

Análise e Transformação de Dados @ DEI-FCTUC

Ficha Prática nº 2 usando MATLAB

Autoria: Alberto Cardoso ©DEI2021/2022

editado: Bruno Leitão

Objetivo: Pretende-se adquirir competências para a análise de sinais de tempo contínuo e de tempo discreto, nomeadamente para análise das suas propriedades e para o cálculo da sua energia.

Exercícios:

Exercício 1. Pretende-se analisar o sinal de tempo contínuo $x_1(t) = 4\sin(5t)\cos(10t) + 12\cos(4t)^2$ ao longo do seu período fundamental.

Exercício 1.1 Determinar as frequências (linear e angular) fundamentais e o período fundamental de $x_1(t)$, tendo em conta a seguinte formulação de Fourier para sinais de tempo contínuo:

$$x_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m) .$$

```

In [ ]: %% primeiro passo transformar na formulação de Fourier

%% -- Rever relações trigonométricas
%% -- --  $\sin(a)\cos(b) = (\sin(a+b) + \sin(a-b))/2$ 
%% -- --  $\sin(a) = \cos((\pi/2) - a)$ 
%% -- --  $\cos(a) = \cos(-a)$ 
%% -- --  $\cos^2(a) = (1 + \cos(2a))/2$ 

%% -- --  $\cos(0) = 1$  (não esquecer!)

% segundo passo, encontrar a frequência angular fundamental,  $w_0$ , em rad/s
% [hint(slide 48): help GCD - maximo divisor comum]
%w0 =

% frequência linear fundamental,  $f_0$ , em Hz (slide 48)
%f0=

% período fundamental,  $T_0$ , em s
%T0=

% podemos escrever as equações usando "syms" - symbolic
%x1ts=

% expressão equivalente de  $x_1(t)$  conforme formulação de Fourier
% [hint: como somatório de  $\cos(m * w_0 * t + \theta_m)$ ]
%x1teqs=

```

```

In [ ]: %plot inline -w 1200
% obtenção e plot de  $x_1$  e  $x_{1eq}$ 

% Definir vector tempo
%tt=

% Substituir variável simbólica
% [hint: help subs]
%x1t=
%x1teq=

plot(tt,x1t,'-o',tt,x1teq,'-+')
xlabel('t [s]')
ylabel('x_1(t)')
title('x_1(t)=4sin(5t)cos(10t)+12cos(4t)^2')
legend('x1(t) pela expressão original', ...
'x1(t) pela expressão de Fourier','Location','northwest')

```

Exercício 1.2 Verificar a paridade do sinal $x_1(t)$.

```

In [ ]: %[hint: slide 42 - paridade -  $x(t)=x(-t)$ ]
%[hint2: help ==]

```

Exercício 1.3 Obter a expressão do sinal de tempo discreto $x_1[n]$ que resulta de $x_1(t)$ usando $t = nT_s$, em que T_s representa o período de amostragem com que o sinal de tempo contínuo $x_1(t)$ é amostrado.

```
In [ ]: %[hint: help subs]
```

Exercício 1.4 Determinar a frequência angular fundamental e o período fundamental de $x_1[n]$, tendo em conta a seguinte formulação de Fourier para sinais de tempo contínuo: $x_1[n] = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos[m\Omega_0 n + \theta_m]$.

```
In [ ]: % Tendo em conta que as frequências presentes no sinal x1(t)
% ver slide 49.

% frequência angular fundamental de x1[n], 0omega0, em rad (0omega0=w
0*Ts)
% [hint: gcd]
%0omega0=

% período fundamental de x1[n], N
%Ns =

% expressão equivalente de x1(t) conforme formulação de Fourier
% [hint: subs]
%x1neq=
```

Exercício 1.5 Representar no mesmo gráfico o sinal $x_1(t)$ para $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, considerando t com 1000 elementos e um traçado com linha contínua, e o sinal $x_1[n]$, considerando um período de amostragem (passo) $T_s = 0.1s$, num intervalo para n correspondente a $x_1(t)$ para $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ e a representação apenas das amostras.

```
In [ ]: % obtenção e plot de x1(t) , x1[n] e x1eq[n]
Tsample=
0omega0=
N=

nn=
x1n=
x1neq=

plot(tt,x1t,'-*',nn*Tsample,x1n,'o',nn*Tsample,x1neq,'+')
xlabel('t [s]')
title('x_1(t) e x_1[n]')
legend('x1(t)', 'x1[n]',...
'x1[n] pela expressão de Fourier','Location','northeast')
```

Exercício 2. Pretende-se calcular a energia de um sinal de tempo contínuo $x(t)$ num intervalo $t \in [t_i, t_f]s$.

