

# Análise e Transformação de Dados

## Ficha Prática nº 6

Objetivo: Pretende-se ilustrar os conceitos de frequência e efetuar a análise de sinais periódicos pela Série de Fourier trigonométrica e complexa.

Linguagem de Programação:

- MATLAB (Symbolic Math, Signal Processing Toolboxes)
- Python (módulos: *numpy*, *sympy*, *random*, *scipy.signal*, *matplotlib.pyplot*)

Exercícios:

1. Pretende-se determinar e representar os coeficientes da Série de Fourier trigonométrica de um sinal periódico,  $x(t)$ , e apresentar graficamente o sinal original e o aproximado pela Série com um dado número de harmónicos.
  - 1.1. Para isso, escrever um *script* que efetue as seguintes operações:
    - 1.1.1. Pedir o valor do período fundamental,  $T_0$ , do sinal a analisar.
    - 1.1.2. Definir a sequência temporal  $t$ , durante um período, com, por exemplo, 500 elementos.
    - 1.1.3. Obter o sinal  $x(t)$  usando um menu que permita escolher uma onda quadrada periódica (use a função *square*), uma onda periódica em dente de serra (use a função *sawtooth*) ou uma expressão simbólica a introduzir. Representar graficamente  $x(t)$ .
    - 1.1.4. Determinar e representar graficamente os valores dos coeficientes ( $C_m$  e  $\theta_m$ ) da Série de Fourier trigonométrica com o valor de  $m\_max$  da Série de Fourier pedido ao utilizador. Considerar o seguinte algoritmo para o cálculo dos coeficientes:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m) = \sum_{m=0}^{\infty} C(m) \cos\left(m \frac{2\pi}{T_0} t + \theta(m)\right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a(m) \cos\left(m \frac{2\pi}{T_0} t\right) - \sum_{m=0}^{\infty} b(m) \sin\left(m \frac{2\pi}{T_0} t\right) \end{aligned} \quad \text{com: } \begin{cases} a(m) = C(m) \cos(\theta(m)) \\ b(m) = C(m) \sin(\theta(m)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C(m) = \sqrt{a(m)^2 + b(m)^2} \\ \theta(m) = \arctg\left(\frac{b(m)}{a(m)}\right) \end{cases}$$

- 1.1.5. Obter e representar graficamente a sobreposição do sinal original e dos sinais aproximados a partir dos coeficientes da Série de Fourier trigonométrica para vários valores limites de  $m$  (entre 0 e  $m\_max$ ), pedidos ao utilizador através de um vetor.
- 1.1.6. Obter e representar graficamente a amplitude e a fase dos coeficientes da Série de Fourier complexa  $c_m$ , para  $m$  entre  $-m\_max$  e  $m\_max$ , a partir dos coeficientes  $C_m$  e  $\theta_m$ .

1.2. Aplicar o *script* de 1.1 para os seguintes sinais:

1.2.1. Onda quadrada periódica de amplitude 1 e período  $2\pi s$  (sugestão  $m\_max=50$ ).

1.2.2. Onda periódica em dente de serra de amplitude 1 e período  $2\pi s$  (sugestão  $m\_max=50$ ).

1.2.3. Sinal  $x(t) = -2 + \cos(\pi t) + \sin(\pi t + \pi/4)$  (sugestão:  $m\_max=5$ ).

1.2.4. Sinal  $x(t) = 2 \sin(5\pi t)^2 + 4 \cos(20\pi t - \pi/4) \sin(45\pi t)$  (sugestão:  $m\_max=20$ ).

1.2.5. Sinal  $x(t) = -2 + 4 \cos(4\pi t + \pi/3) - 2 \sin(10\pi t)$  (sugestão:  $m\_max=10$ ).

1.3. Determinar analiticamente os coeficientes da Série de Fourier trigonométrica,  $C_m$  e  $\theta_m$ , dos sinais indicados em 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5. Comparar com os resultados obtidos em 1.2.

1.4. Determinar analiticamente os coeficientes da Série de Fourier complexa,  $c_m$ , dos sinais indicados em 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5, a partir dos coeficientes da Série de Fourier trigonométrica,  $C_m$  e  $\theta_m$ , obtidos em 1.3. Comparar com os resultados obtidos em 1.2.

1.5. Determinar os coeficientes da Série de Fourier complexa,  $c_m$ , dos sinais indicados em 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5, através da expressão  $c_m = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt$ . Comparar com os resultados obtidos em 1.2 e em 1.4.

1.6. Determinar os coeficientes da Série de Fourier trigonométrica,  $C_m$  e  $\theta_m$ , dos sinais indicados em 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5, a partir dos coeficientes da Série de Fourier complexa,  $c_m$ , obtidos em 1.4. Comparar com os resultados obtidos em 1.2 e em 1.3.

- Função em *MATLAB* para o cálculo dos coeficientes da Série de Fourier trigonométrica:

```
function [Cm,tetam]=SerieFourier(t,x,T0,m_max)
% t e x devem ser vetores coluna
A=zeros(length(t),2*m_max+2);
for k=0:m_max
    A(:,k+1)=cos(2*pi/T0*t*k);
    A(:,m_max+1+k+1)=-sin(2*pi/T0*t*k);
end
coef=pinv(A)*x;
a=coef(1:m_max+1);
b=coef(m_max+2:2*m_max+2);
[nl,nc]=size(a);
for lin=1:nl,
    for col=1:nc,
        if abs(a(lin,col))<0.001 & abs(b(lin,col))<0.001,
            a(lin,col)=0; b(lin,col)=0;
        end
    end
end
Cm=abs(a+b*j); % ⇔ Cm=(a.^2+b.^2).^0.5
tetam=angle(a+b*j); % ⇔ tetam=atan(b./a)
end
```