Хакимжанов Сабит

Директор, Департамент финансовой стабильности, НБ РК

Мустафин Ерулан

Заместитель Директора, Депратмент финансовой стабильности, НБ РК

Кубенбаев Олжас

Депратмент финансовой стабильности, НБ РК

Атабек Дулат

Депратмент финансовой стабильности, НБ РКя

Построение безрисковой кривой доходности Казахстана

В этой статье дается описание логики алгоритма построения параметрической кривой доходности для рынка ГЦБ Казахстана согласно модели Нельсона-Зигеля, с процедурами адаптивного формирования обучающей выборки.

Открытый программный код построения кривой на языке Python и искусственные тестовые данные в формате информационной системы IRIS опубликованы на общедоступном ресурсе github.com (https://github.com/DFSResearch/FinancialStability_Lab) в рамках лицензии GNU GPL 3.0.

1) Подготовка данных и методика взвешивания

В мировой практике при низкой ликвидности рынка применяется определенные критерии для включения сделок в выборку U, т.е. база для расчета кривой доходности формируется по определенным правилам. Например, в выборку попадают сделки заключенные за определенный период, более чем один день, по бумагам с определенным уровнем ликвидности в зависимости от срока до погашения, или сделки первичного рынка с достаточным уровнем коэффициента покрытия и т.д.

Учитывая крайне неоднородную структуру ликвидности рынка ГЦБ Казахстана, мы предлагаем формировать выборку сделок U разбиением по срочности бумаг по сделкам с помощью механизма адаптивного формирования (см. Раздел 5). Таким образом, $U = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ является композицией подвыборок. Каждая подвыборка U_i соответствует определенному диапазону сроков до погашения и формируется адаптивно в зависимости от условий ликвидности в этом диапазоне срочности. Так как подвыборка U_i может формироваться из сделок заключенных за достаточно продолжительный период, для учета информационной ценности в каждой подвыборке U_i мы будем взвешивать сделки по давности, используя экспоненциальный коэффициент затухания. Вес наблюдения также будет учитывать объем.

Пусть A_{U_i} – временной период подвыборки U_i. В зависимости от давности сделки $u \in U_i$ дисконтируем ее объем следующим образом:

$$\bar{v}_u = v_u \cdot exp\left(\frac{s_u * ln(\rho)}{A_{U_i}}\right),$$

где ρ – предварительно заданный коэффициент дисконтирования объема при максимальном сроке давности (т.е. для периода A_{U_i}), s_u – дата сделки, v_u – объем сделки.
После нормирования получаем вес w_u:

$$w_u = \frac{\bar{v}_u}{\sum_{u \in U_i} \bar{v}_u}$$

Таким образом, каждая сделка будет нормализирована по объему относительно совокупного объема сделок в своей подвыборке U_i. Такая нормировка более предпочтительна вместо нормализации по совокупному объему всей выборки U . Причиной этому служат сделки на рынке нот НБК, как правило, имеющие более высокие объемы, поэтому они начинают приобретать дополнительный вес, который вкупе с их более высокой ликвидностью может дать избыточный вес таким сделкам. Что приведет к тому, что поведение кривой станет, в значительной мере, задаваться сделками на рынке нот НБК.

2) Основные типы временной структуры ставок

В международной практике выделяют три представления временной структуры безрисковых процентных ставок. Из них следующие три являются каноническими представлениями:

- функция дисконтирования D - определяет фактор дисконтирования будущего потока платежей в зависимости от срока погашения;
- кривая спот-доходности Z - доходность дисконтных облигаций (с нулевым купоном) в зависимости от срока погашения;
- форвардная кривая F- определяет форвардные процентные ставки, т.е. мгновенные ставки, ожидаемые в будущем на соответствующем сроке.

Все три канонических представления временной структуры процентных ставок эквивалентны.

В непрерывном случае взаимосвязь выражается следующим образом:

$$Z(t) = \frac{1}{t}\int_0^t F(s)ds = -\frac{1}{t}\ln(D(t)) \tag{1}$$

$$D(t) = \exp(-\int_0^t F(s)ds) = \exp\left(-t \cdot Z(t)\right) \tag{2}$$

$$F(t) = \frac{\partial}{\partial t}\ln\left(-D(t)\right) = Z(t) + t \cdot Z'(t), \tag{3}$$

где $t -$ срок до погашения.

Наиболее распространенной формой представления временной структуры процентных ставок является спот–кривая.

3) Модель

Для низколиквидного рынка наиболее популярной является параметрическая модель Нельсона-Зигеля. Она имеет удобное аналитическое представление, малое число параметров (четыре), которые допускают интерпретацию в привычных для участников рынка терминах.

Модель Нельсона-Зигеля[1] описывает форвардные ставки F по срокам t следующей формулой:

$$F(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \beta_2 \frac{t}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{4}$$

где t – срок до погашения и $b = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)$ – оцениваемый вектор параметров.

Данная функция для мгновенных форвардных ставок с методом непрерывного начисления позволяет применить аналитические соотношения (1) – (3).
Тогда из (4) получаем спот-кривую:

$$Z(b,t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\frac{\tau}{t}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] - \beta_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{5}$$

И функцию дисконтирования:

$$D(b,t) = \exp\left(-t\left[\beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\frac{\tau}{t}\left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right\} - \beta_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\right) \tag{6}$$

4) Постановка задачи

[1] Nelson, C R, and A F Siegel (1987). Parsimonious modeling of yield curves. Journal of Business, 60, 473-89.

Основной характеристикой ценной бумаги с фиксированной доходностью, является ее денежный поток, который мы будем обозначать как $h(C,T)$, где $C = \{c_{1,\dots,}c_{N_h}\}$ – размеры денежного потока, $T = \{t_{1,\dots,}t_{N_h}\}$ – сроки до соответствующего платежа от даты расчета s.
В данном контексте мы рассматриваем задачу построения кривой доходности для некоторого эмитента. Понятие кривой доходности имеет смысл только для эмитента характеризующийся некоторой временной структурой доходности. В этом контексте теоретическую грязную цену бумаги $h(C,T)$ можно выразить через функцию дисконтирования как,

$$P(b,h) = \sum_{n=1}^{N_h} c_n\, D(b,t_n)$$

Задача построения спот-кривой $Z(b,t)$ заключается в нахождении оптимальных параметров $b = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)$, минимизирующие сумму взвешенных квадратов отклонений между теоретическими ценами бумаги и фактическими ценами сделок по этой бумаге.

Пусть $U-$ выборка сделок для построения кривой. Тогда каждую сделку $u \in U$ по бумаге h_u можно определить параметрами (s_u, p_u, v_u), где s_u – дата сделки, p_u – грязная цена сделки, v_u – объем сделки по бумаге h_u.

Целью оптимизации является нахождение таких параметров b, при которых теоретические цены $P(b,h_u)$ были как можно ближе к наблюдаемым ценам p_u по бумаге h_u. Тогда критерий оптимизации зададим как

$$\min_b \sum_{u\in U} w_u \left(p_u - P(b,h_u)\right)^2$$

где w_u - веса сделок, которые могут определяться различными способами, в зависимости от условий на рынке и поставленной задачи.

Альтернативой для минимизации суммы квадратов ошибок грязных цен является минимизация суммы квадратов ошибок доходностей. Дело том, что невзвешенная минимизация ошибок по цене может привести к довольно большим ошибкам доходности для коротких сроков до погашения из-за проблемы гетероседастичности: обобщенно, эластичность цены по отношению к доходности равна дюрации облигации. Оценивая каждую бумагу при равном весе независимо от ее дюрации, приводит к переоценке долгосрочных цен. Одним из методов решения этой проблемы является взвешивание ошибки цены по обратной дюрации. При этом необходимо заметить, что зависимость цены от процентной ставки является нелинейной, поэтому линеаризация этой зависимости с помощью дюрации может недостаточно точно отразить влияние процентных ставок. Также стоить отметить, что взвешивание сделок по обратной дюрации снижает значимость долгосрочных наблюдений. Это в условиях рынка с неравномерным распределением ликвидности на различных сроках может привести к снижению стабильности кривой.

Так как функциональная форма модели мгновенных форвардных ставок Нельсона-Зигеля допускает только один локальный максимум или минимум вдоль срока до погашения задача нахождения оптимальных параметров решается стандартными методами оптимизации. С помощью найденного вектора параметров b формируются форвардная кривая (4), спот-кривая доходности (5) и функция дисконтирования (6).

5) Механизм адаптивного построения выборки

Крайне неоднородная структура ликвидности рынка ГЦБ Казахстана относительно сроков до погашения вынуждает использовать определенные приемы по балансировке обучающей выборки для формирования кривой доходности. В этом разделе мы предлагаем адаптивный подход для решения проблем дисбаланса ликвидности озвученных в статье выше. Таким образом, успешная имплементация классической модели Нельсона-Зигеля возможна пока через специфические процедуры формирования обучающей выборки. При этом этот подход сходиться с классической моделью построения кривой с повышением ликвидности рынка.

Формирование выборки U и ее композиции состоит из двух этапов:

1) Пусть k – количество подвыборок[2], которое либо определяется эмпирически, либо процедурой оптимизации. Тем не менее, в силу высокой инертности структуры ликвидности по срочности ГЦБ, мы считаем достаточно определять k эмпирически. На основе исторических данных $\overline{U}^N$по сделкам за достаточно большой период N (например, $N = 180$ дней) формируется упорядоченная по возрастанию выборка T срочностей сделок из $\overline{U}^N$. Тогда разбиение $T = \{T_1, .., T_k\}$ определяется следующей минимизацией
$$\min_{t_i,t_j} \left|\overline{U}^N(T_i) - \overline{U}^N\left(T_j\right)\right| \quad \forall\, j, i \in [1 \dots k]$$
где t_i – граница диапазона срочности T_i, а $\overline{U}^N(T_i)$ – количество сделок в соответствующем диапазоне срочности.

2) После того, как были определенны диапазона срочности сделок T_i, формируется обучающая выборка $U = \{U_1, .., U_k\}$, где каждая подвыборка U_i строится итерационным методом. Пусть $\overline{U}^n$, $n = 1, ..N$, история сделок за n дней. Будем увеличивать исторический период $n = 1, ..N$, до момента, когда количество сделок $\overline{U}^n(T_i)$ не достигнет заданного параметра, определяющего минимальное количество наблюдений для каждой подвыборки U_i, либо когда n достигнет N. Затем присваиваем $U_i = \overline{U}^n(T_i)$.

[2] Эмпирически, оптимальное число разбиений может быть в пределах 2-4