Exercício 2.1 Escrever funções que permitam o cálculo da energia de $x(t)$ pelos métodos de integração numérica, regra dos trapézios e regra de Simpson (usando implementações próprias).

[hint:]

- Regra dos trapézios:

Quando se considera que a função a integrar é aproximada por um polinómio de grau 1 por intervalos, aplica-se a Regra dos trapézios que considera que $f(t)$ é um segmento de reta em cada subintervalo h .

A área de cada subintervalo será dada por $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \approx \frac{f(t_1) + f(t_2)}{2} h$.

A área total é dada por $\int_{t_1}^{t_n} f(t)dt \approx \int_{t_1}^{t_n} p(t)dt \approx \left(\frac{f(t_1) + f(t_n)}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} f(t_i) \right) h$.

- Regra de Simpson:

Quando se considera que a função a integrar é aproximada por um polinómio de grau 2 por intervalos, aplica-se a Regra de *Simpson* que considera que $f(t)$ é uma parábola em cada par de subintervalos $2h$, sendo necessários 3 pontos para o cálculo da área em cada iteração.

A área calculada em cada iteração será dada por $\int_{t_1}^{t_3} f(t)dt \approx \frac{h}{3} (f(t_1) + 4f(t_2) + f(t_3))$.

A área total é dada por $\int_{t_1}^{t_n} f(t)dt \approx \int_{t_1}^{t_n} p(t)dt \approx \frac{h}{3} \left(f(t_1) + f(t_n) + 4 \sum_{i \text{ par}} f(t_i) + 2 \sum_{i \text{ impar}} f(t_i) \right)$.

```
In [ ]: %%file trapezioVsym.m

function Int=trapezioVsym(fun,t1,tn,np)
% to_do
end
```

```
In [ ]: %%file simpsonVsym.m

function Int=simpsonVsymnp(fun,t1,tn,np)
% to_do
end
```

Exercício 2.2 Calcular os valores aproximados da energia do sinal $x_1(t)$ para o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ e usando a regra dos trapézios e a regra de Simpson.

2.2.1 Calcular o valor exato da energia obtida através do cálculo do integral simbólico para o mesmo intervalo.

2.2.2 Verificar a influência do passo (h) no erro, isto é, na diferença entre energia obtida usando cálculo numérico e obtida usando o integral exato.

2.2.3 Calcular o tempo de execução dos diferentes métodos.

```

In [ ]: % para calcular o tempo de um bloco de código [hint: tic, toc]

% inicializar variáveis
%to_do

% definir intervalo - vector
%inter=

% definir equação
%xlts=

% cálculo de integral; Valor exato da Energia
% [hint: help int]
%Exlt=

% escolha do nº de pontos a considerar
%np=;

% Calcular tempo de execução Regra dos Trapézios - iniciar

% Regra dos Trapezios
%ExltT=trapezioVsym(%to_do) )

% Calcular tempo de execução Regra dos Trapézios - parar

% calcular o erro entre o valor exacto e estimado pelo metodo dos t
rapezios
% [hint: abs]
%erro=

% Calcular tempo de execução Regra dos Simpson - iniciar

% Regra de Simpson
%ExltS=simpsonVsym(%to_do)

% Calcular tempo de execução Regra dos Simpson - parar

% calcular o erro entre o valor exacto e estimado pelo metodo dos S
impson
% [hint: abs]
%erro=

```

Exercício 2.3 Calcular a energia de $x_1[n]$ num intervalo para n correspondente a $t \in [-\pi/2, \pi/2]s$. Considerar $T_s = 0.1s$.

```
In [ ]: %Cálculo da energia do sinal x[n]
        % ver slide 53
        %Ts=
        %nn=

        %[hint: subs, x1ts]
        %x1n=

        %Valor da energia do sinal discreto
        %Ex1n=
```

Exercício 2.4 Calcular a energia dos seguintes sinais e comparar os valores obtidos entre si.

$x_2(t) = 6\cos(3t)\sin(4t)$ no intervalo $t \in [-\pi, \pi]s$ e no intervalo $t \in [-2\pi, 2\pi]s$.

$x_3(t) = 6\cos(3t - 3)\sin(4t - 4)$ no intervalo $t \in [-\pi, \pi]s$.

$x_4(t) = 3\cos(3t)\sin(4t)$ no intervalo $t \in [-\pi, \pi]s$.

In []:

In [3]: ! jupyter nbconvert --to html ATD2022_Ficha2_todo_w_hints.ipynb

```
[NbConvertApp] Converting notebook ATD2022_Ficha2_todo_w_hints.ipynb
to html
[NbConvertApp] Writing 432239 bytes to ATD2022_Ficha2_todo_w_hints.h
tml
```

In []: