Definition 1.1.1. Eine bijektive analytische Funktion $f : D_1 \to D_2$ heißt **konform**.

Eigenschaft 1.1.2. *Konforme Abbildungen bewahren Winkel, jedoch nicht zwangsläufig Abstände.*

Beweis. Vorheriger Vortrag und/oder [1]. $\square$

Definition 1.1.3. Ein *Automorphismus* eines Gebietes D ist eine konforme Abbildung $f : D \to D$.

Notation 1.1.4 (Die Einheitskreisscheibe)**.** Wir bezeichnen mit $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe.

Lemma 2.1.1 (Lemma von Schwarz)**.** *Sei $f : U \to U$ analytisch mit $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in U$ und $|f(0)| = 0$. Dann gilt*

$$|f(z)| \leq |z| \text{ und } |f'(0)| \leq 1,$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $f(z) = e^{i\theta} z$ für ein $\theta \in [0, 2\pi)$.

Beweis. Analysis IV oder [1] Lemma 7.2. $\square$

Lemma 2.1.2. *Die einzigen Automorphismen $f : U \to U$ mit $f(0) = 0$ sind durch $f(z) = e^{i\theta} z$ mit $\theta \in [0, 2\pi)$ gegeben.*

Beweis. Beide f und f^{-1} sind konform mit $f(0) = f^{-1}(0) = 0$. Daher gilt mit dem Lemma von Schwarz ([1], Theorem 7.2)

$$|f(z)| \leq |z| \text{ sowie } |f^{-1}(z)| \leq |z| \text{ für alle } |z| < 1.$$

Jedoch kann beides genau dann gelten, wenn $|f(z)| = |z|$. Wenden wir das Lemma von Schwarz noch einmal an, erhalten wir $f(z) = e^{i\theta} z$. $\square$

Lemma 2.1.3. *Für ein $\alpha \in U$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $h : U \to U$ *bijektiv und analytisch,* $|h'(\alpha)| \geq |f'(\alpha)|$ *für alle* $f : U \to U$ *bijektiv und analytisch*

(ii) $h : U \to U$ *bijektiv und analytisch,* $h(\alpha) = 0$

(iii) $h = h_\alpha(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}$

Lemma 2.1.4. *Sei $\{f_n : D \to \mathbb{C}\}$ eine Folge analytischer Funktionen, wobei D offen ist und $f_n \to f$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von D. Dann gilt*

(i) f *ist analytisch auf* D

(ii) $f_n' \to f'$ *glm.,* $n \to \infty$ *(gleichmäßig)*

(iii) f_n *injektiv für alle* $n \implies f$ *ist entweder konstant oder injektiv.*