Задание 3 <u>Поиск решения многокритериальной задачи линейного программирования (ЗЛП) методами «Аддитивной свертки» и «Последовательных уступок»</u>

Цель: *Моделирование построения оптимального объемного плана производства на основе решения многокритериальной (векторной) задачи оптимизации.*

Дано: 1. Производственное предприятие выпускает готовую продукцию в ассортименте (например, 2-х типов – шкафы и тумбы, $j = 1, 2$).

2. Предприятие располагает текущими запасами ресурсов, необходимых для выпуска указанной готовой продукции (например, ДСП, стекло, время занятых в производстве сотрудников (труд), $i = 1, 2, 3$). Причем, согласно технологической документации, известно количество видов ресурсов, необходимое для выпуска единицы каждого вида продукции - a_{ij}. Матрица $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$, где $m = 3; n = 2$, называется матрицей *калькуляции* или матрицей *спецификации.*

3. Предприятие периодически (например, еженедельно) составляет объемный план выпуска продукции (производственную программу - x_j, т.е. $\bar{x} = [x_1 \quad x_2]^T$) с учетом наличия текущих запасов ресурсов по видам - a_{i0}. Причем количество ресурсов каждого вида, необходимое для реализации производственной программы, не должно превышать текущих запасов и быть неотрицательным:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq a_{i0}, \quad \text{где } i = 1, 2, 3; \qquad (1)$$

$$x_j \geq 0, \quad \text{где } j = 1, 2. \qquad (2)$$

Этими неравенствами задается область допустимых решений Ω.

4. Выпущенная продукция продается на рынке, в результате чего предприятие получает:
- маржинальную прибыль (далее - прибыль) в объеме c_{1j} от продажи единицы продукции j-го вида;
- выручку в объеме c_{2j} от продажи единицы продукции j-го вида;
- при этом известна себестоимость c_{3j} единицы продукции j-го вида.

5. Цель предприятия при планировании объема выпуска (производственной программы) на очередной период заключается в том, чтобы удовлетворить всем трем ($K = 3$) критериям оптимальности:
- максимизировать всю прибыль L_1 от продажи планируемой партии готовой продукции $\bar{x}$:

$$L_1(\bar{x}) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega} L_1(\bar{x})\,; \qquad (3)$$

- максимизировать всю выручку L_2 от продажи планируемой партии готовой продукции $\bar{x}$:

$$L_2(\bar{x}) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega} L_2(\bar{x})\,; \qquad (4)$$

- минимизировать всю себестоимость L_3 от продажи планируемой партии готовой продукции $\bar{x}$:

$$L_3(\bar{x}) = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega} L_3(\bar{x}). \qquad (5)$$

Найти: 1. Оптимальные (в смысле трех критериев) значения объемного плана производства $\bar{x}^{opt} = \left[x_1^{opt} \quad x_2^{opt}\right]^T$ в двух вариантах - воспользовавшись методами «Аддитивной свертки» и «Последовательных уступок».

2. Работу выполнить на одном из языков программирования (Python, C#, Pascal, и т.п. для Windows), предварительно построив Excel-макет.

<u>Алгоритм выполнения задания:</u>

1. Решение многокритериальной задачи объемного планирования методом «Аддитивной (линейной) свертки».

1.1. Сформировать исходные данные для своего варианта задачи. Для этого выполнить генерацию параметров задачи как равномерно распределенных в следующих диапазонах: $a_{ij} \in [2; 5]$; $a_{i0} \in [200; 700]$; $c_{1j} \in [50; 250]$; $c_{2j} \in [200; 1400]$; $c_{3j} \in [70; 300]$;

1.2. Решить <u>прямую ЗЛП</u> (т.е. найти оптимальные значения переменных x_1, x_2 и соответствующее им значение целевой функции $L(x_1, x_2)$) для каждого из трех критериев *отдельно* (прибыль, выручка, себестоимость).

