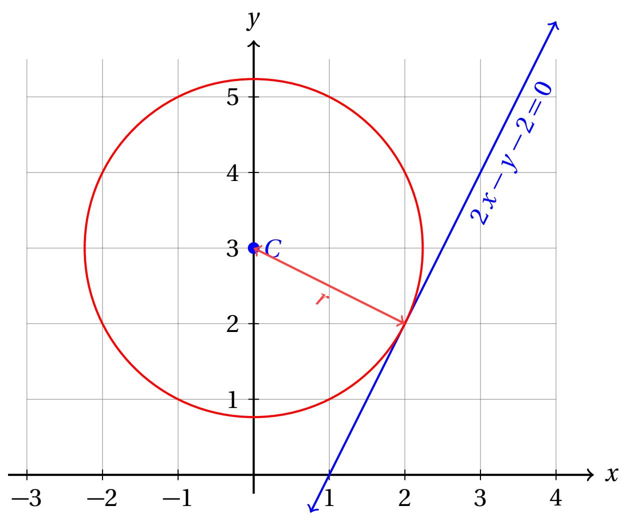
- Ahora que conocemos el radio y el centro de la circunferencia, podemos calcular su ecuación:

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y-2)^2 &= (5)^2\\(x-2)^2+(y-2)^2 &= 25\end{aligned}$$

Ejemplo 5

Calcula la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $2x-y-2=0$, y que tiene su centro en el punto $C(0,3)$.

- Dibujamos la situación en un sistema de coordenadas:



- De la figura vemos que el radio de la circunferencia es igual a la distancia desde la recta $2x-y-2=0$ hasta el punto $C(0,3)$.
- Vamos a utilizar la fórmula de distancia de un punto a una recta para calcular la longitud del radio:

$$\begin{aligned}r &= \frac{|A\,x_0+B\,y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\ &= \frac{|2(0)-1(3)-2|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}\\ &= \frac{|-5|}{\sqrt{4+1}}\\ &= \frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}\end{aligned}$$

- Entonces, el radio mide $\sqrt{5}$ unidades.
- Ahora podemos calcular la ecuación de la circunferencia:

$$\begin{aligned}(x-0)^2+(y-2)^2 &= \left(\sqrt{5}\right)^2\\ x^2+(y-2)^2 &= 5\end{aligned}$$

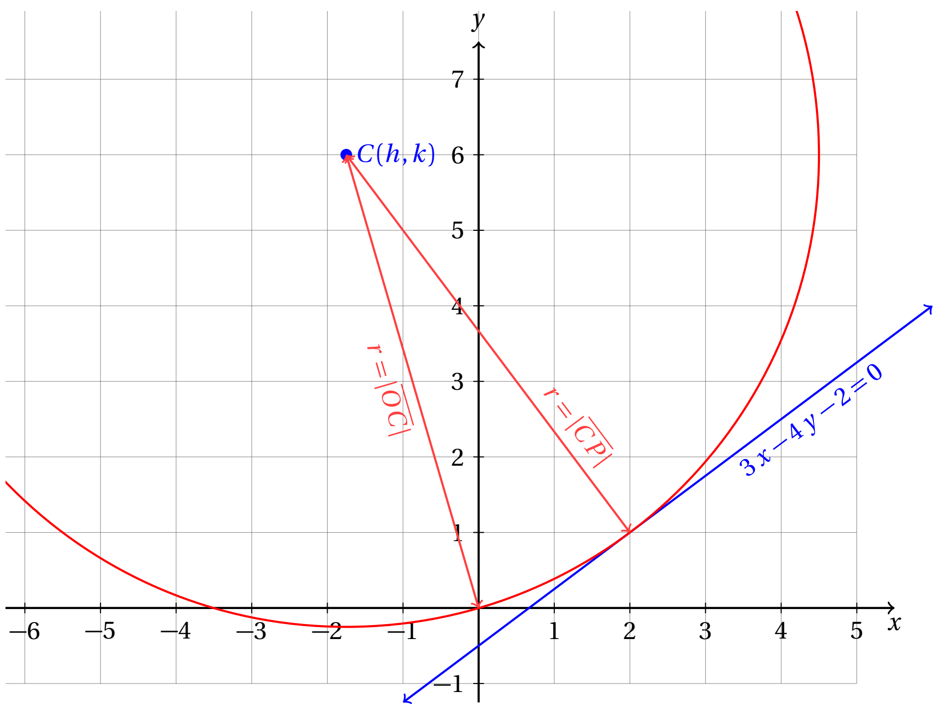
Cuando encuentres un problema que no te da mucha información, es posible resolverlo si trabajas con orden y vas encontrarndo sugerencias conforme avanzas en su solución.

Algunas veces encontrarás un sistema de ecuaciones lineales, en otros casos encontrarás una ecuación cuadrática, pero siempre (al menos en este curso), encontrarás suficiente información para resolver el problema.

Pero recuerda, es importante hacer un dibujo para reconocer toda la información contenida en el texto de problema, porque muchas veces estará «*escondida*», es decir, no estará escrita explícitamente, sino que deberás darte cuenta por la situación geométrica.

Encuentra la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $3x - 4y = 2$ en el punto $P(2,1)$ y que pasa por el origen. **Ejemplo 6**

- En este caso necesitamos calcular primero las coordenadas del centro $C(h,k)$ de la circunferencia.
- Para esto emezamos dibujando la situación en un sistema de coordenadas:



- De la figura se hace evidente que: $r = |\overline{OC}| = |\overline{CP}|$.
- Así que de esa condición podemos obtener una ecuación:

$$\begin{aligned}
r = |\overline{OC}| &= |\overline{CP}|\\
\sqrt{(h-0)^2 + (k-0)^2} &= \sqrt{(h-2)^2 + (k-1)^2}\\
(h-0)^2 + (k-0)^2 &= (h-2)^2 + (k-1)^2\\
\cancel{h^2} + \cancel{k^2} &= \cancel{h^2} - 4h + 4 + \cancel{k^2} - 2k + 1\\
4h + 2k &= 5
\end{aligned}$$

- Ahora debemos recordar que el radio de una circunferencia siempre es perpendicular a la tangente a la circunferencia que lo corta.
- Como el radio $\overline{CP}$ es perpendicular a la recta $3\,x-4\,y=2$, sus pendientes cumplen con:

$$m_{CP}=-\frac{1}{m_\ell}$$

- Podemos conocer la pendiente de la recta tangente escribiéndola en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$3\,x-4\,y=2 \qquad \Rightarrow \qquad y=\frac{3}{4}\,x-\frac{1}{2}$$

- Esto nos indica que la pendiente de la recta es: $m_\ell=3/4$.
- Entonces, la pendiente del radio es:

$$m_{CP}=-\frac{1}{m_\ell}=-\frac{4}{3}$$

- Pero, a partir de la fórmula de pendiente podemos calcularla también:

$$m_{CP}=\frac{h-2}{k-1}=-\frac{4}{3}$$

- De aquí obtenemos la otra ecuación:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{k-1}{h-2}=-\dfrac{4}{3} & \Rightarrow & 3(k-1)=-4(h-2)\\ 3\,k-3=-4\,h+8 & \Rightarrow & 4\,h+3\,k=11 \end{array}$$

- Ahora obtuvimos un sistema de ecuaciones lineales en h,k el cual podemos resolver para conocer las coordenadas del centro de la circunferencia:

$$\begin{array}{rcl} 4\,h+2\,k & = & 5\\ 4\,h+3\,k & = & 11 \end{array}$$

- Primero multiplicamos la primera ecuación por -1, sumamos las ecuaciones y obtenemos:

$$\begin{array}{rcr} -\cancel{4\,h}-2\,k & = & -5\\ \cancel{4\,h}+3\,k & = & 11\\ \hline k & = & 6 \end{array}$$

- Ahora podemos conocer el valor de h sustituyendo el valor de k en cualquiera de las ecuaciones:

$$4\,h+2(6)=5 \qquad \Rightarrow \qquad 4\,h=5-12 \qquad \Rightarrow \qquad h=-\frac{7}{4}=-1.75$$

- Entonces, el centro de la circunferencia está en: $C(-1.75,6)$.
- Para poder calcular la ecuación de la circunferencia nos falta conocer el radio.
- Vamos a calcularlo usando la fórmula de distancia entre dos puntos.

- El más fácil de usar es el origen:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(6-0)^2+(-7/4-0)^2} = \sqrt{(6)^2+\left(-\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{36+\frac{49}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{576}{16}+\frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{25}{4} = 6.25 \end{aligned}$$

- Finalmente, la ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x+\frac{7}{4}\right)^2+(y-6)^2=\left(\frac{25}{4}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(x+\frac{7}{4}\right)^2+(y-6)^2=\frac{625}{16}$$

- Con esto terminamos.

3.3 Ecuación general de la circunferencia

Hasta aquí hemos calculado la ecuación de la circunferencia dejándola como la suma de binomios al cuadrado igualada a una constante positiva.

Ahora vamos a ir un paso más ayá. Vamos a desarrollar los binomios y vamos a escribir la ecuación igualada a cero.

Definición 2

Ecuación general de la circunferencia

La ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2+y^2+D\,x+E\,y+F=0$$

donde los coeficientes D, E, F son números reales.

3.3.1 Conversión de forma ordinaria a forma general

Siempre que calculabamos la ecuación de una circunferencia nos quedábamos con la forma ordinaria.

Ahora vamos a empezar a convertir de la forma ordinaria a la forma general.

Ejemplo 1

Escribe la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen en la forma general.

- Ya sabemos que la forma ordinaria es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

- Lo único que debemos hacer es desarrollar los binomios y simplificar:

$$\begin{aligned}
(x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2\\
x^2-2\,h\,x+h^2+y^2-2\,k\,y+k^2-r^2 &= 0\\
x^2+y^2-2\,h\,x-2\,k\,y+h^2+k^2-r^2 &= 0
\end{aligned}$$

- Entonces, si conocemos el centro del la circunferencia $C(h,k)$ y su radio r, podemos fácilmente convertir de la forma ordinaria a la forma general usando las siguiente definiciones: $D=-2\,h$, $E=-2\,k$, y $F=h^2+k^2-r^2$.

En primer semestre estudiamos el desarrollo del binomio al cuadrado.

Si no recuerdas el procedimiento es una buena idea recordarlo estudiando extra-clase.

Ejemplo 2

Transforma la ecuación de la circunferencia $(x-9)^2+(y-1)^2=25$ a la forma general.

- Desarrollamos los binomios al cuadrado y simplificamos:

$$\begin{aligned}
(x-9)^2+(y-1)^2 &= 25\\
x^2-18\,x+81+y^2-2\,y+1-25 &= 0\\
x^2+y^2-18\,x-2\,y+81+1-25 &= 0\\
x^2+y^2-18\,x-2\,y+57 &= 0
\end{aligned}$$

- Ahora verifica que obtenemos el mismo resultado sustituyendo los valores de h, k y r en las fórmulas para transformar la ecuación de la circunferencia.

Ejemplo 3

Calcula la ecuación en forma general de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(7,2)$ y es tangente a la recta: $3x - y + 5 = 0$.

- En este caso, no podemos conocer inmediatamente la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria, porque no conocemos el valor de r.
- Primero vamos a calcular r, después vamos a calcular la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria y finalmente la vamos a transformar a la forma general.
- La medida del radio es igual a la distancia del punto $C(7,2)$ a la recta: $3x - y + 5 = 0$.

$$r = \frac{|3(7)-(2)+5|}{\sqrt{(3)^2+(-1)^2}} = \frac{|21-2+5|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|24|}{\sqrt{10}}$$

- Ahora que conocemos el valor de r podemos calcular la ecuación en forma ordinaria:

$$(x-7)^2+(y-2)^2 = \left(\frac{24}{\sqrt{10}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad (x-7)^2+(y-2)^2 = \frac{576}{10}$$

- Y finalmente vamos a transformarla a la forma general:

$$\begin{aligned}
(x-7)^2+(y-2)^2 &= \frac{576}{10}\\
x^2-14x+49+y^2-4y+4-\frac{576}{10} &= 0\\
x^2+y^2-14x-4y+49+4-57.6 &= 0
\end{aligned}$$

- La ecuación que queríamos calcular es:

$$x^2+y^2-14x-4y-4.6=0$$

Ejemplo 4

En la sección *Ecuaciones de las rectas notables del triángulo* encontramos las mediatrices del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A(1,-2)$, $B(3,6)$ y $C(-2,1)$. El punto donde se cortan estas mediatrices es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo. Encuentra la ecuación de esa circunferencia en su forma general.

- Las ecuaciones de las mediatrices de los lados de ese triángulo son las siguientes:

$$\begin{aligned}
x+4y-10 &= 0\\
x+y-4 &= 0\\
y &= x
\end{aligned}$$

- Para encontrar el punto donde se cortan sustituimos $y = x$ en cualquiera de las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{aligned}
x+4y-10 &= 0\\
x+4x-10 &= 0\\
5x &= 10\\
x &= 2
\end{aligned}$$

- Y ya sabemos que: $y = x = 2$.
- Entonces, el centro de la circunferencia está en el punto $C(2,2)$.
- Ahora calculamos la longitud del radio con la fórmula de distancia entre dos puntos.
- Sabemos que la circunferencia pasa por los tres vértices del triángulo.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(2-1)^2 + (2-(-2))^2} \\ &= \sqrt{(1)^2 + (4))^2} \\ &= \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

- Ahora calculamos la ecuación en forma ordinaria y la transformamos a la forma general:

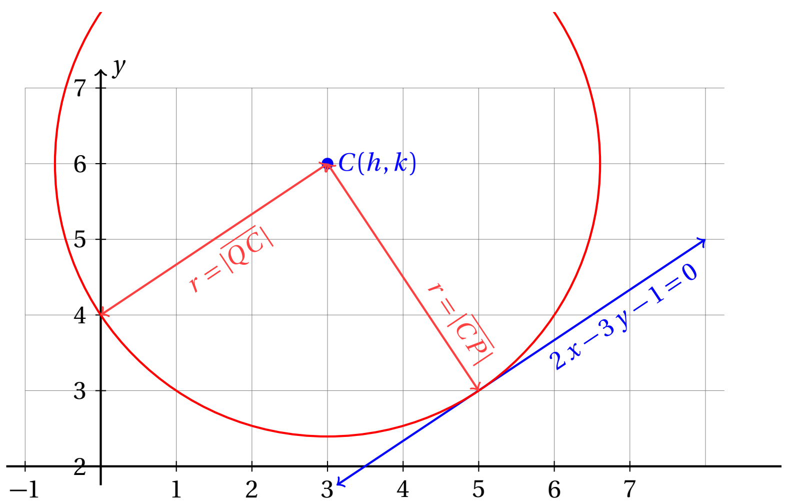
$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-2)^2 &= \left(\sqrt{17}\right)^2 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 &= 17 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y - 9 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora grafica el triángulo, sus tres mediatrices y la circunferencia en un plano cartesiano en tu cuaderno.
- Puedes basarte en la solución del ejemplo de la página 79.

Ejemplo 5

Calcula la ecuación de la circunferencia en su forma general que pasa por el punto $Q(0,4)$ y que es tangente a la recta: $2x - 3y - 1 = 0$ en el punto $P(5,3)$.

- Vamos a dibujar la situación antes de iniciar con las ecuaciones.



- Sabemos que $r = |\overline{CP}| = |\overline{CQ}|$.
- Algebraicamente tenemos:

$$\begin{aligned} |\overline{CQ}| &= |\overline{CP}| \\ \sqrt{(h-0)^2 + (k-4)^2} &= \sqrt{(h-5)^2 + (k-3)^2} \\ (h-0)^2 + (k-4)^2 &= (h-5)^2 + (k-3)^2 \\ h^2 + k^2 - 8k + 16 &= h^2 - 10h + 25 + k^2 - 6k + 9 \\ 10h - 2k &= 18 \end{aligned}$$

- Por otra parte, podemos conocer la pendiente de la recta tangente expresando su ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 1 &= 0 \\ 2x - 1 &= 3y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} &= y \end{aligned}$$

- Entonces, $m_\ell = \dfrac{2}{3}$.
- Como el radio $\overline{CP}$ es perpendicular a esta recta, tenemos que:

$$m_{CP} = -\frac{1}{m_\ell} = -\frac{3}{2}$$

- Pero también podemos calcular la pendiente a partir de la fórmula de dos puntos:

$$\begin{aligned} m_{CP} = \frac{k-3}{h-5} &= -\frac{3}{2} \\ 2(k-3) &= -3(h-5) \\ 2k - 6 &= -3h + 15 \\ 3h + 2k &= 21 \end{aligned}$$

- Ahora podemos calcular las coordenadas del centro de la circunferencia resolviendo el siguiente S.E.L.:

$$\begin{cases} 10h - 2k = 18 \\ 3h + 2k = 21 \end{cases}$$

- Al sumar ambas ecuaciones obtenemos: $13h = 39$, que implica $h = 3$.
- Para calcular el valor de k sustituimos el valor de h en cualquiera de las ecuaciones del S.E.L.:

$$\begin{aligned} 10h - 2k &= 18 \\ 10(3) - 18 &= 2k \\ \frac{30-18}{2} &= k = \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

- Entonces, las coordenadas del centro de la circunferencia son: $h = 3$, y $k = 6$.
- Ahora calulamos la longitud del radio:

$$r = \sqrt{(3-0)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

- Y la ecuación de la circunferencia es:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-6)^2 &= 13 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 &= 13 \\ x^2 + y^2 - 6x - 12y + 32 &= 0 \end{aligned}$$

3.3.2 Conversión de la forma general a la forma ordinaria

Ahora que ya conocemos las formas ordinaria y general de la ecuación de la circunferencia y que ya hemos hecho conversiones de la forma ordinaria a la forma general, vamos a estudiar el proceso inverso: convertir la ecuación de una circunferencia de su forma general a la forma ordinaria.

Para la conversión de la forma ordinaria a la forma general necesitamos desarrollar los binomios que quedaron indicados en la ecuación.

En la conversión de la forma general a la forma ordinaria vamos a requerir factorizar completando cuadrados para expresar un trinomio en la forma de un binomio al cuadrado.

Ejemplo 1

Convierte la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$$

a la forma ordinaria.

- Empezamos ordenando los términos.
- Escribiremos primero los que contienen a la literal x y al final los términos que contienen la literal y:
$$x^2 - 8x + y^2 - 10y = -25$$
- Ahora vamos a completar cuadrados.
- Para esto, observa que: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$.
- Para darte cuenta de esto fijate en el coeficiente del término que tiene la literal con exponente 1.
- En este caso, -8 es tal coeficiente.
- Sacamos la mitad de este número y obtenemos -4.
- Entonces, $(x-4)^2$ servirá para completar el cuadrado.
- Para completar el cuadrado vamos a sumar en ambos lados de la igualdad 16:
$$\begin{aligned} \left[x^2 - 8x + 16\right] + y^2 - 10y &= -25 + 16 \\ (x-4)^2 + y^2 - 10y &= -9 \end{aligned}$$
- Ahora vamos a factorizar la parte de y.
- La mitad de -10 es -5, así que probamos con $(y-5)^2 = y^2 - 10y + 25$
$$\begin{aligned} (x-4)^2 + \left[y^2 - 10y + 25\right] &= -9 + 25 \\ (x-4)^2 + (y-5)^2 &= 16 \end{aligned}$$
- Esta es la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria.
- para verificar que el cálculo es correcto, puedes hacer la conversión a la forma general.
- Debes obtener la ecuación con la que iniciamos.

Fácilmente podemos encontrar el centro y el radio de una circunferencia cuando está en su forma ordinaria.

Debido a esto, cuando encontremos ecuaciones de circunferencias en su forma general nos conviene convertirlas a la forma ordinaria para graficarlas.

Ejemplo 2

Calcula el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2+y^2+4x-6y+9=0$$

- Vamos a empezar convirtiendo la ecuación a su forma ordinaria.
- Completamos cuadrados usando los términos que contienen a x.
- Así que vamos a sumar 4 en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}
\left[x^2+4x\right]+y^2-6y &= -9\\
\left[x^2+4x+4\right]+y^2-6y &= -9+4\\
(x+2)^2+y^2-6y &= -5
\end{aligned}$$

- Ahora vamos a completar cuadrados con los términos que contienen a y.
- Para esto, sumamos 9 en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}
(x+2)^2+\left[y^2-6y+9\right] &= -5+9\\
(x+2)^2+(y-3)^2 &= 4
\end{aligned}$$

- Ahora podemos ver que $2=-h$, que implica $h=-2$.
- También, $-3=-k$, por lo que $k=3$.
- Además, $r^2=4$, es decir, $r=2$.
- Entonces, el centro está en $C(-2,3)$ y el radio de la circunferencia es $r=2$.
- Se te queda como ejercicio graficar la circunferencia en tu cuaderno.

Ejemplo 3

Calcula el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2+y^2+2x+4y-11=0$$

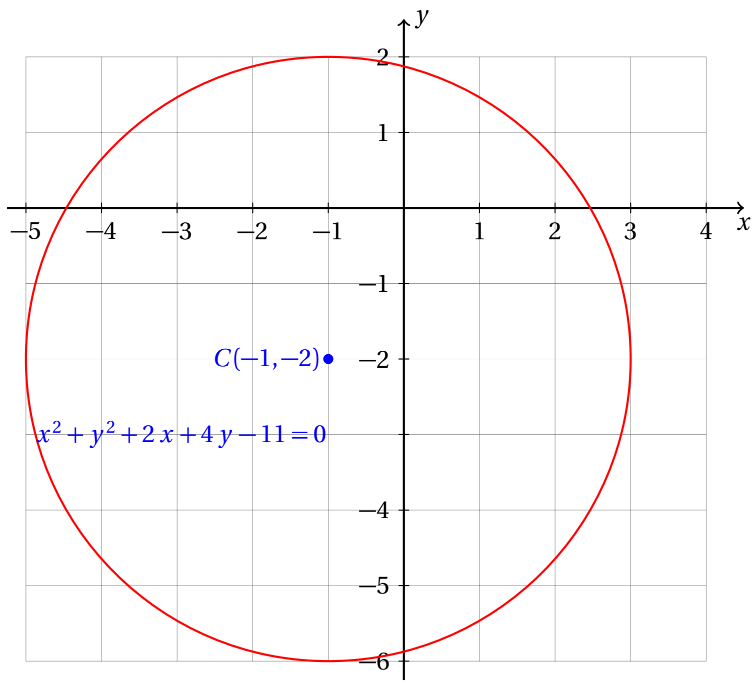
- Empezamos ordenando los términos:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+2x+4y-11 &= 0\\
x^2+2x+y^2+4y &= 11
\end{aligned}$$

- Ahora sumamos en ambos lados 1 y 4 para poder completar los cuadrados:

$$\begin{aligned}
x^2+2x+1+y^2+4y+4 &= 11+1+4\\
(x+1)^2+(y+2)^2 &= 16
\end{aligned}$$

- De la ecuación vemos que $-h=1 \Rightarrow h=-1$, y que $-k=2 \Rightarrow k=-2$.
- Entonces, el centro de la circunferencia es el punto $C(h,k)=C(-1,-2)$.
- Por otra parte, de la ecuación vemos también que $r^2=16$.
- Esto implica que el radio de la circunferencia es: $r=4$.
- Enseguida está la gráfica de esta circunferencia:



Encuentra el máximo valor que puede tener la variable y para satisfacer la ecuación:

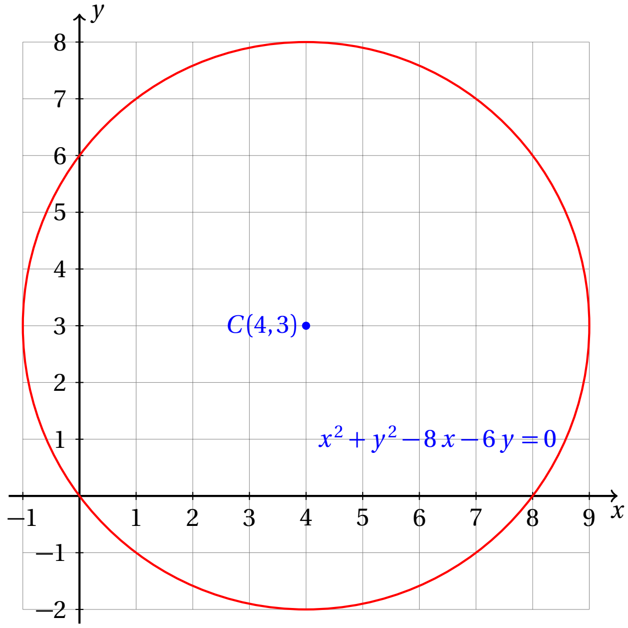
$$x^2+y^2-8x-6y=0$$

Ejemplo 4

- Para encontrar el máximo valor que puede tener la variable y vamos a expresar la ecuación en la forma ordinaria.
- Para eso,completamos cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-8x-6y &= 0 \\ x^2-8x+16+y^2-6y+9 &= 16+9 \\ (x-4)^2+(y-3)^2 &= 25 \end{aligned}$$

- De la ecuación fácilmente podemos saber el centro y el radio de la circunferencia:
- Centro: $C(h,k)=C(4,3)$. Radio: $r=\sqrt{25}=5$
- Ahora podemos graficar y de la gráfica ver el máximo valor que puede tener y para satisfacer la ecuación:



- El máximo valor que puede tomar la variable y está sobre la circunferencia, exactamente encima del centro, es decir, $y = 8$.

Una vez que sabiamos que se trataba de una circunferencia podíamos conocer el máximo valor que puede tomar la variable y. Para esto, bastaba reconocer que el máximo valor para y está exactamente a 5 unidades (que es lo que mide el radio) arriba del centro de la circunferencia.

Para el centro de la circunferencia $y = k = 3$. Al sumar 5 a este valor obtenemos el resultado.

Ejemplo 5

Calcula las coordenadas del centro y el radio de la circuferencia:

$$9x^2 + 9y^2 - 49 = 0$$

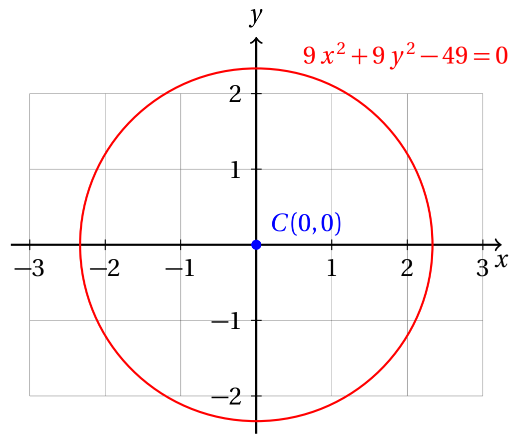
- En este caso no se require completar cuadrados, lo que tenemos que hacer es expresar la ecuación en la forma ordinaria:

- Empezamos sumadno en ambos lados de la igualdad 49 y después dividimos entre 9:

$$\begin{aligned}\frac{9x^2 + 9y^2}{9} &= \frac{49}{9}\\ x^2 + y^2 &= \left(\frac{7}{3}\right)^2\end{aligned}$$

- Ahora vemos que el centro de la circunferencia es el origen del sistema de coordenadas y el radio es $7/3$.

- La gráfica muestra este hecho:



Además del método de completar cuadrados podemos utilizar las fórmulas:

$$\begin{aligned} D &= -2\,h \\ E &= -2\,k \\ F &= h^2+k^2-r^2 \end{aligned}$$

que encontramos a partir de:

$$\begin{aligned} (x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2 \\ x^2-2\,h\,x+h^2+y^2-2\,k\,y+k^2-r^2 &= 0 \\ x^2+y^2-2\,h\,x-2\,k\,y+h^2+k^2-r^2 &= 0 \\ x^2+y^2+D\,x+E\,y+F &= 0 \end{aligned}$$

Para que veas que esto es verdad vamos a resolver un ejemplo más utlizando estas fórmulas.

Ejemplo 6

Convierte a la forma ordinaria la ecuación de la circunferencia:

$$x^2+y^2-10\,x-4\,y-7=0$$

- De acuerdo a la ecuación:
$$x^2+y^2+D\,x+E\,y+F=0$$
tenemos que: $D=-10$, $E=-4$ y $F=-7$.
- Por las fórmulas
$$\begin{aligned} D &= -2\,h \\ E &= -2\,k \\ F &= h^2+k^2-r^2 \end{aligned}$$
podemos encontrar inmediatamente h,k y r sustituyendo los valores conocidos y despejando la incógnita en cada caso:
$$\begin{aligned} -10 &= -2\,h && \Rightarrow && h=5 \\ -4 &= -2\,k && \Rightarrow && k=2 \\ -7 &= h^2+k^2-r^2 \\ -7 &= (5)^2+(2)^2-r^2 \\ r^2 &= 25+4+7=36 && \Rightarrow && r=6 \end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación de la recta en la forma ordinaria es:

$$(x-5)^2+(y-2)^2=36$$

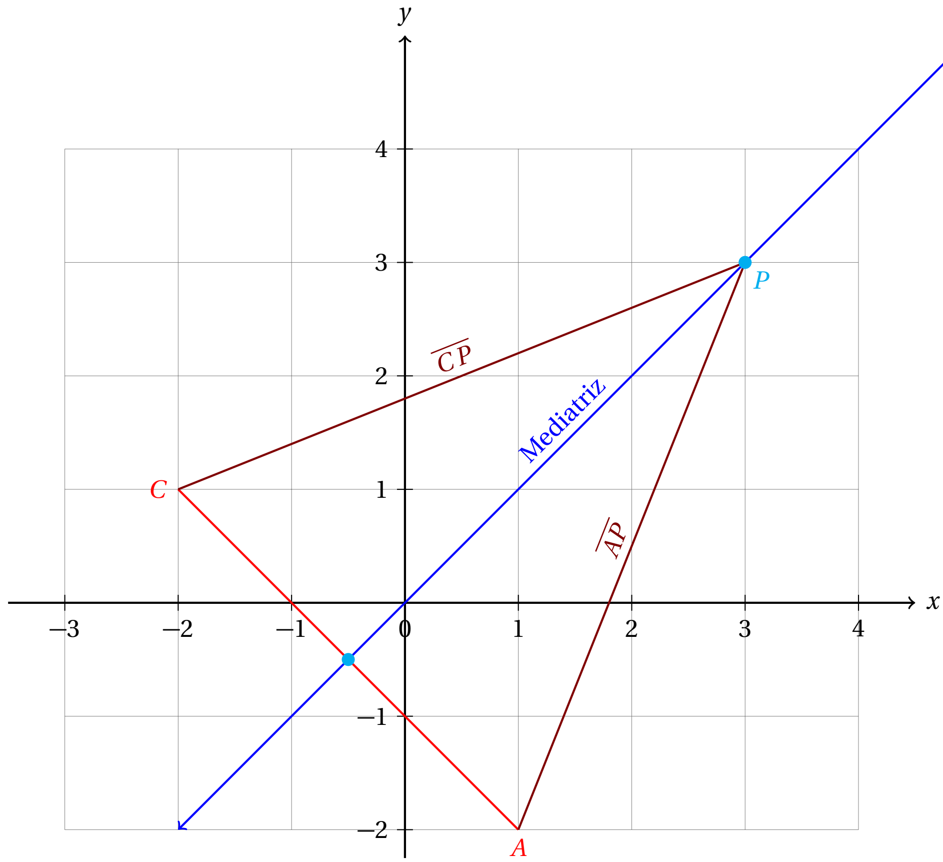
3.4 Circunferencia que pasa por tres puntos

En la sección *Ecuaciones de las rectas notables del triángulo* calculamos el punto donde se intersectan las tres mediatrices de los lados de un triángulo.

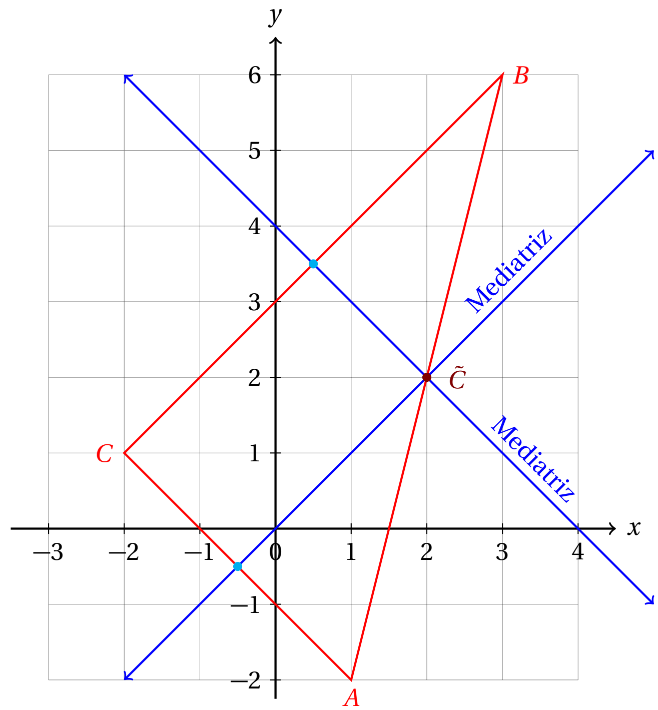
Este punto, llamado circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

3.4.1 Condiciones analíticas y geométricas

Observa que cualquier punto P que pertenece a la mediatriz de un segmento está a la misma distancia de los extremos del segmento sobre la cual se le construyó:



Si dibujamos un triángulo y trazamos las mediatrices de dos de sus lados, el punto donde se intersectan está a la misma distancia de los tres vértices.



- ✓ El punto $\tilde{C}$ es el punto donde se intersectan las dos mediatrices trazadas.

- ✓ Por pertenecer a la mediatriz del lado $\overline{AC}$ está a la misma distancia del vértice A como del vértice C. Es decir $|\overline{A\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$.

- ✓ De manera semejante, por pertenecer a la mediatriz del lado $\overline{BC}$, está a la misma distancia del vértice B como del vértice C. Matemáticamente esto se denota por: $|\overline{B\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$.

- ✓ Pero ya se había dicho que $|\overline{A\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$. Entonces

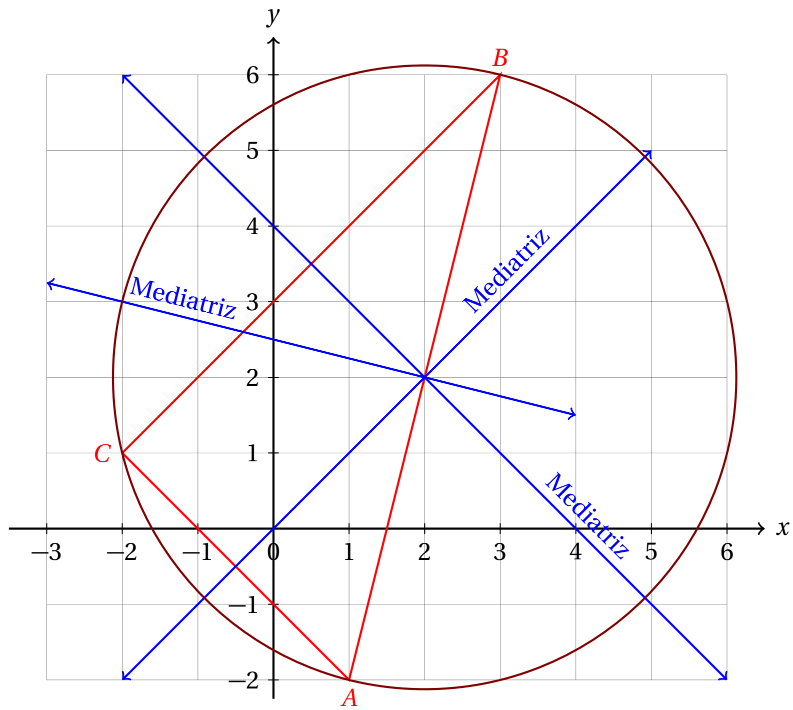
$$|\overline{A\tilde{C}}| = |\overline{B\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$$

- ✓ Esto obliga a la mediatriz del lado $\overline{AB}$ a pasar por el punto $\tilde{C}$, porque está a la misma distancia de los vértices A y B.

- ✓ En conclusión, el punto donde se intersectan las tres mediatrices está a la misma distancia de los tres vértices.

Esto nos ayuda porque si dibujamos una circunferencia con centro en el circuncentro del triángulo, y radio igual a la distancia del circuncentro a cualquiera de los vértices del triángulo, la circunferencia pasará por los tres vértices.

El triángulo queda inscrito a la circunferencia y decimos que la circunferencia está circunscrita al triángulo. Por esta razón el punto donde se intesectan las tres mediatrices de un triángulo se llama circuncentro.



Esto nos sugiere que para calcular la ecuación de una circunferencia circunscrita a un triángulo dados los vértices del mismo encontremos las ecuaciones de dos de sus mediatrices, después el punto donde se intersectan. Este punto será el centro de la circunferencia. Para calcular el radio podemos calcular la distancia del cincuncentro a cualquiera de los vértices del triángulo y entonces podremos calcular la ecuación de la circunferencia.

Sin embargo hay otro método más sencillo. Como la ecuación de la circunferencia en su forma general es:

$$x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

donde: $D = -2\,h$, $E = -2\,k$, y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

Como sabemos que la circunferencia debe pasar por los tres vértices, podemos sustituir sus coordenadas en la ecuación y así obtendremos tres ecuaciones, una por cada vértice y al resolver ese sistema de ecuaciones lineales encontraremos las incógnitas, que son D, E y F.

Una vez que conozcamos los valores de estas incógnitas podremos calcular los valores que nos interesan: h, k y r.

6. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DADOS TRES PUNTOS

Supongamos que queremos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ y $C(x_c, y_c)$. Al sustituir en la ecuación de la circunferencia en su forma general obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_a\,D + y_a\,E + F &= -(x_a^2 + y_a^2) \\ x_b\,D + y_b\,E + F &= -(x_b^2 + y_b^2) \\ x_c\,D + y_c\,E + F &= -(x_c^2 + y_c^2) \end{aligned}$$

Al resolver este S.E.L. encontramos los valores de D, E y F. Usando las definiciones: $D = -2\,h$, $E = -2\,k$, y $F = h^2 + k^2 - r^2$ podemos calcular los valores que nos interesan.

Ejemplo 1 Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: $P(-2,3)$, $Q(-2,-3)$ y $R(6,-1)$.

- Vamos a sustituir los valores de las coordenadas de cada punto en la ecuación de la circunferencia en la forma general.
- Así por cada punto obtendremos una ecuación.
- Ecuación para el punto P:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+Dx+Ey+F &= 0\\ (-2)^2+(3)^2-2D+3E+F &= 0\\ 4+9-2D+3E+F &= 0\\ -2D+3E+F &= -13 \end{aligned}$$

- De manera semejante obtenemos la ecuación que le corresponde a Q:

$$\begin{aligned} (-2)^2+(-3)^2-2D-3E+F &= 0\\ 4+9-2D-3E+F &= 0\\ -2D-3E+F &= -13 \end{aligned}$$

- Y finalmente para el punto R:

$$\begin{aligned} (6)^2+(-1)^2+6D-E+F &= 0\\ 36+7+6D-E+F &= 0\\ 6D-E+F &= -37 \end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} -2D+3E+F &= -13\\ -2D-3E+F &= -13\\ 6D-E+F &= -37 \end{aligned}$$

- Ahora debemos resolverlo.
- Vamos a utilizar el método de determinantes.
- Empezamos escribiendo el S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & -13\\ -2 & -3 & 1 & -13\\ 6 & -1 & 1 & -37 \end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1\\ -2 & -3 & 1\\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (6)+(2)+(18)-(-18)-(2)-(-6) = 48$$

- Dado que es distinto de cero, el S.E.L. tiene solución única.
- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.

- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -13 & 3 & 1 \\ -13 & -3 & 1 \\ -37 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (39)+(13)+(-111)-(111)-(13)-(-39) = -144$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} -2 & -13 & 1 \\ -2 & -13 & 1 \\ 6 & -37 & 1 \end{vmatrix} = (26)+(74)+(-78)-(-78)-(74)-(26) = 0$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -13 \\ -2 & -3 & -13 \\ 6 & -1 & -37 \end{vmatrix} = (-222)+(-26)+(-234)-(234)-(-26)-(222) = -912$$

- Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{-144}{48} = -3 \\ E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{0}{48} = 0 \\ F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-912}{48} = -19 \end{aligned}$$

- Y sabiendo que $D = -3 = -2\,h$ es fácil concluir que: $h = 3/2$.

- También, si $E = 0 = -2\,k$ implica que $k = 0$.

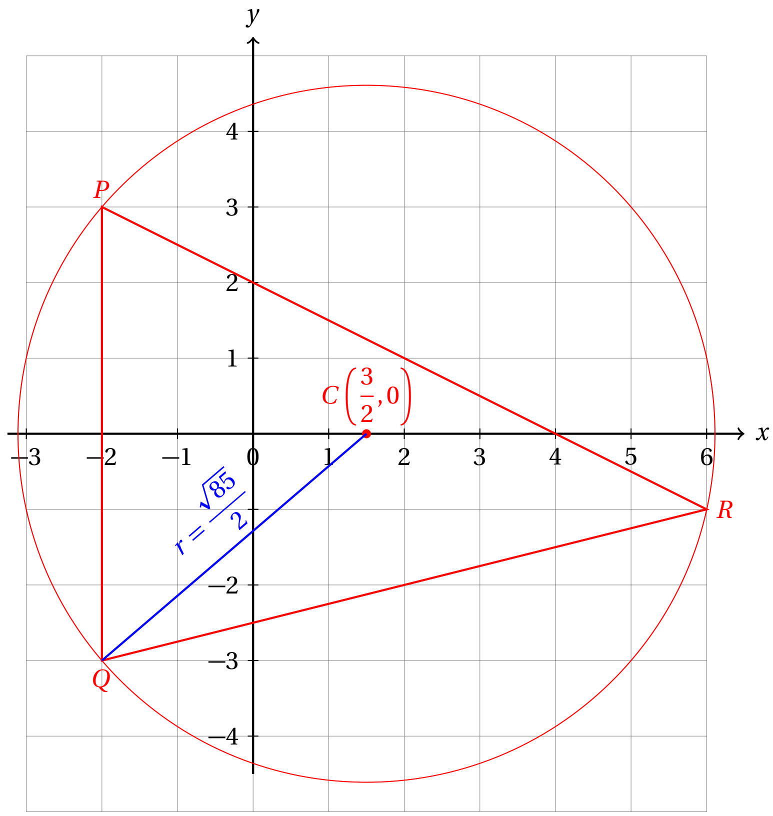
- Finalmente, sabemos que $F = -19 = h^2 + k^2 - r^2 = (1.5)^2 + (0)^2 - r^2$, de donde:

$$r^2 = 19 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{4} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\sqrt{85}}{2}$$

- Finalmente podemos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-2,3)$, $Q(-2,-3)$ y $R(6,-1)$:

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{84}{4} \end{aligned}$$

- La siguiente figura muestra la situación:



- Se te queda como ejercicio escribir la ecuación de esta circunferencia en la forma general.

Ejemplo 2 Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: $P(-4,1)$, $Q(3,-2)$ y $R(6,5)$.

- Vamos a sustituir los valores de las coordenadas de cada punto en la ecuación de la circunferencia en la forma general para obtener el S.E.L..
- Ecuación para el punto P:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+D\,x+E\,y+F &= 0\\
(-4)^2+(1)^2-4\,D+E+F &= 0\\
16+1-4\,D+E+F &= 0\\
-4\,D+E+F &= -17
\end{aligned}$$

- Ecuación que le corresponde al punto Q:

$$\begin{aligned}
(3)^2+(-2)^2+3\,D-2\,E+F &= 0\\
9+4+3\,D-2\,E+F &= 0\\
3\,D-2\,E+F &= -13
\end{aligned}$$

- Y finalmente para el punto R:

$$\begin{aligned}
(6)^2+(5)^2+6\,D+5\,E+F &= 0\\
36+25+6\,D+5\,E+F &= 0\\
6\,D+5\,E+F &= -61
\end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} -4D+E+F &= -17 \\ 3D-2E+F &= -13 \\ 6D+5E+F &= -61 \end{aligned}$$

- Ahora debemos resolverlo.
- Escribimosel S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 1 & -17 \\ 3 & -2 & 1 & -13 \\ 6 & 5 & 1 & -61 \end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (8)+(15)+(6)-(-12)-(-20)-(3) = 58$$

- Dado que es distinto de cero, el S.E.L. tiene solución única.
- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.
- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -17 & 1 & 1 \\ -13 & -2 & 1 \\ -61 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -116$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} -4 & -17 & 1 \\ 3 & -13 & 1 \\ 6 & -61 & 1 \end{vmatrix} = -348$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -17 \\ 3 & -2 & -13 \\ 6 & 5 & -61 \end{vmatrix} = -1102$$

- Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{-116}{58} = -2 \\ E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{-348}{58} = -6 \\ F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-1102}{58} = -19 \end{aligned}$$

- Entonces, $D = -2 = -2\,h$ implica que: $h = 1$.
- También, si $E = -6 = -2\,k$ se sigue que $k = 3$.

- Y si $F = -19 = h^2 + k^2 - r^2 = (1)^2 + (3)^2 - r^2$, se sigue que:

$$r^2 = 29 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{29} \approx 5.385$$

- Finalmente podemos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-4,1)$, $Q(3,-2)$ y $R(6,5)$:

$$\begin{aligned}
(x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2\\
(x-1)^2 + (y-3)^2 &= 29
\end{aligned}$$

- Se te queda como ejercicio graficar la circunferencia verificando que pase por los tres puntos y escribir la ecuación en su forma general.

Ejemplo 3	Calcula la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $P(-4,3)$, $Q(2,-3)$ y $R(6,3)$.

- Este problema en esencia es el mismo que el que hemos resuelto en los ejemplos anteriores.
- Vamos a sustituir los valores de las coordenadas de cada punto en la ecuación de la circunferencia en la forma general para obtener el S.E.L.
- Ecuación para el punto P:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F &= 0\\
(-4)^2 + (3)^2 - 4\,D + 3\,E + F &= 0\\
16 + 9 - 4\,D + 3\,E + F &= 0\\
-4\,D + 3\,E + F &= -25
\end{aligned}$$

- Ecuación que le corresponde al punto Q:

$$\begin{aligned}
(2)^2 + (-3)^2 + 3\,D - 2\,E + F &= 0\\
4 + 9 + 2\,D - 3\,E + F &= 0\\
2\,D - 3\,E + F &= -13
\end{aligned}$$

- Y finalmente para el punto R:

$$\begin{aligned}
(6)^2 + (3)^2 + 6\,D + 3\,E + F &= 0\\
36 + 9 + 6\,D + 3\,E + F &= 0\\
6\,D + 3\,E + F &= -45
\end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned}
-4\,D + 3\,E + F &= -25\\
2\,D - 3\,E + F &= -13\\
6\,D + 3\,E + F &= -45
\end{aligned}$$

- Ahora debemos resolverlo.

- Escribimosel S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 3 & 1 & -25 \\ 2 & -3 & 1 & -13 \\ 6 & 3 & 1 & -45 \end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (12)+(6)+(18)-(-18)-(-12)-(6) = 60$$

- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.
- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -25 & 3 & 1 \\ -13 & -3 & 1 \\ -45 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -120$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} -4 & -25 & 1 \\ 2 & -13 & 1 \\ 6 & -45 & 1 \end{vmatrix} = -240$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -25 \\ 2 & -3 & -13 \\ 6 & 3 & -45 \end{vmatrix} = -1260$$

- Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{-120}{60} = -2 \\ E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{-240}{60} = -4 \\ F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-1260}{60} = -21 \end{aligned}$$

- Entonces, $D = -2 = -2\,h$ implica que: $h = 1$.
- También, si $E = -4 = -2\,k$ se sigue que $k = 2$.
- Y si $F = -21 = h^2 + k^2 - r^2 = (1)^2 + (2)^2 - r^2$. De donde:

$$r^2 = 26 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{26} \approx 5.099$$

- Finalmente podemos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-4,3)$, $Q(2,-3)$ y $R(6,3)$:

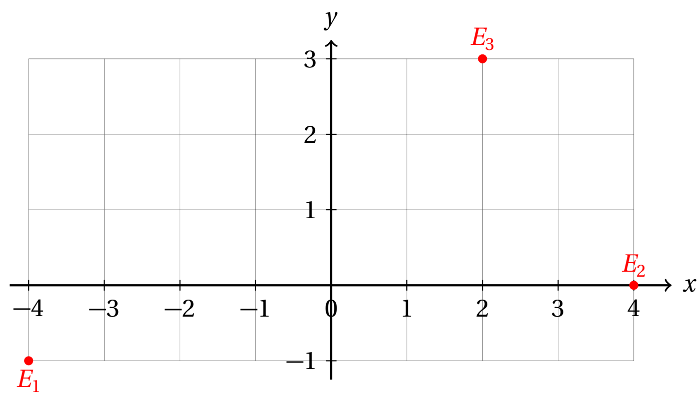
$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 26 \end{aligned}$$

- Se te queda como ejercicio graficar la circunferencia verificando que pase por los tres puntos y escribir la ecuación en su forma general.

Ejemplo 4

En un mapa se han localizado las escuelas E_1, E_2 y E_3 ubicadas en las coordenadas $E_1(-4,-1)$, $E_2(4,0)$ y $E_3(2,3)$ medidas en kilómetros. Se planea construir un centro de apoyo escolar que esté ubicado a la misma distancia de las tres escuelas. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde deben ubicar el centro de apoyo escolar?, ¿y a qué distancia se encuentra de cada escuela?

- Tenemos la siguiente situación gráfica:



- Debemos calcular las coordenadas del punto que se encuentre a la misma distancia de las tres escuelas.
- Una vez que las conozcamos podremos calcular la distancia a cada escuela.
- Como el punto que buscamos está a la misma distancia de las escuelas podemos traducir el problema al siguiente:

Comentario

Calcula las coordenadas del circuncentro del triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $E_1(-4,-1)$, $E_2(4,0)$ y $E_3(2,3)$.

El circuncentro corresponde al punto donde debemos ubicar el centro de apoyo escolar y los vértices del triángulo corresponden a las escuelas.

- Ahora vamos a resolver el problema usando el método de los ejemplos anteriores.
- Ecuación para la escuela E_1:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+D\,x+E\,y+F &= 0\\ (-4)^2+(-1)^2-4\,D-E+F &= 0\\ 16+1-4\,D-E+F &= 0\\ -4\,D-E+F &= -17 \end{aligned}$$

- Ecuación para la escuela E_2:

$$\begin{aligned} (4)^2+(0)^2+4\,D+(0)\,E+F &= 0\\ 16+4\,D+F &= 0\\ 4\,D+F &= -16 \end{aligned}$$

- Y para la escuela E_3:

$$\begin{aligned}(2)^2+(3)^2+2D+3E+F &= 0\\ 4+9+2D+3E+F &= 0\\ 2D+3E+F &= -13\end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned}-4D - E + F &= -17\\ 4D + F &= -16\\ 2D + 3E + F &= -13\end{aligned}$$

- Para resolverlo escribimos el S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -1 & 1 & -17\\ 4 & 0 & 1 & -16\\ 2 & 3 & 1 & -13\end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix} = (0)+(12)+(-2)-(0)-(-12)-(-4)=26$$

- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.
- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -17 & -1 & 1\\ -16 & 0 & 1\\ -13 & 3 & 1\end{vmatrix} = 0$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} -4 & -17 & 1\\ 4 & -16 & 1\\ 2 & -13 & 1\end{vmatrix} = 26$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -17\\ 4 & 0 & -16\\ 2 & 3 & -13\end{vmatrix} = -416$$

- Finalmente, tenemos:

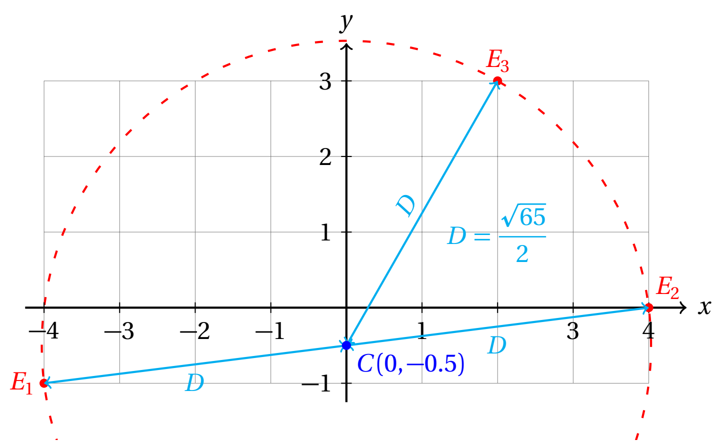
$$\begin{aligned} D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{0}{26} = 0\\ E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{26}{26} = 1\\ F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-416}{26} = 16\end{aligned}$$

- Entonces, $D = 0 = -2h$ implica que: $h = 0$.

- También, si $E = 1 = -2\,k$ se sigue que $k = -1/2$.
- Y si $F = 16 = h^2 + k^2 - r^2 = (0)^2 + (-0.5)^2 - r^2$, tenemos que:

$$r^2 = \frac{65}{4} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\sqrt{65}}{2} \approx 4.031$$

- El punto $C(h,k)$ donde se debe ubicar el centro de apoyo escolar para equidistar de las tres escuelas es: $C(0,-0.5)$
- La distancia a cada una de las tres escuelas es: $D \approx 4.031$ km.
- Geométricamente se tiene la siguiente solución del problema:



Ejemplo 5 Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(x_a, m\,x_a + b)$, $B(x_b, m\,x_b + b)$ y $C(x_c, m\,x_c + b)$.

- Observa que estos puntos están sobre la recta $y = m\,x + b$.
- Primero vamos a escribir el S.E.L. que obtenemos al sustituir las coordenadas de los puntos en la ecuación general:

$$\begin{aligned}
x_a\,D + (m\,x_a + b)\,E + F &= -x_a^2 - (m\,x_a + b)^2 \\
x_b\,D + (m\,x_b + b)\,E + F &= -x_b^2 - (m\,x_b + b)^2 \\
x_c\,D + (m\,x_c + b)\,E + F &= -x_c^2 - (m\,x_c + b)^2
\end{aligned}$$

- Al reescribir este S.E.L. en forma matricial obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
x_a & m\,x_a + b & 1 & -x_a^2 - (m\,x_a + b)^2 \\
x_b & m\,x_b + b & 1 & -x_b^2 - (m\,x_b + b)^2 \\
x_c & m\,x_c + b & 1 & -x_c^2 - (m\,x_c + b)^2
\end{array}\right]$$

- Vamos a calcular el determinante principal de este sistema de ecuaciones y veremos qué obtenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
x_a & m\,x_a + b & 1 \\
x_b & m\,x_b + b & 1 \\
x_c & m\,x_c + b & 1
\end{vmatrix} &= x_a\,(m\,x_b + b) + x_b\,(m\,x_c + b) + x_c\,(m\,x_a + b) + \\
&\quad -x_c\,(m\,x_b + b) - x_a\,(m\,x_c + b) - x_b\,(m\,x_a + b) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Ahora debemos observar que por tres puntos puede pasar a lo más una circunferencia.
- Entonces, no es posible que tengamos un número infinito de soluciones para este caso, lo que indica que el S.E.L. no tiene soluciones.
- En otras palabras, no es posible trazar una circunferencia que pase por tres puntos que estén alineados.

Entonces, existe la posibilidad de que te encuentres con un problema de este tipo y los tres puntos estén alineados.

En este caso, el último ejemplo nos indica que el determinante principal del S.E.L. será cero y así podremos concluir que la solución del problema consiste en la sentencia: «*No existe niguna circunferencia que pase por esos tres puntos, pues están alineados.*»

3.5 Circunferencia y secciones cónicas

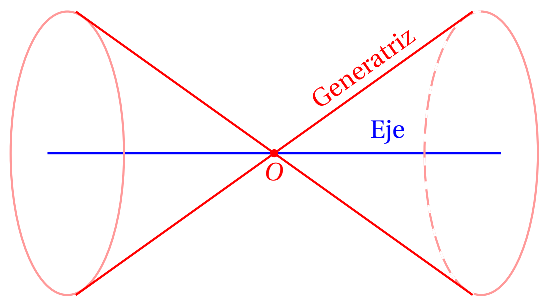
El nombre «*Secciones Cónicas*» se derivó del hecho de que estas figuras se encontraron originalmente en un cono.

Cuando se hace intersectar un cono con un plano obtenemos distintas figuras. Cada una de ellas es una cónica.

Definición 1

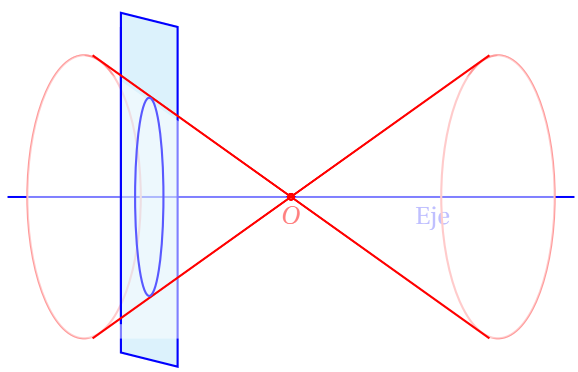
Cono

Un cono es el lugar geométrico que se forma al hacer girar una recta que pasa por el origen alrededor de un eje. La recta que se hace girar siempre se considera distinta al eje y se conoce como generatriz.

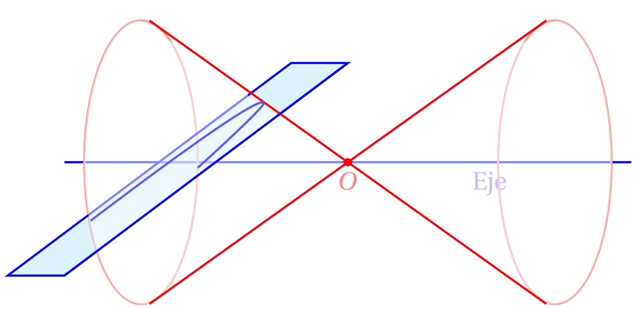


Al cortar este cono con planos en diferentes posiciones obtenemos distintas figuras.

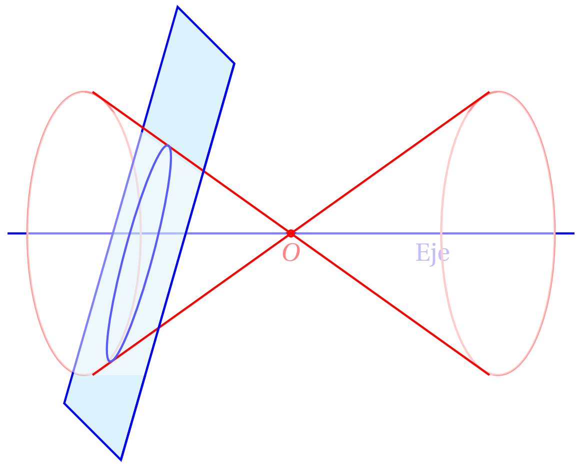
El corte para obtener una circunferencia se obtiene colocando el plano perpendicular al eje y, obviamente que no pase por el origen del cono, porque en ese caso la intersección sería un punto.



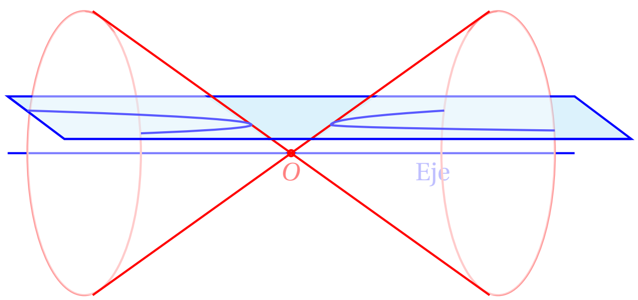
Si el plano se coloca paralelo a una recta que se encuentre sobre el cono, de manera que lo corte, obtenemos una parábola:



Si el plano corta al cono en una de sus ramas y no es perpendicular al eje ni paralelo a una orilla del cono, se forma una elipse:



Y si el plano corta ambas ramas del cono obtenemos una hipérbola:



Estos problemas pueden replantearse como la proporción entre las distancias desde un punto fijo a una recta fija sobre el plano.

En estos casos, tenemos los siguientes planteamientos que originan los mismos lugares geométricos:

Parábola: Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo (llamado foco) como de una recta fija (llamada directriz), ambos sobre el mismo plano.

Elipse: Es el lugar geométrico de todos los puntos que están k veces más alejados de una recta fija (llamada directriz) que de un punto fijo (llamado foco).

Hipérbola: Es el lugar geométrico de todos los puntos que están k veces más cerca de una recta fija (llamada directriz) que de un punto fijo (llamado foco).

De manera semejante, las dos últimas cónicas pueden definirse a partir de distancias medidas de dos puntos fijos, que se denominan focos de la cónica.

Ejercicios 3.5 Calcula la ecuacion de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(h,k)$ y tiene un radio r en la forma ordinaria y general.

1) $C(-5,5)$ y $r=3$.

F. Ordinaria: $(x+5)^2+(y-5)^2=9$

F. General: $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 41 = 0$

2) $C(9,7)$ y $r = 3$.

F. Ordinaria: $(x-9)^2 + (y-7)^2 = 9$

F. General: $x^2 + y^2 + 18x + 14y + 121 = 0$

3) $C(-8,2)$ y $r = 9$.

F. Ordinaria: $(x+8)^2 + (y-2)^2 = 81$

F. General: $x^2 + y^2 - 16x + 4y - 13 = 0$

4) $C(-2,-4)$ y $r = 1$.

F. Ordinaria: $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 1$

F. General: $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$

5) $C(9,6)$ y $r = 7$.

F. Ordinaria: $(x-9)^2 + (y-6)^2 = 49$

F. General: $x^2 + y^2 + 18x + 12y + 68 = 0$

6) $C(-6,-7)$ y $r = 9$.

F. Ordinaria: $(x+6)^2 + (y+7)^2 = 81$

F. General: $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 4 = 0$

7) $C(-7,-3)$ y $r = 8$.

F. Ordinaria: $(x+7)^2 + (y+3)^2 = 64$

F. General: $x^2 + y^2 - 14x - 6y - 6 = 0$

8) $C(-2,5)$ y $r = 3$.

F. Ordinaria: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 9$

F. General: $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$

9) $C(3,8)$ y $r = 6$.

F. Ordinaria: $(x-3)^2 + (y-8)^2 = 36$

F. General: $x^2 + y^2 + 6x + 16y + 37 = 0$

10) $C(-3,-3)$ y $r = 5$.

F. Ordinaria: $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 25$

F. General: $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$

11) $C(9,6)$ y $r = 2$.

F. Ordinaria: $(x-9)^2 + (y-6)^2 = 4$

F. General: $x^2 + y^2 + 18x + 12y + 113 = 0$

12) $C(7,7)$ y $r = 5$.

F. Ordinaria: $(x-7)^2 + (y-7)^2 = 25$

F. General: $x^2 + y^2 + 14x + 14y + 73 = 0$

13) $C(-6,-2)$ y $r=8$.

F. Ordinaria: $(x+6)^2+(y+2)^2=64$

F. General: $x^2+y^2-12x-4y-24=0$

14) $C(6,-5)$ y $r=3$.

F. Ordinaria: $(x-6)^2+(y+5)^2=9$

F. General: $x^2+y^2+12x-10y+52=0$

15) $C(3,-6)$ y $r=6$.

F. Ordinaria: $(x-3)^2+(y+6)^2=36$

F. General: $x^2+y^2+6x-12y+9=0$

16) $C(-8,-8)$ y $r=5$.

F. Ordinaria: $(x+8)^2+(y+8)^2=25$

F. General: $x^2+y^2-16x-16y+103=0$

17) $C(-2,8)$ y $r=4$.

F. Ordinaria: $(x+2)^2+(y-8)^2=16$

F. General: $x^2+y^2-4x+16y+52=0$

18) $C(-2,-8)$ y $r=4$.

F. Ordinaria: $(x+2)^2+(y+8)^2=16$

F. General: $x^2+y^2-4x-16y+52=0$

19) $C(9,-2)$ y $r=6$.

F. Ordinaria: $(x-9)^2+(y+2)^2=36$

F. General: $x^2+y^2+18x-4y+49=0$

20) $C(-6,-3)$ y $r=8$.

F. Ordinaria: $(x+6)^2+(y+3)^2=64$

F. General: $x^2+y^2-12x-6y-19=0$

21) $C(-5,2)$ y $r=8$.

F. Ordinaria: $(x+5)^2+(y-2)^2=64$

F. General: $x^2+y^2-10x+4y-35=0$

22) $C(-7,-2)$ y $r=9$.

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y+2)^2=81$

F. General: $x^2+y^2-14x-4y-28=0$

23) $C(-7,-5)$ y $r=1$.

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y+5)^2=1$

F. General: $x^2+y^2-14x-10y+73=0$

24) $C(9,-2)$ y $r=4$.

F. Ordinaria: $(x-9)^2+(y+2)^2=16$

F. General: $x^2+y^2+18x-4y+69=0$

25) $C(-5,8)$ y $r=2$.

