# Calculation for finance

DEMBA

11th Feb. 2022

## 1 Binomial Model(2 項モデル)

### 1.1 N=1 の場合の考察

満期日 $n = N(= 1)$ につき、pay-off(オプションの権利行使) が発生する。時刻 $n = 1$ におけるオプション価額 $V_1$ は権利行使による pay-off と同定できる。上述の通り、agent から見れば $K - S_1$ の支払（$S_1 - K$ の受取）が pay-off であるが、ここでは具体的には記載せず単に $V$ で表記する。agent が支払 $V_2(w_1, w_2)$ に相当する金額をヘッジするために、次の式を要請する。

$$\Delta_0 S_1(H) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = V_1(H) \tag{1}$$

$$\Delta_0 S_1(T) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = V_1(T) \tag{2}$$

2 variables $\Delta_0$、$X_0$ に対する 2 つの拘束条件と考え、これらについて解く。
eq.(1) − eq.(2) により次式を得る。

$$\Delta_0 S_1(H) - \Delta_0 S_1(T) = V_1(H) - V_1(T) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} \tag{4}$$

$\Delta_0$ を eq.(1) に代入。

$$\Delta_0 \{S_1(H) - (1+r)S_0\} + (1+r)X_0 = V_1(H) \tag{5}$$

$$X_0 = \frac{1}{1+r}\left[V_1(H) - \Delta_0 \{S_1(H) - (1+r)S_0\}\right] \tag{6}$$

$$= \frac{1}{1+r}\left[V_1(H) - \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}\{S_1(H) - (1+r)S_0\}\right] \tag{7}$$

$$= \frac{1}{1+r}\left[\frac{-S_1(T) + (1+r)S_0}{S_1(H) - S_1(T)}V_1(H) + \frac{S_1(H) - (1+r)S_0}{S_1(H) - S_1(T)}V_1(T)\right] \tag{8}$$

$V_1(H)$ と $V_1(T)$ の係数をそれぞれ次のように解く。

$$\frac{-S_1(T) + (1+r)S_0}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{-dS_0 + (1+r)S_0}{uS_0 - dS_0} \tag{9}$$

$$= \frac{-d + 1 + r}{u - d} \equiv \tilde{p} \tag{10}$$

$$\frac{S_1(H) - (1+r)S_0}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{uS_0 - (1+r)S_0}{uS_0 - dS_0} \tag{11}$$

$$= \frac{u - 1 - r}{u - d} \equiv \tilde{q} \tag{12}$$

以上より、次の通り $X_0$、$\Delta_0$ が得られる。

$$X_0 = \frac{1}{1+r}\left(\tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T)\right) \tag{13}$$

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} \tag{14}$$

where

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} \tag{15}$$

---

### 1.2 N=2 の場合の考察

時刻 $n=2$ の条件式

$$\begin{aligned}
V_2(H,H) &= \Delta_1(H)S_2(H,H) + (1+r)(V_1(H) - \Delta_1(H)S_1(H)) && (16)\\
V_2(H,T) &= \Delta_1(H)S_2(H,T) + (1+r)(V_1(H) - \Delta_1(H)S_1(H)) && (17)\\
V_2(T,H) &= \Delta_1(T)S_2(T,H) + (1+r)(V_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)) && (18)\\
V_2(T,T) &= \Delta_1(T)S_2(T,T) + (1+r)(V_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)) && (19)
\end{aligned}$$

時刻 $n=1$ の条件式

$$\begin{aligned}
V_1(H) &= \Delta_0 S_1(H) + (1+r)\left(V_0 - \Delta_0 S_0\right) && (20)\\
V_1(T) &= \Delta_0 S_1(T) + (1+r)\left(V_0 - \Delta_0 S_0\right) && (21)
\end{aligned}$$

の 6 つの拘束条件上で、$\Delta_1(T)$、$\Delta_1(H)$、$X(H)$、$X(T)$、$V_0$、$\Delta_0$ について解く。

$X_0$、$\Delta_0$ は $N=1$ の場合と同様に解ける。

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{1+r}\left(\tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T)\right) && (22)\\
\Delta_0 &= \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} && (23)
\end{aligned}$$

where

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} \tag{24}$$

次に eq.(18)−eq.(19) を計算する。

$$\begin{aligned}
V_2(T,H) - V_2(T,T) &= \Delta_1(T)S_2(T,H) - \Delta_1(T)S_2(T,T) && (25)\\
\Rightarrow \Delta_1(T) &= \frac{V_2(T,H) - V_2(T,T)}{S_2(T,H) - S_2(T,T)} && (26)
\end{aligned}$$

eq.(18) を $V_1(T)$ について解く。

$$\begin{aligned}
V_2(T,H) &= \Delta_1(T)S_2(T,H) + (1+r)(V_1(T) - \Delta_1(T)S_1(H)) && (27)\\
\Rightarrow V_2(T,H) &= \Delta_1(T)\left\{S_2(T,H) - (1+r)S_1(H)\right\} + (1+r)V_1(T) && (28)\\
\Rightarrow V_1(T) &= \frac{1}{1+r}\left[V_2(T,H) - \Delta_1(T)\left\{S_2(T,H) - (1+r)S_1(H)\right\}\right] && (29)
\end{aligned}$$

eq.(26)、および $S_2(T,H) = uS_1(T)$、$S_2(T,T) = dS_1(T)$ を代入する。

$$\begin{aligned}
V_1(T) &= \frac{1}{1+r}\left[V_2(T,H) - \frac{V_2(T,H) - V_2(T,T)}{S_2(T,H) - S_2(T,T)}\left\{S_2(T,H) - (1+r)S_1(T)\right\}\right] && (30)\\
&= \frac{1}{1+r}\left[V_2(T,H) - \frac{V_2(T,H) - V_2(T,T)}{uS_1(T) - dS_1(T)}\left\{uS_1(T) - (1+r)S_1(T)\right\}\right] && (31)\\
&= \frac{1}{1+r}\left[V_2(T,H) - \frac{V_2(T,H) - V_2(T,T)}{u-d}(u-1-r)\right] && (32)\\
&= \frac{1}{1+r}\left[\frac{u-d-(u-1-r)}{u-d}V_2(T,H) + \frac{u-1-r}{u-d}V_2(T,T)\right] && (33)\\
&= \frac{1}{1+r}\left(\tilde{p}V_2(T,H) + \tilde{q}V_2(T,T)\right) && (34)
\end{aligned}$$

以上と同様に、$\Delta_1(H)$、$V_1(H)$ についても解ける。

$$\Delta_1(H) = \frac{V_2(H,H) - V_2(H,T)}{S_2(H,H) - S_2(H,T)} \tag{35}$$

$$V_1(H) = \frac{1}{1+r}\left(\tilde{p}V_2(H,H) + \tilde{q}V_2(H,T)\right) \tag{36}$$

---

### 1.3 $N$-period の場合

$$V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_{n+1}) = \Delta_n(w_1, w_2 \cdots w_n)S_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_{n+1}) + (1+r)(V_n - \Delta_n S_n(w_1, w_2 \cdots w_n)) \tag{37}$$

を要請するとき、次を満たすことを示す。

$$\Delta_n(w_1, w_2 \cdots w_n) = \frac{V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, H) - V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, T)}{S_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, H) - S_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, T)} \tag{38}$$

$$V_n(w_1, w_2 \cdots w_n) = \frac{1}{1+r}\left(\tilde{p}V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, H) + \tilde{q}V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, T)\right) \tag{39}$$

where

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} \tag{40}$$

eq.(37) について $W_{n+1} = H, T$ の場合は次のようになる。

$$\begin{cases} V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, H) = \Delta_n(w_1, w_2 \cdots w_n)S_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, H) + (1+r)(V_n - \Delta_n S_n) \\ V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, T) = \Delta_n(w_1, w_2 \cdots w_n)S_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, T) + (1+r)(V_n - \Delta_n S_n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta_n(w_1, w_2 \cdots w_n) = \frac{V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, H) - V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, T)}{S_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, H) - S_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_n, T)} \tag{41}$$

eq.(37) を次の通り変形する。

$$V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_{n+1}) = \Delta_n(w_1, w_2 \cdots w_n)S_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_{n+1}) + (1+r)V_n - (1+r)\Delta_n S_n \tag{42}$$

$$= \Delta_n(w_1, w_2 \cdots w_n)\left\{S_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_{n+1}) - (1+r)S_n\right\} + (1+r)V_n \tag{43}$$

$$\Rightarrow (1+r)V_n = V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_{n+1}) \tag{44}$$

$$-\Delta_n(w_1, w_2 \cdots w_n)\left\{S_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_{n+1}) - (1+r)S_n\right\} \tag{45}$$

$$V_n = \frac{1}{1+r}\left[V_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_{n+1}) - \Delta_n\left\{S_{n+1}(w_1, w_2 \cdots w_{n+1}) - (1+r)S_n\right\}\right] \tag{46}$$

eq.(41) を代入する。

$$V_n = \frac{1}{1+r} \tag{47}$$

$$\cdot\left[V_{n+1}(w_1, \cdots w_{n+1}) - \frac{V_{n+1}(w_1, \cdots w_n, H) - V_{n+1}(w_1, \cdots w_n, T)}{S_{n+1}(w_1, \cdots w_n, H) - S_{n+1}(w_1 \cdots w_n, T)}\left\{S_{n+1}(w_1, \cdots w_{n+1}) - (1+r)S_n\right\}\right] \tag{48}$$

$$= \frac{1}{1+r} \tag{49}$$

$$\cdot\left[V_{n+1}(w_1, \cdots w_{n+1}) - \frac{V_{n+1}(w_1, \cdots w_n, H) - V_{n+1}(w_1, \cdots w_n, T)}{uS_n(w_1, \cdots w_n) - dS_n(w_1 \cdots w_n)}\left\{j_{n+1}S_n(w_1, \cdots w_n) - (1+r)S_n\right\}\right] \tag{50}$$

$$= \frac{1}{1+r}\left[V_{n+1}(w_1, \cdots w_{n+1}) - \frac{V_{n+1}(w_1, \cdots w_n, H) - V_{n+1}(w_1, \cdots w_n, T)}{u-d}\left(j_{n+1} - 1 - r\right)\right] \tag{51}$$

(i)$w_{n+1} = H$ のとき

$$\begin{aligned}
V_n &= \frac{1}{1+r}\left[V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,H) - \frac{V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,H)-V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,T)}{u-d}(u-1-r)\right] && (52)\\
&= \frac{1}{1+r}\left[\left(1-\frac{u-1-r}{u-d}\right)V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,H) + \frac{u-1-r}{u-d}V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,T)\right] && (53)\\
&= \frac{1}{1+r}\left[\frac{1+r-d}{u-d}V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,H) + \frac{u-1-r}{u-d}V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,T)\right] && (54)\\
&= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,H) + \tilde{q}V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,T)\right] && (55)
\end{aligned}$$

(ii)$w_{n+1} = T$ のとき

$$\begin{aligned}
V_n &= \frac{1}{1+r}\left[V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,T) - \frac{V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,H)-V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,T)}{u-d}(d-1-r)\right] && (56)\\
&= \frac{1}{1+r}\left[\frac{1+r-d}{u-d}V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,H) + \left(1+\frac{d-1-r}{u-d}\right)V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,T)\right] && (57)\\
&= \frac{1}{1+r}\left[\frac{1+r-d}{u-d}V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,H) + \frac{u-1-r}{u-d}V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,T)\right] && (58)\\
&= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,H) + \tilde{q}V_{n+1}(w_1,\cdots w_n,T)\right] && (59)
\end{aligned}$$

以上より、題意は満たされる。