Seminar: Riemannscher Abbildungssatz

Daniil Demidov

02.12.2025

1 Einführung

Das Ziel ist, den Riemannschen Abbildungssatz zu beweisen. Das ist ein spannendes und auch ein ziemlich überraschendes Resultat der komplexen Analysis.

1.1 Wiederholung

Definition 1.1.1. Eine bijektive analytische Funktion $f : D_1 \to D_2$ heißt **konform**.

Eigenschaft 1.1.2. *Konforme Abbildungen bewahren Winkel, jedoch nicht zwangsläufig Abstände.*

Beweis. Vorheriger Vortrag und/oder [1]. □

Definition 1.1.3. Ein *Automorphismus* eines Gebietes D ist eine konforme Abbildung $f : D \to D$.

Notation 1.1.4 (Die Einheitskreisscheibe)**.** Wir bezeichnen mit $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe.

1.2 Motivation

Dieser Satz ist in der Physik von besonderem Interesse. Nämlich ist es eine wichtige Aufgabe, Flüssigkeitsströme auf Gebieten unterschiedlicher Geometrie zu verstehen. Insbesondere möchte man inkompressible Fluide und Strömungen, die lokal wirbelfrei und divergenzfrei sind, untersuchen.

Der Schwerpunkt des Seminars ist komplexe Analysis, also lassen wir die physikalischen Details weg. Wichtig ist es für uns, dass **solche Strömungen auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $R \neq \mathbb{C}$ genau den** (komplex konjugierten) **analytischen Funktionen $f : R \to \mathbb{C}$ entsprechen.**

Also möchte man alle solchen Strömungen auf $R(\neq \mathbb{C})$ verstehen, kann man sich auf Untersuchung aller analytischen Funktionen auf R beschränken. Der Riemannsche Abbildungssatz macht alles noch einfacher, denn er erlaubt, nur die analytischen Funktionen auf der Einheitskreisscheibe $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ zu betrachten, und garantiert, dass es eine konforme Transformation gibt. Das heißt, alle analytischen Funktionen auf U entsprechen allen wirbel- und divergenzfreien Strömungen auf einem beliebigen einfach zusammenhängenden Gebiet entsprechen.

2 Der Riemannsche Abbildungssatz

Satz 2.1 (R. Abbildungssatz)**.** *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $R \neq \mathbb{C}$ lässt sich konform auf die offene Einheitskreisscheibe U abbilden. Für ein beliebiges $z_0 \in R$ kann diese Abbildung $\varphi : R \to U$ mit $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) > 0$ gewählt werden. Dann ist φ eindeutig festgelegt.*

Korollar 2.2. *Alle von $\mathbb{C}$ verschiedenen zusammenhängenden Gebiete sind konform äquivalent.*

2.1 Hilfsaussagen

Lemma 2.1.1 (Lemma von Schwarz)**.** *Sei $f : U \to U$ analytisch mit $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in U$ und $|f(0)| = 0$. Dann gilt*

$$|f(z)| \leq |z| \text{ und } |f'(0)| \leq 1,$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $f(z) = e^{i\theta}z$ für ein $\theta \in [0, 2\pi)$.

Beweis. Analysis IV oder [1] Lemma 7.2. □

Lemma 2.1.2. *Die einzigen Automorphismen $f : U \to U$ mit $f(0) = 0$ sind durch $f(z) = e^{i\theta}z$ mit $\theta \in [0, 2\pi)$ gegeben.*

Beweis. Beide f und f^{-1} sind konform mit $f(0) = f^{-1}(0) = 0$. Daher gilt mit dem Lemma von Schwarz ([1], Theorem 7.2)

$$|f(z)| \leq |z| \text{ sowie } |f^{-1}(z)| \leq |z| \text{ für alle } |z| < 1.$$

Jedoch kann beides genau dann gelten, wenn $|f(z)| = |z|$. Wenden wir das Lemma von Schwarz noch einmal an, erhalten wir $f(z) = e^{i\theta}z$. □

Lemma 2.1.3. *Für ein $\alpha \in U$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $h : U \to U$ *bijektiv und analytisch,* $|h'(\alpha)| \geq |f'(\alpha)|$ *für alle* $f : U \to U$ *bijektiv und analytisch*

(ii) $h : U \to U$ *bijektiv und analytisch,* $h(\alpha) = 0$

(iii) $h = h_\alpha(z) = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$

Lemma 2.1.4. *Sei $\{f_n : D \to \mathbb{C}\}$ eine Folge analytischer Funktionen, wobei D offen ist und $f_n \to f$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von D. Dann gilt*

(i) f *ist analytisch auf* D

(ii) $f_n' \to f'$ *glm.,* $n \to \infty$ *(gleichmäßig)*

(iii) f_n *injektiv für alle* $n \implies f$ *ist entweder konstant oder injektiv.*

2.2 Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes (Satz 2.1)

Beweis. Seien $R(\neq \mathbb{C})$ ein beliebiges, aber festes einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in R$.

- **Eindeutigkeit:** Wir nehmen an, es existieren konforme Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2 : R \to U$ mit $\varphi_1(z_0) = \varphi_2(z_0) = 0$ und $\varphi_1'(z_0) > 0, \varphi_2'(z_0) > 0$. Dann ist $\Phi := \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ ein Automorphismus der Einheitskreisscheibe mit

$$\Phi(0) = \varphi_1(\underbrace{\varphi_2^{-1}(0)}_{=z_0 \text{ nach Annahme}}) = \varphi_1(z_0) = 0,$$

$$\Phi'(0) = \varphi_1'(\varphi_2^{-1}(0)) \cdot (\varphi_2^{-1})'(0) = \varphi_1'(z_0) \cdot \frac{1}{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(0))} = \frac{\varphi_1'(z_0)}{\varphi_2'(z_0)} > 0.$$

Mit Lemma 2.1.2 folgt $\Phi(z) = e^{i\theta}z, \theta \in [0, 2\pi)$, und also $\Phi'(0) = \underbrace{e^{i\theta}}_{\in\mathbb{R}} > 0$. Daraus folgt $\theta = 0$, folglich ist Φ die Identität. Somit gilt $\varphi_1 = \varphi_2$.

- **Existenz:** Jetzt konstruieren wir eine Abbildung $\varphi : R \to U$ mit
$$\varphi \text{ konform}, \;\; \varphi(z_0) = 0 \;\text{ und }\; \varphi'(z_0) > 0. \tag{1}$$
Die Konstruktion wird durch ein ähnliches Resultat motiviert: In Analysis IV wurde gezeigt, dass alle injektiven analytischen Abbildungen $h : U \to U$, die $|h'(\alpha)|$ für ein fixiertes $\alpha \in U$ maximieren, **genau** die Funktionen h mit $h(\alpha) = 0$ und $h(U) = U$ sind (und es stellte sich auch heraus, dass solche h genau von der Form $h_\alpha(z) = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$ sind, s. Lemma 2.1.3). Das sind (fast) genau die Eigenschaften, die wir von einem $\varphi : R \to U$ in (1) brauchen.

Diesen Ansatz möchten wir auch auf den Fall übertragen, wenn der Definitionsbereich nicht unbedingt U ist. Die Idee ist, den oben beschriebenen Ansatz zu „invertieren".

Wir definieren $\mathcal{F} := \{f : R \to U \mid f \text{ injektiv und analytisch}, f'(z_0) > 0\}$.

Behauptung 1: Die Lösung φ (falls sie existiert!) des Maximierungsproblems $|\varphi'(z_0)| = \max_{\hat\varphi\in\mathcal{F}}|\hat\varphi'(z_o)|$ ist bijektiv (und also insbesondere konform) und $\varphi(z_0) = 0$.

Behauptung 2: Die Lösung des obengenanntes Maximierungsproblems existiert, d.h. $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\sup_{f\in\mathcal{F}}|f'(z_0)| = M < \infty$ und es existiert $\varphi \in \mathcal{F}$ mit $|\varphi'(z_0)| = M$.

Zunächst beweisen wir die erste Behauptung, denn sie ist konzeptuell wichtig. Die zweite ist technisch und ziemlich aufwändig.

- Z.z.: $\varphi(z_0) = 0$. Sei also $\varphi \in \mathcal{F}$ mit
$$|\varphi'(z_0)| = M = \sup_{f\in\mathcal{F}}|f'(z_0)|. \tag{2}$$
Nach Konstruktion sind die ersten Ableitungen aller Funktionen in $\mathcal{F}$ reel (und positiv), also wir können die Betragsstriche im Folgenden weglassen.
Angenommen $\varphi(z_0) = \alpha, 0 < |\alpha| < 1$. Dann ist
$$f : R \to U,\;\; f(z) = h_\alpha(\varphi(z)) = \frac{\varphi(z) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\varphi(z)} \tag{3}$$
analytisch und injektiv (da h_α diese Eigenschaften nach Ana IV besitzt), daher $f \in \mathcal{F}$ mit
$$f'(z_0) = \frac{\varphi'(z_0)}{1 - |\alpha|^2} > \varphi'(z_0) \tag{4}$$
was der Bedingung (2) widerspricht. Daraus folgt $\varphi(z_0) = 0$.
- Z.z.: φ ist surjektiv. Dazu nehmen wir an, dass das nicht der Fall ist, also es existiert ein $\omega \in U : \varphi(z) \neq \omega$ für alle $z \in R$. O.B.d.A. gilt $\omega = -t^2e^{i\theta}, 0 < t < 1$.
Jetzt machen wir eine ähnliche Konstruktion wie oben, um zu einem Widerspruch zu kommen.
Wir fangen mit $g(z) := e^{-i\theta}\varphi(z)$ an. Klar ist $g(R) \subset U$ mit $g(z_0) = 0$ (s.o.) und $|g'(z_0)| = |e^{-i\theta}|\;\varphi'(z_0) = \varphi'(z_0)$. Nach Konstruktion gilt $g(z) \neq -t^2$ für alle $z \in R$. Setze
$$f_1 = (h_{-t^2} \circ g) : R \to U. \tag{5}$$
Das heißt
$$f_1(z) = \frac{g(z) + t^2}{1 + t^2g(z)}, \tag{6}$$
und $f_1(z_0) = t^2$. Da $g(z) \neq -t^2$ für alle z ist, ist $f_1(z) \neq 0$, und daher ist

$$f_2(z) = \sqrt{f_1(z)} \tag{7}$$

wohldefiniert und analytisch mit $f_2(z) = t$. Jetz wenden wir h_α wider mit $\alpha = t$ an, sodass

$$f_3(z) = h_t(f_2(z)) = \frac{f_2(z) - t}{1 - t f_2(z)} \tag{8}$$

injektiv und analytisch ist. Berechnen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} f_1'(z_0) &= g'(z_0)(1 - t^4) \\ f_2'(z_0) &= \frac{f_1'(z_0)}{2\sqrt{f_1(z_0)}} = f_1' \frac{z_0}{2t} \\ f_3'(z_0) &= \frac{f_2'(z_0)}{1 - t^2} \end{aligned} \tag{9}$$

und setzen alles zusammen, so erhalten wir

$$|f_3'(z_0)| = |\frac{g'(z_0)(1 + t^2)}{2t}| > |g'(z_0)| = \varphi'(z_0), \tag{10}$$

denn $1 + t^2 > 2t, 0 < t < 1$. Dann hätten wir eine Funktion $f = e^{i\theta} f_3 \in \mathcal{F}$ mit $|f'(z_0)| > \varphi'(z_0)$. Das ist ein Widerspruch. Also φ ist surjektiv, also bijektiv.

Seit einigen Jahrzehnten hätten wir aufgehört. Obwohl die Behauptung 1 klar und offensichtlich ist, muss man sie auch beweisen. Das ist ein Fehler, den man in der Geschichte der Mathematik sehr oft gemacht hat, den wir aber vermeiden müssen. Also fangen wir mit der Existenz einer Lösung des Maximierungsproblem an.

Zuerst muss man zeigen, dass die Definition von $\mathcal{F}$ Sinn macht, d.h. dass die Menge nicht leer ist. Also wir brauchen eine injektive analytische Funktion $f : R \to U$ mit $f'(z_0) > 0$. D.h. es muss $|f(z)| < 1$ für alle $z \in R$ gelten.

Da $R \neq \mathbb{C}$, existiert ein $\rho_0 \in R^C$. R ist einfach zusammenhängend, daher ist

$$g(z) := \sqrt{\frac{z - \rho_0}{z_0 - \rho_0}}. \tag{11}$$

wohldefiniert und analytisch mit $g(z_0) = 1$.

Behauptung: Es existiert ein Sicherheitsabstand $\eta > 0$ von -1, d.h. $|g(z) + 1| > \eta$ für alle $z \in R$.

Beweis: Wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine Folge $\{\xi_n\} \subset R$ mit $g(\xi_n) \to -1$, also

$$\frac{z - \rho_0}{z_0 - \rho_0} \to 1 \tag{12}$$

und somit $\xi_n \to z_0$. Wegen Stetigkeit von g gilt aber $g(\xi_n) \to g(z_0) = 1$. Das ist ein Widerspruch.

Also wir können eine durch 1 beschränkte Funktion $f(z) = \frac{\eta}{g(z)+1}$ konstruieren. Offensichtlich ist f injektiv mit $f(R) \subset U$. Daher $f \in \mathcal{F}$.

Jetzt gehen wir weiter und zeigen die Existenz einer Lösung von

$$|\varphi'(z_0)| = M = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|. \tag{13}$$

Da R offen ist, existiert ein Disk $D(z_0; 2\delta) \subset R$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{F}$ die folgende Abschätzung (M-L, Ana IV):

$$0 < |f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;\delta)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{\delta}. \tag{14}$$

Daher existiert das Supremum $M > 0$ in (13).

Wähle eine Funktionenfolge $\{f_1, f_2, ...\} \subset \mathcal{F}$ so, dass $f'(z_0) \to M$ für $z \to \infty$. Wir möchten eine Teilfolge $\{\varphi_n\} \subset \{f_n\}$, die gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von R konvergiert. Dann wäre φ insbesondere analytisch (Ana IV), und daher genau die erwünschte Funktion.

Dazu sei $\{\xi_n\}$ eine dichte Teilmenge von R (z.B. alle Punkte mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$). Da $\{f_n(\xi_1)\}$ als eine Folge von Zahlen beschränkt ist (Bilder von allen f_n sind Teilmengen von U, was offensichtlich Beschränkt ist), existiert eine Teilfolge $\{f_{1n}\}$ von $\{f_n\}$, sodass $f_{1n}(\xi_1)$ gegen einen Wert in U konvergiert. Also wir setzen $\varphi(\xi_1) := \lim_{n\to\infty} f_{1n}(\xi_1)$.

Ähnlicherweise existiert eine Teilfolge $\{f_{2n}\}$ von $\{f_{1n}\}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_{2n}(\xi_2) \in U$. Also $\varphi(\xi_2) := \lim_{n\to\infty} f_{2n}(\xi_2)$. Dann konvergiert $f_{2n}(\xi_j)$ für beide $j \in \{1, 2\}$.

Induktiv erhalten wir eine Folge von Teilfolgen $\{\{f_{kn}\}_{n=1}^{\infty}\}_{k=1}^{\infty}$, sodass $\{f_{kn}\}_n$ für ein beliebiges festes k auf $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\}$ gegen $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), .., \varphi(\xi_k)$ konvergiert.

Wir nehmen die Diagonalfolge $\{f_{nn}\}$ und definieren $\varphi_n := f_{nn}$. Dann konvergiert φ_n gegen φ.

Jetzt haben wir eine Funktionenfolge $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{F}$, die gegen eine Funktion φ mit (13) konvergiert. Es bleibt noch zu zeigen, dass φ auch in $\mathcal{F}$ liegt.

Soweit ist nur die Konvergenz auf einer dichten Teilmenge von R bewiesen. Wir brauchen aber, dass φ_n auf *ganz* R gegen φ konvergiert, insbesondere gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von R.

Sei $K \subset R$ kompakt. Man beobachtet, dass K eine endliche Überdeckung von **geschlossenen** Kreisscheiben in R besitzt. Das heißt, o.B.d.A kann man annehmen, dass K eine kompakte Kreisscheibe in R ist. Es ist klar, dass der Abstand $d(K, R^C)$ von K zu einer geschlossenen Menge R^C positiv ist, also sei $d(K, R^C) =: 2d > 0$. Da $|\varphi_n| \leq 1$, kriegen wir für alle $z \in K$:

$$|\varphi_n'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{C(z;d)} \frac{\varphi_z(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi d}{d^2} = \frac{1}{d} \tag{15}$$

und

$$|\varphi_n(z_1) - \varphi_n(z_2)| = \left| \int_{z_1}^{z_2} \varphi_n'(z_0) dz \right| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{d}. \tag{16}$$

Das heißt, für alle $\varepsilon > 0$ und **alle** $n \in \mathbb{N}$

$$|z_1 - z_2| \leq \varepsilon d \Longrightarrow |\varphi_n(z_1) - \varphi_{n(z_2)}| \leq \varepsilon. \tag{17}$$

Wähle ein $z \in K$ und ein ξ_k mit $|\xi_k - z| < \frac{\varepsilon d}{3}$. Die Zahlenfolge $\{\varphi_n(\xi_k)\}_n$ ist Cauchy, daher kann man n, m so wählen, dass $|\varphi_n(\xi_k) - \varphi_m(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Mir der zweimal angewendeten Dreiecksungleichung sieht man, dass

$$\begin{aligned} |\varphi_n(z) - \varphi_m(z)| &\leq |\varphi_n(z) - \varphi_n(\xi_k)| + |\varphi_n(\xi_k) - \varphi_m(\xi_k)| + |\varphi_m(z) - \varphi_m(\xi_k)| \\ &< \varepsilon \end{aligned} \tag{18}$$

Also die Folge $\{\varphi_n(z)\}$ ist Cauchy für alle $z \in K$. Das impliziert die punktweise Konvergenz von φ_n auf K. Außerdem ist die Grenzfunktion φ stetig, denn es gilt für alle $z_1, z_2 \in R$ mit $|z_1 - z_2| < \varepsilon d$, dass

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| = \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(z_1) - \varphi_n(z_2)| < \varepsilon. \tag{19}$$

Der letzte (und der schönste!) Schritt ist nachzuweisen, dass die Konvergenz gleichmäßig auf K ist. Der Argument ist standart und geht wie folgt: Sie $\varepsilon > 0$. Wir nehmen die folgende Überdeckung von K:

$$\begin{gathered} S_j := \{z \in K : |\varphi_n(z) - \varphi(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n > j\}, \\ K \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j. \end{gathered} \tag{20}$$

Wegen (16) sind S_j offen. K ist kompakt, also es existiert eine eindliche Teilüberdeckung

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} S_j. \tag{21}$$

Dann gilt nach der Wahl von N und Konstruktion von S_j, dass $|\varphi_n(z) - \varphi(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in R, n > N$. Das impliziert die glm. Konvergenz auf kompakten Teilmengen von R. Daher ist φ nach Lemma 2.1.4 analytisch mit

$$\varphi'(z_0) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n'(z_0) = M > 0. \tag{22}$$

Damit ist φ nicht konstant und hat die erforderten Eigenschaften. $\square$

Bibliografie

[1] J. Bak und D. J. Newman, *Complex Analysis*, 3. Aufl. in Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 2010.