F. Ordinaria: $(x+5)^2+(y-8)^2=4$

F. General: $x^2+y^2-10x+16y+85=0$

> Para los siguientes ejercicios, a partir de la ecuación general de la circunferencia calcula su centro $C(h,k)$ y su radio r y encuentra también la ecuación en su forma ordinaria. **Comentario**

26) $x^2+y^2+14x+16y+77=0$

Centro: $C(7,8)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x-7)^2+(y-8)^2=36$

27) $x^2+y^2+8x+4y-16=0$

Centro: $C(4,2)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x-4)^2+(y-2)^2=36$

28) $x^2+y^2-8x+6y-24=0$

Centro: $C(-4,3)$ **Radio:** $r=7$

F. Ordinaria: $(x+4)^2+(y-3)^2=49$

29) $x^2+y^2-12x+14y+36=0$

Centro: $C(-6,7)$ **Radio:** $r=7$

F. Ordinaria: $(x+6)^2+(y-7)^2=49$

30) $x^2+y^2-14x-6y-23=0$

Centro: $C(-7,-3)$ **Radio:** $r=9$

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y+3)^2=81$

31) $x^2+y^2+14x+8y+64=0$

Centro: $C(7,4)$ **Radio:** $r=1$

F. Ordinaria: $(x-7)^2+(y-4)^2=1$

32) $x^2+y^2-14x+8y+49=0$

Centro: $C(-7,4)$ **Radio:** $r=4$

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y-4)^2=16$

33) $x^2+y^2+14x-8y+29=0$

Centro: $C(7,-4)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x-7)^2+(y+4)^2=36$

34) $x^2+y^2+4x-14y-28=0$

Centro: $C(2,-7)$ **Radio:** $r=9$

F. Ordinaria: $(x-2)^2+(y+7)^2=81$

35) $x^2+y^2+10x+2y+1=0$

Centro: $C(5,1)$ **Radio:** $r=5$

F. Ordinaria: $(x-5)^2+(y-1)^2=25$

36) $x^2+y^2-18x-14y+94=0$

Centro: $C(-9,-7)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x+9)^2+(y+7)^2=36$

37) $x^2+y^2-2x+14y+46=0$

Centro: $C(-1,7)$ **Radio:** $r=2$

F. Ordinaria: $(x+1)^2+(y-7)^2=4$

38) $x^2+y^2-14x+8y+49=0$

Centro: $C(-7,4)$ **Radio:** $r=4$

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y-4)^2=16$

39) $x^2+y^2+2x+8y-47=0$

Centro: $C(1,4)$ **Radio:** $r=8$

F. Ordinaria: $(x-1)^2+(y-4)^2=64$

40) $x^2+y^2-4x-10y+20=0$

Centro: $C(-2,-5)$ **Radio:** $r=3$

F. Ordinaria: $(x+2)^2+(y+5)^2=9$

41) $x^2+y^2+2x-6y+1=0$

Centro: $C(1,-3)$ **Radio:** $r=3$

F. Ordinaria: $(x-1)^2+(y+3)^2=9$

42) $x^2+y^2+18x-10y+70=0$

Centro: $C(9,-5)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x-9)^2+(y+5)^2=36$

43) $x^2+y^2-18x+10y+102=0$

Centro: $C(-9,5)$ **Radio:** $r=2$

F. Ordinaria: $(x+9)^2+(y-5)^2=4$

44) $x^2+y^2-6x+8y+16=0$

Centro: $C(-3,4)$ **Radio:** $r=3$

F. Ordinaria: $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

45) $x^2+y^2-4x+12y+4=0$

Centro: $C(-2,6)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x+2)^2+(y-6)^2=36$

46) $x^2+y^2-12x+18y+53=0$

Centro: $C(-6,9)$ **Radio:** $r=8$

F. Ordinaria: $(x+6)^2+(y-9)^2=64$

47) $x^2+y^2+4x-2y-11=0$

Centro: $C(2,-1)$ **Radio:** $r=4$

F. Ordinaria: $(x-2)^2+(y+1)^2=16$

48) $x^2+y^2+8x-4y+19=0$

Centro: $C(4,-2)$ **Radio:** $r=1$

F. Ordinaria: $(x-4)^2+(y+2)^2=1$

49) $x^2+y^2-14x-4y+17=0$

Centro: $C(-7,-2)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y+2)^2=36$

50) $x^2+y^2+4x+14y+49=0$

Centro: $C(2,7)$ **Radio:** $r=2$

F. Ordinaria: $(x-2)^2+(y-7)^2=4$

Para los siguientes ejercicios, a partir de los tres puntos dados, calcula la ecuación de la circunferencia (en su forma general) que pasa por esos puntos, calcula su centro $C(h,k)$ y su radio r así como la ecuación en su forma ordinaria. **Comentario**

51) $P(-2,3)$, $Q(-1,-2)$ y $R(4,3)$. $C(1,1)$, $r=\sqrt{13}$

52) $P(-2,3)$, $Q(3,-2)$ y $R(3,4)$. $C(1,1)$, $r=\sqrt{13}$

53) $P(-4,3)$, $Q(1,-2)$ y $R(4,7)$. $C(1,3)$, $r=5$

54) $P(-4,3)$, $Q(1,-2)$ y $R(2,3)$. $C(-1,1)$, $r=\sqrt{13}$

55) $P(5,6)$, $Q(-3,2)$ y $R(-1,8)$. $C(1,4)$, $r=\sqrt{20}$

Formulario **Unidad Tres**

Ec. Circunferencia F. ordinaria: Centro en el origen y radio r:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ec. Circunferencia F. ordinaria: Centro en el punto $C(h,k)$ y radio r:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ec. Circunferencia: Forma general:

$$x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

Si el centro de la circunferencia es el punto $C(h,k)$ y su radio es r se cumple:

$$\begin{aligned} D &= -2\,h \\ E &= -2\,k \\ F &= h^2 + k^2 - r^2 \end{aligned}$$

Capítulo 4

La parábola

Por aprender...

Por qué es importante...

En la naturaleza encuentras parábolas cuando lanzas una piedra por el aire (su trayectoria es una parábola), también se aplican para la construcción de puentes, antenas de recepción de señales satelitales, generadores de energía solar por medio de la concentración de los rayos del sol, etc., por eso, muchos problemas prácticos se modelan con ecuaciones de parábolas.

4.1 Caracterización geométrica

En la sección *Lugares geométricos* se muestra cómo caracterizar una parábola geométricamente, a través de la solución de un ejemplo.

Ahora vamos a generalizar la solución del ejemplo resuelto en esa sección.

4.1.1 La parábola como lugar geométrico

Un punto $P(x, y)$ se mueve sobre el plano de manera que su distancia al punto $F(h, k+p)$ sea siempre la misma que la distancia a a la recta: $\ell: \; y-k+p=0$. Encuentra la ecuación que representa a este lugar geométrico.	**Ejemplo 1**

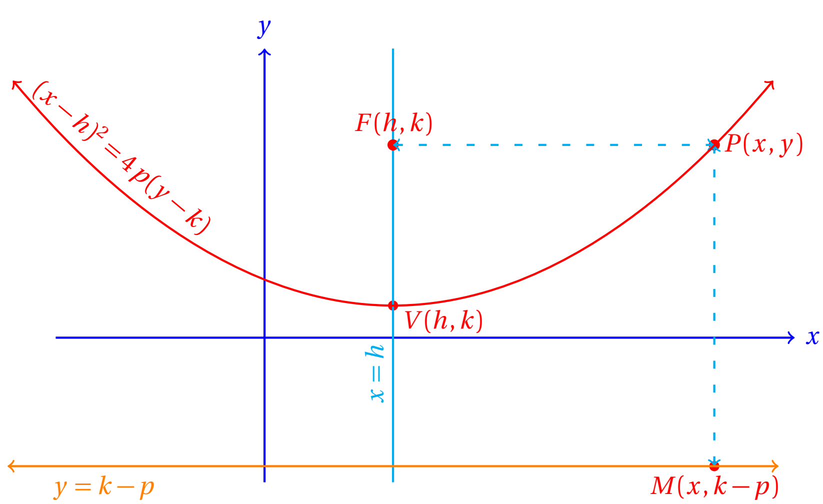
- Algebraicamente, las condiciones del problema son:

$$\begin{aligned} |\overline{PF}| &= |\overline{PM}| \\ \sqrt{(x-h)^2+(y-k-p)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(y-k+p)^2} \\ (x-h)^2+(y-k-p)^2 &= (x-x)^2+(y-k+p)^2 \end{aligned}$$

Después de simplificar obtenemos:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

- Esta es la ecuación en su forma ordinaria que representa al lugar geométrico.
- Geométricamente, tenemos la siguiente situación:

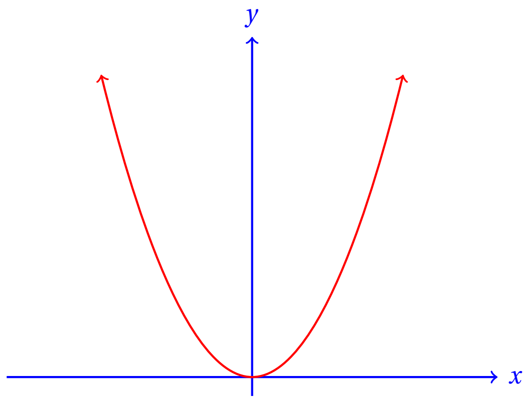


Ahora que hemos deducido la ecuación de la parábola en forma ordinaria, vamos a hacer un paréntesis para tener una herramienta para recordar hacia dónde abre, solamente observando la ecuación.

A la ecuación:

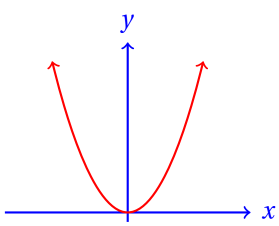
$$x^2 = +4py$$

le corresponde una parábola como la siguiente:

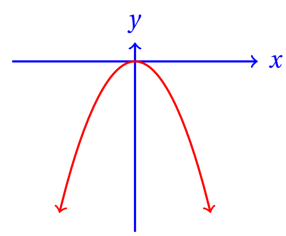


Podemos recordar la ecuación a partir de la parábola si recordamos que la parábola abre en el sentido positivo ($p > 0$) del eje y.

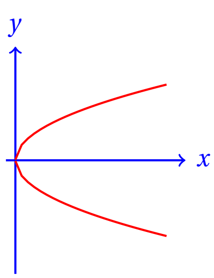
De manera semejante, podemos leer las gráficas y relacionarlas con sus ecuaciones respectivas:



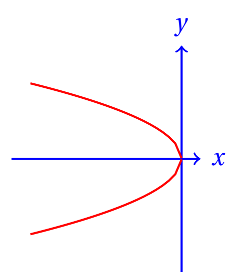
$x^2 = +4\,|p|\,y$



$x^2 = -4\,|p|\,y$



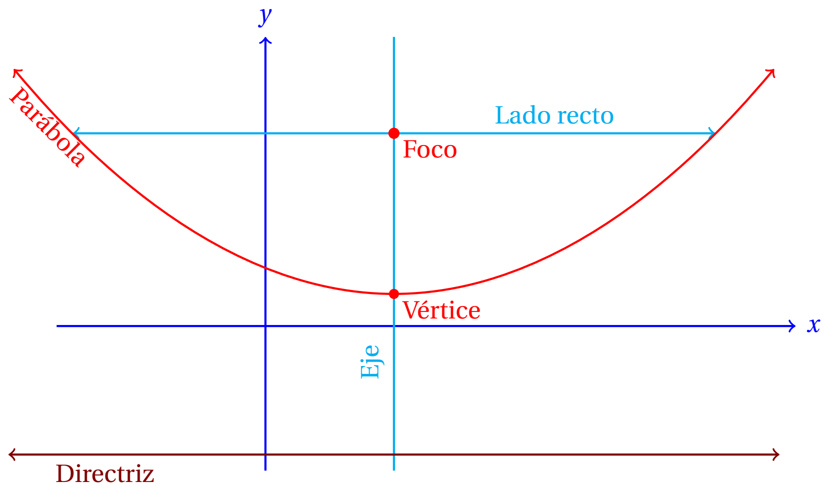
$y^2 = +4\,|p|\,x$



$y^2 = -4\,|p|\,x$

7. Elementos de la parábola

El siguiente gráfico indica los elementos de la parábola.



LADO RECTO	
Es el segmento de recta con extremos sobre la parábola y que es perpendicular al eje y pasa por el foco.	**Definición 1**

Como la distancia entre el vértice $V(h,k)$ y foco $F(h,k+p)$ es $|p|$, entonces la distancia entre el foco y la directriz es $2|p|$. Por la definición de parábola, esa misma distancia es la que hay entre cualquier extremo del lado recto y la directriz. Pero esa es la misma distancia de cualquier extremo del lado recto al foco, que representa el punto medio del lado recto. Por eso, la longitud del lado recto es $4|p|$.

Entonces, los extremos del lado recto son: $M(h+2|p|, k+p)$ y $N(h-2|p|, k+p)$. Esto es así porque para encontrar un extremo nos trasladamos hacia la derecha $2|p|$ unidades y para encontrar el otro extremo nos recorremos esa misma distancia, pero hacia la izquierda.

Observa que hemos escrito $|p|$ en lugar de p, porque p se considera como una distancia dirigida, es decir, puede ser negativa.

Nota: En esta discusión se ha considerado solamente la parábola vertical que abre hacia arriba. De manera semejante podemos desarrollar una discusión para la parábola vertical que abre hacia abajo y las parábolas horizontales que abren hacia la derecha y hacia la izquierda (respectivamente).

8. FORMAS DE TRAZO A PARTIR DE LA DEFINICIÓN

Para dibujar la parábola con regla y compás podemos utilizar uno de varios métodos conocidos.

Aquí solamente revisaremos uno para que puedas realizar el trazo fácilmente.

Para esto vamos a requerir una escuadra con un ángulo recto (cualquiera) y una cuerda. La de un zapato estará bien para el trazo.

1. Primero debemos definir dónde estarán el foco de la parábola (el punto F) y la directriz. Trázalos en tu cuaderno. El foco no debe estar sobre la directriz.

2. Si deseas, aunque no se requiere, también puedes trazar el eje de la parábola como una recta perpendicular a la directriz que pase por el foco.

3. Ahora coloca una orilla de la escuadra sobre la directriz y fija un extremo de la cuerda en el foco.

4. Mide la distancia desde el foco hasta la directriz usando la cuerda. Recuerda que debe ser perpendicular a la directriz.

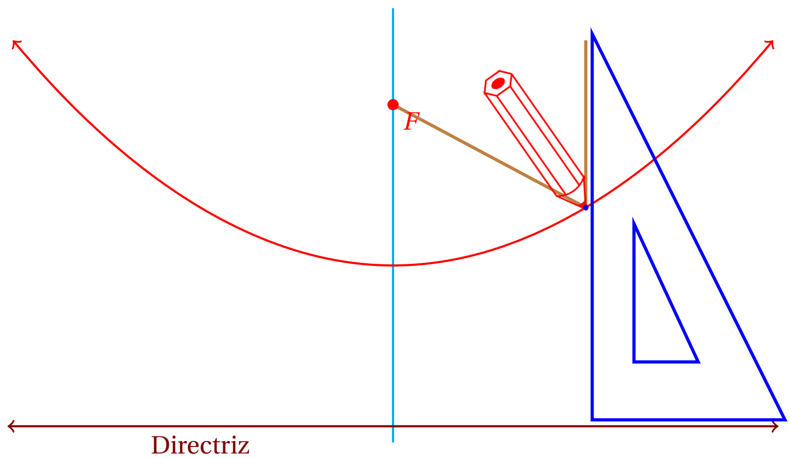
5. Fija el otro extremo de la cuerda a un punto sobre la escuadra.

6. Con tu lápiz, listo para dibujar la parábola, coloca la punta del lápiz tensando la cuerda contra la orilla de la escuadra, que deberá estar alejada una distancia igual a la distancia entre el foco y la directriz (p) para iniciar el trazo.

Conforme vayas moviendo la escuadra, el lápiz debe ir trazando una parábola.

Se supone que el lápiz mantiene la cuerda bien tensa y que los extremos de ésta no se mueven, sino que están fijos, uno sobre el foco de la parábola y el otro en un punto de la escuadra.

La siguiente figura ilustra la situación:



En este caso la longitud de la cuerda es igual a la longitud del lado de la escuadra sobre el cual se dibuja la parábola.

Tú debes identificar la forma de la parábola al ver la ecuación. Así será más fácil resolver los problemas de esta unidad.

4.2 Ecuaciones ordinarias de la parábola

En la sección anterior dedujimos la ecuación de la parábola en su forma ordinaria. Ahora vamos a utilizar la ecuación.

Empezaremos estudiando las parábolas con vértice en el origen.

4.2.1 Parábolas con vértice en el origen

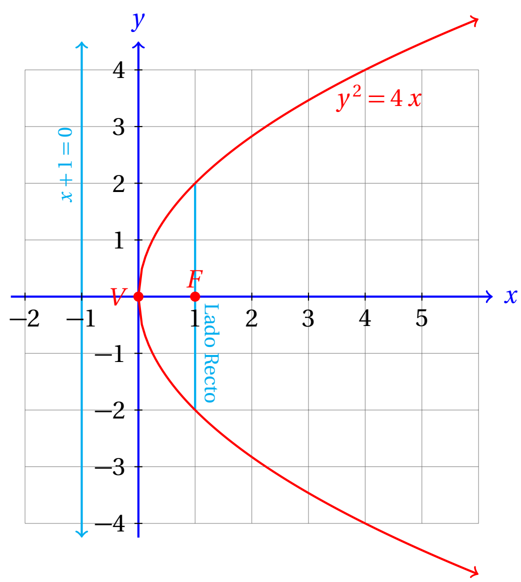
Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen y su foco en el punto $F(1,0)$.

- Esta parábola es horizontal y abre hacia la derecha.
- Puedes darte cuenta de esto graficando el vértice y el foco.
- Como la parábola es horizontal tenemos que su ecuación es de la forma:

$$y^2 = 4\,p\,x$$

- Sabemos que p es igual a la distancia del vértice al foco.
- De la gráfica es muy sencillo deducir que esa distancia es 1.



- Entonces, la ecuación de esa parábola es:

$$y^2 = 4x$$

- Ahora vamos a calcular sus elementos:

Lado recto: $\text{LLR} = 4\,p = 4(1) = 4.$

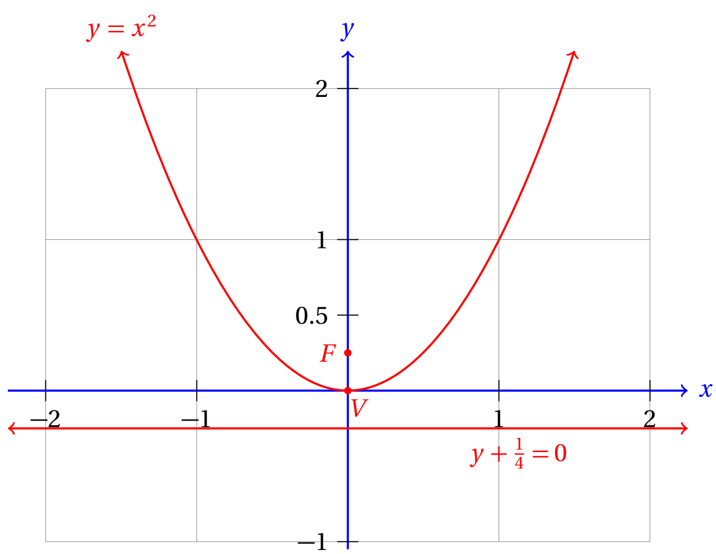
Directriz: $x = h - p = 0 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x + 1 = 0.$

- Se te queda como ejercicio graficar el lado recto y la directriz de esta parábola.

El siguiente ejemplo tratará una parábola vertical.

Ejemplo 2 Calcula la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen y la ecuación de su directriz es: $y + \frac{1}{4} = 0$.

- En este caso no conocemos el foco, pero sí la ecuación de la directriz.
- Podremos calcular la distancia entre el foco y el vértice porque es exactamente la misma que de la directriz al vértice.
- Para esto, necesitamos conocer el punto donde intersecta la directriz al eje y.
- Cualquier punto que se encuentre sobre la directriz satisface: $y = -1/4$ para cualquier valor de x.
- En el eje y, $x = 0$, Así que la directriz corta al eje y en el punto $M(0, -0.25)$.
- El foco está, entonces, en el punto $F(0, 0.25)$.
- Y dado que el vértice de la parábola está en el origen, $p = 1/4$.
- La siguiente gráfica muestra la situación:



Ahora vamos a resolver un ejemplo donde se requiere de otro procedimiento para calcular la ecuación de la parábola.

Ejemplo 3 Una parábola vertical tiene su vértice en el origen y pasa por el punto $P(4, 2)$. Encuentra su ecuación.

- Dado que la parábola es vertical y tiene su vértice en el origen, la ecuación es de la forma:

$$x^2 = 4\,p\,y$$

- Sabemos que pasa por el punto $P(4,2)$, la parábola abre hacia arriba y la ecuación satisface:

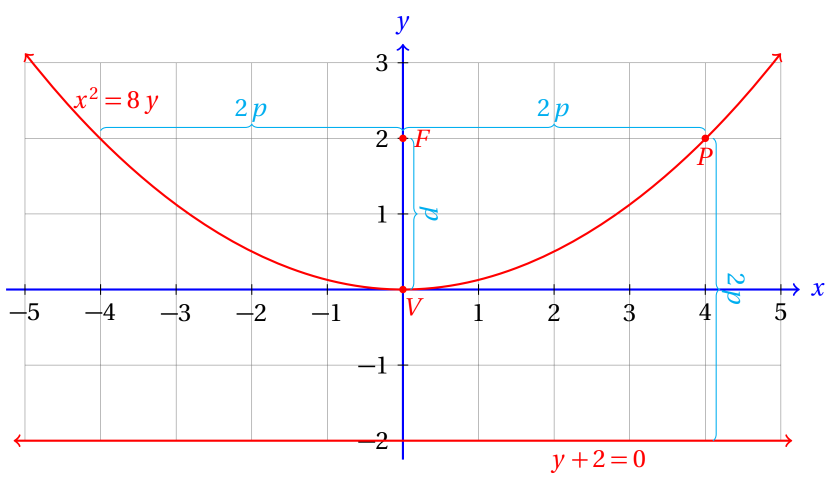
$$\begin{aligned} (4)^2 &= 4\,p(2) \quad \Rightarrow \\ 16 &= 8\,p \quad \Rightarrow \quad p = 2 \end{aligned}$$

- Sabiendo que $p = 2$ podemos calcular los demás elementos de la parábola:

Lado recto: $\text{LLR} = 4\,p = 4(2) = 8$.

Directriz: $y = k - p = 0 - 2 \quad \Rightarrow \quad y + 2 = 0$.

- La siguiente gráfica muestra esta situación:



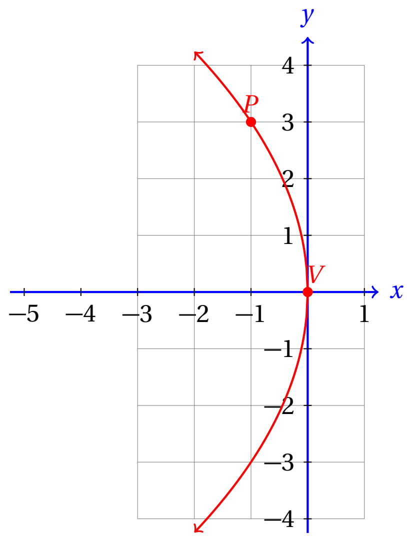
- Observa que el punto $P(4,2)$ es un extremo del lado recto de la parábola.

- También observa que la distancia desde el foco $F(2,0)$ hasta $P(4,2)$ es la misma (4 unidades) que la distancia desde $P(4,2)$ hasta la directriz.

- Esto es así por la forma como se definió la parábola.

Encuentra la ecuación de la parábola que es horizontal, tiene su vértice en el origen y pasa por el punto $P(-1,3)$.	**Ejemplo 4**

- Empezamos graficando la situación.



- Como la parábola es horizontal y $p < 0$, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$y^2 = 4\,p\,x$$

- Para calcular el valor de p vamos a sustituir las coordenadas del punto por el cual pasa la parábola.

- Entonces,

$$(3)^2 = 4\,p(-1) \qquad \Rightarrow \qquad 9 = -4\,p \qquad \Rightarrow \qquad p = -\frac{9}{4} = -2.25$$

- La ecuación de esta parábola es, entonces:

$$y^2 = 4\left(-\frac{9}{4}\right)x \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = -9\,x$$

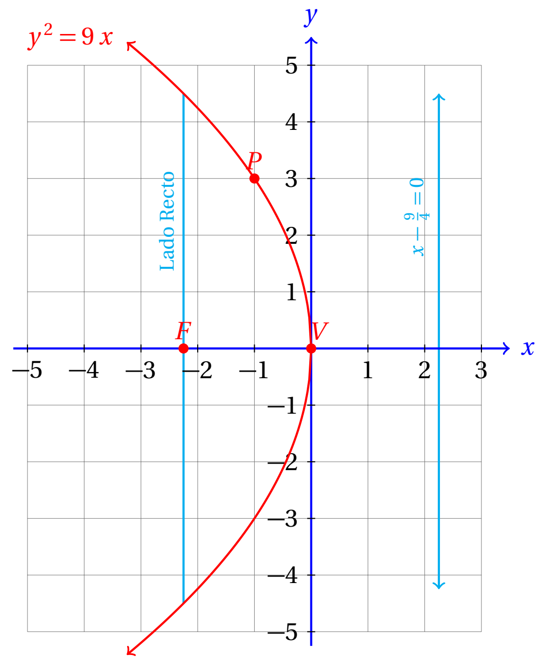
- Ahora que conocemos el valor de p podemos fácilmente calcular los demás elementos de la parábola:

Foco: $F(p,0) = F\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$

Lado recto: $\text{LLR} = 4\,p = 4\left(-\frac{9}{4}\right) = -9$

Directriz: $x = h - p = 0 - \left(-\frac{9}{4}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x - \frac{9}{4} = 0.$

- Ahora podemos graficar la parábola con todos sus elementos:



La otra versión del problema que hemos estudiado en esta sección consiste en calcular, a partir de la ecuación de la parábola, todos sus elementos.

Ejemplo 5

Encuentra todos los elementos de la parábola que tiene por ecuación:

$$x^2 = 16\,y$$

- Para empezar, por la forma de la ecuación podemos deducir que tiene su vértice en el origen.
- También por la ecuación sabemos que la parábola es vertical.
- El valor de p lo calculamos a partir de comparar las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4p\,y \\ x^2 &= 16\,y \end{aligned}$$

- De aquí que $4\,p = 16$, de donde $p = 4$.
- Ahora podemos utilizar las fórmulas para calcular todos los elementos de la parábola:

  Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4(4) = 16$.

  Foco: $F(0,p) = F(0,4)$.

  Directriz: $y + p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y + 4 = 0$.
- Observa que como $p > 0$, la parábola abre para arriba.
- Se te queda como ejercicio graficar la ecuación.

Ejemplo 6

Encuentra todos los elementos de la parábola que tiene por ecuación:

$$y^2 = 12\,x$$

- Por la ecuación sabemos que la parábola es horizontal y abre hacia la derecha.
- Al comparar la ecuación básica con la que nos dieron encontramos que $4\,p = 12$.
- Entonces, $p = 3$.
- Ahora podemos calcular los elementos de la parábola:

  Lado recto: $\mathrm{LLR} = 4p = 4(3) = 12$.
  Foco: $F(p,0) = F(3,0)$.
  Directriz: $x + p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x + 3 = 0$.
- Se te queda como ejercicio graficar la parábola.

Ejemplo 7

Encuentra todos los elementos de la parábola que tiene por ecuación:

$$x^2 = -20\,y$$

- Para empezar, por la forma de la ecuación podemos deducir que tiene su vértice en el origen, es vertical y abre hacia abajo.
- El valor de p lo calculamos con el coeficiente:

$$4\,p = -40 \qquad \Rightarrow \qquad p = -5$$

- Ahora podemos utilizar las fórmulas para calcular todos los elementos de la parábola:

  Lado recto: $\mathrm{LLR} = 4|p| = 4(5) = 20$.
  Foco: $F(0,p) = F(0,-5)$.
  Directriz: $y + p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y - 5 = 0$.
- Se te queda como ejercicio graficar la ecuación.

Ejemplo 8

Encuentra todos los elementos de la parábola que tiene por ecuación:

$$y^2 = -3\,x$$

- Por la ecuación sabemos que la parábola es horizontal y abre hacia la izquierda.
- Por el coeficiente sabemos que $4\,p = -3 \qquad \Rightarrow \qquad p = -3/4$.
- Ahora podemos calcular los elementos de la parábola:

  Lado recto: $\mathrm{LLR} = 4|p| = 4\left(\frac{3}{4}\right) = 3$.

Foco: $F(p,0) = F\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$.

Directriz: $x + p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x - \frac{3}{4} = 0.$

- Se te queda como ejercicio graficar la parábola.

Observa que con conocer el valor de p podemos calcular todos los elementos de la parábola.

Esto es así porque el vértice de la parábola está en el origen, es decir, $V(h,k) = V(0,0)$.

Entonces, $h = 0$, y $k = 0$, por lo que las fórmulas que aparecen en el formulario al final de esta unidad se reducen al caso más simple.

En la siguiente sección estudiaremos el caso más general, cuando el vértice está fuera del origen.

En esta sección no necesitábamos encontrar la ecuación del eje de la parábola porque siempre coincide con uno de los ejes, el eje y para las parábolas verticales y con el eje x para las parábolas horizontales.

Para las parábolas que no tienen su vértice en el origen tendremos que calcularla.

4.2.2 Parábolas con vértice fuera del origen

En este apartado vamos a extender lo que estudiamos en la sección anterior. Ahora vamos a considerar parábolas con vértices fuera del origen. En estos casos, tendremos que aplicar las fórmulas considerando tanto a h como a k distintos de cero.

Recuerda que la ecuación nos indica hacia dónde abre la parábola.

Ejemplo 1

Encuentra todos los elementos de la parábola dada por la ecuación:

$$(x+1)^2 = 8(y-1)$$

- Comparando con la ecuación: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ podemos darnos cuenta que: $h = -1$, $k = 1$, y $p = 2$.

- También vemos que la parábola abre en el sentido positivo del eje y.

- A partir de estos datos fácilmente encontramos todos los elementos de la parábola.

  Vértice: $V(h,k) = V(-1,1)$.

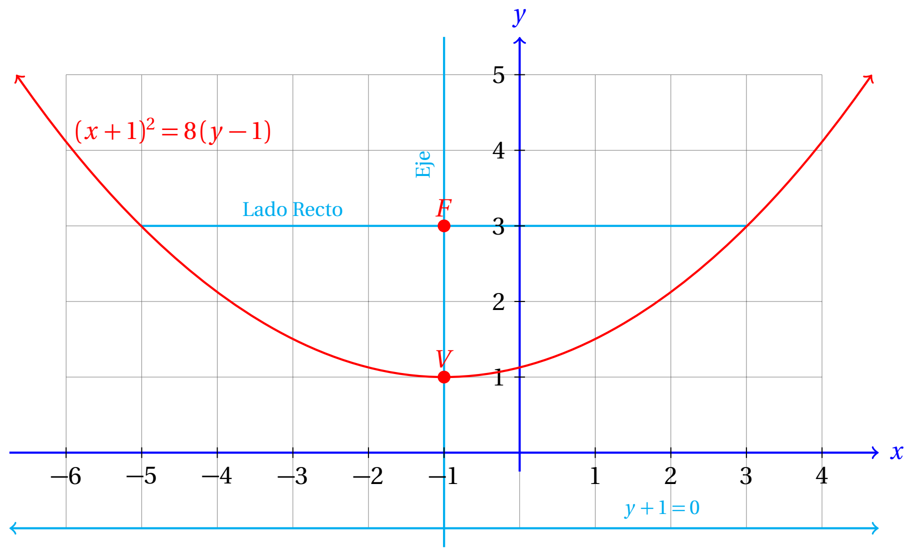
  Foco: $F(h, k+p) = F(-1,3)$.

  Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4(2) = 8$.

  Directriz: $y = k - p = 1 - 2 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad y + 1 = 0.$

  Eje: $x = h \qquad \Rightarrow \qquad x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x + 1 = 0.$

- La siguiente gráfica corresponde a la parábola de este ejemplo:



Ejemplo 2

Encuentra todos los elementos de la parábola dada por la ecuación:

$$(y-2)^2 = 6(x+3)$$

- En este caso, la ecuación indica que la parábola es horizontal y que abre hacia la derecha.

- Comparando la ecuación dada con $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, es claro que $h = -3$, $k = 2$, y $4p = 6$, lo que implica que $p = 3/2$.

- Ahora encontramos todos los elementos de la parábola.

- Recuerda que esta parábola es horizontal, por eso cambian las fórmulas que debemos usar para encontrar sus elementos.

  Vértice: $V(h,k) = V(-3,2)$.

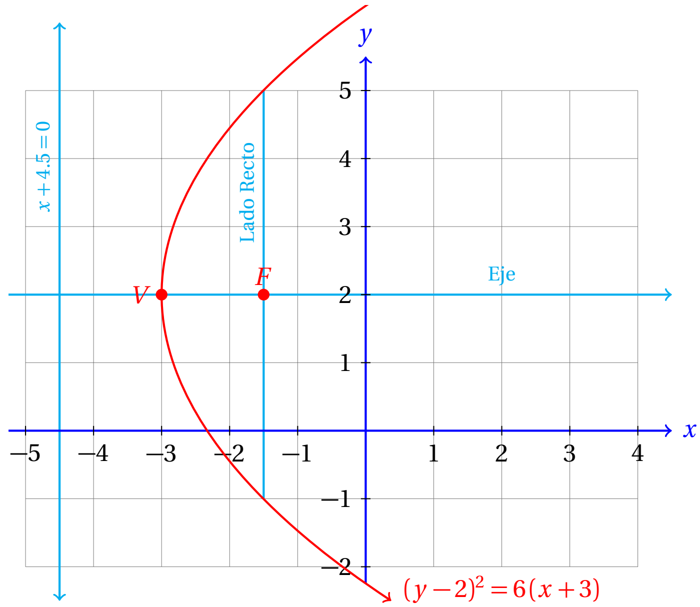
  Foco: $F(h+p,k) = F\left(-3+\dfrac{3}{2},2\right) = F\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$.

  Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4\left(\dfrac{3}{2}\right) = 6$.

  Directriz: $x = h - p = -3 - \dfrac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x + \dfrac{9}{2} = 0.$

  Eje: $y = k \qquad \Rightarrow \qquad y = 2 \qquad \Rightarrow \qquad y - 2 = 0.$

- La siguiente gráfica corresponde a la parábola de este ejemplo:



Encuentra todos los elementos de la parábola dada por la ecuación:

$$(x+2)^2 = -4(y+1)$$

Ejemplo 3

- Comparando con la ecuación:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

  podemos darnos cuenta que: $h = -2$, $k = -1$, y $p = -1$.

- También podemos deducir de la ecuación que la parábola es vertical.

- Como $p < 0$ la parábola abre en el sentido negativo del eje y.

- A partir de estos datos fácilmente encontramos todos los elementos de la parábola.

  Vértice: $V(h,k) = V(-2,-1)$.

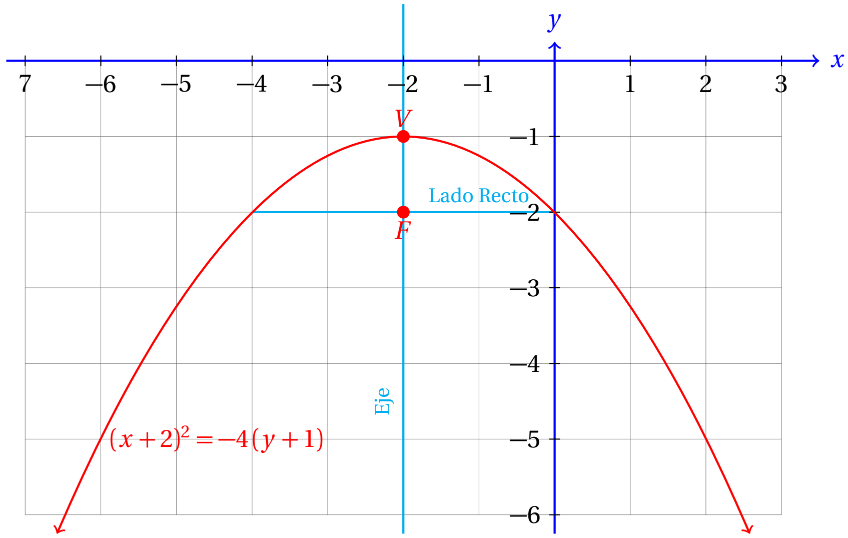
  Foco: $F(h,k+p) = F(-2,-2)$.

  Lado recto: $\text{LLR} = 4|p| = 4(|-1|) = 4$.

  Directriz: $y = k - p = -1 - (-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 0$.

  Eje: $x = h \qquad \Rightarrow \qquad x = -2 \qquad \Rightarrow \qquad x + 2 = 0$.

- La siguiente gráfica corresponde a la parábola de este ejemplo:



Ejemplo 4

Encuentra todos los elementos de la parábola dada por la ecuación:

$$(y-3)^2 = -8(x+1)$$

- En este caso, la ecuación indica que la parábola es horizontal y que abre hacia la izquierda.
- Comparando la ecuación vemos que $h = -1$, $k = 3$, y $4p = -8$, lo que implica que $p = -2$.
- Ahora encontramos todos los elementos de la parábola.
- Recuerda que esta parábola es horizontal, por eso cambian las fórmulas que debemos usar para encontrar sus elementos.

  Vértice: $V(h,k) = V(-1,3)$.

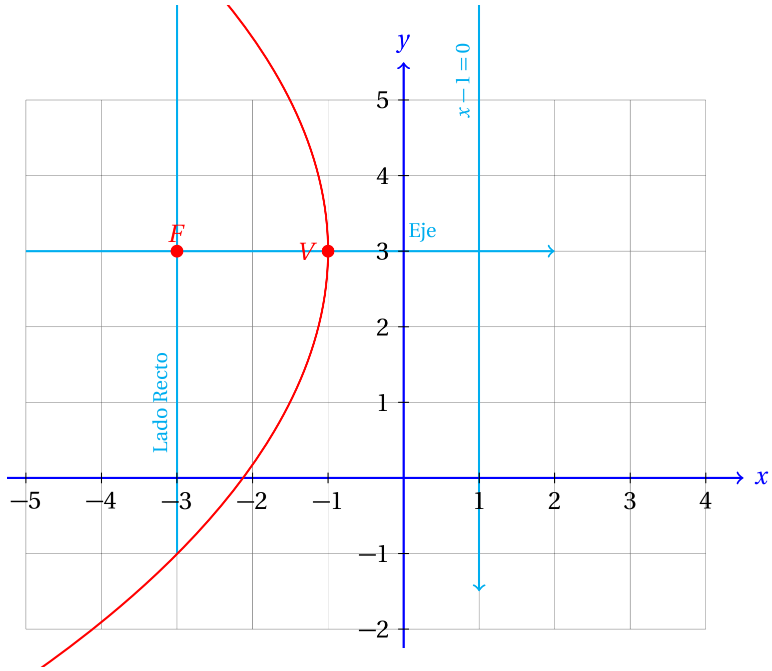
  Foco: $F(h+p,k) = F(-1-2,3) = F(-3,3)$.

  Lado recto: $\text{LLR} = 4|p| = 4(|-2|) = 8$.

  Directriz: $x = h - p = -1 - (-2) \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0$.

  Eje: $y = k \quad \Rightarrow \quad y = 3 \quad \Rightarrow \quad y - 3 = 0$.

- La siguiente gráfica corresponde a la parábola de este ejemplo:



y
x
5
4
3
2
1
−1
−2
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
F
V
Eje
Lado Recto
x − 1 = 0

4.3 Ecuación General de la Parábola

Hasta aquí hemos estudiado la ecuación de la parábola en su forma ordinaria.

Ahora vamos a estudiar la ecuación en su forma general.

Definición 1

Ecuación General de la Parábola

La ecuación general de la parábola es:

$$A\,x^2 + B\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

donde $A = 0$ y $B \neq 0$ para las parábolas horizontales y $B = 0$ con $A \neq 0$ para las parábolas verticales.

La ecuación general de la parábola se obtiene a partir de la ecuación en su forma ordinaria, desarrollando el binomio y simplificando la expresión.

Ejemplo 5

Convierte la ecuación ordinaria de la parábola vertical a la forma general.

- Para las parábolas verticales, la ecuación en su forma ordinaria es:
$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$$
- Al desarrollar el binomio que está elevado al cuadrado e igualar todo a cero obtenemos:
$$\begin{aligned} x^2 - 2\,h\,x + h^2 &= 4p\,y - 4p\,k \\ x^2 - 2h\,x - 4p\,y + (h^2 + 4p\,k) &= 0 \end{aligned}$$
- La forma general de la ecuación de la parábola vertical tiene la forma:
$$A\,x^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$
- Del desarrollo anterior se hace evidente que:
$$\begin{aligned} A &= 1 & \qquad E &= -4\,p \\ D &= -2\,h & \qquad F &= h^2 + 4p\,k \end{aligned}$$

Estas igualdades nos servirán para convertir las ecuaciones de las parábolas de la forma general a la ordinaria, y viceversa.

Por ahora empezaremos con el caso más directo.

4.3.1 Conversión de F. ordinaria a F. general

Ejemplo 1

Escribe la ecuación de la parábola: $(x-3)^2 = 7(y-1)$ en su forma general.

- De manera semejante al ejemplo anterior, desarrollamos el binomio y finalmente igualamos a cero la ecuación:
$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= 7(y-1) \\ x^2 - 6\,x + 9 &= 7\,y - 7 \\ x^2 - 6\,x - 7\,y + 9 + 7 &= 0 \\ x^2 - 6\,x - 7\,y + 16 &= 0 \end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación de la parábola puede expresarse de manera equivalente en cualquiera de las dos formas:

Forma Ordinaria:	**Forma General:**
$(x-3)^2 = 7(y-1)$	$x^2 - 6x - 7y + 16 = 0$

También habrá ocasiones en las que debamos calcular la ecuación en forma general de una parábola.

Para este caso podemos primero calcular la ecuación en forma ordinaria y después convertir ésta a la forma general.

Ejemplo 2

Calcula la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el punto $V(2,3)$ y su foco está en $F(1,3)$.

- Si graficas en tu cuaderno el vértice y el foco de la parábola te darás cuenta que la distancia entre ellos es de 2 unidades.
- De la gráfica también te podrás dar cuenta que la parábola es vertical y abre hacia abajo.
- Entonces, $p = -2$, y la ecuación es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

- Al sustituir los datos que ya conocemos (h, k y p) en esta ecuación obtenemos:

$$(x-2)^2 = 4(-2)(y-3) \qquad \Rightarrow \qquad (x-2)^2 = -8y - 12$$

- Esta es la ecuación de la parábola en su forma ordinaria.
- La convertimos a la forma general elevando al cuadrado el binomio $(x-2)$ y simplificando:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= -8y + 24 \\ x^2 - 4x + 4 + 8y - 24 &= 0 \\ x^2 - 4x + 8y - 20 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Algunas veces no conoceremos suficiente información para resolver el problema inmediatamente, así que tendremos que observar la gráfica para poder deducir información que no está indicada explícitamente en el texto.

Ejemplo 3

Calcula la ecuación de la parábola en su forma general que tiene su vértice en el punto $V(-2,-1)$ y que pasa por el punto $P(2,-5)$.

- En este caso necesariamente debemos dibujar una gráfica que ilustre la situación, porque la información dada en el texto del problema ni siquiera nos menciona si se trata de una parábola vertical u horizontal.
- Con la gráfica es sencillo observar que tenemos dos casos, primero resolveremos el caso para la parábola vertical.

- **Parábola vertical:**
- Para la parábola vertical la ecuación ordinaria tiene la forma:

$$(x-h)^2 = 4\,p(y-k)$$

- Conocemos las coordenadas del vértice, así que podemos sustituirlas inmediatamente:

$$(x+2)^2 = 4\,p(y+1)$$

- Todavía necesitamos calcular el valor de p.
- Para eso, vamos a sustituir las coordenadas del punto $P(2,-5)$ por el cual pasa esta parábola:

$$(2+2)^2 = 4\,p(-5+1)$$

- De aquí podemos despejar p:

$$\begin{aligned}(2+2)^2 &= 4\,p(-5+1)\\ 16 &= -16\,p\\ -\frac{16}{16} &= p=-1\end{aligned}$$

- Este valor de p nos indica que la parábola abre hacia abajo.
- Puedes ver la gráfica de esta parábola en la página 169.
- Ahora podemos convertir la ecuación ordinaria a la forma general:

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= -4(y+1)\\ x^2+4\,x+4 &= -4\,y-4\\ x^2+4\,x+4\,y+8 &= 0\end{aligned}$$

- Esta es la ecuación del primer caso.
- Ahora vamos con el siguiente caso del problema.
- **Parábola horizontal:**
- En este caso la ecuación ordinaria es:

$$(y-k)^2 = 4\,p(x-h)$$

- Vamos a sustituir las coordenadas del vértice en la ecuación:

$$(y+1)^2 = 4\,p(x+2)$$

- Ahora solamente falta por calcular p para conocer la ecuación ordinaria.
- Para eso vamos a sustituir las coordenadas del punto $P(2,-5)$ por el cual debe pasar esta parábola.

$$\begin{aligned}(-5+1)^2 &= 4\,p(2+2)\\ 16 &= 16\,p\end{aligned}$$

- Esto nos indica que $p=1$.

- Entonces la ecuación en forma ordinaria es:

$$(y+1)^2 = 4(x+2)$$

- Ahora vamos a transformarla a la forma general:

$$\begin{aligned} (y+1)^2 &= 4x+8 \\ y^2+2y+1-4x-8 &= 0 \\ y^2-4x+2y-7 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.
- Se te queda como ejercicio graficar esta parábola.

Ejemplo 4 Calcula la ecuación en forma general y los sus elementos de la parábola vertical que tiene su foco en el punto $F(2,1)$ y su directriz es la recta: $y+1=0$. Finalmente, grafica la parábola y verifica si pasa por el punto $P(-2,4)$.

- En este caso el problema dice que se trata de una parábola vertical, así que usaremos a ecuación:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

- La ecuación de la directriz nos indica que para cualquier cualquier punto sobre ella, el valor de $y=-1$, independientemente del valor de x.
- El punto sobre la directriz que está exactamente debajo del foco es: $M(2,-1)$.
- Recordando que el vértice está a la misma distancia del foco que de la directriz, podemos deducir que $2|p|$ es la distancia entre el foco y la directriz.
- En este caso, $2|p|=2$, que corresponde a la distancia desde el punto M hasta el foco.
- De aquí que $|p|=1$.
- Si graficas la informacón te darás cuenta que la parábola abre hacia arriba, de manera que $p>0$, con lo que $p=1$.
- Más aún, el vértice de la parábola es el punto medio del segmento $\overline{MF}$.
- Ahora calculamos sus coordenadas:

$$h = \frac{2+2}{2} = 2 \qquad\qquad k = \frac{1-1}{2} = 0$$

- Entonces, el vértice de la parábola se encuentra en el punto $V(2,0)$.
- Ahora podemos sustituir los valores de h, k y p en la ecuación ordinaria:

$$(x-2)^2 = 4y$$

- Ahora vamos a convertirla a la forma general:

$$\begin{aligned} x^2-4x+4-4y &= 0 \\ x^2-4x-4y+4 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora calculamos todos sus elementos. Esto es muy sencillo, dado que ya conocemos h, k y p:

  Vértice: $V(h,k) = V(2,0)$.

  Foco: $F(h, k+p) = F(2,1)$.

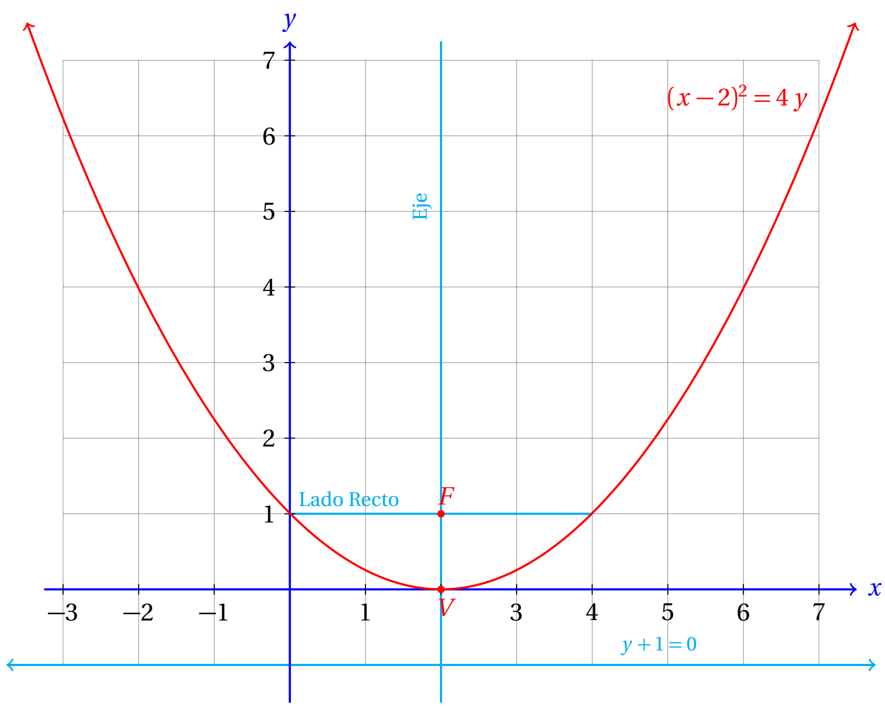
  Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4(1) = 4$.

  Directriz: $y = k - p = 0 - 1 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad y + 1 = 0$.

  Eje: $x = h \qquad \Rightarrow \qquad x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x - 2 = 0$.

- Los valores conocidos se volvieron a calcular para verificar los resultados.

- Enseguida se muestra la gráfica de esta parábola:



- Para verificar si el punto $P(-2,4)$ está sobre la parábola sustituimos en la ecuación y vemos si se cumple la igualdad:
$$(-2-2)^2 = 4(4) \qquad \Rightarrow \qquad 16 = 16$$

- Como la igualdad se cumple, el punto $P(-2,4)$ sí está sobre la parábola.

- Y con esto hemos terminado.

Observa que no utilizamos la ecuación en la forma general para encontrar todos los elementos de la parábola, porque nosotros conocemos las fórmulas para calcular los elementos de la parábola en función de los valores de h, k y p.

Para encontrar la ecuación ordinaria necesitamos también estos valores.

Pero habrá veces en los que no se conozcan, sino solamente nos den la ecuación general de la parábola.

En estos casos vamos a tener que convertir la ecuación a la forma ordinaria y a partir de ahí conocer los valores de h, k y p para deducir todos sus elementos.

En la siguiente sección estudiamos esos casos.

El procedimiento que usaremos en este tipo de problemas es esencialmente el mismo que utilizamos en la conversión de la ecuación general a la forma ordinaria para las circunferencias.

En esos ejemplos siempre tuvimos que completar cuadrados para x como para y. Ahora bastará una sola vez, dependiendo de la variable que aparezca elevada al cuadrado.

4.3.2 Conversión de f. general a f. ordinaria

Es muy fácil graficar una cónica a partir de su forma ordinaria, al igual que calcular todos sus elementos.

La forma general, sin embargo, es importante porque cuando resolvemos problemas más generales vamos a encontrar este tipo de ecuación.

Ejemplo 1

Convierte la ecuación de la parábola:

$$y^2 - 12\,x - 10\,y + 13 = 0$$

a la forma ordinaria.

- Para empezar, debemos identificar la literal que está elevada al cuadrado.
- En este caso, y está elevada al cuadrado.
- Así que vamos a escribir todos los términos que contengan y a la izquierda de la igualdad y los demás a la derecha:
$$y^2 - 10\,y = 12\,x - 13$$
- Ahora vamos a completar cuadrados.
- Para completar cuadrados calculamos la mitad del coeficiente lineal de la expresión que quedó a la izquierda, o sea, la mitad de -10, que es -5.
- El cuadrado de $y-5$ es: $(y-5)^2 = y^2 - 10\,y + 25$.
- Si sumamos en ambos lados de la ecuación 25 completamos el cuadrado:
$$\begin{aligned} y^2 - 10\,y + 25 &= 12\,x - 13 + 25 \\ (y-5)^2 &= 12\,x + 12 \end{aligned}$$
- Ahora podemos factorizar el 12 que aparece en ambos términos a la derecha de la iguadad:
$$(y-5)^2 = 12(x+1)$$
- Esta es la ecuación de la parábola en su forma ordinaria.

Ahora imagina que te hubieran pedido que grafiques la ecuación:

$$y^2 - 12\,x - 10\,y + 13 = 0$$

Si tratas de graficar esta ecuación vas a tener un trabajo muy laborioso. Por otra parte, si la conviertes a su forma ordinaria:

$$(y-5)^2 = 12(x+1)$$

graficarla y encontrar todos sus elementos es cosa sencilla.

Calcula todos los elementos de la parábola cuya ecuación es:

$$x^2 - 8x - 20y - 84 = 0$$

Ejemplo 2

- Ahora la literal que aparece elevada al cuadrado es x.
- Así que vamos a dejar todos los términos que tienen a esta literal y el resto lo pasamos al lado derecho:
$$x^2 - 8x = 20y + 84$$
- Vamos a completar cuadrados.
- La mitad de -8 es -4.
- Observa que $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$.
- Esto nos sugiere que sumemos en ambos lados de la igualdad 16:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 &= 20y + 84 + 16 \\ (x-4)^2 &= 20y + 100 \\ (x-4)^2 &= 20(y+5) \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación ordinaria de la parábola.
- De esta ecuación podemos rápidamente ver que $h = 4$, $k = -5$, y $4p = 20$, de donde: $p = 5$.
- Ahora podemos calcular todos los elementos de esta parábola:

  Vértice: $V(h,k) = V(4,-5)$.

  Foco: $F(h, k+p) = F(4, -5+5) = F(4,0)$.

  Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4(5) = 20$.

  Directriz: $y = k - p = -5 - 5 = -10 \quad \Rightarrow \quad y + 10 = 0$.

  Eje: $x = h \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad x - 4 = 0$.

- Se te queda como ejercicio graficar esta parábola con todos sus elementos en tu cuaderno.

Calcula todos los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es:

$$y^2 - 8x - 2y - 39 = 0$$

Ejemplo 3

- Ahora la literal que aparece elevada al cuadrado es y.
- Completamos cuadrados para esa literal:

$$\begin{aligned} y^2 - 2y &= 8x + 39 \\ y^2 - 2y + 1 &= 8x + 39 + 1 \\ (y-1)^2 &= 8(x+5) \end{aligned}$$

- En este caso, $h = -5$, $k = 1$, y $p = 2$.
- También podemos ver que la parábola es horizontal y abre hacia la derecha.
- Ahora encontramos todos sus elementos:

  Vértice: $V(h,k) = V(-5,1)$.

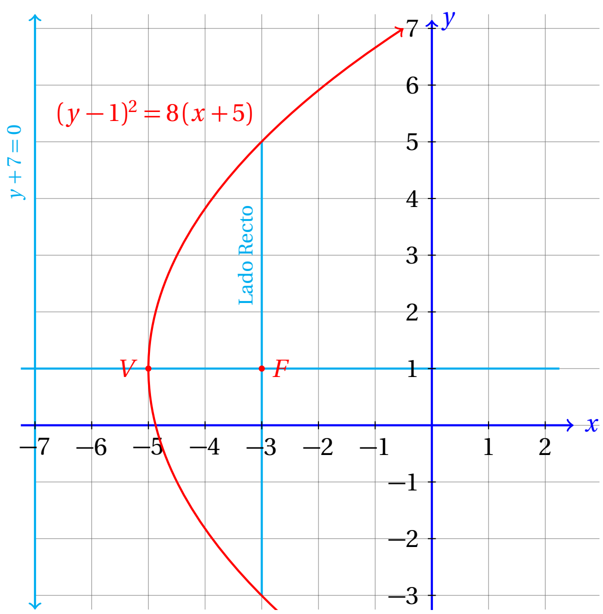
  Foco: $F(h+p,k) = F(-5+2,1) = F(-3,1)$.

  Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4(2) = 8$.

  Directriz: $x = h - p = -5 - 2 = -7 \qquad \Rightarrow \qquad y + 7 = 0$.

  Eje: $y = k \qquad \Rightarrow \qquad y = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y - 1 = 0$.

- La gráfica de esta parábola es la siguiente:



Ejemplo 4	Calcula la ecuación en forma ordinaria de la parábola cuya ecuación general es: $$x^2 - 8x + 12y - 20 = 0$$ por dos métodos distintos y calcula también todos sus elementos.

- **Primer Método:**
- Vamos a completar cuadrados para x:

$$\begin{aligned}
x^2 - 8x + 12y - 20 &= 0\\
x^2 - 8x &= -12y + 20\\
x^2 - 8x + 16 &= -12y + 20 + 16\\
(x-4)^2 &= -12(y-3)
\end{aligned}$$

- De la ecuación encontramos que $h = 4$, $k = 3$, y finalmente, $p = -3$.

- Por la ecuación sabemos que la parábola es vertical.
- También, dado que $p < 0$ la parábola abre hacia abajo.
- Ahora se enlistan todos sus elementos:

  Vértice: $V(h,k) = V(4,3)$.
  Foco: $F(h, k+p) = F(4, 3-3) = F(4,0)$.
  Lado recto: $\text{LLR} = 4\,|p| = 4\,(|3|) = 12$.
  Directriz: $y = k - p = 3 - (-3) = 6 \qquad \Rightarrow \qquad y - 6 = 0$.
  Eje: $x = h \qquad \Rightarrow \qquad x = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x - 4 = 0$.

- Y hemos terminado.
- **Segundo Método:**
- A partir de la ecuación general de la parábola:

$$\begin{aligned} x^2 - 8\,x + 12\,y - 20 &= 0 \\ x^2 + D\,x + E\,y + F &= 0 \end{aligned}$$

  podemos calcular h, k, y p sin necesidad de convertir la ecuación a su forma ordinaria.

- Para eso vamos a utilizar las fórmulas:

$$\begin{aligned} D &= -2\,h \\ E &= -4\,p \\ F &= h^2 + 4p\,k \end{aligned}$$

- Sustituimos los valores dados en la ecuación de la parábola en su forma general:

$$\begin{aligned} -8 = -2\,h \qquad &\Rightarrow \qquad h = 4 \\ 12 = -4\,p \qquad &\Rightarrow \qquad p = -3 \\ -20 = (4)^2 + 4\,(-3)\,k \qquad &\Rightarrow \qquad k = \frac{-20-16}{-12} = 3 \end{aligned}$$

- Y a partir de estos valores, fácilmente podemos calcular:
  - ✓ La ecuación ordinaria y
  - ✓ Todos los elementos de la parábola.
- Como esto ya se realizó, no se requiere volver a calcular.
- De cualquier manera, se te queda como ejercicio graficar la parábola y todos sus elementos.

Calcula la ecuación de la parábola en las formas ordinaria y general. tiene su vértice en el punto $V(h,k)$ y tiene un valor de p como se indica. **Ejercicios 4.3**

1) $V(-6,3)$ y abre hacia arriba con $p = 7$.

Foco: $F(-6,10)$
LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $y = -4$

Eje: $x = -6$

Ec. F. ordinaria: $(x+6)^2 = 28(y-3)$

Ec. F. General: $x^2 + 12x - 28y + 120 = 0$

2) $V(-2, 6)$ y abre hacia abajo con $p = 6$.

Foco: $F(-2, 0)$

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $y = 12$

Eje: $x = -2$

Ec. F. ordinaria: $(x+2)^2 = -24(y-6)$

Ec. F. General: $x^2 + 4x + 24y - 140 = 0$

3) $V(-8, 1)$ y abre hacia la derecha con $p = 6$.

Foco: $F(-2, 1)$

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $x = -14$

Eje: $y = 1$

Ec. F. ordinaria: $(y-1)^2 = 24(x+8)$

Ec. F. General: $y^2 - 24x - 2y - 191 = 0$

4) $V(-4, -5)$ y abre hacia arriba con $p = 4$.

Foco: $F(-4, -1)$

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $y = -9$

Eje: $x = -4$

Ec. F. ordinaria: $(x+4)^2 = 16(y+5)$

Ec. F. General: $x^2 + 8x - 16y - 64 = 0$

5) $V(-9, -5)$ y abre hacia arriba con $p = 6$.

Foco: $F(-9, 1)$

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $y = -11$

Eje: $x = -9$

Ec. F. ordinaria: $(x+9)^2 = 24(y+5)$

Ec. F. General: $x^2 + 18x - 24y - 39 = 0$

6) $V(-4, -8)$ y abre hacia la derecha con $p = 9$.

Foco: $F(5, -8)$

LLR: $\text{LLR} = 36$

Directriz: $x = -13$

Eje: $y = -8$

Ec. F. ordinaria: $(y+8)^2 = 36(x+4)$

Ec. F. General: $y^2 - 36\,x + 16\,y - 80 = 0$

7) $V(8,7)$ y abre hacia la izquierda con $p = 1$.

Foco: $F(7,7)$

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = 9$

Eje: $y = 7$

Ec. F. ordinaria: $(y-7)^2 = -4(x-8)$

Ec. F. General: $y^2 + 4\,x - 14\,y + 17 = 0$

8) $V(-6,-3)$ y abre hacia la izquierda con $p = 9$.

Foco: $F(-15,-3)$

LLR: $\text{LLR} = 36$

Directriz: $x = 3$

Eje: $y = -3$

Ec. F. ordinaria: $(y+3)^2 = -36(x+6)$

Ec. F. General: $y^2 + 36\,x + 6\,y + 225 = 0$

9) $V(-1,-8)$ y abre hacia arriba con $p = 3$.

Foco: $F(-1,-5)$

LLR: $\text{LLR} = 12$

Directriz: $y = -11$

Eje: $x = -1$

Ec. F. ordinaria: $(x+1)^2 = 12(y+8)$

Ec. F. General: $x^2 + 2\,x - 12\,y - 95 = 0$

10) $V(3,4)$ y abre hacia la izquierda con $p = 4$.

Foco: $F(-1,4)$

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $x = 7$

Eje: $y = 4$

Ec. F. ordinaria: $(y-4)^2 = -16(x-3)$

Ec. F. General: $y^2 + 16\,x - 8\,y - 32 = 0$

11) $V(-2,6)$ y abre hacia la derecha con $p = 4$.

Foco: $F(2,6)$

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $x = -6$

Eje: $y = 6$

Ec. F. ordinaria: $(y-6)^2 = 16(x+2)$

Ec. F. General: $y^2 - 16\,x - 12\,y + 4 = 0$

12) $V(5,-7)$ y abre hacia arriba con $p = 4$.

Foco: $F(5,-3)$

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $y = -11$

Eje: $x = 5$

Ec. F. ordinaria: $(x-5)^2 = 16(y+7)$

Ec. F. General: $x^2 - 10x - 16y - 87 = 0$

13) $V(3,-4)$ y abre hacia arriba con $p = 9$.

Foco: $F(3,5)$

LLR: $\text{LLR} = 36$

Directriz: $y = -13$

Eje: $x = 3$

Ec. F. ordinaria: $(x-3)^2 = 36(y+4)$

Ec. F. General: $x^2 - 6x - 36y - 135 = 0$

14) $V(8,-7)$ y abre hacia arriba con $p = 5$.

Foco: $F(8,-2)$

LLR: $\text{LLR} = 20$

Directriz: $y = -12$

Eje: $x = 8$

Ec. F. ordinaria: $(x-8)^2 = 20(y+7)$

Ec. F. General: $x^2 - 16x - 20y - 76 = 0$

15) $V(-6,-2)$ y abre hacia la izquierda con $p = 1$.

Foco: $F(-7,-2)$

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = -5$

Eje: $y = -2$

Ec. F. ordinaria: $(y+2)^2 = -4(x+6)$

Ec. F. General: $y^2 + 4x + 4y + 28 = 0$

16) $V(-5,3)$ y abre hacia abajo con $p = 3$.

Foco: $F(-5,0)$

LLR: $\text{LLR} = 12$

Directriz: $y = 6$

Eje: $x = -5$

Ec. F. ordinaria: $(x+5)^2 = -12(y-3)$

Ec. F. General: $x^2 + 10x + 12y - 11 = 0$

17) $V(6,-3)$ y abre hacia arriba con $p = 1$.

Foco: $F(6,-2)$

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $y = -4$

Eje: $x = 6$

Ec. F. ordinaria: $(x-6)^2 = 4(y+3)$

Ec. F. General: $x^2 - 12x - 4y + 24 = 0$

18) $V(-7,8)$ y abre hacia la izquierda con $p = 6$.

Foco: $F(-13,8)$

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $x = -1$

Eje: $y = 8$

Ec. F. ordinaria: $(y-8)^2 = -24(x+7)$

Ec. F. General: $y^2 + 24x - 16y + 232 = 0$

19) $V(4,1)$ y abre hacia la izquierda con $p = 1$.

Foco: $F(3,1)$

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = 5$

Eje: $y = 1$

Ec. F. ordinaria: $(y-1)^2 = -4(x-4)$

Ec. F. General: $y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$

20) $V(-2,-2)$ y abre hacia la derecha con $p = 2$.

Foco: $F(0,-2)$

LLR: $\text{LLR} = 8$

Directriz: $x = -4$

Eje: $y = -2$

Ec. F. ordinaria: $(y+2)^2 = 8(x+2)$

Ec. F. General: $y^2 - 8x + 4y - 12 = 0$

21) $V(-4,2)$ y abre hacia arriba con $p = 2$.

Foco: $F(-4,4)$

LLR: $\text{LLR} = 8$

Directriz: $y = 0$

Eje: $x = -4$

Ec. F. ordinaria: $(x+4)^2 = 8(y-2)$

Ec. F. General: $x^2 + 8x - 8y + 32 = 0$

22) $V(-1,-3)$ y abre hacia la izquierda con $p = 1$.

Foco: $F(-2,-3)$

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = 0$

Eje: $y = -3$

Ec. F. ordinaria: $(y+3)^2 = -4(x+1)$

Ec. F. General: $y^2 + 4x + 6y + 13 = 0$

23) $V(-2,8)$ y abre hacia arriba con $p=9$.

Foco: $F(-2,17)$

LLR: $\mathrm{LLR}=36$

Directriz: $y=-1$

Eje: $x=-2$

Ec. F. ordinaria: $(x+2)^2=36(y-8)$

Ec. F. General: $x^2+4x-36y+292=0$

24) $V(-6,6)$ y abre hacia la derecha con $p=1$.

Foco: $F(-5,6)$

LLR: $\mathrm{LLR}=4$

Directriz: $x=-7$

Eje: $y=6$

Ec. F. ordinaria: $(y-6)^2=4(x+6)$

Ec. F. General: $y^2-4x-12y+12=0$

25) $V(-1,2)$ y abre hacia la izquierda con $p=8$.

Foco: $F(-9,2)$

LLR: $\mathrm{LLR}=32$

Directriz: $x=7$

Eje: $y=2$

Ec. F. ordinaria: $(y-2)^2=-32(x+1)$

Ec. F. General: $y^2+32x-4y+36=0$

26) $V(4,-8)$ y abre hacia arriba con $p=9$.

Foco: $F(4,1)$

LLR: $\mathrm{LLR}=36$

Directriz: $y=-17$

Eje: $x=4$

Ec. F. ordinaria: $(x-4)^2=36(y+8)$

Ec. F. General: $x^2-8x-36y-272=0$

27) $V(-3,-6)$ y abre hacia abajo con $p=6$.

Foco: $F(-3,-12)$

LLR: $\mathrm{LLR}=24$

Directriz: $y=0$

Eje: $x=-3$

Ec. F. ordinaria: $(x+3)^2=-24(y+6)$

Ec. F. General: $x^2+6x+24y+153=0$

28) $V(7,-8)$ y abre hacia la derecha con $p=2$.

Foco: $F(9,-8)$

LLR: $\text{LLR} = 8$

Directriz: $x = 5$

Eje: $y = -8$

Ec. F. ordinaria: $(y+8)^2 = 8(x-7)$

Ec. F. General: $y^2 - 8x + 16y + 120 = 0$

29) $V(-6,4)$ y abre hacia arriba con $p = 7$.

Foco: $F(-6,11)$

LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $y = -3$

Eje: $x = -6$

Ec. F. ordinaria: $(x+6)^2 = 28(y-4)$

Ec. F. General: $x^2 + 12x - 28y + 148 = 0$

30) $V(-8,-4)$ y abre hacia la derecha con $p = 7$.

Foco: $F(-1,-4)$

LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $x = -15$

Eje: $y = -4$

Ec. F. ordinaria: $(y+4)^2 = 28(x+8)$

Ec. F. General: $y^2 - 28x + 8y - 208 = 0$

Para los siguientes ejercicios calcula la ecuación de la parábola en su forma ordinaria a partir de la ecuación en forma general. A partir de la ecuación ordinaria calcula todos los elementos de la parábola.

Comentario

31) $y^2 - 12x - 6y + 57 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-3)^2 = 12(x-4)$

Vértice: $V(4,3)$

Foco: $F(7,3)$

Abre hacia: la derecha con $p = 3$.

LLR: $\text{LLR} = 12$

Directriz: $x = 1$

Eje: $y = 3$

32) $y^2 - 28x + 4y - 136 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y+2)^2 = 28(x+5)$

Vértice: $V(-5,-2)$

Foco: $F(2,-2)$

Abre hacia: la derecha con $p = 7$.

LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $x = -12$

Eje: $y = -2$

33) $x^2+14x+12y+73=0$

Ec. F. ordinaria: $(x+7)^2=-12(y+2)$

Vértice: $V(-7,-2)$

Foco: $F(-7,-5)$

Abre hacia: abajo con $p=3$.

LLR: $\text{LLR}=12$

Directriz: $y=1$

Eje: $x=-7$

34) $x^2-14x+36y+85=0$

Ec. F. ordinaria: $(x-7)^2=-36(y+1)$

Vértice: $V(7,-1)$

Foco: $F(7,-10)$

Abre hacia: abajo con $p=9$.

LLR: $\text{LLR}=36$

Directriz: $y=8$

Eje: $x=7$

35) $x^2+14x+16y-63=0$

Ec. F. ordinaria: $(x+7)^2=-16(y-7)$

Vértice: $V(-7,7)$

Foco: $F(-7,3)$

Abre hacia: abajo con $p=4$.

LLR: $\text{LLR}=16$

Directriz: $y=11$

Eje: $x=-7$

36) $y^2+36x-4y+76=0$

Ec. F. ordinaria: $(y-2)^2=-36(x+2)$

Vértice: $V(-2,2)$

Foco: $F(-11,2)$

Abre hacia: la izquierda con $p=9$.

LLR: $\text{LLR}=36$

Directriz: $x=7$

Eje: $y=2$

37) $y^2+32x+14y+209=0$

Ec. F. ordinaria: $(y+7)^2=-32(x+5)$

Vértice: $V(-5,-7)$

Foco: $F(-13,-7)$

Abre hacia: la izquierda con $p=8$.

LLR: $\text{LLR}=32$

Directriz: $x = 3$

Eje: $y = -7$

38) $y^2 + 24x - 12y + 156 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-6)^2 = -24(x+5)$

Vértice: $V(-5, 6)$

Foco: $F(-11, 6)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 6$.

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $x = 1$

Eje: $y = 6$

39) $x^2 - 12x + 28y + 232 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x-6)^2 = -28(y+7)$

Vértice: $V(6, -7)$

Foco: $F(6, -14)$

Abre hacia: abajo con $p = 7$.

LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $y = 0$

Eje: $x = 6$

40) $x^2 + 10x - 4y + 53 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+5)^2 = 4(y-7)$

Vértice: $V(-5, 7)$

Foco: $F(-5, 8)$

Abre hacia: arriba con $p = 1$.

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $y = 6$

Eje: $x = -5$

41) $x^2 + 6x + 16y - 39 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+3)^2 = -16(y-3)$

Vértice: $V(-3, 3)$

Foco: $F(-3, -1)$

Abre hacia: abajo con $p = 4$.

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $y = 7$

Eje: $x = -3$

42) $x^2 + 2x + 36y - 179 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+1)^2 = -36(y-5)$

Vértice: $V(-1, 5)$

Foco: $F(-1, -4)$

Abre hacia: abajo con $p = 9$.

LLR: $\text{LLR} = 36$

Directriz: $y = 14$

Eje: $x = -1$

43) $x^2 - 14x + 24y + 169 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x-7)^2 = -24(y+5)$

Vértice: $V(7,-5)$

Foco: $F(7,-11)$

Abre hacia: abajo con $p = 6$.

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $y = 1$

Eje: $x = 7$

44) $y^2 + 36x - 18y + 297 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-9)^2 = -36(x+6)$

Vértice: $V(-6,9)$

Foco: $F(-15,9)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 9$.

LLR: $\text{LLR} = 36$

Directriz: $x = 3$

Eje: $y = 9$

45) $y^2 + 4x - 2y - 7 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-1)^2 = -4(x-2)$

Vértice: $V(2,1)$

Foco: $F(1,1)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 1$.

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = 3$

Eje: $y = 1$

46) $x^2 + 4x - 4y + 32 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+2)^2 = 4(y-7)$

Vértice: $V(-2,7)$

Foco: $F(-2,8)$

Abre hacia: arriba con $p = 1$.

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $y = 6$

Eje: $x = -2$

47) $y^2 + 4x + 18y + 109 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y+9)^2 = -4(x+7)$

Vértice: $V(-7,-9)$

Foco: $F(-8,-9)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 1$.

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = -6$

Eje: $y = -9$

48) $x^2 + 4\,x + 16\,y - 108 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+2)^2 = -16(y-7)$

Vértice: $V(-2,7)$

Foco: $F(-2,3)$

Abre hacia: abajo con $p = 4$.

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $y = 11$

Eje: $x = -2$

49) $y^2 + 8\,x + 12\,y + 68 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y+6)^2 = -8(x+4)$

Vértice: $V(-4,-6)$

Foco: $F(-6,-6)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 2$.

LLR: $\text{LLR} = 8$

Directriz: $x = -2$

Eje: $y = -6$

50) $y^2 + 24\,x - 10\,y + 145 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-5)^2 = -24(x+5)$

Vértice: $V(-5,5)$

Foco: $F(-11,5)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 6$.

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $x = 1$

Eje: $y = 5$

51) $y^2 - 32\,x - 10\,y + 313 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-5)^2 = 32(x-9)$

Vértice: $V(9,5)$

Foco: $F(17,5)$

Abre hacia: la derecha con $p = 8$.

LLR: $\text{LLR} = 32$

Directriz: $x = 1$

Eje: $y = 5$

52) $x^2 - 12x + 28y - 160 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x-6)^2 = -28(y-7)$

Vértice: $V(6,7)$

Foco: $F(6,0)$

Abre hacia: abajo con $p = 7$.

LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $y = 14$

Eje: $x = 6$

53) $y^2 - 20x + 18y + 181 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y+9)^2 = 20(x-5)$

Vértice: $V(5,-9)$

Foco: $F(10,-9)$

Abre hacia: la derecha con $p = 5$.

LLR: $\text{LLR} = 20$

Directriz: $x = 0$

Eje: $y = -9$

54) $y^2 + 16x - 18y + 225 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-9)^2 = -16(x+9)$

Vértice: $V(-9,9)$

Foco: $F(-13,9)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 4$.

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $x = -5$

Eje: $y = 9$

55) $x^2 - 8x - 32y + 48 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x-4)^2 = 32(y-1)$

Vértice: $V(4,1)$

Foco: $F(4,9)$

Abre hacia: arriba con $p = 8$.

LLR: $\text{LLR} = 32$

Directriz: $y = -7$

Eje: $x = 4$

56) $x^2 - 12x - 16y + 132 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x-6)^2 = 16(y-6)$

Vértice: $V(6,6)$

Foco: $F(6,10)$

Abre hacia: arriba con $p = 4$.

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $y = 2$

Eje: $x = 6$

57) $y^2 + 4x + 10y + 37 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y+5)^2 = -4(x+3)$

Vértice: $V(-3,-5)$

Foco: $F(-4,-5)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 1$.

LLR: $\mathrm{LLR} = 4$

Directriz: $x = -2$

Eje: $y = -5$

58) $x^2 + 16x - 20y - 16 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+8)^2 = 20(y+4)$

Vértice: $V(-8,-4)$

Foco: $F(-8,1)$

Abre hacia: arriba con $p = 5$.

LLR: $\mathrm{LLR} = 20$

Directriz: $y = -9$

Eje: $x = -8$

59) $x^2 + 4x - 8y + 20 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+2)^2 = 8(y-2)$

Vértice: $V(-2,2)$

Foco: $F(-2,4)$

Abre hacia: arriba con $p = 2$.

LLR: $\mathrm{LLR} = 8$

Directriz: $y = 0$

Eje: $x = -2$

60) $y^2 + 24x - 16y + 88 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-8)^2 = -24(x+1)$

Vértice: $V(-1,8)$

Foco: $F(-7,8)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 6$.

LLR: $\mathrm{LLR} = 24$

Directriz: $x = 5$

Eje: $y = 8$

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el origen:

$$x^2 = 4py$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Si $p < 0$ abre hacia abajo.

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el punto $V(h,k)$:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Si $p < 0$ abre hacia abajo.

Ec. Parábola horizontal F. ordinaria: Vértice en el origen :

$$y^2 = 4px$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Si $p < 0$ abre hacia la izquierda.

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el punto $V(h,k)$:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Si $p < 0$ abre hacia la izquierda.

Otras fórmulas: Parábola con vértice en el punto $V(h,k)$:

Parábola	Vertical	Horizontal
Lado Recto	$4\|p\|$	$4\|p\|$
Foco	$F(h,k+p)$	$F(h+p,k)$
Directriz	$y = k-p$	$x = h-p$
Ec. General	$x^2 + Dx + Ey + F = 0$	$y^2 + Dx + Ey + F = 0$
D	$-2h$	$-4p$
E	$-4p$	$-2k$
F	$h^2 + 4pk$	$k^2 + 4ph$

Capítulo 5

La elipse

Por aprender...

Por qué es importante...

En la naturaleza encuentras Elipses en las trayectorias que siguen los planetas alrededor del Sol.

5.1 Caracterización geométrica

Ahora vamos a centrar nuestra atención en la elipe.

Esta figura geométrica tiene la misma esencia que la circunferencia, pero ésta está *dilatada* en uno de sus ejes.

Recuerda la definición de circunferencia. Sus puntos equidistan del centro.

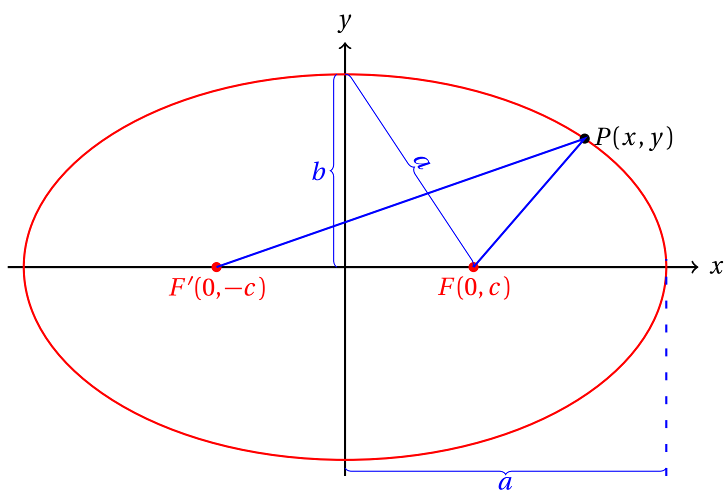
5.1.1 La elipse como lugar geométrico

En el siguiente ejemplo se deduce la ecuación de la elipse en su primera forma ordinaria.

Ejemplo 1

Un punto $P(x,y)$ se mueve de tal forma que la suma de su distancia a los puntos $F(0,c)$ y $F'(0,-c)$ siempre es constante. Es decir: $d = |\overline{FP}| + |\overline{PF'}|$. Encuentra la ecuación que representa a este lugar geométrico.

- Empezamos graficando la información dada en el texto del problema:



- Observa que hemos definido dos distancias: a y b.
- La primera va desde el punto $F(c,0)$ hasta la intersección de la elipse con el eje vertical.
- Esta misma distancia es la que mide desde el centro de la elipse hasta su intersección con el eje horizontal (a este punto lo llamaremos V).
- Para ver que esto es así considera lo siguiente:
  - ✓ Sea r la distancia desde el origen hasta V.
  - ✓ Desde el punto $F'(-c,0)$ hasta el origen, después hasta V, mide $r+c$.
  - ✓ Le sumamos la distancia desde V hasta el punto $F(c,0)$, que es igual a $r-c$.
  - ✓ Obtenemos: $(r+c)+(r-c)=2r$.
  - ✓ Pero esta distancia es igual a $|\overline{FP}|+|\overline{PF'}|=2a$.
  - ✓ Luego, $2r=2a$, que nos indica: $r=a$.
- Al punto donde la elipse se intersecta con el eje vertical lo llamaremos B.

- b va desde el centro de la elipse hasta B.
- Dado que los ejes coordenados son perpendiculares tenemos, por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(a es la distancia que va desde el punto $F(c,0)$ hasta el punto $B(0,b)$)

- Observa que a es mayor al número b, así como de c.
- También es importante notar que: $|\overline{FP}| + |\overline{PF'}| = 2a$.
- Por definición de elipse, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} d & = & |\overline{FP}| \quad + \quad |\overline{PF'}| \\ 2a & = & \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \end{array}$$

- Si elevamos al cuadrado, y simplificamos obtenemos:

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

- Si dividimos entre 4 simplificamos esta ecuación:

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

- Ahora elevamos de nuevo al cuadrado para desaparecer el radical:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

- Reduciendo términos llegamos a:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2 \cdot \left(a^2 - c^2\right)$$

- Y recordando que $a^2 = b^2 + c^2$, se tiene que: $a^2 - c^2 = b^2$, luego:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

- Al dividir ambos lados de la última igualdad entre a^2b^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Esta es la ecuación de la elipse en su primera forma ordinaria.

Una vez disctutido el problema anterior, podemos dar la definición de elipse.

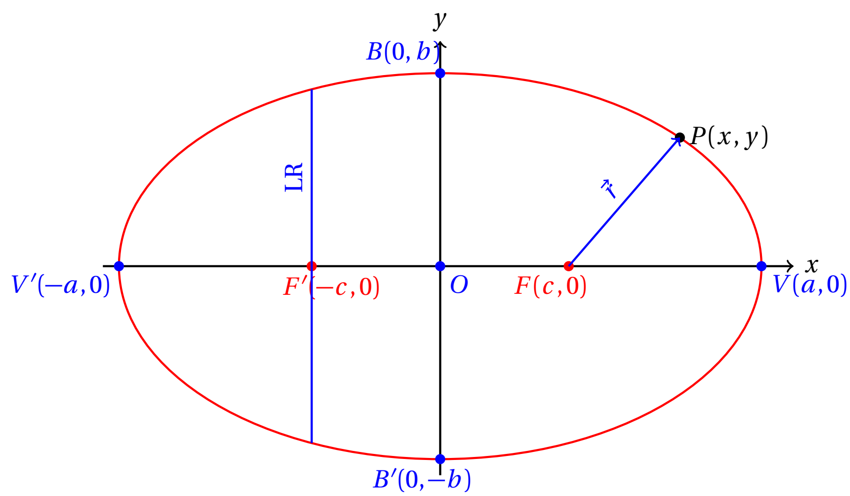
Definición 1	ELIPSE *Es el conjunto de todos los puntos P en el plano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos, es igual a una constante $2a$.*

Observa que la ecuación de la elipse que hemos calculado tiene su centro en el origen.

Esta es la primera forma que vamos a estudiar en este curso.

5.1.2 Elementos asociados a la elipse

Para poder estudiar con mejor facilidad la elipse alrededor de ella se han definido algunos elementos.



Definición 1

Radio focal

Es el segmento de recta dirigido $\vec{r}$ que va desde un foco F de la elipse hasta un punto $P(x,y)$ que esté sobre ella.

Definición 2

Vértice

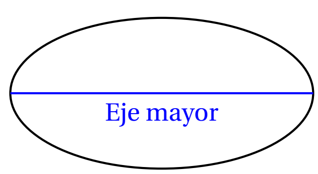
Cada uno de los puntos de intersección de la elipse con la recta sobre la cual están los focos se llama vértice de la elipse.

En la discusión del problema anterior, los vértices tenían coordenadas $V(a,0)$ y $V'(-a,0)$.

Definición 3

Eje mayor

Es el segmento de recta que va desde un vértice hasta el otro: $\overline{VV'}$. El eje mayor de la elipse también se conoce como eje transverso.



Definición 4

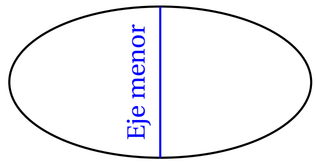
Centro

Es el punto medio del eje mayor de una elipse.

Definición 5

Eje menor

Es el segmento de recta que es perpendicular al eje mayor, que pasa por el centro de la elipse, y cuyos extremos son las intersecciones de este segmento con la elipse. El eje menor también se conoce como eje conjugado.



Es importante mencionar que el eje mayor de una elipse no siempre será horizontal. De manera semejante, el eje menor de la elipse no siempre será vertical.

Definición 6

LADO RECTO

El lado recto (LR) de una elipse es el segmento de recta que pasa por uno de sus focos, es perpendicular al eje mayor y cuyos extremos están sobre la elipse.

Teorema 1

La longitud del eje mayor de una elipse es igual a la suma de las distancias de un punto cualquiera $P(x,y)$ que esté sobre la elipse a los focos. Es decir, la longitud del eje mayor es: $2\,a = |\overline{FP}| + |\overline{PF'}|$

Este teorema se demostró al inicio de la deducción de la ecuación de la elipse en el primer ejemplo de esta sección.

5.2 Ecuaciones ordinarias de la elipse

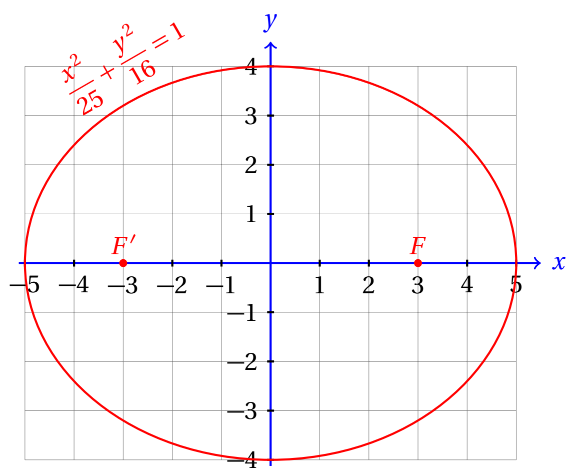
En la sección anterior se dedujo la ecuación de la elipse con centro en el origen.

Esta es la ecuación que se conoce como la ecuación de la elipse en su primera forma ordinaria y que estudiaremos en esta sección.

5.2.1 Vértice en el origen

Calcula la ecuación de la elipse cuyos ejes mayor y menor miden 10 y 8 unidades respectivamente.	**Ejemplo 1**

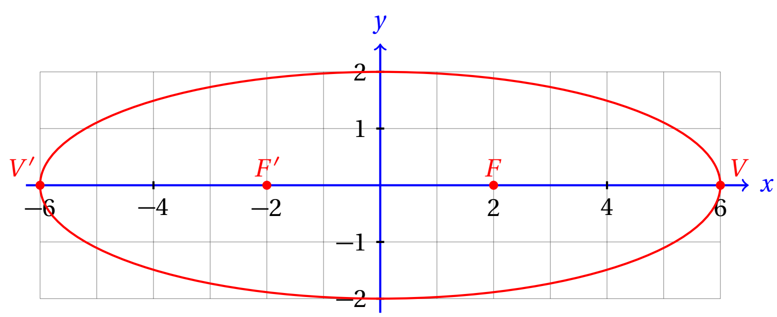
- Dado que conocemos las medidas de los ejes de la elipse, podemos fácilmente calcular los valores de a y b.
- Dado que $2a = 10$, se sigue que $a = 5$.
- De manera semejante, dado que: $2b = 8$, se sigue que: $b = 4$.
- La ecuación de la elipse es:
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$
- Las coordendas de los focos $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$ pueden calcularse usando la relación:
$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \Rightarrow \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$
- Entonces los focos de la elipse están en los puntos: $F(3,0)$ y $F(-3,0)$.



Calcula la ecuación de la elipse con centro en el origen, y uno de sus focos es el punto $F(2,0)$ y un vértice está en $V(6,0)$.	**Ejemplo 2**

- Sabiendo que la elipse tiene su centro en el origen, se deduce que $c = 2$, porque esa es la abscisa de uno de sus focos.

- También dado que un vértice está en $V(6,0)$, se sigue que $a=6$.
- Usando la relación:
$$a^2 = b^2 + c^2$$
podemos calcular el valor de b:
$$\begin{aligned} b &= \sqrt{a^2 - c^2} \\ &= \sqrt{36-4} \\ &= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$
- Entonces, la longitud del eje menor es: $2\,b = 8\sqrt{2}$.
- Y la longitud del eje ayor es: $2\,a = 12$
- La ecuación de la elipse es:
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$$
y su gráfica:



Observa que para calcular todos los elementos de la elipse se requiere conocer dos de los tres valores de a, b y c. A partir de estos valores podemos calcular el tercero y calcular todos los elementos de la cónica.

Recuerda siempre que:

✓ a es la mitad de la longitud del eje mayor,

✓ b es la mitad de la longitud del eje menor, y

✓ c es la distancia del centro de la elipse al foco de la misma.

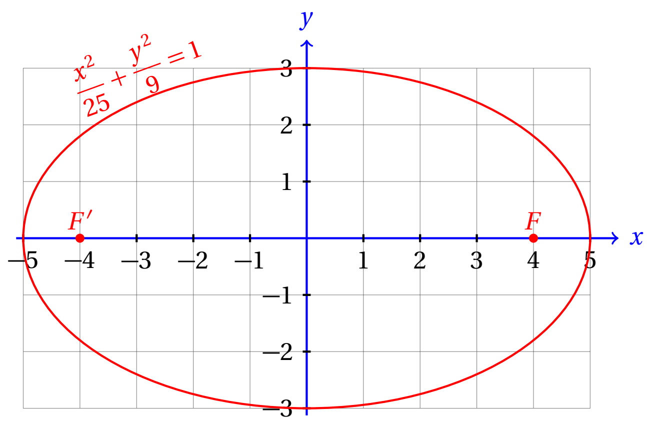
Ejemplo 3 Calcula la ecuación de la elipse con centro en el origen que pasa por el punto $B(0,3)$ y uno de sus vértices es el punto $V(5,0)$. Calcula también sus demás elementos y grafícala.

- Del texto del problema sabemos que $a=5$.
- También nos dieron la intersección de la elipse con el eje y: $B(0,3)$.
- Entonces, $b=3$.
- Así, conocemos las longitudes de los ejes mayor y menor, que son: 10 y 6, respectivamente.

- La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

- La gráfica de esta elipse es la siguiente:



- Para calcular las coordenadas de los focos necesitamos calcular el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

- Los focos están en los puntos: $F(4,0)$ y $F'(-4,0)$.

Un número que mide la *forma* de la elipse se llama excentricidad.

EXCENTRICIDAD
La excentricidad de una elipse se define como la razón de la distancia entre los focos de la elipse y la longitud de su eje mayor.
Si denotamos la excentricidad por la letra e, tenemos.

$$e = \frac{c}{a}$$

Definición 1

Calcula la ecuación de la elipse con centro en el origen que tiene uno de sus focos en el punto $F(6,0)$ y excentricidad $e = 0.6$.

Ejemplo 4

- Ya sabemos que $c = 6$.
- Por definición, $e = c/a = 0.6$.
- De aquí podemos calcular el valor de a:

$$0.6 = \frac{6}{a} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{6}{0.6} = 10$$

- Entonces, la longitud del eje mayor es 20.
- Y los vértices de esta elipse están en: $V(10,0)$ y $V'(-10,0)$.

- A partir de los valoes de a y c podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

- Entonces, la longitud del eje menor es 16.
- Se te queda como ejercicios graficar esta elipse.

Observa que la excentricidad de la elipse (e) mide la proporción entre la distancia del centro al foco y la distancia del centro a uno de sus vértices.

Esto implica que $0 < e < 1$, dado que los focos de la elipse no pueden estar por fuera de los vértices de la misma.

Cuando e se acerca mucho a 1, los focos tienden a acercarse a los vértices de la elipse. Por otra parte, cuando e tiende a cero, los focos tienden al centro de la elipse.

Para el caso particular $e = 0$, los dos focos estarán en el centro de la elipse y en este caso, las ecuaciones $e = c/a$ y $a^2 = b^2 + c^2$ nos indican que $c = 0$ implica que $e = 0$ y que $a = b$.

En palabras, la circunferencia es un caso particular de la elipse. La circunferencia, considerada como elipse, tiene sus dos focos en el centro de la misma.

En otras palabras, el centro de la circunferencia es, además del centro de la elipse, los dos focos de la misma.

Es importante mencionar que la excentricidad se define, en general para las demás cónicas con la fórmula:

$$e = \frac{c}{a}$$

donde c y a están definidas de acuerdo a cada cónica.

Por ejemplo, para la parábola, la excentricidad es 1, porque c es la distancia desde el foco hasta el vértice de la parábola y a es la distancia desde el vértice a la directriz.

Ejemplo 5

Calcula la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P\left(3, 2\sqrt{3}\right)$ y cuyos vértices están en los puntos $V(6,0)$ y $V'(-6,0)$.

- Para empezar, sabemos que $a = 6$.
- También a partir de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

podemos despejar y para obtener:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

- Dado que sabemos que cuando $x = 3$, obtenemos: $y = 3\sqrt{3}/4$, sustituyendo en el despeje de la ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} &= \frac{b}{6}\sqrt{36-9} \qquad \Rightarrow \\ b &= \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{27}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

- Ahora podemos calcular el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

- Entonces, los focos están en los puntos $F(2\sqrt{5}, 0)$ y $F'(-2\sqrt{5}, 0)$.
- Y la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

- Grafica la elipse mostrando sus focos, vértices y ejes.

Calcula la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $F(0,3)$, y $F'(0,-3)$ y un vértice está en el punto $V(0,5)$. **Ejemplo 6**

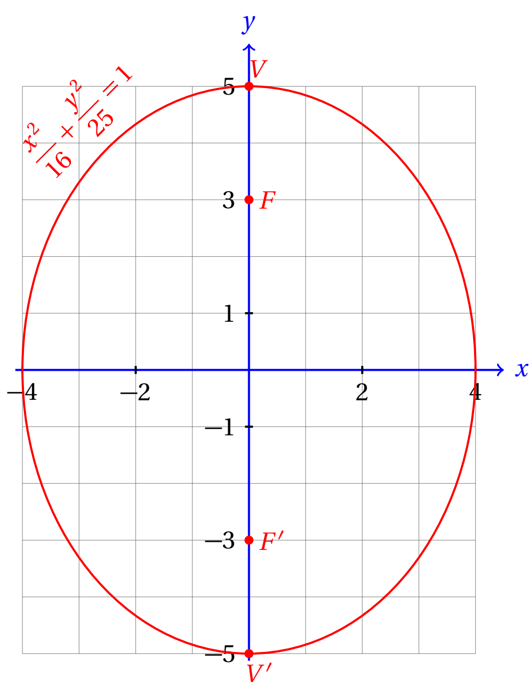
- A partir de los focos podemos darnos cuenta que el centro de la elipse está en el origen de coordenadas.
- Igualmente, dado que los focos están sobre el eje mayor, la elipse es vertical.
- Con la información dada en el texto del problema podemos calcular: $c = 3$, y $a = 5$.
- A partir de estos dos valores podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

- Entonces, la longitud del eje menor es: $2(4) = 8$.
- Y la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

- La gráfica de esta elipse es la siguiente:



Ejemplo 7

Calcula la ecuación de la elipse con centro en el origen que tiene uno de sus focos en el punto $F(0,6)$ y excentricidad $e = 0.6$.

- Dado que la elipse tiene su centro en el origen, el foco nos indica el valor de c: $c = 6$.
- Con la ayuda de laexcentricidad podemos calcular el valor de a:

$$e = \frac{c}{a} \qquad \Rightarrow \qquad 0.6 = \frac{6}{a} \qquad \Rightarrow \qquad a = 10$$

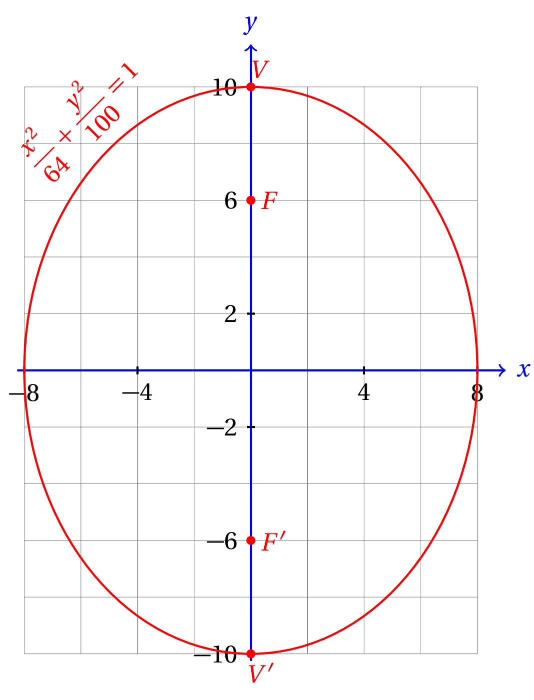
- A partir de estos valores podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

- Y la ecuación de esta elipse es:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

- Y su gráfica la siguiente:



Para encontrar la ecuación de la elipse, solamente debes calcular siempre los valores de a, b y c.

A partir de estos valores ya podrás calcular los demás parámetros de la elipse.

También es importante que deduzcas a partir del texto del problema si la elipse es horizontal o vertical.

Recuerda siempre que en la ecuación de la elipse horizontal a^2 aparece en el denominador de la fracción que contiene en el numerador a x^2:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(Elipse horizontal)}$$

Para la elipse vertical a^2 aparece en el denominador de la fracción que tiene en el numerador a y^2:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \text{(Elipse vertical)}$$

Calcula la ecuación de la elipse con centro en el origen para cada uno de los siguientes ejercicios a partir de la información dada. Grafica la elipse y calcula también todos sus elementos.

Ejercicios 5.2.1

1) Vértice: $V(0,5)$, foco: $F'(0,-3)$ $\quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

2) Long. eje mayor: 20, Dist. entre focos: 16. $\quad \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

3) $e=5/13$, Long. eje mayor: 26. Horizontal. $\quad \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

4) Foco: $F(0,15)$, Long. eje menor: 16. $\quad \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{289}=1$

5) Vértice: $V'(0,-20)$, excentricidad: $e=3/4$. $\quad \frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{400}=1$

6) Long. eje mayor: 50, long. eje menor: 48. Horizontal. $\quad \frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{576}=1$

7) Vertical. Long. eje mayor: 52, Long. eje menor: 20. $\quad \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{676}=1$

8) Excentricidad: $e=21/29$, vertical, foco: $F(0,21)$. $\quad \frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{841}=1$

9) Vértice: $V'(0,-34)$, Long. eje menor: 60. $\quad \frac{x^2}{900}+\frac{y^2}{1\,156}=1$

10) Excentricidad: $e=9/41$, Dist. entre focos: 18, horizontal. $\quad \frac{x^2}{1\,681}+\frac{y^2}{1\,600}=1$

11) Long. eje menor: 24, vértice: $V(37,0)$ $\quad \frac{x^2}{1\,369}+\frac{y^2}{144}=1$

12) Vértice: $V'(0,-40)$, foco: $F(0,24)$. $\quad \frac{x^2}{1\,600}+\frac{y^2}{576}=1$

13) Foco: $F(27,0)$, excentricidad: $e=3/5$. $\quad \frac{x^2}{2\,025}+\frac{y^2}{1\,296}=1$

14) Long. eje mayor: 104, Foco: $F(0,20)$. $\quad \frac{x^2}{2\,304}+\frac{y^2}{2\,704}=1$

15) Long. eje menor: 120, Vértice: $V(0,61)$ $\quad \frac{x^2}{3\,600}+\frac{y^2}{3\,721}=1$

5.2.2 Centro fuera del origen

La siguiente extensión al caso de la ecuación de la elipse en su primera forma ordinaria es considerar con centro fuera del origen, lo que nos lleva a la segunda forma ordinaria.

Definición 1

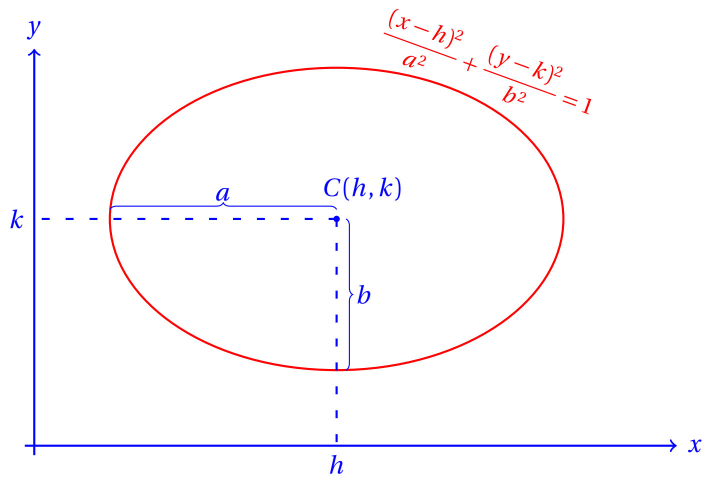
Ecuación de la elipse en su segunda forma ordinaria

La ecuación de la elise con centro en el punto $C(h,k)$ es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

donde a es la mitad de la longitud del eje mayor y b es la mitad de la longitud del eje menor.

Geométricamente tenemos la siguiente situación:



Como era de esperarse, las fórmulas para el cálculo de los focos, sus vértices, etc. cambian.

Por ejemplo, para calcular los vértices de la elipse horizontal, ahora utilizaremos las fórmulas:

$$V(h+a,k) \quad \text{y} \quad V'(h-a,k)$$

Y para el caso de la elipse vertical tenemos:

$$V(h,k+a) \quad \text{y} \quad V'(h,k-a)$$

Por su parte los focos de la elipse horizontal se calculan con:

$$F(h+c,k) \quad \text{y} \quad F'(h-c,k)$$

Y para la elipse vertical:

$$F(h,k+c) \quad \text{y} \quad F'(h,k-c)$$

Ejemplo 1

Calcula la ecuación de la elipse horizontal que tiene su centro en el punto $C(2,-1)$ y cuyo eje mayor mide 10 unidades y el eje menor mide 6 unidades.

- Del texto del problema es facil ver que $h=2$ y que $k=-1$.

- También $a = 5$ y $b = 3$.
- Luego, la ecuación de esta elipse es:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

- A partir de los valores de a y b podemos calcular el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

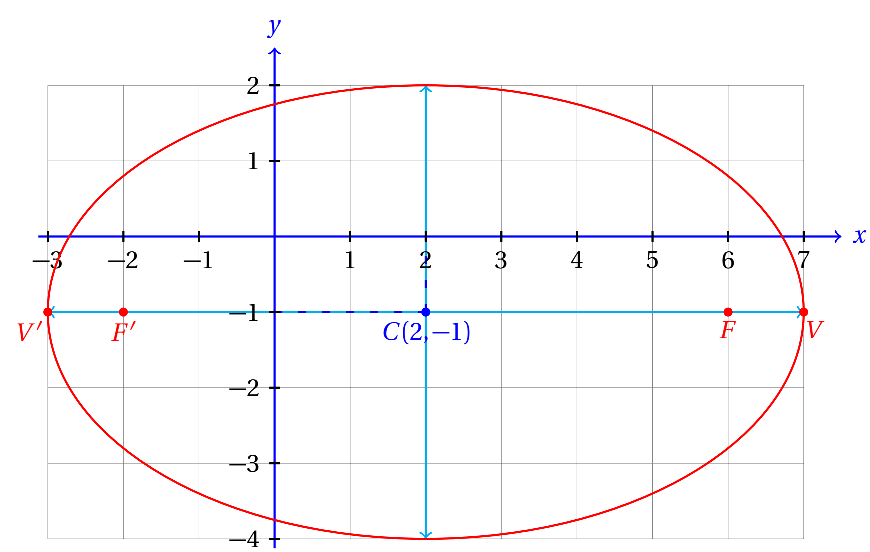
- Los focos de esta elipse están en los puntos:

$$F(h+c, k) = F(6, -1) \quad \text{y} \quad F'(h-c, k) = F'(-2, -1)$$

- Los vértices están en:

$$V(h+a, k) = V(7, -1) \quad \text{y} \quad V'(h-a, k) = V'(-3, -1)$$

- La gráfica de esta elipse es la siguiente:



- La excentricidad de esta elipse es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Calcula la ecuación de la elipse que tiene su centro en el punto $C(-5, 2)$, uno de sus focos está en el punto $F(7, 2)$ y un vértice en $V(8, 2)$.	**Ejemplo 2**

- A partir de las coordenadas del centro conocemos los valores de h y k: $h = -5$ y $k = 2$.
- Usando las fórmulas para el foco y el vértice podemos calcular los valores de a y c.
- Empezamos calculando el valor de a a partir de la coordenada del vértice y el valor de h:

$$8 = -5 + a \qquad \Rightarrow \qquad a = 13$$

- De manera semejante, aplicamos la fórmula para calcular la coordenada del foco y así encontramos el valor de c:

$$7 = -5 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 12$$

- Ahora podemos escribir la ecuación de la elipse:

$$\frac{(x+5)^2}{169} + \frac{(y-2)^2}{144} = 1$$

- A partir de los valores de a y c podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

- La excentricidad de esta elipse es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \approx 0.9230769321$$

- Se te queda como ejercicio graficar esta elipse.

Observa cómo es que en estos problemas el truco consiste en conocer los valores de a, b, c, h y k.

Una vez que conozcamos sus valores, podemos calcular la ecuación de la elipse.

De hecho, conociendo dos de los valores a, b, c, podemos calcular el tercero utilizando la relación:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

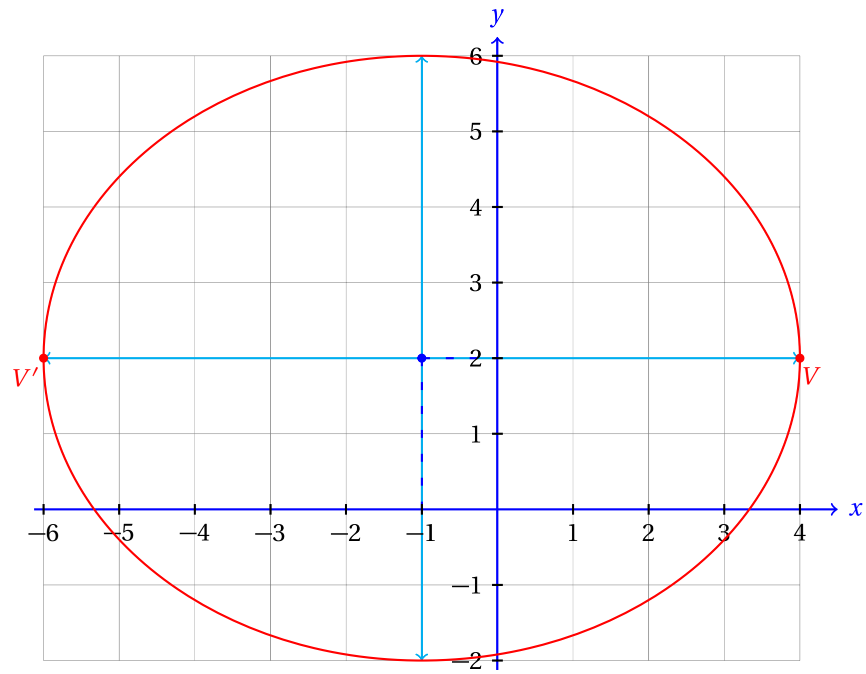
Los valores de h y k que corresponden al centro de la elipse servirán para escribir la ecuación de la elipse en su segunda forma ordinaria, que corresponde a las que tienen su centro fuera del origen.

Recuerda que elaborar una gráfica con los datos que provee el texto del problema siempre nos ayuda a reconocer información geométrica y calcular, sin el uso de las fórmulas, alguno o algunos de los valores de a, b y/o c.

Inclusive, también el de las coordenadas del centro en ciertos casos.

Ejemplo 3 Calcula la ecuación de la elipse que tiene sus vértices en $V'(-6,2)$ y $V(4,2)$, y los extremos del eje menor son los puntos $B(-1,6)$ y $B'(-1,-2)$.

- En este caso, es más conveniente empezar dibujando la elipse para poder tener una mejor idea del problema que estamos enfrentando.



- A partir de la gráfica es muy sencillo descubrir las coordenadas del centro de la elipse.
- Pues es el punto donde se intersectan los ejes mayor y menor de la elipse: $C(-1,2)$.
- Así también podemos conocer los valores de $a=5$ y $b=4$.
- Vamos a calcular el valor de c:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$$

- Así que los focos de esta elipse están en:

$$F(2,2) \quad \text{y} \quad F'(-4,2)$$

- Las longitudes de los ejes mayor y menor son: 10 y 8, respectivamente.

Ejemplo 4

Calcula la ecuación de la elipse horizontal que tiene una excentricidad de $e=0.8$, con centro en el punto $C(5,4)$ y cuya distancia del centro al foco es de 4 unidades.

- La distancia del centro de la elipse a uno de sus focos es c.
- Luego, $c=4$.
- A partir de la excentricidad podemos calcular el valor de a:

$$e=\frac{c}{a} \qquad \Rightarrow \qquad 0.8=\frac{4}{a} \qquad \Rightarrow \qquad a=5$$

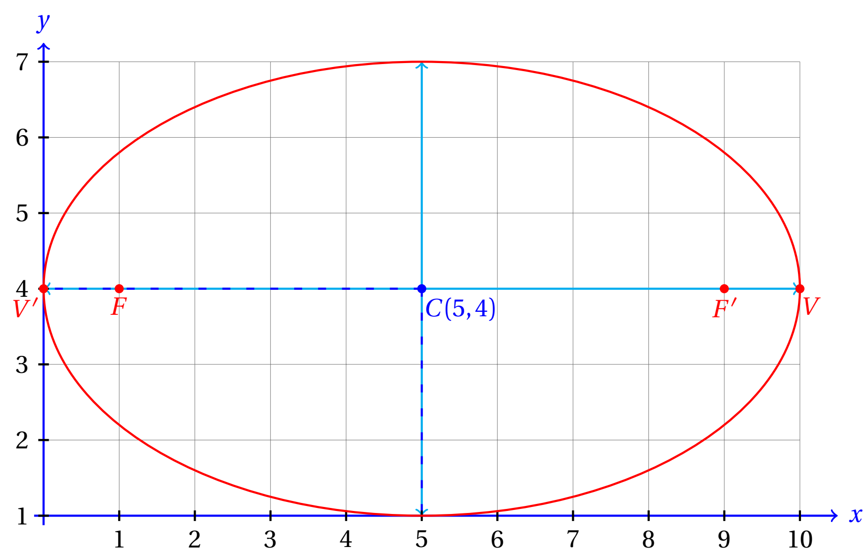
- Y con los valores de a y c podemos calcular el valor de b:

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$$

- Entonces, ya tenemos todos los datos que se requieren para conocer la ecuación y todos los elementos de la elipse:
  - ✓ La elipse es horizontal,
  - ✓ $a = 5$, $b = 3$ y $c = 4$,
  - ✓ $h = 5$ y $k = 4$.
- La ecuación de esta elipse es:

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

- A partir de los valores de h, k, a y c podemos fácilmente calcular las coordenadas de los focos y de los vértices de la elipse.
- Y su gráfica es la siguiente:



Ejemplo 5	Calcula la ecuación de la elipse que tiene los extremos de su eje menor en los puntos $B(5,-5)$ y $B'(-1,-5)$ y uno de sus vértices es el punto $V(6,-5)$.

- A partir de las coordenadas de los extremos del eje menor podemos calcular su longitud.
- Y b es precisamente la mitad de ese valor: $b = 3$.
- El centro de la elipse está en el punto medio de los extremos del eje menor: $C(2,-5)$.
- El valor de a es igual a la distancia desde el centro hasta uno de sus vértices: $a = 4$.
- A partir de los valores de a y b podemos calcular el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$$

- Ahora podemos calcular las coordenadas de los focos y del vértice faltante:

$$V'(h, k-a) = V'(2,-9)$$

$$F(h, k+c) = F(2,-5+\sqrt{7}) \qquad F'(h, k-c) = F'(2,-5-\sqrt{7})$$

- Se te queda como ejercicio graficar esta elipse.
- Observa que esta elipse es vertical.
- eso ocasiona que los coeficientes a y b queden cambiados en su ecuación:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+5)^2}{16}=1$$

5.3 Ecuación general de la elipse

Como en las cónicas anteriores, para calcular la ecuación general de la elipse, a partir de la ecuación en su forma ordinaria, vamos a expresarla en la forma:

$$A\,x^2 + B\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

Si la ecuación corresponde a una elipse, entonces los signos de A y B deben ser iguales.

5.3.1 Conversión de F. ordinaria a F. general

Ejemplo 1

Calcula la ecuación general de la siguiente elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

- Esta ecuación es la que encontramos en el ejemplo que se resolvió en la página 201.
- Ahora solamente vamos a multiplicar ambos lados de la igualdad por 25 y después por 16:

$$\begin{aligned} 16\,x^2 + 25\,y^2 &= 400 \\ 16\,x^2 + 25\,y^2 - 400 &= 0 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación de la elipse, pero en la forma general.

Ejemplo 2

Calcula la ecuación (en su forma general) de la elipse con centro en el origen, y uno de sus focos es el punto $F(2,0)$ y un vértice está en $V(6,0)$.

- Esta ecuación es la que encontramos en la página 201:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$$

- Ahora solamente vamos a transformarla a la forma general:

$$\begin{aligned} 32\,x^2 + 36\,y^2 &= 1152 \\ 32\,x^2 + 36\,y^2 - 1152 &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Calcula la ecuación de la elipse que tiene su centro en el punto $C(-5,2)$, uno de sus focos está en el punto $F(7,2)$ y un vértice en $V(8,2)$.

- Ya calculamos la ecuación en forma ordinaria de esta elipse (pg. 209).

$$\frac{(x+5)^2}{169} + \frac{(y-2)^2}{144} = 1$$

- Ahora solamente la vamos a escribir en la forma general.

- Empezamos multiplicando ambos lados de la igualdad por los denominadores de las fracciones:

$$\begin{aligned} 144(x+5)^2+169(y-2)^2 &= 24\,336 \\ 144(x+5)^2+169(y-2)^2-24\,336 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora desarrollamos los binomios que están elevados al cuadrado:

$$\begin{aligned} 144\left(x^2+10\,x+25\right)+169\left(y^2-2\,y+4\right)-24\,336 &= 0 \\ 144\,x^2+1\,440\,x+3\,600+169\,y^2-338\,y+676-24\,336 &= 0 \\ 144\,x^2+1\,440\,x+169\,y^2-338\,y-22\,220 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Ejemplo 4 Calcula la ecuación de la elipse horizontal que tiene una excentricidad de $e=0.8$, con centro en el punto $C(5,4)$ y cuya distancia del centro al foco es de 4 unidades.

- Ya calculamos la ecuación en forma ordinaria de esta elipse (pg. 211).

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$$

- Ahora la transformamos a la forma general:

$$\begin{aligned} 9(x-5)^2+25(y-4)^2 &= 225 \\ 9(x-5)^2+25(y-4)^2-225 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora desarrollamos los binomios que están elevados al cuadrado:

$$\begin{aligned} 9\left(x^2-10\,x+25\right)+25\left(y^2-8\,y+16\right)-225 &= 0 \\ 9\,x^2-90\,x+225+25\,y^2-200\,y+400-225 &= 0 \\ 9\,x^2-90\,x+25\,y^2-200\,y+400 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Ejemplo 5 Calcula la ecuación de la elipse que tiene los extremos de su eje menor en los puntos $B(5,-5)$ y $B'(-1,-5)$ y uno de sus vértices es el punto $V(6,-5)$.

- La ecuación de esta elipse en forma ordinaria se calculó en la página 212:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+5)^2}{16}=1$$

- Ahora la transformamos a la forma general:

$$\begin{aligned} 16(x-2)^2+9(y+5)^2 &= 144 \\ 16(x-2)^2+9(y+5)^2-144 &= 0 \\ 16\left(x^2-4\,x+4\right)+9\left(y^2+10\,y+25\right)-144 &= 0 \\ 16\,x^2-32\,x+64+9\,y^2+90\,y+225-144 &= 0 \\ 16\,x^2-32\,x+9\,y^2+90\,y+145 &= 0 \end{aligned}$$

- Y listo.

En resumen, para convertir de la forma ordinaria a la forma general, basta con multiplicar ambos lados de la ecuación por cada uno de los denominadores que aparecen en la ecuación, después desarrollar los binomios (en caso de que el centro de la elipse esté fuera del origen) y simplificar.

Recuerda que la ecuación debe quedar igualada a cero.

Como hemos visto con la parábola y la circunferencia, la parte más interesante llega cuando convertimos la ecuación general a la forma ordinaria, que es el siguiente tema que estudiaremos.

Calcula la ecuación de la elipse con centro fuera del origen para cada uno de los siguientes ejercicios a partir de la información dada. Grafica la elipse y calcula también todos sus elementos.	**Ejercicios 5.3.1**

1) Información: vértices: $V(9,-7)$, $V'(-1,-7)$, excentricidad: $e = 3/5$.
   - ✓ Focos: $F(7,-7)$, $F'(1,-7)$
   - ✓ Extremos de eje menor: $B(4,-3)$, $B'(4,-11)$
   - ✓ Centro: $C(4,-7)$
   - ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-4)^2}{25} + \dfrac{(y+7)^2}{16} = 1$
2) Información: focos: $F(10,-7)$, $F'(-6,-7)$, excentricidad: $e = 8/10$.
   - ✓ Vértices: $V(12,-7)$, $V'(-8,-7)$
   - ✓ Extremos de eje menor: $B(2,-1)$, $B'(2,-13)$
   - ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{100} + \dfrac{(y+7)^2}{36} = 1$
3) Información: Long. eje menor: 24, centro: $C(-1,9)$, foco: $F(4,9)$
   - ✓ Vértices: $V(12,9)$, $V'(-14,9)$
   - ✓ Focos: $F(4,9)$, $F'(-6,9)$
   - ✓ Extremos de eje menor: $B(-1,21)$, $B'(-1,-3)$
   - ✓ Excentricidad: $e = 5/13$
   - ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+1)^2}{169} + \dfrac{(y-9)^2}{144} = 1$
4) Información: Long. eje mayor: 34, excentricidad: $e = 15/17$, centro: $C(5,3)$, vertical.
   - ✓ Vértices: $V(5,20)$, $V'(5,-14)$
   - ✓ Focos: $F(5,18)$, $F'(5,-12)$
   - ✓ Extremos de eje menor: $B(13,3)$, $B'(-3,3)$
   - ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{64} + \dfrac{(y-3)^2}{289} = 1$
5) Información: vértice: $V'(-13,-4)$, Long. eje menor: 32, centro: $C(7,-4)$.
   - ✓ Vértices: $V(27,-4)$, $V'(-13,-4)$
   - ✓ Focos: $F(19,-4)$, $F'(-5,-4)$
   - ✓ Extremos de eje menor: $B(7,12)$, $B'(7,-20)$

- ✓ Excentricidad: $e = 12/20$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-7)^2}{400} + \dfrac{(y+4)^2}{256} = 1$

6) Información: vértices: $V(-8,17)$, $V'(-8,-33)$, foco: $F'(-8,-15)$

- ✓ Extremos de eje menor: $B(16,-8)$, $B'(-32,-8)$
- ✓ Excentricidad: $e = 7/25$
- ✓ Centro: $C(-8,-8)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+8)^2}{576} + \dfrac{(y+8)^2}{625} = 1$

7) Información: extremos de eje menor: $B(7,11)$, $B'(7,-9)$, vértice: $V(33,1)$.

- ✓ Vértices: $V(33,1)$, $V'(-19,1)$
- ✓ Focos: $F(31,1)$, $F'(-17,1)$
- ✓ Excentricidad: $e = 24/26$
- ✓ Centro: $C(7,1)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-7)^2}{676} + \dfrac{(y-1)^2}{100} = 1$

8) Información: focos: $F(28,-3)$, $F'(-14,-3)$, excentricidad: $e = 21/29$

- ✓ Vértices: $V(36,-3)$, $V'(-22,-3)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(7,17)$, $B'(7,-23)$
- ✓ Centro: $C(7,-3)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-7)^2}{841} + \dfrac{(y+3)^2}{400} = 1$

9) Información: centro: $C(-1,-6)$, vértice: $V(33,-6)$ y foco: $F(15,-6)$.

- ✓ Vértices: $V(33,-6)$, $V'(-35,-6)$
- ✓ Focos: $F(15,-6)$, $F'(-17,-6)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(-1,24)$, $B'(-1,-36)$
- ✓ Excentricidad: $e = 16/34$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+1)^2}{1156} + \dfrac{(y+6)^2}{900} = 1$

10) Información: excentricidad: $e = 9/41$, centro: $C(2,-4)$, Vértice: $V(43,-4)$.

- ✓ Vértices: $V(43,-4)$, $V'(-39,-4)$
- ✓ Focos: $F(11,-4)$, $F'(-7,-4)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(2,36)$, $B'(2,-44)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{1681} + \dfrac{(y+4)^2}{1600} = 1$

11) Información: Long. eje mayor: 74, extremos del eje menor: $B(2,16)$, $B'(2,-8)$.

- ✓ Vértices: $V(39,4)$, $V'(-35,4)$
- ✓ Focos: $F(37,4)$, $F'(-33,4)$
- ✓ Excentricidad: $e = 35/37$
- ✓ Centro: $C(2,4)$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{1369} + \dfrac{(y-4)^2}{144} = 1$

12) Información: centro: $C(7,3)$, vértice: $V(7,43)$ y foco: $F'(7,-29)$.

- ✓ Vértices: $V(7,43)$, $V'(7,-37)$
- ✓ Focos: $F(7,35)$, $F'(7,-29)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(31,3)$, $B'(-17,3)$
- ✓ Excentricidad: $e = 32/40$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-7)^2}{576} + \dfrac{(y-3)^2}{1600} = 1$

13) Información: Dist. entre focos: 54, excentricidad: $e = 27/45$, centro: $C(-4,-1)$, vertical.

- ✓ Vértices: $V(-4,44)$, $V'(-4,-46)$
- ✓ Focos: $F(-4,26)$, $F'(-4,-28)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(32,-1)$, $B'(-40,-1)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+4)^2}{1296} + \dfrac{(y+1)^2}{2025} = 1$

14) Información: $a = 52$, centro: $C(-10,2)$, excentricidad: $e = 20/52$, horizontal.

- ✓ Vértices: $V(42,2)$, $V'(-62,2)$
- ✓ Focos: $F(10,2)$, $F'(-30,2)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(-10,50)$, $B'(-10,-46)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+10)^2}{2704} + \dfrac{(y-2)^2}{2304} = 1$

15) Información: vértices: $V(4,56)$, $V'(4,-66)$, Extremo de eje menor: $B(64,-5)$.

- ✓ Focos: $F(4,6)$, $F'(4,-16)$
- ✓ Excentricidad: $e = 11/61$
- ✓ Centro: $C(4,-5)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-4)^2}{3600} + \dfrac{(y+5)^2}{3721} = 1$

16) Información: vertical, excentricidad: $e = 48/50$, focos: $F(10,42)$, $F'(10,-54)$.

- ✓ Vértices: $V(10,44)$, $V'(10,-56)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(24,-6)$, $B'(-4,-6)$
- ✓ Centro: $C(10,-6)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-10)^2}{196} + \dfrac{(y+6)^2}{2500} = 1$

17) Información: extremos de eje menor: $B(38,10)$, $B'(-18,10)$, vértice: $V(10,63)$.

- ✓ Focos: $F(10,55)$, $F'(10,-35)$
- ✓ Excentricidad: $e = 45/53$
- ✓ Centro: $C(10,10)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-10)^2}{784} + \dfrac{(y-10)^2}{2809} = 1$

18) Información: focos: $F(38,-6)$, $F'(-42,-6)$, extremo del eje menor: $B(-2,36)$.

✓ Vértices: $V(56,-6)$, $V'(-60,-6)$

✓ Excentricidad: $e = 40/58$

✓ Centro: $C(-2,-6)$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+2)^2}{3364} + \dfrac{(y+6)^2}{1764} = 1$

19) Información: vértices: $V(-7,69)$, $V'(-7,-61)$, excentricidad: $e = 33/65$.

✓ Focos: $F(-7,37)$, $F'(-7,-29)$

✓ Extremos de eje menor: $B(49,4)$, $B'(-63,4)$

✓ Centro: $C(-7,4)$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+7)^2}{3136} + \dfrac{(y-4)^2}{4225} = 1$

20) Información: focos: $F(-7,22)$, $F'(-7,-26)$, excentricidad: $e = 24/74$.

✓ Vértices: $V(-7,72)$, $V'(-7,-76)$

✓ Extremos de eje menor: $B(63,-2)$, $B'(-77,-2)$

✓ Centro: $C(-7,-2)$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+7)^2}{4900} + \dfrac{(y+2)^2}{5476} = 1$

5.3.2 Conversión de la forma general a la forma ordinaria

Como en los casos de las otras cónicas, para convertir una ecuación de la forma general a la forma ordinaria, utilizaremos el método de factorización conocido como *completar cuadrados*.

Ejemplo 1

Convierte la ecuación general de la elipse:

$$x^2 + 4\,y^2 - 4 = 0$$

a la forma ordinaria.

- En este caso no se requiere de completar cuadrados.
- Basta con dividir ambos lados de la igualdad entre 4:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

- Y esta es la ecuación de la elipse, pero en forma ordinaria.

Ejemplo 2

Convierte la ecuación general de la elipse:

$$4\,x^2 + 16\,y^2 - 8\,x + 32\,y - 44 = 0$$

a la forma ordinaria.

- Ahora si vamos a aplicar el método de completar cuadrados.
- Empezamos ordenando los términos: primero los que incluyen a x y después los que incluyen a y:
$$\left[4\,x^2-8\,x\right]+\left[16\,y^2+32\,y\right]=44$$
- Factorizamos el coeficiente del término principal de cada binomio:
$$4\left[x^2-2\,x\right]+16\left[y^2+2\,y\right]=44$$
- Ahora vamos a sumar en ambos lados de la igualdad el término independiente que convierte a cada binomio en un trinomio cuadrado perfecto:
$$\begin{aligned} 4\left[x^2-2\,x+1\right]+16\left[y^2+2\,y+1\right] &= 44+4+16 \\ 4(x-1)^2+16(y+1)^2 &= 64 \end{aligned}$$
- Al dividir ambos lados de la igualdad entre 64 obtenemos la ecuación en la forma ordinaria:
$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$
- Y hemos terminado.
- A partir de esta ecuación podemos muy fácilmente calcular todos los elementos de la elipse.

Calcula todos los elementos de la elipse cuya ecuación es:
$$9\,x^2+25\,y^2+18\,x-100\,y-116=0$$
y grafícala.

Ejemplo 3

- Empezamos convirtiendo la ecuación de la elipse en su forma ordinaria:
$$\begin{aligned} \left[9\,x^2+18\,x\right]+\left[25\,y^2-100\,y\right] &= 116 \\ 9\left[x^2+2\,x\right]+25\left[y^2-4\,y\right] &= 116 \\ 9\left[x^2+2\,x+1\right]+25\left[y^2-4\,y+4\right] &= 116+9+100 \\ 9(x+1)^2+25(y-2)^2 &= 225 \end{aligned}$$
- Ahora solamente dividimos ambos lados de la igualdad entre 225 y obtenemos la ecuación de la elipse en su forma ordinaria:
$$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$
- A partir de esta ecuación es muy fácil darse cuenta que:
$$\begin{array}{lll} a=5 & b=3 & c=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-9}=4 \\ h=-1 & k=2 & \end{array}$$
- Además, la elipse es horizontal, porque a está en el denominador de la fracción que contiene a x.

- Conociendo estos valores podemos enlistar todos los elementos de la elipse:

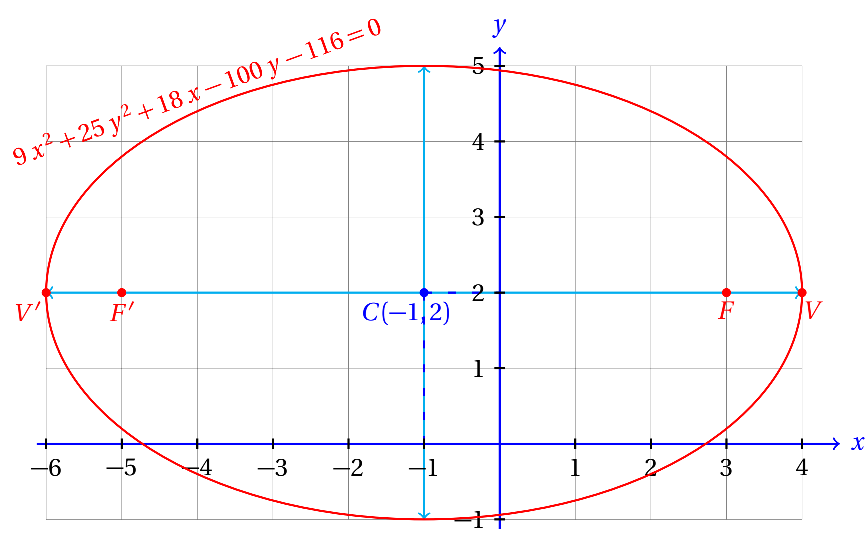
$$C(-1,2)$$
$$V(4,2) \qquad V'(-6,2) \qquad F(3,2) \qquad F'(-5,2)$$

Longitud del eje mayor: 10 unidades

Longitud del eje menor: 6 unidades

$$e = \frac{4}{5} = 0.8$$

- Y la gráfica de esta elipse es la siguiente:



- Observa que es mucho más fácil de graficar la elipse cuando conocemos su ecuación en la forma ordinaria.
- Igualmente, es mucho más sencillo calcular todos sus elementos a partir de la forma ordinaria.
- Por eso es muy importante saber transformar la ecuación de la forma general a la forma ordinaria.

Ejemplo 4

Calcula todos los elementos de la elipse cuya ecuación es:

$$25\,x^2 + 16\,y^2 - 250\,x - 32\,y + 241 = 0$$

y grafícala.

- Empezamos convirtiendo la ecuación a la forma ordinaria:

$$\begin{aligned}
25\,x^2 + 16\,y^2 - 250\,x - 32\,y &= -241\\
\left[25\,x^2 - 250\,x\right] + \left[16\,y^2 - 32\,y\right] &= -241\\
25\left[x^2 - 10\,x\right] + 16\left[y^2 - 2\,y\right] &= -241\\
25\left[x^2 - 10\,x + 25\right] + 16\left[y^2 - 2\,y + 1\right] &= -241 + 625 + 16\\
25\,(x-5)^2 + 16\,(y-1)^2 &= 400
\end{aligned}$$

- Dividiendo ambos lados de la ecuación entre 400 obtenemos:

$$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

- De esta ecuación en la forma ordinaria deducimos rápidamente que:

$$\begin{array}{lll} a=5 & b=4 & c=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-16}=3 \\ h=5 & k=1 & \end{array}$$

- Observa que la elipse es vertical.
- Y a partir de estos valores, podemos calcular los elementos de la elipse:

$$\begin{array}{rl} C(5,1) & \\ V(5,6)\quad V'(5,-4) & F(5,4)\quad F'(5,-2) \\ \text{Longitud del eje mayor:} & \text{10 unidades} \\ \text{Longitud del eje menor:} & \text{8 unidades} \\ e=\frac{3}{5}=0.6 & \end{array}$$

- Se te queda como ejercicio graficar la elipse.

En todos los ejemplos que hemos resuelto en esta sección, las coordenadas de los elementos de la elipse han sido valores enteros.

Como es obvio suponer, eso no siempre ocurrirá así.

Algunas veces encontraremos coordenadas que incluyen raíces, aún cuando la mayoría tenga valores enteros. Esto se debe a la relación que existe entre a, b y c:

$$a^2=b^2+c^2$$

Pues generalmente conoceremos dos de estos tres valores y el otro tendrá que ser calculado a partir de la relación anterior.

Ejemplo 5

Calcula todos los elementos de la elipse cuya ecuación es:

$$16\,x^2+4\,y^2+32\,x-8\,y-44=0$$

y grafícala.

- Empezamos completando cuadrados:

$$\begin{array}{rcl} 16\,x^2+32\,x+4\,y^2-8\,y & = & 44 \\ 16\left[x^2+2\,x\right]+4\left[y^2-2\,y\right] & = & 44 \\ 16\left[x^2+2\,x+1\right]+4\left[y^2-2\,y+1\right] & = & 44+16+4 \\ 16(x+1)^2+4(y-1)^2 & = & 64 \\ \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16} & = & 1 \end{array}$$

- De nuevo, esta elipse es vertical.

- A partir de la ecuación se deducen:

$$\begin{array}{lll} a=4 & b=2 & c=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \\ h=-1 & k=1 & \end{array}$$

- Y sus elementos son:

$$\begin{array}{cccc} & C(-1,1) & & \\ V(-1,5) & V'(-1,-3) & F(-1,1+2\sqrt{3}) & F'(-1,1-2\sqrt{3}) \\ \multicolumn{2}{r}{\text{Longitud del eje mayor:}} & \text{8 unidades} & \\ \multicolumn{2}{r}{\text{Longitud del eje menor:}} & \text{4 unidades} & \\ \multicolumn{2}{r}{e=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}} & & \end{array}$$

- Se te queda como ejercicio graficar esta elipse.

Ejercicios 5.3.2 Convierte las siguientes ecuaciones de elipses en forma general a la forma ordinaria. Calcula además todos sus elementos.

1) $16\,x^2+25\,y^2-160\,x+150\,y+225=0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{25}+\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$

✓ Centro: $C(5,-3)$

✓ Vértices: $V(10,-3)$, $V'(0,-3)$

✓ Focos: $F(8,-3)$, $F'(2,-3)$

✓ Extremos: $B(5,1)$, $B'(5,-7)$

✓ Excentricidad: $e=3/5$

2) $25\,x^2+16\,y^2+50\,x-128\,y-119=0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y-4)^2}{25}=1$

✓ Centro: $C(-1,4)$

✓ Vértices: $V(-1,9)$, $V'(-1,-1)$

✓ Focos: $F(-1,7)$, $F'(-1,1)$

✓ Extremos: $B(3,4)$, $B'(-5,4)$

✓ Excentricidad: $e=3/5$

3) $144\,x^2+169\,y^2+1440\,x+338\,y-20567=0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+5)^2}{169}+\dfrac{(y+1)^2}{144}=1$

✓ Centro: $C(-5,-1)$

✓ Vértices: $V(8,-1)$, $V'(-18,-1)$

✓ Focos: $F(0,-1)$, $F'(-10,-1)$

✓ Extremos: $B(-5,11)$, $B'(-5,-13)$

- ✓ Excentricidad: $e = 5/13$

4) $100\,x^2 + 36\,y^2 - 1000\,x - 144\,y - 956 = 0$

- ✓ Ecuación: $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{100} = 1$
- ✓ Centro: $C(5,2)$
- ✓ Vértices: $V(5,12)$, $V'(5,-8)$
- ✓ Focos: $F(5,10)$, $F'(5,-6)$
- ✓ Extremos: $B(11,2)$, $B'(-1,2)$
- ✓ Excentricidad: $e = 8/10$

5) $144\,x^2 + 169\,y^2 + 576\,x + 338\,y - 23591 = 0$

- ✓ Ecuación: $\frac{(x+2)^2}{169} + \frac{(y+1)^2}{144} = 1$
- ✓ Centro: $C(-2,-1)$
- ✓ Vértices: $V(11,-1)$, $V'(-15,-1)$
- ✓ Focos: $F(3,-1)$, $F'(-7,-1)$
- ✓ Extremos: $B(-2,11)$, $B'(-2,-13)$
- ✓ Excentricidad: $e = 5/13$

6) $576\,x^2 + 625\,y^2 - 5760\,x - 6250\,y - 329975 = 0$

- ✓ Ecuación: $\frac{(x-5)^2}{625} + \frac{(y-5)^2}{576} = 1$
- ✓ Centro: $C(5,5)$
- ✓ Vértices: $V(30,5)$, $V'(-20,5)$
- ✓ Focos: $F(12,5)$, $F'(-2,5)$
- ✓ Extremos: $B(5,29)$, $B'(5,-19)$
- ✓ Excentricidad: $e = 7/25$

7) $289\,x^2 + 64\,y^2 + 578\,x - 512\,y - 17183 = 0$

- ✓ Ecuación: $\frac{(x+1)^2}{64} + \frac{(y-4)^2}{289} = 1$
- ✓ Centro: $C(-1,4)$
- ✓ Vértices: $V(-1,21)$, $V'(-1,-13)$
- ✓ Focos: $F(-1,19)$, $F'(-1,-11)$
- ✓ Extremos: $B(7,4)$, $B'(-9,4)$
- ✓ Excentricidad: $e = 15/17$

8) $400\,x^2 + 256\,y^2 + 800\,x + 2560\,y - 95600 = 0$

- ✓ Ecuación: $\frac{(x+1)^2}{256} + \frac{(y+5)^2}{400} = 1$
- ✓ Centro: $C(-1,-5)$
- ✓ Vértices: $V(-1,15)$, $V'(-1,-25)$
- ✓ Focos: $F(-1,7)$, $F'(-1,-17)$
- ✓ Extremos: $B(15,-5)$, $B'(-17,-5)$

✓ Excentricidad: $e = 12/20$

9) $625\,x^2 + 576\,y^2 - 5000\,x + 3456\,y - 344816 = 0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-4)^2}{576} + \dfrac{(y+3)^2}{625} = 1$

✓ Centro: $C(4,-3)$

✓ Vértices: $V(4,22)$, $V'(4,-28)$

✓ Focos: $F(4,4)$, $F'(4,-10)$

✓ Extremos: $B(28,-3)$, $B'(-20,-3)$

✓ Excentricidad: $e = 7/25$

10) $1600\,x^2 + 1681\,y^2 + 9600\,x - 3362\,y - 2673519 = 0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+3)^2}{1681} + \dfrac{(y-1)^2}{1600} = 1$

✓ Centro: $C(-3,1)$

✓ Vértices: $V(38,1)$, $V'(-44,1)$

✓ Focos: $F(6,1)$, $F'(-12,1)$

✓ Extremos: $B(-3,41)$, $B'(-3,-39)$

✓ Excentricidad: $e = 9/41$

11) $676\,x^2 + 100\,y^2 - 1352\,x - 1000\,y - 64424 = 0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-1)^2}{100} + \dfrac{(y-5)^2}{676} = 1$

✓ Centro: $C(1,5)$

✓ Vértices: $V(1,31)$, $V'(1,-21)$

✓ Focos: $F(1,29)$, $F'(1,-19)$

✓ Extremos: $B(11,5)$, $B'(-9,5)$

✓ Excentricidad: $e = 24/26$

12) $841\,x^2 + 400\,y^2 - 8410\,x + 3200\,y - 308975 = 0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{400} + \dfrac{(y+4)^2}{841} = 1$

✓ Centro: $C(5,-4)$

✓ Vértices: $V(5,25)$, $V'(5,-33)$

✓ Focos: $F(5,17)$, $F'(5,-25)$

✓ Extremos: $B(25,-4)$, $B'(-15,-4)$

✓ Excentricidad: $e = 21/29$

13) $900\,x^2 + 1156\,y^2 + 3600\,x + 4624\,y - 1032176 = 0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+2)^2}{1156} + \dfrac{(y+2)^2}{900} = 1$

✓ Centro: $C(-2,-2)$

✓ Vértices: $V(32,-2)$, $V'(-36,-2)$

✓ Focos: $F(14,-2)$, $F'(-18,-2)$

✓ Extremos: $B(-2,28)$, $B'(-2,-32)$

✓ Excentricidad: $e = 16/34$

14) $1600\,x^2 + 1681\,y^2 - 16000\,x + 6724\,y - 2642876 = 0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{1681} + \dfrac{(y+2)^2}{1600} = 1$

✓ Centro: $C(5, -2)$

✓ Vértices: $V(46, -2)$, $V'(-36, -2)$

✓ Focos: $F(14, -2)$, $F'(-4, -2)$

✓ Extremos: $B(5, 38)$, $B'(5, -42)$

✓ Excentricidad: $e = 9/41$

15) $3721\,x^2 + 3600\,y^2 + 37210\,x + 28800\,y - 13244975 = 0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+5)^2}{3600} + \dfrac{(y+4)^2}{3721} = 1$

✓ Centro: $C(-5, -4)$

✓ Vértices: $V(-5, 57)$, $V'(-5, -65)$

✓ Focos: $F(-5, 7)$, $F'(-5, -15)$

✓ Extremos: $B(55, -4)$, $B'(-65, -4)$

✓ Excentricidad: $e = 11/61$

16) $1369\,x^2 + 144\,y^2 - 10952\,x + 864\,y - 173936 = 0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-4)^2}{144} + \dfrac{(y+3)^2}{1369} = 1$

✓ Centro: $C(4, -3)$

✓ Vértices: $V(4, 34)$, $V'(4, -40)$

✓ Focos: $F(4, 32)$, $F'(4, -38)$

✓ Extremos: $B(16, -3)$, $B'(-8, -3)$

✓ Excentricidad: $e = 35/37$

17) $576\,x^2 + 1600\,y^2 + 3456\,x + 12800\,y - 890816 = 0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+3)^2}{1600} + \dfrac{(y+4)^2}{576} = 1$

✓ Centro: $C(-3, -4)$

✓ Vértices: $V(37, -4)$, $V'(-43, -4)$

✓ Focos: $F(29, -4)$, $F'(-35, -4)$

✓ Extremos: $B(-3, 20)$, $B'(-3, -28)$

✓ Excentricidad: $e = 32/40$

18) $1296\,x^2 + 2025\,y^2 + 7776\,x + 20250\,y - 2562111 = 0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+3)^2}{2025} + \dfrac{(y+5)^2}{1296} = 1$

✓ Centro: $C(-3, -5)$

✓ Vértices: $V(42, -5)$, $V'(-48, -5)$

✓ Focos: $F(24, -5)$, $F'(-30, -5)$

✓ Extremos: $B(-3, 31)$, $B'(-3, -41)$

✓ Excentricidad: $e = 27/45$

Formulario

Unidad Cinco

Ec. Elipse F. ordinaria: Horizontal con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ec. Elipse F. ordinaria: Vertical con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ec. Elipse F. ordinaria: Horizontal con centro en el punto $C(h,k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ec. Elipse F. ordinaria: Vertical con centro en el punto $C(h,k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Otras fórmulas: Elipse con centro en el punto $C(h,k)$:

- ✓ Longitud del eje mayor: $2\,a$.
- ✓ Longitud del eje menor: $2\,b$.
- ✓ Distancia entre los focos: $2\,c$.
- ✓ Relación entre a, b y c: $a^2 = b^2 + c^2$.
- ✓ Excentricidad: $e = c/a < 1$

Elipse	Vertical	Horizontal
Lado Recto	$2\,b^2/a$	$2\,b^2/a$
Focos	$F(h, k \pm c)$	$F(h \pm c, k)$
Vértices	$V(h, k \pm a)$	$F(h \pm a, k)$
Ec. General	$A\,x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$	
A	a^2	b^2
B	b^2	a^2
D	$-2\,a^2 h$	$-2\,b^2 h$
E	$-2\,b^2 k$	$-2\,a^2 k$
F	$a^2 h^2 + b^2 k^2 - a^2 b^2$	$b^2 h^2 + a^2 k^2 - a^2 b^2$

Capítulo 6

La hipérbola

Por aprender...

Por qué es importante...

En la naturaleza encuentras Hipérbolas en

6.1 Caracterización geométrica

Ahora vamos a centrar caracterizar geométricamente a la hipérbola.

La hipérbola es la única de las cónicas que requiere de las dos ramas del cono para poderla obtener en un corte.

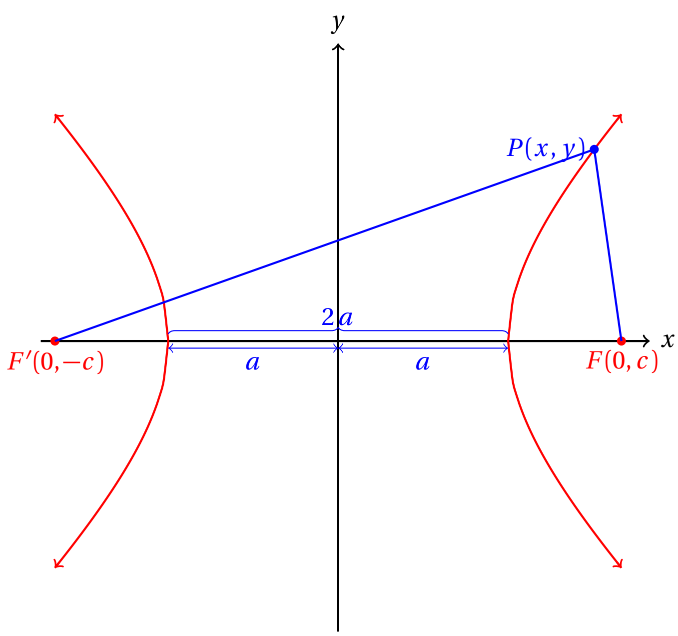
Las demás cónicas se obtienen con una sola de sus ramas.

6.1.1 La hipérbola como lugar geométrico

En contra de la definición de elipse, la hipérbola se define como sigue.

Hipérbola *Es el conjunto de todos los puntos P en el plano, tal que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos, es igual a una constante $2a$.*	**Definición 1**

Algebraicamente, tenemos: $\left||\overline{F'P}| - |\overline{FP}|\right| = 2a$. Y geométricamente, la situación es:



Los puntos $V(a,0)$ y $V'(-a,0)$ son los vértices de la hiperbola.

De la figura se hace evidente que la distancia entre los focos es mayor que la distancia entre los vértices.

Dado que $c > a$, ahora esperamos que $c^2 = a^2 + b^2$.

Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal forma que la diferencia de su distancia a los puntos $F(0, c)$ y $F'(0,-c)$ siempre es constante. Es decir: $2a = \left||\overline{F'P}| - |\overline{FP}|\right|$. Encuentra la ecuación que representa a este lugar geométrico.	**Ejemplo 1**

- Definimos $P(x, y)$ como un punto que está sobre la hipérbola.

- La condición algenraica que se mencionó antes puede reescribirse como:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2\,a$$

- Si el punto satisface la ecuación anterior, entonces está sobre la hipérbola.
- Elevando alcuadrado ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$(x+c)^2+y^2=4\,a^2+4\,a\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

  que puede reducirse a:

$$c\,x-a^2=a\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

- Volvemos a elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad para obtener:

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$

- Haciendo $b^2=c^2-a^2$, obtenemos:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

- Lo cual puede simplificarse a:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

- Esta es la ecuación de la hipérbola en su forma ordinaria.

En este caso la hipérbola es horizontal porque los focos están sobre una recta horizontal.

Silos focos estuvieran sobre una recta vertical, diremos que la hipérbola es vertical y entonces obtendremos la ecuación:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Observa que solamente ahora el signo negativo está en el primer término de la ecuación y que, contrario a lo que pasaba con la elipse, los coeficientes a^2 y b^2, no cambian de lugar cuando la cónica cambia de horizontal a verticals.

6.1.2 Elementos asociados a la hipérbola

Si de la ecuación de la hipérbola despejamos y obtenemos:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Cuando los valores de x crecen mucho, el valor de a^2 se va haciendo cada vez más insignificante, de manera que la hipérbola se acerca mucho a la recta:

$$y=\pm\frac{b}{a}\,x$$

Observa que cuando x crece mucho, $\sqrt{x^2-a^2}$ se aproxima mucho a x, porque el valor de a^2 pierde importancia ante el tamaño que tiene x.

Entonces, las rectas: $y=(b/a)\,x$ y $y=-(b/a)\,x$ son las asíntotas de la hipérbola.

Otros elementos asociados a la hipérbola son:

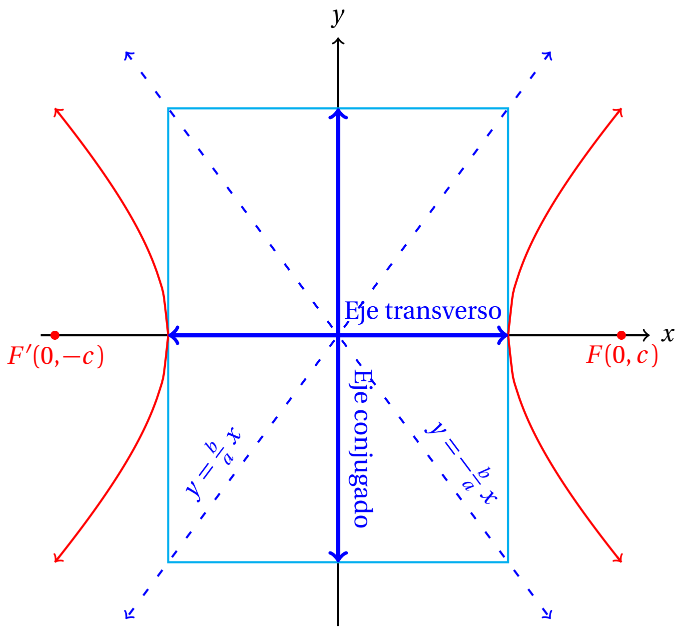
Centro de la hipérbola: es el punto medio de los focos.

Eje transverso: Es el segmento de recta cuyos extremos son los vértices de la hipérbola.

Eje conjugado: Es el segmento de recta que es perpendicular al eje transverso y pasa por el el centro de la hipérbola y su longitud es $2\,b$.

Relación entre coeficientes: $a^2 + b^2 = c^2$.

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$.



Observa que como $c > a$, la excentricidad de una hipérbola siempre es mayor a la unidad.

6.2 Ecuación ordinaria de la hipérbola

Empezamos estudiando la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, que es la ecuación que se deduce anteriormente.

Ahora vamos a utilizarla para calcular ecuaciones de hipérbolas para las cuales se conocen ciertos datos.

6.2.1 Hipérbola con centro en el origen

Como en las cónicas que ya hemos estudiado, el problema de calcular la ecuación de la hipérbola se centra en el cálculo de los coeficientes a, b y c que caracterizan de manera única a la hipérbola.

Siempre debes observar si la hipérbola es horizontal o vertical. Recuerda que las coordenadas de cada elemento de la misma cambian.

Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, uno de sus focos está en el punto $F(5,0)$ y la longitud de su eje transverso es de 6 unidades. **Ejemplo 1**

- A partir de la definición de eje transverso, podemos deducir que, para esta hipérbola, $a = 3$.

- También, dado que el foco está en $F(c,0)$, la hipérbola es horizontal y $c = 5$.

- Usando la relación: $c^2 = a^2 + b^2$, podemos fácilmente calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

- Y a partir de estos valores podemos calcular los demás elementos asociados a la hipérbola:

  Vértices: $V(3,0)$, $V'(-3,0)$.

  Focos: $F(5,0)$, $F'(-5,0)$.

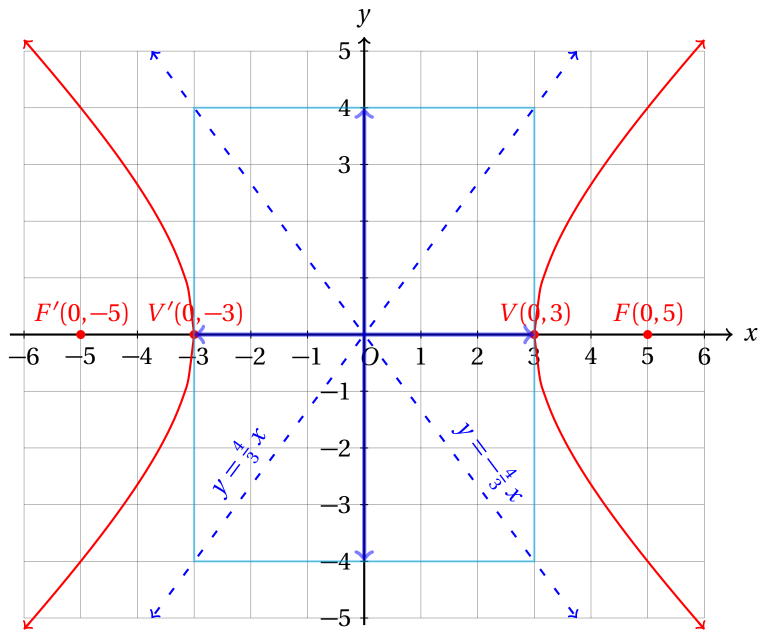
  Long. eje conjugado: $2b = 8$.

  Asíntotas: $y = -\frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$.

  Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.

  Ecuación: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

- La gráfica de esta hipérbola es la siguiente:



Ejemplo 2	Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen con excentricidad $e = 2.6$ y uno de sus vértices está en el punto $V(0,5)$.

- A partir de la coordenada del vértice sabemos que la hipérbola es vertical y que $a = 5$.
- Usando este valor de a y sabiendo que $e = c/a$, podemos calcular el valor de c:

$$2.6 = \frac{c}{5} \qquad \Rightarrow \qquad c = (5)(2.6) = 13$$

- Y a partir de estos valores de a y c podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

- Y ahora podemos enlistar todos los elementos de esta hipérbola:

Vértices: $V(0,5)$, $V'(0,-5)$.

Focos: $F(0,12)$, $F'(0,-12)$.

Long. eje transverso: 26

Long. eje conjugado: 24

Asíntotas: $y = \dfrac{a}{b}\,x = \dfrac{5}{12}\,x$, $\quad y = -\dfrac{a}{b}\,x = -\dfrac{5}{12}\,x$.

Ecuación: $-\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{144} = 1$.

- **Ejercicio:** elaborar un bosquejo de la gráfica de esta hipérbola.

Ejemplo 3	Calcula la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y vértice en el punto $V(4,0)$ y foco en $F(5,0)$.

- Si graficas los puntos dados en el texto del problema te darás cuenta que se trata de una hipérbola horizontal.

- También, de la información dada, tenemos: $a = 4$ y $c = 5$.
- A partir de estos datos podemos calcular b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

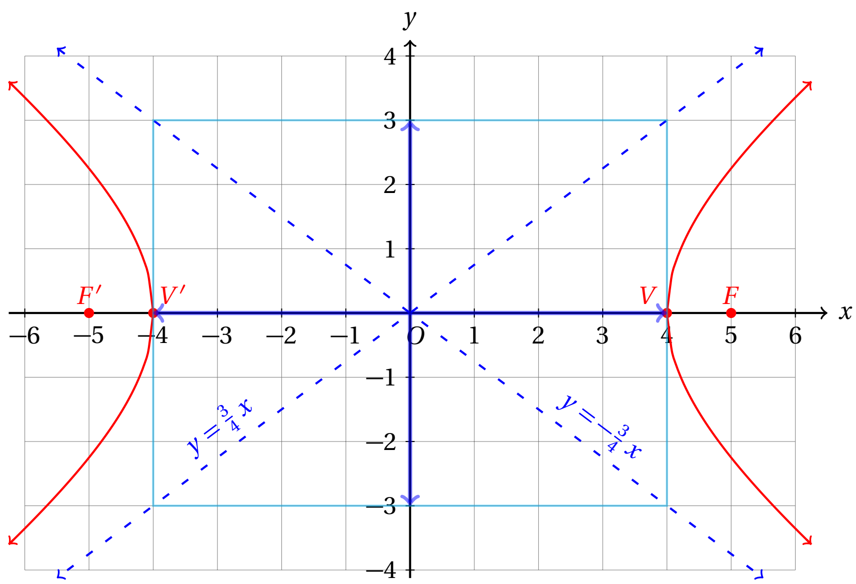
- Ahora podemos enlistar todos los elementos de la hipérbola:

Vértices: $V(0,4)$, $V'(0,-4)$.
Focos: $F(0,5)$, $F'(0,-5)$.
Long. eje transverso: 8
Long. eje conjugado: 6

Asíntotas: $y = \frac{3}{4}\,x$, $y = -\frac{3}{4}\,x$.

Ecuación: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- La gráfica de esta hipérbola es la siguiente:



Para cada uno de los siguientes ejemplos se te quedará como ejercicio graficar la hipérbola de cada problema.

Se sugiere que leas eltexto del problema y tú empieces a graficar los datos del problema en una hoja de tu cuaderno y trates de calcular los parámetros a, b y c que caracterizan a la cónica.

Ejemplo 4

Calcula la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en los puntos $F(10,0)$ y $F'(-10,0)$ y tiene uno de sus vértices en el punto $V(6,0)$.

- A partir de los datos dados en el texto del problema podemos calcular c:

$$2\,c = \text{Distancia entre los focos} \qquad \Rightarrow \qquad c = 10$$

- Y dado que el centro de la elipse está en el origen, y $V(6,0)$, se sigue que $a = 6$.
- A partir de estos valores podemos calcular b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

- Ahora que conocemos los tres valores de los parámetros, podemos calcular todos los elementos de la hipérbola:

Vértices: $V(6,0)$, $V'(-6,0)$.
Focos: $F(10,0)$, $F'(-10,0)$.
Long. eje transverso: 12
Long. eje conjugado: 16

Asíntotas: $y = \frac{4}{5}\,x$, $y = -\frac{4}{5}\,x$.

Ecuación: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Ejemplo 5 Calcula la ecuación de la hipérbola con centro en el origen que tiene uno de sus focos en el punto $F(0,3)$ y su excentricidad es $e = 1.5$

- Sabiendo que el centro de la hipérbola y que uno de sus focos es $F(0,3)$ notamos que se trata de una hipérbola vertical y que $c = 3$.
- Por otra parte,
$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{a} = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad a = 2.$$
- Entonces,
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$
- Y los elementos de la hipérbola son:

Vértices: $V(0,2)$, $V'(0,-2)$.
Focos: $F(0,3)$, $F'(0,-3)$.
Long. eje transverso: 4
Long. eje conjugado: $2\sqrt{5}$

Asíntotas: $y = \frac{\sqrt{5}}{2}\,x$, $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}\,x$.

Ecuación: $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$.

6.2.2 Hipérbola con centro fuera del origen

Ahora vamos a calcular la ecuación ordinaria de la hipérbola, pero con el centro en el punto $C(h,k)$.

Esto ocasiona un cambio en la forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola horizontal a través de una traslación como:
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
y para el caso de la hipérbola vertical como:
$$-\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

La solución de los problemas de este tipo también se reducen a calcular los parámetros a, b y c de la hipérbola, pero hay que tener cuidado con el cálculo de los elementos de la hipérbola.

Recuerda que cuando la hipérbola las fórmulas para el cálculo de cada elemento de la misma cambia cuando es horizontal a cuando es vertical.

Ejemplo 1 Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el punto $C(2,2)$, un vértice en el punto $V(17,2)$ y un foco en $F'(-15,2)$.

- Para empezar, la distancia desde el centro de la hipérbola hasta uno de sus focos es c:
$$c = |-15-2| = 17$$

- También sabemos que la distancia desde el centro de la hipérbola hasta un vértice es a:

$$a = |17-2| = 15$$

- A partir de esta información podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289-225} = \sqrt{64} = 8$$

- Y a partir de estos parámetros fácilmente calculamos todos los elementos de la hipérbola.

- Empezamos calculando el otro foco.

- Dado que del foco al centro hay 17 unidades, y el otro foco está a la derecha del centro, las coordenadas del foco faltante son: $F(19,2)$.

- De manera semejante, para calcular las coordenadas del otro vértice, observa que éste se encuentra a la izquierda del centro de la hipérbola, y que la distancia del centro de la hipérbola a cada vértice es 15 unidades.

- Entonces, $V'(-13,2)$.

- Los extremos del eje conjugado están a 8 unidades, uno arriba y el otro abajo del centro de la hipérbola:

$$B(2,10) \qquad \text{y} \qquad B'(2,-6)$$

- La lista de todos los elementos de esta hipérbola se enlistan enseguida:

Centro: $C(2,2)$

Vértices: $V(17,2)$, $V'(-13,2)$

Focos: $F(19,2)$, $F'(-15,2)$

Long. Eje Transverso: 30

Long. Eje Conjugado: 16

Excentricidad: $e = 17/15$

Ecuación: $\dfrac{(x+2)^2}{225} - \dfrac{(y+2)^2}{64} = 1$

- Se te queda como ejercicio graficar esta hipérbola.

Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola que tiene sus vértices en los puntos $V(1,4)$ y $V'(-5,4)$ y la longitud de su eje conjugado es igual a 8 unidades. **Ejemplo 2**

- Por simetría, el punto medio del eje transverso es el centro de la hipérbola.

- Los extremos del eje transverso son los vértices.

- Entonces, las coordenadas $C(x_C, y_C)$ del centro de la hipérbola son:

$$x_C = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad\qquad y_C = \frac{4+4}{2} = 4$$

- Ahora que sabemos que el centro es el punto $C(-2,4)$, podemos calcular el valor de a.

- Que es la distancia desde el centro hasta cualquiera de los vértices:

$$a = |1-(-2)| = 3$$

- Y usando la longitud del eje conjugado calculamos el valor del parámetro b:

$$2\,b = 8 \qquad \Rightarrow \qquad b = 4$$

- Usando los valores de a y b podemos calcular el de c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

- Y a partir de esta información, fácilmente calculamos todos los elementos de la hipérbola.
- Para calcular los focos, sumamos y restamos $c = 5$ unidades a la coordenada x del centro de lahipérbola: $F(3,4)$ y $F'(-7,4)$.
- La longitud del eje transverso es $2\,a = 2(3) = 6$.
- La excentricidad es: $e = c/a = 5/3$.
- Y la ecuación de esta hipérbola:

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{16} = 1$$

Ejemplo 3 Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola vertical cuyo eje transverso mide 16 unidades y su eje conjugado mide 12 unidades, y tiene su centro en el punto $C(-1,7)$.

- Sabemos que la longitud del eje transverso es $2\,a$.
- Esto indica que $2\,a = 16$, es decir, $a = 8$.
- Por otra parte, la longitud del eje conjugado es $2\,b$.
- Entonces, $2\,b = 12$, es decir, $b = 6$.
- Ahora podemos calcular el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

- Ahora podemos calcular los elementos de la hipérbola.
- Empezamos con los vértices.
- Dado que la hipérbola es vertical, un vértice está 8 unidades arriba del centro y el otro está abajo 8 unidades:

$$V(-1, 7+8) = V(-1,15) \qquad \text{y} \qquad V'(-1, 7-8) = V'(-1,-1)$$

- Los focos se encuentran de manera semejante, dado que están sobre el eje transverso al igual que los vértices.
- La distancia del centro a cada foco es: $c = 10$

$$F(-1, 7+10) = F(-1,17) \qquad \text{y} \qquad F'(-1, 7-10) = F'(-1,-3)$$

- Los extremos del eje conjugado están a 6 unidades a la derecha y a la izquierda del centro, respectivamente.

- Por eso, para encontrar sus coordenadas sumamos y restamos ahora en la coordenada del eje x:

$$B(-1+6,7)=B(5,7) \qquad \text{y} \qquad B'(-1-6,7)=B'(-7,-7)$$

- La excentricidad de esta hipérbola es: $e=c/a=5/4$.
- Y la ecuación de esta hipérbola es:

$$-\frac{(x+1)^2}{64}+\frac{(y-7)^2}{36}=1$$

Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola que tiene su centro en el punto $C(-1,-4)$ y uno de sus vértices en el punto $V(-1,12)$ y cuya excentricidad es $e=17/8$. **Ejemplo 4**

- La distancia del centro de la hipérbola a cualquiera de sus vértices es a.
- Entonces, $a=|12-(-4)|=16$.
- Y con el valor de la excentricidad de la hipérbola, podemos calcular el valor de c:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{16}=17/8 \qquad \Rightarrow \qquad c=34$$

- Y el valor de b se calcula a partir de los dos anteriores:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{34^2-16^2}=\sqrt{1156-256}=\sqrt{900}=30$$

- Ahora ya podemos calcular todos los elementos de la hipérbola.
- Observa que la hipérbola es vertical.
- Puedes darte cuenta de esto viendo que el vértice está arriba del centro de la hipérbola.
- Entonces, el otro vértice está debajo del centro: $V'(-1,-4-16)=V'(-1,-20)$.
- Los focos están uno arriba y otro debajo del centro:

$$F(-1,-4+34)=F(-1,30) \qquad \text{y} \qquad F'(-1,-4-34)=F'(-1,-38)$$

- La longitud del eje transverso es: $2a=2(16)=32$.
- La longitud del eje conjugado es: $2b=2(30)=60$.
- Finalmente, la ecuación de esta hipérbola es:

$$-\frac{(x+1)^2}{900}+\frac{(y+4)^2}{256}=1$$

Para todos los problemas resueltos en esta sección, tienes de tarea graficar cada una de las hipérbolas.

Se sugiere que vuelvas a leer el texto de cada problema y grafiques los datos y tú intentes sin ver la solución de cada ejemplo.

Esto te ayudará a entender mejor el procedimiento y así podrás poco a poco profundizar en el porqué del mismo.

El siguiente ejemplo, muestra todo el procedimiento, pero tú debes intentar resolverlo solo, leyendo los datos del problema solamente. Al final puedes verificar tus resultados.

Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola horizontal que tiene su centro en el punto $C(3,-3)$, excentricidad $e=13/12$, y longitud del eje transverso igual a 48 unidades. **Ejemplo 5**

- Observa que la hipérbolaes horizontal.
- Eso significa que los vértices como los focos están, uno a la derecha y el otro a la izquierda del centro.
- Dado que el eje transverso mide 48 unidades, $2a = 48$, implica $a = 24$.
- Usando $e = 13/12 = c/a$, podemos calcular el valor de c, dado que ya conocemos a:

$$\frac{c}{24} = \frac{13}{12} \qquad \Rightarrow \qquad c = 26$$

- Y el valor de b se calcula con la relación: $c^2 = a^2 + b^2$:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{676 - 576} = \sqrt{100} = 10$$

- Ahora podemos calcular todos los elementos de la hipérbola:

  Centro: $C(3,-3)$

  Vértices: $V(27,-3)$, $V'(-21,-3)$

  Focos: $F(29,-3)$, $F'(-23,-3)$

  Long. Eje Transverso: 48

  Long. Eje Conjugado: 20

  Excentricidad: $e = 26/24$

  Ecuación: $\dfrac{(x+3)^2}{576} - \dfrac{(y-3)^2}{100} = 1$

Ejercicios 6.2.2 Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola faltantes a partir de los datos dados.

1) Información:

   Centro: $C(4,-4)$

   Vértices: $V(7,-4)$, $V'(1,-4)$

   Focos: $F(9,-4)$, $F'(-1,-4)$

   Long. Eje Transverso: 6

   Long. Eje Conjugado: 8

   Excentricidad: $e = 5/3$

   Orientación: Horizontal

   Ecuación: $\dfrac{(x+4)^2}{9} - \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

2) Información:

   Centro: $C(1,-4)$

   Vértices: $V(9,-4)$, $V'(-7,-4)$

   Focos: $F(11,-4)$, $F'(-9,-4)$

   Long. Eje Transverso: 16

   Long. Eje Conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\frac{(x+1)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{36} = 1$

3) Información:

Centro: $C(4,4)$

Vértices: $V(4,9)$, $V'(4,-1)$

Focos: $F(4,17)$, $F'(4,-9)$

Long. Eje Transverso: 10

Long. Eje Conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\frac{(x-4)^2}{144} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

4) Información:

Centro: $C(-2,-3)$

Vértices: $V(-2,12)$, $V'(-2,-18)$

Focos: $F(-2,14)$, $F'(-2,-20)$

Long. Eje Transverso: 30

Long. Eje Conjugado: 16

Excentricidad: $e = 17/15$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y+3)^2}{225} = 1$

5) Información:

Centro: $C(-2,6)$

Vértices: $V(-2,18)$, $V'(-2,-6)$

Focos: $F(-2,26)$, $F'(-2,-14)$

Long. Eje Transverso: 24

Long. Eje Conjugado: 32

Excentricidad: $e = 20/12$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\frac{(x+2)^2}{256} + \frac{(y-6)^2}{144} = 1$

6) Información:

Centro: $C(-2,1)$

Vértices: $V(-2,8)$, $V'(-2,-6)$

Focos: $F(-2,26)$, $F'(-2,-24)$

Long. Eje Transverso: 14

Long. Eje Conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x+2)^2}{576} + \dfrac{(y-1)^2}{49} = 1$

7) Información:

Centro: $C(-1,-4)$

Vértices: $V(-1,20)$, $V'(-1,-28)$

Focos: $F(-1,22)$, $F'(-1,-30)$

Long. Eje Transverso: 48

Long. Eje Conjugado: 20

Excentricidad: $e = 26/24$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x+1)^2}{100} + \dfrac{(y+4)^2}{576} = 1$

8) Información:

Centro: $C(-5,5)$

Vértices: $V(16,5)$, $V'(-26,5)$

Focos: $F(24,5)$, $F'(-34,5)$

Long. Eje Transverso: 42

Long. Eje Conjugado: 40

Excentricidad: $e = 29/21$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{441} - \dfrac{(y+5)^2}{400} = 1$

9) Información:

Centro: $C(-6,7)$

Vértices: $V(10,7)$, $V'(-22,7)$

Focos: $F(28,7)$, $F'(-40,7)$

Long. Eje Transverso: 32

Long. Eje Conjugado: 60

Excentricidad: $e = 34/16$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x-6)^2}{256} - \dfrac{(y+7)^2}{900} = 1$

10) Información:

Centro: $C(-7,6)$

Vértices: $V(-7,15)$, $V'(-7,-3)$

Focos: $F(-7,47)$, $F'(-7,-35)$

Long. Eje Transverso: 18

Long. Eje Conjugado: 80

Excentricidad: $e = 41/9$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x+7)^2}{1600} + \dfrac{(y-6)^2}{81} = 1$

11) Información:

Centro: $C(4, -7)$

Vértices: $V(4, -4)$, $V'(4, -10)$

Focos: $F(4, -2)$, $F'(4, -12)$

Long. Eje Transverso: 6

Long. Eje Conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x-4)^2}{16} + \dfrac{(y+7)^2}{9} = 1$

12) Información:

Centro: $C(-1, -4)$

Vértices: $V(7, -4)$, $V'(-9, -4)$

Focos: $F(9, -4)$, $F'(-11, -4)$

Long. Eje Transverso: 16

Long. Eje Conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x-1)^2}{64} - \dfrac{(y-4)^2}{36} = 1$

13) Información:

Centro: $C(6, 3)$

Vértices: $V(11, 3)$, $V'(1, 3)$

Focos: $F(19, 3)$, $F'(-7, 3)$

Long. Eje Transverso: 10

Long. Eje Conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x+6)^2}{25} - \dfrac{(y+3)^2}{144} = 1$

14) Información:

Centro: $C(4, 4)$

Vértices: $V(19, 4)$, $V'(-11, 4)$

Focos: $F(21, 4)$, $F'(-13, 4)$

Long. Eje Transverso: 30

Long. Eje Conjugado: 16

Excentricidad: $e = 17/15$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\frac{(x+4)^2}{225} - \frac{(y+4)^2}{64} = 1$

15) Información:

Centro: $C(-6,-5)$

Vértices: $V(-6,7)$, $V'(-6,-17)$

Focos: $F(-6,15)$, $F'(-6,-25)$

Long. Eje Transverso: 24

Long. Eje Conjugado: 32

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\frac{(x+6)^2}{256} + \frac{(y+5)^2}{144} = 1$

16) Información:

Centro: $C(-3,-4)$

Vértices: $V(4,-4)$, $V'(-10,-4)$

Focos: $F(22,-4)$, $F'(-28,-4)$

Long. Eje Transverso: 14

Long. Eje Conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\frac{(x-3)^2}{49} - \frac{(y-4)^2}{576} = 1$

17) Información:

Centro: $C(1,-5)$

Vértices: $V(1,19)$, $V'(1,-29)$

Focos: $F(1,21)$, $F'(1,-31)$

Long. Eje Transverso: 48

Long. Eje Conjugado: 20

Excentricidad: $e = 26/24$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y+5)^2}{576} = 1$

18) Información:

Centro: $C(4,-3)$

Vértices: $V(25,-3)$, $V'(-17,-3)$

Focos: $F(33,-3)$, $F'(-25,-3)$

Long. Eje Transverso: 42

Long. Eje Conjugado: 40

Excentricidad: $e = 29/21$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x+4)^2}{441} - \dfrac{(y-3)^2}{400} = 1$

19) Información:

Centro: $C(-7,1)$

Vértices: $V(9,1)$, $V'(-23,1)$

Focos: $F(27,1)$, $F'(-41,1)$

Long. Eje Transverso: 32

Long. Eje Conjugado: 60

Excentricidad: $e = 34/16$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x-7)^2}{256} - \dfrac{(y+1)^2}{900} = 1$

20) Información:

Centro: $C(-6,-2)$

Vértices: $V(-6,7)$, $V'(-6,-11)$

Focos: $F(-6,39)$, $F'(-6,-43)$

Long. Eje Transverso: 18

Long. Eje Conjugado: 80

Excentricidad: $e = 41/9$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x+6)^2}{1600} + \dfrac{(y+2)^2}{81} = 1$

21) Información:

Centro: $C(2,-3)$

Vértices: $V(5,-3)$, $V'(-1,-3)$

Focos: $F(7,-3)$, $F'(-3,-3)$

Long. Eje Transverso: 6

Long. Eje Conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$

22) Información:

Centro: $C(5,6)$

Vértices: $V(5,14)$, $V'(5,-2)$

Focos: $F(5,16)$, $F'(5,-4)$

Long. Eje Transverso: 16

Long. Eje Conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y-6)^2}{64} = 1$

23) Información:

Centro: $C(7,-5)$

Vértices: $V(7,0)$, $V'(7,-10)$

Focos: $F(7,8)$, $F'(7,-18)$

Long. Eje Transverso: 10

Long. Eje Conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\frac{(x-7)^2}{144} + \frac{(y+5)^2}{25} = 1$

24) Información:

Centro: $C(7,6)$

Vértices: $V(22,6)$, $V'(-8,6)$

Focos: $F(24,6)$, $F'(-10,6)$

Long. Eje Transverso: 30

Long. Eje Conjugado: 16

Excentricidad: $e = 17/15$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\frac{(x+7)^2}{225} - \frac{(y+6)^2}{64} = 1$

25) Información:

Centro: $C(3,-6)$

Vértices: $V(3,6)$, $V'(3,-18)$

Focos: $F(3,14)$, $F'(3,-26)$

Long. Eje Transverso: 24

Long. Eje Conjugado: 32

Excentricidad: $e = 20/12$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\frac{(x-3)^2}{256} + \frac{(y+6)^2}{144} = 1$

6.3 Ecuación general de la hipérbola

Ahora vamos a la forma general de la ecuación de la hipérbola.

Recuerda que para convertir de la forma ordinaria a la forma general, basta desarrollar las operaciones necesarias para llevar la ecuación ordinaria a la forma:

$$A\,x^2 + B\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

independientemente de que el centro de la hipérbola esté o no en el origen del sistema de coordenadas.

6.3.1 Conversión de f. ordinaria a f. general

Expresa la ecuación ordinaria de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

en la forma general.

Ejemplo 1

- Empezamos multiplicando ambos lados de la igualdad por $16 \times 25 = 400$:

$$\begin{aligned} \frac{400 \cdot x^2}{16} - \frac{400 \cdot y^2}{25} &= 400 \\ 25\,x^2 - 16\,y^2 - 400 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Convierte la ecuación ordinaria de la hipérbola

$$-\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$$

a su forma general.

Ejemplo 2

- Empezamos multiplicando por $64 \times 16 = 1024$ ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} -\frac{1024 \cdot x^2}{64} + \frac{1024 \cdot y^2}{16} &= 1024 \\ -16\,x^2 + 64\,y^2 - 1024 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Convierte la ecuación ordinaria de la hipérbola:

$$\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

a su forma general.

Ejemplo 3

- Empezamos multiplicando ambos lados de la igualdad por $16 \times 9 = 144$:

$$\begin{aligned} \frac{144(x-4)^2}{16} - \frac{144(y-1)^2}{9} &= 144 \\ 9(x-4)^2 - 16(y-1)^2 &= 144 \end{aligned}$$

- Ahora debemos elevar al cuadrado los binomios que están indicados:

$$\begin{aligned} 9(x^2-8x+16)-16(y^2-2y+1)-144 &= 0 \\ 9x^2-72x+\cancel{144}-16y^2+32y-16-\cancel{144} &= 0 \\ 9x^2-16y^2-72x+32y-16 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado multiplicando por cada factor dentro del paréntesis y después ordenando los términos.

Ejemplo 4

Convierte la ecuación odinaria de la hipérbola:

$$-\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-7)^2}{4} = 1$$

a su forma general.

- En este caso multiplicaremos primero la ecuación por $25 \times 4 = 100$:

$$\begin{aligned} -\frac{100(x+3)^2}{25} + \frac{100(y-7)^2}{4} &= 100 \\ -4(x+3)^2+25(y-7)^2-100 &= 0 \end{aligned}$$

- Y ahora vamos a elevar al cuadrado los binomios y a simplificar:

$$\begin{aligned} -4(x^2+6x+9)+25(y^2-14y+49)-100 &= 0 \\ -4x^2-24x-36+25y^2-350y+1225-100 &= 0 \\ -4x^2+25y^2-24x-350y+1089 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Ejemplo 5

Convierte la ecuación ordinaria de la hipérbola:

$$\frac{(x-5)^2}{576} - \frac{(y+7)^2}{49} = 1$$

a su forma general.

- Multiplicamos ambos lados de la igualdad por $576 \times 49 = 28224$:

$$\begin{aligned} \frac{28224(x-5)^2}{576} - \frac{28224(y+7)^2}{49} &= 28224 \\ 49(x-5)^2-576(y+7)^2-28224 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora elevamos al cuadrado ambos binomios y luego simplificamos:

$$\begin{aligned}
49(x^2-10\,x+25)-576(y^2+14\,y+49)-28224 &= 0\\
49\,x^2-490\,x+1225-576\,y^2-8064\,y-28224-28224 &= 0\\
49\,x^2-576\,y^2-490\,x-8064\,y-55223 &= 0
\end{aligned}$$

- Y terminamos.

Y ahora nos vamos con la parte más interesante, que consiste en convertir la ecuación general a la forma ordinaria.

Convierte la ecuación de la hipérbola dada a su forma general. **Ejercicios 6.3.1**

1) $-\dfrac{(x-4)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

Ecuación: $-16\,x^2+9\,y^2+128\,x+18\,y-391=0$

Centro: $C(4,-1)$

Vértices: $V(4,2)$, $V'(4,-4)$

Focos: $F(4,4)$, $F'(4,-6)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e=5/3$

2) $\dfrac{(x+1)^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

Ecuaci'on: $+16\,x^2-9\,y^2+32\,x+36\,y-164=0$

Centro: $C(-1,2)$

Vértices: $V(2,2)$, $V'(-4,2)$

Focos: $F(4,2)$, $F'(-6,2)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e=5/3$

Orientación: Horizontal

3) $-\dfrac{(x+5)^2}{25}+\dfrac{(y+3)^2}{144}=1$

Ecuación: $-144\,x^2+25\,y^2-1440\,x+150\,y-6975=0$

Centro: $C(-5,-3)$

Vértices: $V(-5,2)$, $V'(-5,-8)$

Focos: $F(-5,10)$, $F'(-5,-16)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

4) $\dfrac{(x-5)^2}{64}-\dfrac{(y+2)^2}{36}=1$

Ecuaci'on: $+36\,x^2-64\,y^2-360\,x-256\,y-1660=0$

Centro: $C(5,-2)$

Vértices: $V(13,-2)$, $V'(-3,-2)$

Focos: $F(15,-2)$, $F'(-5,-2)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e=10/8$

Orientación: Horizontal

5) $-\dfrac{(x+4)^2}{25}+\dfrac{(y+5)^2}{144}=1$

Ecuación: $-144\,x^2+25\,y^2-1152\,x+250\,y-5279=0$

Centro: $C(-4,-5)$

Vértices: $V(-4,0)$, $V'(-4,-10)$

Focos: $F(-4,8)$, $F'(-4,-18)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

6) $\dfrac{(x-5)^2}{49}-\dfrac{(y+3)^2}{576}=1$

Ecuaci'on: $+576\,x^2-49\,y^2-5760\,x-294\,y-14265=0$

Centro: $C(5,-3)$

Vértices: $V(12,-3)$, $V'(-2,-3)$

Focos: $F(30,-3)$, $F'(-20,-3)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e=25/7$

Orientación: Horizontal

7) $\dfrac{(x-5)^2}{225}-\dfrac{(y-3)^2}{64}=1$

Ecuaci'on: $+64\,x^2-225\,y^2-640\,x+1350\,y-14825=0$

Centro: $C(5,3)$

Vértices: $V(20,3)$, $V'(-10,3)$

Focos: $F(22,3)$, $F'(-12,3)$

Long. eje transverso: 30

Long. eje conjugado: 16

Excentricidad: $e=17/15$

Orientación: Horizontal

8) $-\dfrac{(x-3)^2}{144}+\dfrac{(y+2)^2}{256}=1$

Ecuación: $-256\,x^2+144\,y^2+1536\,x+576\,y-38592=0$

Centro: $C(3,-2)$

Vértices: $V(3,10)$, $V'(3,-14)$

Focos: $F(3,18)$, $F'(3,-22)$

Long. eje transverso: 24

Long. eje conjugado: 32

Excentricidad: $e=20/12$

9) $\dfrac{(x-4)^2}{49}-\dfrac{(y-2)^2}{576}=1$

Ecuaci'on: $+576\,x^2-49\,y^2-4608\,x+196\,y-19204=0$

Centro: $C(4,2)$

Vértices: $V(11,2)$, $V'(-3,2)$

Focos: $F(29,2)$, $F'(-21,2)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e=25/7$

Orientación: Horizontal

10) $\dfrac{(x+1)^2}{81}-\dfrac{(y+5)^2}{1600}=1$

Ecuaci'on: $+1600\,x^2-81\,y^2+3200\,x-810\,y-130025=0$

Centro: $C(-1,-5)$

Vértices: $V(8,-5)$, $V'(-10,-5)$

Focos: $F(40,-5)$, $F'(-42,-5)$

Long. eje transverso: 18

Long. eje conjugado: 80

Excentricidad: $e=41/9$

Orientación: Horizontal

11) $\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

Ecuaci'on: $+16\,x^2-9\,y^2-32\,x+54\,y-209=0$

Centro: $C(1,3)$

Vértices: $V(4,3)$, $V'(-2,3)$

Focos: $F(6,3)$, $F'(-4,3)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e=5/3$

Orientación: Horizontal

12) $-\dfrac{(x+5)^2}{9}+\dfrac{(y+4)^2}{16}=1$

Ecuación: $-16\,x^2+9\,y^2-160\,x+72\,y-400=0$

Centro: $C(-5,-4)$

Vértices: $V(-5,-1)$, $V'(-5,-7)$

Focos: $F(-5,1)$, $F'(-5,-9)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e=5/3$

13) $\dfrac{(x-1)^2}{25}-\dfrac{(y+5)^2}{144}=1$

Ecuaci'on: $+144\,x^2-25\,y^2-288\,x-250\,y-4081=0$

Centro: $C(1,-5)$

Vértices: $V(6,-5)$, $V'(-4,-5)$

Focos: $F(14,-5)$, $F'(-12,-5)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

Orientación: Horizontal

14) $\dfrac{(x-3)^2}{64}-\dfrac{(y+1)^2}{36}=1$

Ecuaci'on: $+36\,x^2-64\,y^2-216\,x-128\,y-2044=0$

Centro: $C(3,-1)$

Vértices: $V(11,-1)$, $V'(-5,-1)$

Focos: $F(13,-1)$, $F'(-7,-1)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e=10/8$

Orientación: Horizontal

15) $\dfrac{(x+2)^2}{25}-\dfrac{(y+1)^2}{144}=1$

Ecuaci'on: $+144\,x^2-25\,y^2+576\,x-50\,y-3049=0$

Centro: $C(-2,-1)$

Vértices: $V(3,-1)$, $V'(-7,-1)$

Focos: $F(11,-1)$, $F'(-15,-1)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

Orientación: Horizontal

16) $-\dfrac{(x+2)^2}{49}+\dfrac{(y-2)^2}{576}=1$

Ecuación: $-576\,x^2+49\,y^2-2304\,x-196\,y-30332=0$

Centro: $C(-2,2)$

Vértices: $V(-2,9)$, $V'(-2,-5)$

Focos: $F(-2,27)$, $F'(-2,-23)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

17) $-\frac{(x+1)^2}{225} + \frac{(y-1)^2}{64} = 1$

Ecuación: $-64\,x^2 + 225\,y^2 - 128\,x - 450\,y - 14239 = 0$

Centro: $C(-1,1)$

Vértices: $V(-1,16)$, $V'(-1,-14)$

Focos: $F(-1,18)$, $F'(-1,-16)$

Long. eje transverso: 30

Long. eje conjugado: 16

Excentricidad: $e = 17/15$

18) $\frac{(x+5)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{256} = 1$

Ecuaci'on: $+256\,x^2 - 144\,y^2 + 2560\,x + 576\,y - 31040 = 0$

Centro: $C(-5,2)$

Vértices: $V(7,2)$, $V'(-17,2)$

Focos: $F(15,2)$, $F'(-25,2)$

Long. eje transverso: 24

Long. eje conjugado: 32

Excentricidad: $e = 20/12$

Orientación: Horizontal

19) $-\frac{(x+5)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{576} = 1$

Ecuación: $-576\,x^2 + 49\,y^2 - 5760\,x + 294\,y - 42183 = 0$

Centro: $C(-5,-3)$

Vértices: $V(-5,4)$, $V'(-5,-10)$

Focos: $F(-5,22)$, $F'(-5,-28)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

20) $-\frac{(x+2)^2}{81} + \frac{(y+3)^2}{1600} = 1$

Ecuación: $-1600\,x^2 + 81\,y^2 - 6400\,x + 486\,y - 135271 = 0$

Centro: $C(-2,-3)$

Vértices: $V(-2,6)$, $V'(-2,-12)$

Focos: $F(-2,38)$, $F'(-2,-44)$

Long. eje transverso: 18

Long. eje conjugado: 80

Excentricidad: $e = 41/9$

21) $-\dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

Ecuación: $-16\,x^2 + 9\,y^2 - 64\,x - 72\,y - 64 = 0$

Centro: $C(-2,4)$

Vértices: $V(-2,7)$, $V'(-2,1)$

Focos: $F(-2,9)$, $F'(-2,-1)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

22) $-\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

Ecuación: $-16\,x^2 + 9\,y^2 + 32\,x - 36\,y - 124 = 0$

Centro: $C(1,2)$

Vértices: $V(1,5)$, $V'(1,-1)$

Focos: $F(1,7)$, $F'(1,-3)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

23) $-\dfrac{(x+2)^2}{25} + \dfrac{(y-5)^2}{144} = 1$

Ecuación: $-144\,x^2 + 25\,y^2 - 576\,x - 250\,y - 3551 = 0$

Centro: $C(-2,5)$

Vértices: $V(-2,10)$, $V'(-2,0)$

Focos: $F(-2,18)$, $F'(-2,-8)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

24) $-\dfrac{(x-2)^2}{64} + \dfrac{(y+5)^2}{36} = 1$

Ecuación: $-36\,x^2 + 64\,y^2 + 144\,x + 640\,y - 848 = 0$

Centro: $C(2,-5)$

Vértices: $V(2,3)$, $V'(2,-13)$

Focos: $F(2,5)$, $F'(2,-15)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

25) $\dfrac{(x+4)^2}{25} - \dfrac{(y+3)^2}{144} = 1$

Ecuaci'on: $+144\,x^2 - 25\,y^2 + 1152\,x - 150\,y - 1521 = 0$

Centro: $C(-4,-3)$

Vértices: $V(1,-3)$, $V'(-9,-3)$

Focos: $F(9,-3)$, $F'(-17,-3)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Horizontal

6.3.2 Conversión de F. general a F. ordinaria

Nos vamos directamente a los ejemplos resueltos.

Ejemplo 1

Convierte la ecuación de la hipérbola:

$$100\,x^2 - 16\,y^2 - 1600 = 0$$

a su forma ordinaria.

- Dividimos ambos lados de la ecuación entre 1600 y pasamos el término independiente al lado derecho de la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{100\,x^2}{1600} - \frac{16\,y^2}{1600} &= \frac{1600}{1600} \\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{100} &= 1 \end{aligned}$$

- Se trata de una hipérbola horizontal con centro en el origen y parámetros $a = 4$, $b = 10$.
- el valor de c se puede calcular fácilmente:

$$c = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} \approx 10.77$$

- Se te queda como ejercicio enlistar todos los elementos de esta hipérbola y graficarla.

Ejemplo 2

Convierte la ecuación de la hipérbola:

$$-36\,x^2 + 64\,y^2 + 288\,x + 128\,y - 2816 = 0$$

a su forma ordinaria y calcula sus tres parámetros a, b y c.

- Empezamos ordenando los términos de acuerdo a la literal:

$$-36\,x^2 + 288\,x + 64\,y^2 + 128\,y = 2816$$

- Ahora vamos a factorizar -36 de los términos que tienen a la literal x y 64 de los términos que incluyen a y:
$$-36\left(x^2-8x\right)+64\left(y^2+2y\right)=2816$$
- Ahora vamos a completar el cuadrado en cada polinomio encerrado entre paréntesis.
- Para eso, vamos a sumar 16 dentro del primer paréntesis y -36×16 afuera.
- De manera semejante para y, sumamos 1 dentro del paréntesis y afuera 64:
$$\begin{aligned}-36\left(x^2-8x+16\right)+64\left(y^2+2y+1\right) &= 2816-576+64\\ -36(x-4)^2+64\left(y+1\right)^2 &= 2304\end{aligned}$$
- Ahora dividimos ambos lados de la igualdad entre 2304 y simplificamos:
$$\begin{aligned}-\frac{36(x-4)^2}{2304}+\frac{64(y+1)^2}{2304} &= \frac{2304}{2304}\\ -\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(y+1)^2}{36} &= 1\end{aligned}$$
- De la ecuación en su forma ordinaria es evidente que:
$$\begin{aligned}a^2=64 &\quad\Rightarrow\quad a=8\\ b^2=36 &\quad\Rightarrow\quad b=6\end{aligned}$$
- A partir de estos valores podemos calcular el valor de c:
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$
- Y también de la ecuación es evidente que la hipérbola es vertical.
- Sus elementos son:

  Centro: $C(4,-1)$
  Vértices: $V(4,7)$, $V'(4,-9)$
  Focos: $F(4,9)$, $F'(4,-11)$
  Long. eje transverso: 16
  Long. eje conjugado: 12
  Excentricidad: $e=10/8$
- Se te queda como ejercicio graficar esta hipérbola.

Ejemplo 3

Convierte la ecuación de la hipérbola:
$$-16x^2+9y^2-128x-54y-319=0$$
a su forma ordinaria y calcula todos sus elementos.

- Empezamos ordenando los términos de acuerdo a la literal que contengan:
$$-16x^2-128x+9y^2-54y-319=0$$

- Ahora factorizamos el coeficiente del término cuadrático en todos los términos que contengan la misma literal:

$$-16\left(x^2+8x\right)+9\left(y^2-6y\right)=319$$

- Es hora de completar cuadrados:

$$\begin{aligned}-16\left(x^2+8x+16\right)+9\left(y^2-6y+9\right) &= 319-256+81\\ -16(x+4)^2+9(y-3)^2 &= 144\end{aligned}$$

- Ahora dividimos ambos lados de la ecuación entre 144:

$$\begin{aligned}-\frac{16(x+4)^2}{144}+\frac{9(y-3)^2}{144} &= \frac{144}{144}\\ -\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{16} &= 1\end{aligned}$$

- De la ecuación es fácil observar que se trata de una hipérbolahorizontal.
- También, los parámetros se deducen de ella, pues:

$$\begin{aligned}a^2=9 &\quad\Rightarrow\quad a=3\\ b^2=16 &\quad\Rightarrow\quad b=4\end{aligned}$$

- En este caso, el valor de c es 5, porque:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

- Los elementos de esta hipérbola son:

Centro: $C(1,-2)$

Vértices: $V(4,-2)$, $V'(-2,-2)$

Focos: $F(6,-2)$, $F'(-4,-2)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e=5/3$

Ejemplo 4

Convierte la ecuación de la hipérbola:

$$144x^2-25y^2-864x-150y-2529=0$$

a su forma ordinaria y calcula todos sus elementos.

- Empezamos ordenando los términos de acuerdo a la literal que contengan:

$$144x^2-864x-25y^2-150y=2529$$

- Ahora factorizamos el coeficiente del término cuadrático para cada grupo:

$$144\left(x^2-6x\right)-25\left(y^2+6y\right)=2529$$

- Sigue completar el cuadado en cada polinomio:

$$\begin{aligned} 144\left(x^2-6x+9\right)-25\left(y^2+6y+9\right) &= 2529+1296-225 \\ 144(x-3)^2-25(y+3)^2 &= 3600 \end{aligned}$$

- Ahora dividimos ambos lados de la igualdad entre 3600:

$$\begin{aligned} \frac{144(x-3)^2}{3600}-\frac{25(y+3)^2}{3600} &= \frac{3600}{3600} \\ \frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y+3)^2}{144} &= 1 \end{aligned}$$

- La hipérbola es horizontal con parámetros: $a=5$, $b=12$, y

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

- Los elementos de esta hipérbola son:

Centro: $C(3,-3)$
Vértices: $V(8,-3)$, $V'(-2,-3)$
Focos: $F(16,-3)$, $F'(-10,-3)$
Long. eje transverso: 10
Long. eje conjugado: 24
Excentricidad: $e=13/5$

- Se te queda como ejercicio graficar esta hipérbola.

Ejemplo 5

Convierte la ecuación de la hipérbola:

$$-576x^2+49y^2-1152x-98y-28751=0$$

a su forma ordinaria y calcula todos sus elementos.

- Realizamos el procedimiento de los últimos ejemplos.

$$\begin{aligned} -576x^2-1152x+49y^2-98y &= 28751 \\ -576\left(x^2+2x\right)+49\left(y^2-2y\right) &= 28751 \\ -576\left(x^2+2x+1\right)+49\left(y^2-2y+1\right) &= 28751-576+49 \\ -576(x+1)^2+49(y-1)^2 &= 28224 \\ -\frac{576(x+1)^2}{28224}+\frac{49(y-1)^2}{28224} &= \frac{28224}{28224} \\ -\frac{(x+1)^2}{49}+\frac{(y-1)^2}{576} &= 1 \end{aligned}$$

- Los elementos de la hipérbola son:

Centro: $C(-1,1)$
Vértices: $V(-1,8)$, $V'(-1,-6)$

Focos: $F(-1,26)$, $F'(-1,-24)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

- Grafica esta hipérbola.

Calcula la ecuación de la hipérbola en su forma ordinaria y todos sus elementos. También grafícala.

Ejercicios 6.3.2

1) $16\,x^2 - 9\,y^2 - 160\,x + 72\,y + 112 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

Centro: $C(5,4)$

Vértices: $V(8,4)$, $V'(2,4)$

Focos: $F(10,4)$, $F'(0,4)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Horizontal

2) $16\,x^2 - 9\,y^2 - 32\,x + 90\,y - 353 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y-5)^2}{16} = 1$

Centro: $C(1,5)$

Vértices: $V(4,5)$, $V'(-2,5)$

Focos: $F(6,5)$, $F'(-4,5)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Horizontal

3) $144\,x^2 - 25\,y^2 - 288\,x - 50\,y - 3481 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x-1)^2}{25} - \dfrac{(y+1)^2}{144} = 1$

Centro: $C(1,-1)$

Vértices: $V(6,-1)$, $V'(-4,-1)$

Focos: $F(14,-1)$, $F'(-12,-1)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Horizontal

4) $-36\,x^2+64\,y^2-72\,x+640\,y-740=0$

Ecuación: $-\dfrac{(x+1)^2}{64}+\dfrac{(y+5)^2}{36}=1$

Centro: $C(-1,-5)$

Vértices: $V(-1,3)$, $V'(-1,-13)$

Focos: $F(-1,5)$, $F'(-1,-15)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e=10/8$

5) $144\,x^2-25\,y^2-576\,x-50\,y-3049=0$

Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{25}-\dfrac{(y+1)^2}{144}=1$

Centro: $C(2,-1)$

Vértices: $V(7,-1)$, $V'(-3,-1)$

Focos: $F(15,-1)$, $F'(-11,-1)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

Orientación: Horizontal

6) $576\,x^2-49\,y^2-5760\,x+98\,y-13873=0$

Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{49}-\dfrac{(y-1)^2}{576}=1$

Centro: $C(5,1)$

Vértices: $V(12,1)$, $V'(-2,1)$

Focos: $F(30,1)$, $F'(-20,1)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e=25/7$

Orientación: Horizontal

7) $64\,x^2-225\,y^2+640\,x-1800\,y-16400=0$

Ecuación: $\dfrac{(x+5)^2}{225}-\dfrac{(y+4)^2}{64}=1$

Centro: $C(-5,-4)$

Vértices: $V(10,-4)$, $V'(-20,-4)$

Focos: $F(12,-4)$, $F'(-22,-4)$

Long. eje transverso: 30

Long. eje conjugado: 16

Excentricidad: $e=17/15$

Orientación: Horizontal

8) $256\,x^2-144\,y^2-1024\,x-288\,y-35984=0$

Ecuación: $\frac{(x-2)^2}{144} - \frac{(y+1)^2}{256} = 1$

Centro: $C(2,-1)$

Vértices: $V(14,-1)$, $V'(-10,-1)$

Focos: $F(22,-1)$, $F'(-18,-1)$

Long. eje transverso: 24

Long. eje conjugado: 32

Excentricidad: $e = 20/12$

Orientación: Horizontal

9) $576\,x^2 - 49\,y^2 + 5760\,x + 196\,y - 14020 = 0$

Ecuación: $\frac{(x+5)^2}{49} - \frac{(y-2)^2}{576} = 1$

Centro: $C(-5,2)$

Vértices: $V(2,2)$, $V'(-12,2)$

Focos: $F(20,2)$, $F'(-30,2)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

Orientación: Horizontal

10) $1600\,x^2 - 81\,y^2 + 16000\,x + 486\,y - 90329 = 0$

Ecuación: $\frac{(x+5)^2}{81} - \frac{(y-3)^2}{1600} = 1$

Centro: $C(-5,3)$

Vértices: $V(4,3)$, $V'(-14,3)$

Focos: $F(36,3)$, $F'(-46,3)$

Long. eje transverso: 18

Long. eje conjugado: 80

Excentricidad: $e = 41/9$

Orientación: Horizontal

11) $-16\,x^2 + 9\,y^2 - 128\,x - 90\,y - 175 = 0$

Ecuación: $-\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

Centro: $C(-4,5)$

Vértices: $V(-4,8)$, $V'(-4,2)$

Focos: $F(-4,10)$, $F'(-4,0)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

12) $-16\,x^2 + 9\,y^2 - 64\,x - 54\,y - 127 = 0$

Ecuación: $-\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

Centro: $C(-2,3)$

Vértices: $V(-2,6)$, $V'(-2,0)$

Focos: $F(-2,8)$, $F'(-2,-2)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e=5/3$

13) $144\,x^2-25\,y^2-576\,x-100\,y-3124=0$

Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{25}-\dfrac{(y+2)^2}{144}=1$

Centro: $C(2,-2)$

Vértices: $V(7,-2)$, $V'(-3,-2)$

Focos: $F(15,-2)$, $F'(-11,-2)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

Orientación: Horizontal

14) $36\,x^2-64\,y^2+360\,x+256\,y-1660=0$

Ecuación: $\dfrac{(x+5)^2}{64}-\dfrac{(y-2)^2}{36}=1$

Centro: $C(-5,2)$

Vértices: $V(3,2)$, $V'(-13,2)$

Focos: $F(5,2)$, $F'(-15,2)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e=10/8$

Orientación: Horizontal

15) $144\,x^2-25\,y^2-576\,x-50\,y-3049=0$

Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{25}-\dfrac{(y+1)^2}{144}=1$

Centro: $C(2,-1)$

Vértices: $V(7,-1)$, $V'(-3,-1)$

Focos: $F(15,-1)$, $F'(-11,-1)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

Orientación: Horizontal

16) $-576\,x^2+49\,y^2-5760\,x-490\,y-41399=0$

Ecuación: $-\frac{(x+5)^2}{49}+\frac{(y-5)^2}{576}=1$

Centro: $C(-5,5)$

Vértices: $V(-5,12)$, $V'(-5,-2)$

Focos: $F(-5,30)$, $F'(-5,-20)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e=25/7$

17) $-64\,x^2+225\,y^2+128\,x+2250\,y-8839=0$

Ecuación: $-\frac{(x-1)^2}{225}+\frac{(y+5)^2}{64}=1$

Centro: $C(1,-5)$

Vértices: $V(1,10)$, $V'(1,-20)$

Focos: $F(1,12)$, $F'(1,-22)$

Long. eje transverso: 30

Long. eje conjugado: 16

Excentricidad: $e=17/15$

18) $-256\,x^2+144\,y^2-512\,x-1152\,y-34816=0$

Ecuación: $-\frac{(x+1)^2}{144}+\frac{(y-4)^2}{256}=1$

Centro: $C(-1,4)$

Vértices: $V(-1,16)$, $V'(-1,-8)$

Focos: $F(-1,24)$, $F'(-1,-16)$

Long. eje transverso: 24

Long. eje conjugado: 32

Excentricidad: $e=20/12$

19) $576\,x^2-49\,y^2+3456\,x+490\,y-24265=0$

Ecuación: $\frac{(x+3)^2}{49}-\frac{(y-5)^2}{576}=1$

Centro: $C(-3,5)$

Vértices: $V(4,5)$, $V'(-10,5)$

Focos: $F(22,5)$, $F'(-28,5)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e=25/7$

Orientación: Horizontal

20) $1600\,x^2-81\,y^2-9600\,x+162\,y-115281=0$

Ecuación: $\frac{(x-3)^2}{81}-\frac{(y-1)^2}{1600}=1$

Centro: $C(3,1)$

Vértices: $V(12,1)$, $V'(-6,1)$

Focos: $F(44,1)$, $F'(-38,1)$

Long. eje transverso: 18

Long. eje conjugado: 80

Excentricidad: $e = 41/9$

Orientación: Horizontal

21) $16\,x^2 - 9\,y^2 - 64\,x - 18\,y - 89 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$

Centro: $C(2,-1)$

Vértices: $V(5,-1)$, $V'(-1,-1)$

Focos: $F(7,-1)$, $F'(-3,-1)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Horizontal

22) $16\,x^2 - 9\,y^2 + 64\,x + 36\,y - 116 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

Centro: $C(-2,2)$

Vértices: $V(1,2)$, $V'(-5,2)$

Focos: $F(3,2)$, $F'(-7,2)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Horizontal

23) $-144\,x^2 + 25\,y^2 + 864\,x + 250\,y - 4271 = 0$

Ecuación: $-\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y+5)^2}{144} = 1$

Centro: $C(3,-5)$

Vértices: $V(3,0)$, $V'(3,-10)$

Focos: $F(3,8)$, $F'(3,-18)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

24) $-36\,x^2 + 64\,y^2 - 144\,x - 128\,y - 2384 = 0$

Ecuación: $-\dfrac{(x+2)^2}{64} + \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1$

Centro: $C(-2,1)$

Vértices: $V(-2,9)$, $V'(-2,-7)$

Focos: $F(-2,11)$, $F'(-2,-9)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

25) $-144\,x^2 + 25\,y^2 + 576\,x - 50\,y - 4151 = 0$

Ecuación: $-\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{144} = 1$

Centro: $C(2,1)$

Vértices: $V(2,6)$, $V'(2,-4)$

Focos: $F(2,14)$, $F'(2,-12)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Formulario — Unidad Seis

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Horizontal con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Vertical con centro en el origen:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Horizontal con centro en el punto $C(h,k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Vertical con centro en el punto $C(h,k)$:

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Otras fórmulas: Hipérbola con centro en el punto $C(h,k)$:

- ✓ Longitud del eje transverso: $2\,a$.
- ✓ Longitud del eje conjugado: $2\,b$.
- ✓ Distancia entre los focos: $2\,c$.
- ✓ Relación entre a, b y c: $a^2 = c^2 - b^2$.
- ✓ Excentricidad: $e = c/a > 1$.

Hipérbola	Vertical	Horizontal
Lado Recto	$2\,b^2/a$	$2\,b^2/a$
Focos	$F(h, k \pm c)$	$F(h \pm c, k)$
Vértices	$V(h, k \pm a)$	$F(h \pm a, k)$
Ec. General	$A x^2 + B y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$	
A	b^2	$-b^2$
B	$-a^2$	a^2
D	$-2\,b^2 h$	$2\,b^2 h$
E	$2\,a^2 k$	$-2\,a^2 k$
F	$b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$	$-b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$

CRÉDITOS

Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.	**Albert Einstein**

Este material se extrajo del libro *Matemáticas III* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar

Edición: Efraín Soto Apolinar

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar

Productor general: Efraín Soto Apolinar

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: December 2, 2013.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx