

Aulas

Norah Jones

2024-10-02

Índice

Preface

This is a Quarto book.

To learn more about Quarto books visit <https://quarto.org/docs/books>.

1 Introdução: Problemas de interesse

- Encontrar soluções de equações não lineares onde não é possível obter uma solução analítica;
- Obter integrais que apresentam uma forma complicada que inviabiliza encontrar uma solução analítica;
- Gerar artificialmente amostras a partir de modelos estatísticos;
- Aplicar a metodologia estudada na resolução de problemas de inferência.

Parte I

Solução Numérica de Equações

Motivação - O Estimador de Máxima Verossimilhança

No que segue o termo densidade, significa ou uma densidade de probabilidade (caso absolutamente contínuo) ou uma função de probabilidade (caso discreto).

Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f(\cdot|\theta)$, $\theta \in \Theta$, onde $f(\cdot|\theta)$ é uma densidade, θ é um parâmetro que desejamos estimar e Θ é o espaço paramétrico;

Suponha que observamos os valores x_1, \dots, x_n . A função de verossimilhança é definida por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta), \theta \in \Theta$$

A função de log-verossimilhança é dada por:

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i|\theta), \theta \in \Theta$$

Seja $\hat{\theta} \in \Theta$ um valor do parâmetro que maximiza a função de verossimilhança, ou seja, tal que

$$L(\hat{\theta}) \geq L(\theta), \text{ para todo } \theta \in \Theta$$

Então dizemos que $\hat{\theta}$ é uma estimativa de máxima verossimilhança de θ .

A interpretação no caso discreto: é mais provável que $\hat{\theta}$ tenha gerado os dados x_1, \dots, x_n

Como $\hat{\theta}$ depende da amostra, escrevemos $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$. Neste caso, $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ é o estimador de máxima verossimilhança (EMV).

Nota

- Para cada amostra observada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$
- A definição nos diz que $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ é um ponto de máximo global. Podemos ter nenhum ou mais de um máximo global
- Suponha que Θ é um intervalo e que o ponto $\hat{\theta}$ é um ponto interior de Θ que é ponto de máximo de L , podendo ser um máximo local. Se L tem derivada em $\hat{\theta}$, então $L'(\hat{\theta}) = 0$. Ou seja, $\hat{\theta}$ é um ponto estacionário de L (também dizemos $\hat{\theta}$ é um zero da função L'). Este resultado é conhecido no Cálculo como Teorema de Fermat para Pontos Estacionários.
- Ou seja, sob as condições acima, se $\hat{\theta}$ for EMV, então a derivada de L se anula neste

ponto. A recíproca pode não ser verdadeira.

Assim, em muitos casos encontrados na prática, encontrar o EMV é um problema relacionado a encontrar soluções em θ para a equação $L'(\hat{\theta}) = 0$ ou $l'(\theta) = 0$.

Por exemplo, considere uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n proveniente de uma distribuição $\exp(\theta)$. Assim, cada X_i tem densidade de probabilidade.

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta \exp(-\theta x), & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

O espaço paramétrico é $\Theta = (0, \infty)$. Temos então a seguinte função de log-verossimilhança:

$$\ell(\theta) = n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^n x_i, \quad \theta > 0,$$

implicando em

$$\ell'(\theta) = n/\theta - \sum_{i=1}^n x_i, \quad \theta > 0.$$

A solução da equação $\ell'(\theta) = 0$ é dada por $\hat{\theta} = n / \sum_{i=1}^n x_i$

A função $S(\theta) = \ell'(\theta)$, $\theta \in \Theta$, é denominada *função escore*. Assim, em geral, encontrar o EMV é equivalente a resolver em θ a equação $S(\theta) = 0$.

No exemplo acima obtivemos uma solução analítica para esta equação. Mas em algumas situações isto não é possível.

Considere o seguinte exemplo (Bolfarine & Sandoval, 2010): sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f(\cdot|\theta)$, onde

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \theta x), & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Onde $-1 < \theta < 1$ verifique que $f(\cdot|\theta)$ é uma densidade.

Então é possível mostrar que

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + \theta x_i}.$$

No entanto, não há solução analítica para $S(\theta) = 0$. Os gráficos a seguir mostram o comportamento das funções de log-verossimilhança (à esquerda) e escore (à direita). A amostra utilizada foi gerada artificialmente a partir do modelo, com $n = 40$ e $\theta = -0,35$ (como gerar esta amostra? voltaremos em breve a este assunto).

2 Método da Bisseção

asdajhduahd

3 Summary

In summary, this book has no content whatsoever.