1.3. Построить: графики, отражающие ограничения; одну из линий уровня каждой из целевых функций; точки, соответствующие оптимальным решениям по каждому из 3-х критериев; область допустимых решений (ОДР).

1.4. Решить многокритериальную ЗЛП методом «Линейной свертки» критериев (целевых функций) <u>с равными весами</u> (min со знаком минус). Отобразить на графике полученное решение.

1.5. Пункт 1.4 выполнить для разных весов (в сумме равных 1), как равномерно распределенных в интервале [0,1; 0,9].

2. Решение многокритериальной задачи объемного планирования методом «Последовательных уступок».

2.1. Использовать исходные данные, полученные в п.1.1.

2.2. Целевые функции (ЦФ) имеют следующий порядок их важности (предпочтительности): ЦФ2, ЦФ1, ЦФ3. Т.е. ЦФ2 – наиболее важная, ЦФ3 – наименее важная.

2.3. Решить многокритериальную ЗЛП методом «Последовательных уступок», с величиной (процентом от оптимального значения целевой функции) уступки составляющей величину, распределенную равномерно в интервале [2; 7].

2.4. Отобразить на графике ограничения и решения, полученные по шагам алгоритма.

<u>**Из теории**</u>

1. *Метод «Линейной (аддитивной) свертки» ЦФ*.

Единый скаляризованный критерий примет вид:

$$L(\bar{\beta},\bar{x}) = \sum_{k=1}^{K} \beta_k L_k(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{K} \beta_k c_{kj} \right) x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j(\bar{\beta})\, x_j \qquad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{K} \beta_k = 1, \qquad (7)$$

где β_k – весовой коэффициент *k*-го критерия (целевой функции).

1. *Метод последовательных уступок*.

На **1-м этапе**, как и в <u>методе главного критерия</u>, частные критерии (<u>*целевые показатели*</u>) ранжируются по важности, например:

$$L_1(\bar{x}) \succ L_2(\bar{x}) \succ \cdots \succ L_k(\bar{x}). \qquad (8)$$

На **2-м этапе** <u>для самого важного критерия</u> решается задача оптимизации:

$$\bar{x}_{opt\_1} = arg \max_{\bar{x}\in\Omega} L_1(\bar{x}). \qquad (9)$$

На **3-м этапе** для самого важного критерия (здесь $L_1(\bar{x})$) назначается ***уступка*** – величина ΔL_1, на которую допустимо его ухудшение, в результате чего формируется ограничение:

$$L_1(\bar{x}) \ge L_{1_{opt}} - \Delta L_1, \qquad (10)$$

которое используется на следующем этапе (аналогичном 2-му этапу).

На **4-м этапе** <u>для следующего по важности критерия</u> решается задача оптимизации:

$$\bar{x}_{opt\_2} = arg \max_{\bar{x}\in\Omega} L_2(\bar{x}) \qquad (11)$$

при ограничении:

$$L_1(\bar{x}) \ge L_{1_{opt}} - \Delta L_1. \qquad (12)$$

На **5-ом этапе** для $L_2(\bar{x})$ назначается уступка ΔL_2 и формируется очередное ограничение:

$$L_2(\bar{x}) \ge L_{2\_opt} - \Delta L_2. \qquad (13)$$

На **6-м этапе** <u>для следующего по важности критерия</u> решается задача оптимизации:

$$\bar{x}_{opt\_3} = arg \max_{\bar{x}\in\Omega} L_3(\bar{x}) \qquad (14)$$

при ограничениях:

$$L_1(\bar{x}) \ge L_{1_{opt}} - \Delta L_1 \text{ и } L_2(\bar{x}) \ge L_{2_{opt}} - \Delta L_2. \qquad (15)$$

И т.д. **до последнего по важности критерия** $L_k(\bar{x})$.

==

Материалы к Заданию 3 на Яндекс.Диске:

https://disk.yandex.ru/d/TYiFXji2yGMI2g