



Análise e Transformação de Dados

Ficha Prática nº 6 de ATD 2022

Alberto Cardoso ©DEI2021/2022

Objetivo: Pretende-se ilustrar os conceitos de frequência e efetuar a análise de sinais periódicos pela Série de Fourier trigonométrica e complexa.

Exercício 1. Pretende-se determinar e representar os coeficientes da Série de Fourier trigonométrica de um sinal periódico, $x(t)$, e apresentar graficamente o sinal original e o aproximado pela Série com um dado número de harmónicos.

Exercício 1.1 Para isso, escrever um script que efetue as seguintes operações:

1.1.1. Pedir o valor do período fundamental, T_0 , do sinal a analisar.

1.1.2. Definir a sequência temporal t , durante um período, com, por exemplo, 500 elementos.

1.1.3. Obter o sinal $x(t)$ usando um menu que permita escolher uma onda quadrada periódica (use a função `square`), uma onda periódica em dente de serra (use a função `sawtooth`) ou uma expressão simbólica a introduzir. Representar graficamente $x(t)$.

1.1.4. Determinar e representar graficamente os valores dos coeficientes (C_m e θ_m) da Série de Fourier trigonométrica com o valor de m_{max} da Série de Fourier pedido ao utilizador.

Considerar o seguinte algoritmo para o cálculo dos coeficientes:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m) = \sum_{m=0}^{\infty} C(m) \cos\left(m\frac{2\pi}{T_0}t + \theta(m)\right) = \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} a(m) \cos\left(m\frac{2\pi}{T_0}t\right) - \sum_{m=0}^{\infty} b(m) \sin\left(m\frac{2\pi}{T_0}t\right)
 \end{aligned}
 \quad \text{com: } \begin{cases} a(m) = C(m) \cos(\theta(m)) \\ b(m) = C(m) \sin(\theta(m)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C(m) = \sqrt{a(m)^2 + b(m)^2} \\ \theta(m) = \arctg\left(\frac{b(m)}{a(m)}\right) \end{cases}$$

1.1.5. Obter e representar graficamente a sobreposição do sinal original e dos sinais aproximados a partir dos coeficientes da Série de Fourier trigonométrica para vários valores limites de m (entre 0 e m_{max}), pedidos ao utilizador através de um vetor.

1.1.6. Obter e representar graficamente a amplitude e a fase dos coeficientes da Série de Fourier complexa cm , para m entre $-m_{max}$ e m_{max} , a partir dos coeficientes C_m e θ_m .

```
In [ ]: %%file SerieFourier.m

function [Cm,tetam]=SerieFourier(t,x,T0,m_max)
    % t e x devem ser vetores coluna
    A=zeros(length(t),2*m_max+2);
    for k=0:m_max
        A(:,k+1)=cos(2*pi/T0*t*k);
        A(:,m_max+1+k+1)=-sin(2*pi/T0*t*k);
    end
```

```

coef=pinv(A)*x;
a=coef(1:m_max+1);
b=coef(m_max+2:2*m_max+2);
[nl,nc]=size(a);
for lin=1:nl,
    for col=1:nc,
        if abs(a(lin,col))<0.001 & abs(b(lin,col))<0.001,
            a(lin,col)=0; b(lin,col)=0;
        end
    end
end
Cm=abs(a+b*j); % <=> Cm=(a.^2+b.^2).^0.5
tetam=angle(a+b*j); % <=> tetam=atan(b./a)
end

```

Exercício 1.2 Aplicar o script de 1.1 para os seguintes sinais:

```

In [2]: %--- Ex 1.2
        %plot inline -w 1200
        sympref('HeavisideAtOrigin',1);

```

Exercício 1.2.1 Onda quadrada periódica de amplitude 1 e período $2\pi s$ (sugestão $m_max = 50$).

```

In [3]: %--- Ex 1.2.1
        %=====1.1.1=====
        %T0= input('Introduza o período fundamental ');
        T0 = 2*pi;
        %=====1.1.2=====
        t=0:T0/500:T0-T0/500;%linspace(0,T0-T0/500,500)
        %=====1.1.3=====
        %opt=menu('Sinal x(t)', 'Onda quadrada', ...
        %'Dente de serra', 'Expressão');
        opt = 1;
        switch opt
            case 1,
                x=square(2*pi/T0*t);
                syms t
                xt=heaviside(t)-2*heaviside(t-T0/2);
                t=0:T0/500:T0-T0/500;
                %x=double(subs(xt));
            case 2,
                x=sawtooth(2*pi/T0*t);
                syms t
                xt=(t-T0/2)*2/T0;
                t=0:T0/500:T0-T0/500;
                %x=double(subs(xt));
            otherwise,
                syms t
                xt=input('x(t)= ');
                t=0:T0/500:T0-T0/500;
                x=double(subs(xt));
        end

        figure(1)
        plot(t,x);
        title('Sinal periódico de tempo contínuo x(t)')
        xlabel('t [s]')
        ylabel('Amplitude');

```

```

% m_max=input('Valor de m_max (default=50)=');
m_max=50;
if isempty(m_max)
    m_max=50;
end
%=====1.1.4=====
[Cm,tetam]=SerieFourier(t',x',T0,m_max);
m=0:m_max;

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(m,Cm,'bo');
title('Coeficientes da Série de Fourier trigonométrica')
ylabel('Cm');
xlabel('m');
subplot(2,1,2);
plot(m,tetam,'bo');
ylabel('tetam (rad)');
xlabel('m');

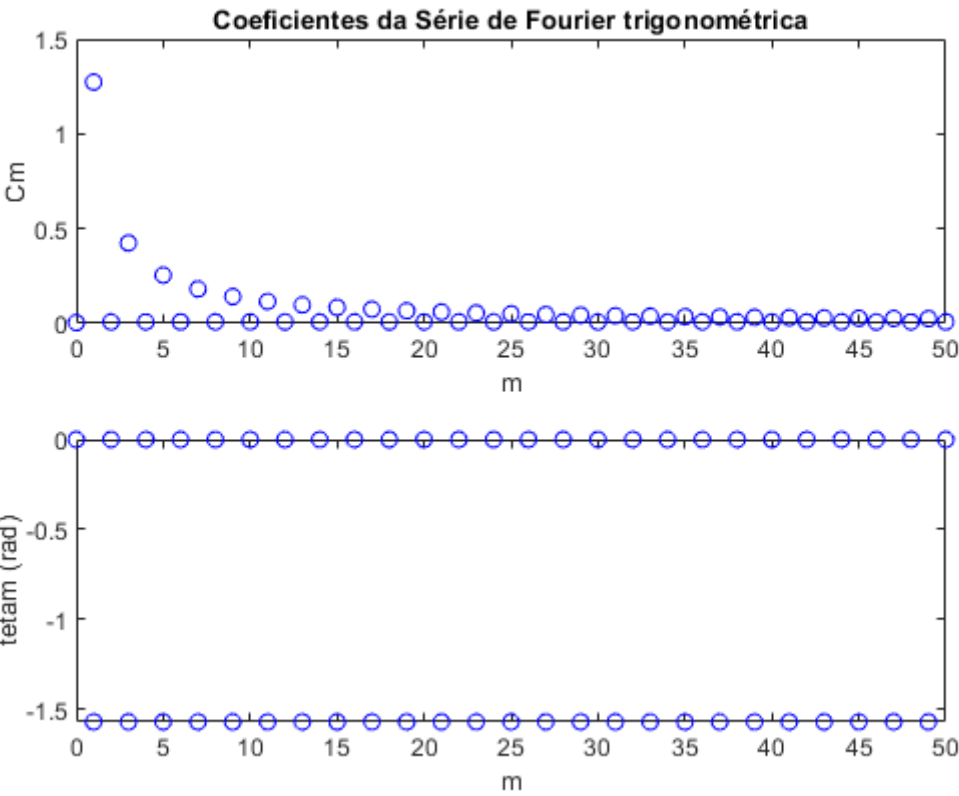
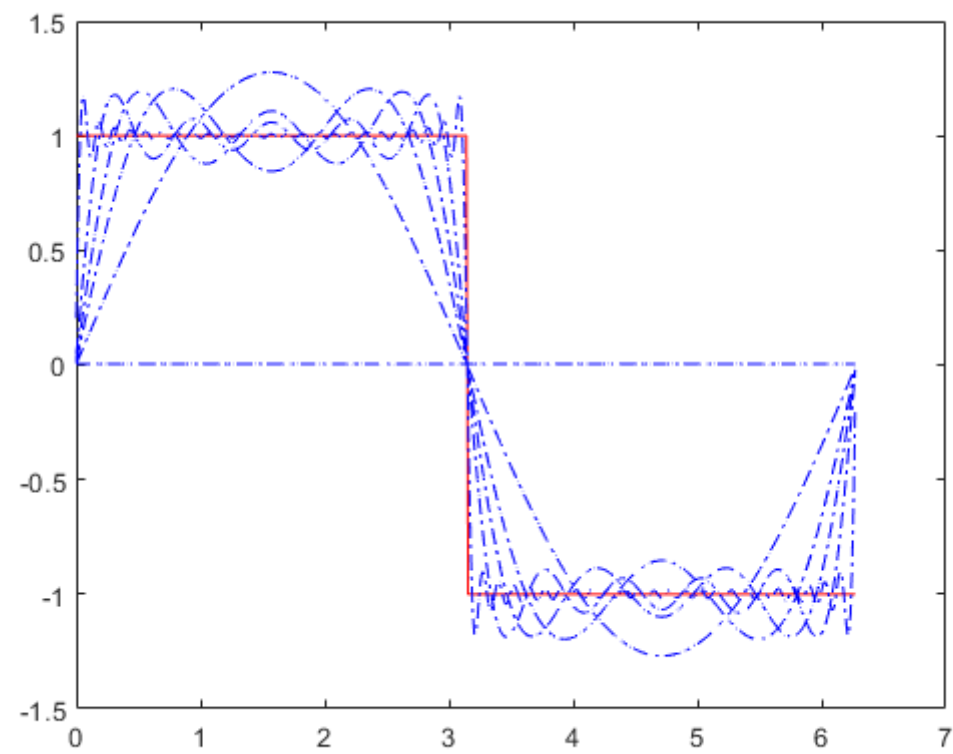
%=====1.1.5=====
figure(3)
plot(t,x,'r');
hold on

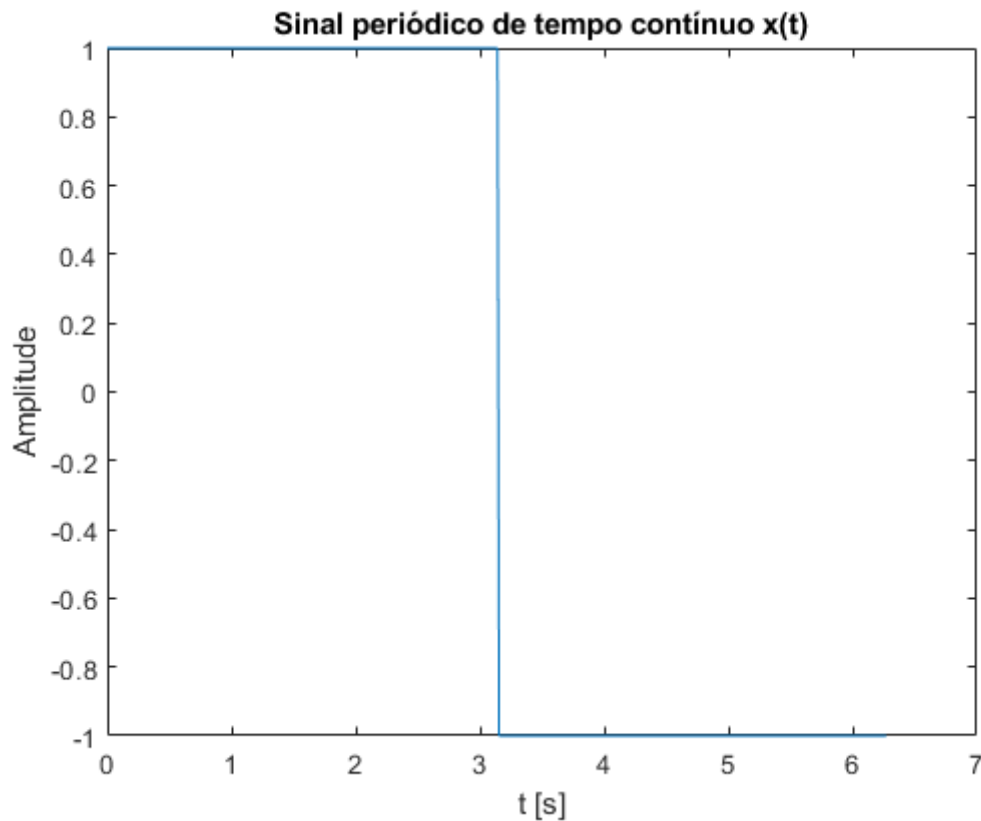
%mt=input('Valores limites de m (como vetor)=');
mt=[0 1 3 5 10 50];
if isempty(mt)
    mt=[0 1 3 5 10 50];
end

for k=1:length(mt)
    x1=zeros(size(t));
    for m=0:mt(k)
        x1=x1+Cm(m+1)*cos(m*2*pi/T0*t+tetam(m+1));
    end
    plot(t,x1,'-.b');
end
hold off

%=====1.1.6=====
cm=[flip(Cm(2:end)/2.*exp(-j*tetam(2:end))));...
    Cm(1)*cos(tetam(1));Cm(2:end)/2.*exp(j*tetam(2:end))];

```





Exercício 1.2.2 Onda periódica em dente de serra de amplitude 1 e período 2π s (sugestão $m_{max} = 50$).

In [4]:

```
%--- Ex 1.2.2
%=====1.1.1=====
%T0= input('Introduza o período fundamental ');
T0 = 2*pi;
%=====1.1.2=====
t=0:T0/500:T0-T0/500;%linspace(0,T0-T0/500,500)
%=====1.1.3=====
%opt=menu('Sinal x(t)', 'Onda quadrada', ...
%'Dente de serra', 'Expressão');
opt = 2;
switch opt
    case 1,
        x=square(2*pi/T0*t);
        syms t
        xt=heaviside(t)-2*heaviside(t-T0/2);
        t=0:T0/500:T0-T0/500;
        %x=double(subs(xt));
    case 2,
        x=sawtooth(2*pi/T0*t);
        syms t
        xt=(t-T0/2)*2/T0;
        t=0:T0/500:T0-(T0/500);
        %x=double(subs(xt));
    otherwise,
        syms t
        xt=input('x(t)= ');
        t=0:T0/500:T0-T0/500;
        x=double(subs(xt));
end

figure(1)
plot(t,x);
title('Sinal periódico de tempo contínuo x(t)')
```

```

xlabel('t [s]')
ylabel('Amplitude');

% m_max=input('Valor de m_max (default=50)=');
m_max=50;
if isempty(m_max)
    m_max=50;
end
%=====1.1.4=====
[Cm,tetam]=SerieFourier(t',x',T0,m_max);
m=0:m_max;

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(m,Cm,'bo');
title('Coeficientes da Série de Fourier trigonométrica')
ylabel('Cm');
xlabel('m');
subplot(2,1,2);
plot(m,tetam,'bo');
ylabel('tetam (rad)');
xlabel('m');

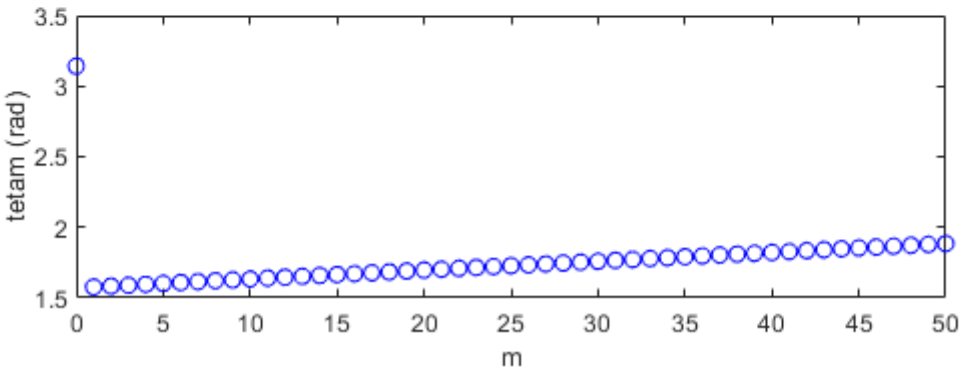
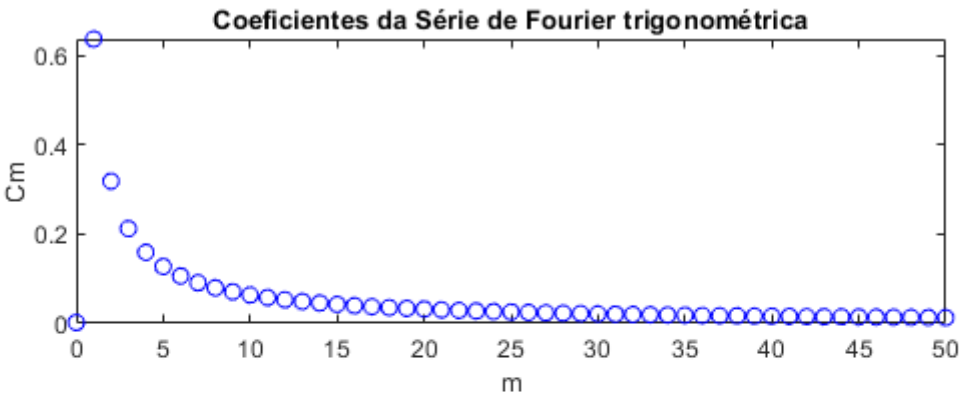
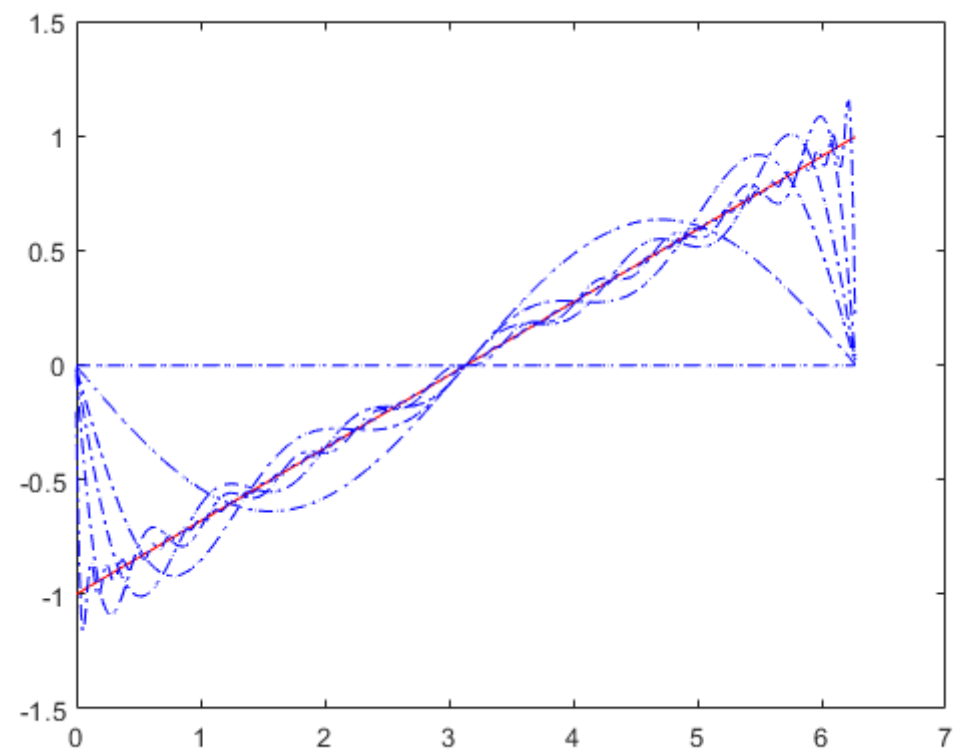
%=====1.1.5=====
figure(3)
plot(t,x,'r');
hold on

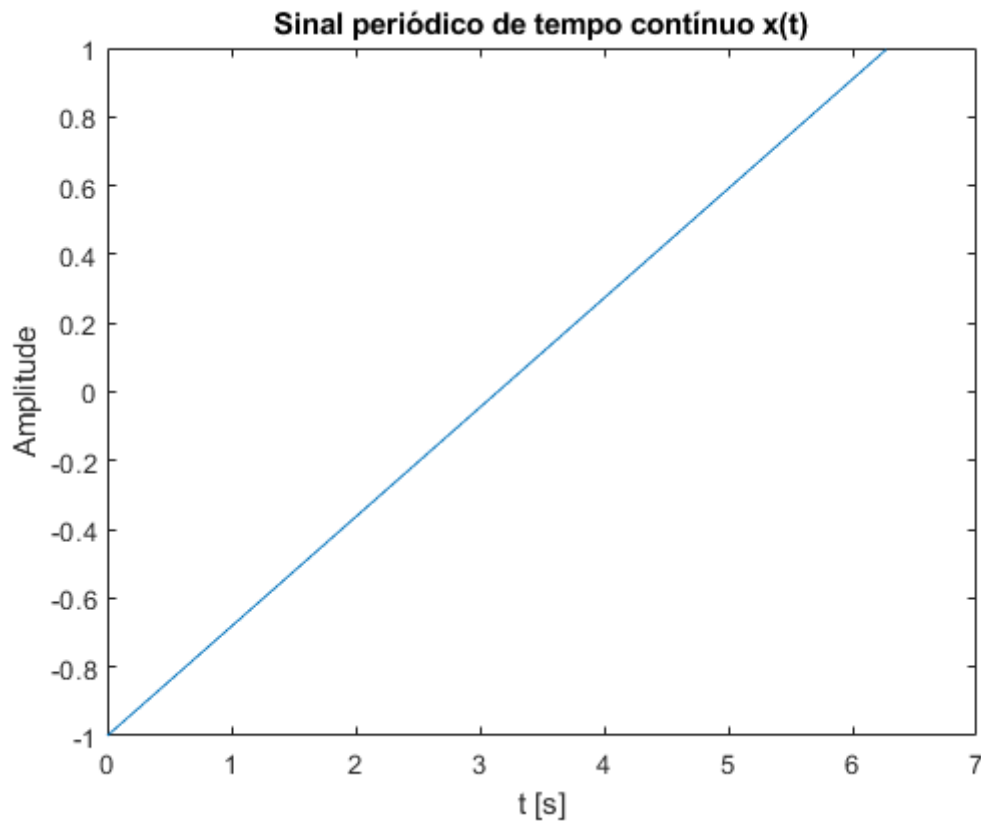
%mt=input('Valores limites de m (como vetor)=');
mt=[0 1 3 5 10 50];
if isempty(mt)
    mt=[0 1 3 5 10 50];
end

for k=1:length(mt)
    x1=zeros(size(t));
    for m=0:mt(k)
        x1=x1+Cm(m+1)*cos(m*2*pi/T0*t+tetam(m+1));
    end
    plot(t,x1,'-.b');
end
hold off

%=====1.1.6=====
cm=[flip(Cm(2:end)/2.*exp(-j*tetam(2:end))));...
    Cm(1)*cos(tetam(1));Cm(2:end)/2.*exp(j*tetam(2:end))];

```





Exercício 1.2.3. Sinal $x(t) = -2 + \cos(\pi t) + \sin(\pi t + \pi/4)$ (sugestão: $m_{max} = 5$).

In [5]:

```
%--- Ex 1.2.3
%=====1.1.1=====
%T0= input('Introduza o período fundamental ');
T0 = 2;
%=====1.1.2=====
t=0:T0/500:T0-T0/500;%linspace(0,T0-T0/500,500)
%=====1.1.3=====
%opt=menu('Sinal x(t)', 'Onda quadrada', ...
%'Dente de serra', 'Expressão');
opt = 3;
switch opt
    case 1,
        x=square(2*pi/T0*t);
        syms t
        xt=heaviside(t)-2*heaviside(t-T0/2);
        t=0:T0/500:T0-T0/500;
        %x=double(subs(xt));
    case 2,
        x=sawtooth(2*pi/T0*t);
        syms t
        xt=(t-T0/2)*2/T0;
        t=0:T0/500:T0-(T0/500);
        %x=double(subs(xt));
    otherwise,
        syms t
        %xt=input('x(t)= ');
        xt=-2*cos(pi*t)+sin(pi*t+pi/4);
        t=0:T0/500:T0-T0/500;
        x=double(subs(xt));
end

figure(1)
plot(t,x);
title('Sinal periódico de tempo contínuo x(t)')
```



```

xlabel('t [s]')
ylabel('Amplitude');

% m_max=input('Valor de m_max (default=50)=');
m_max=5;
if isempty(m_max)
    m_max=50;
end
%=====1.1.4=====
[Cm,tetam]=SerieFourier(t',x',T0,m_max);
m=0:m_max;

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(m,Cm,'bo');
title('Coeficientes da Série de Fourier trigonométrica')
ylabel('Cm');
xlabel('m');
subplot(2,1,2);
plot(m,tetam,'bo');
ylabel('tetam (rad)');
xlabel('m');

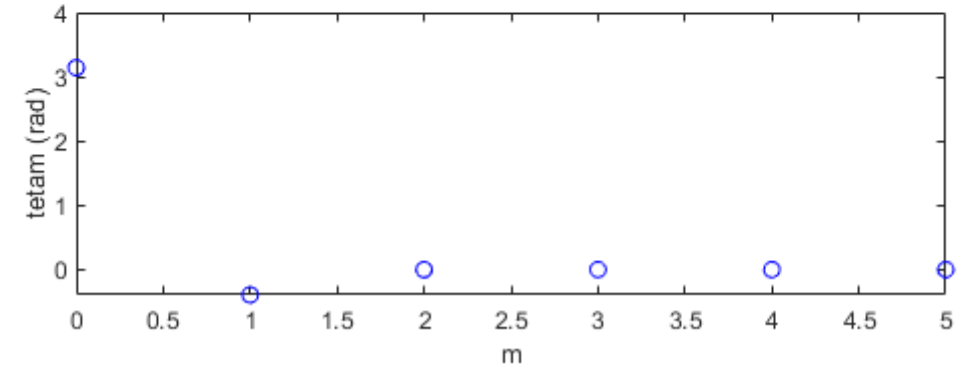
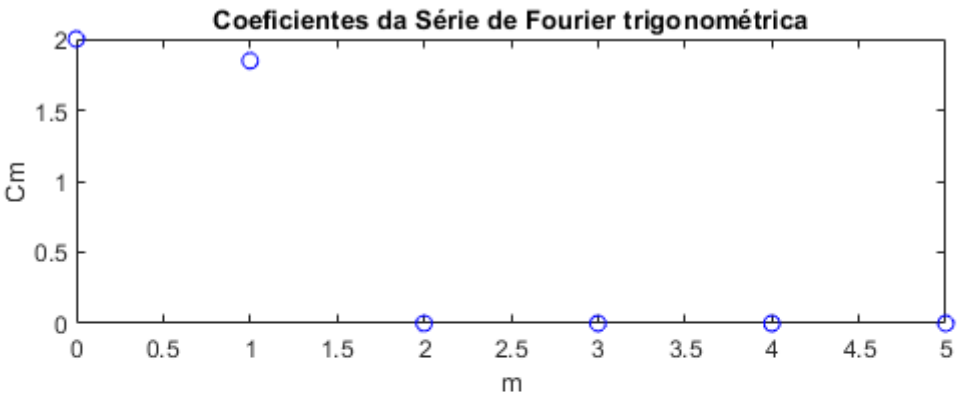
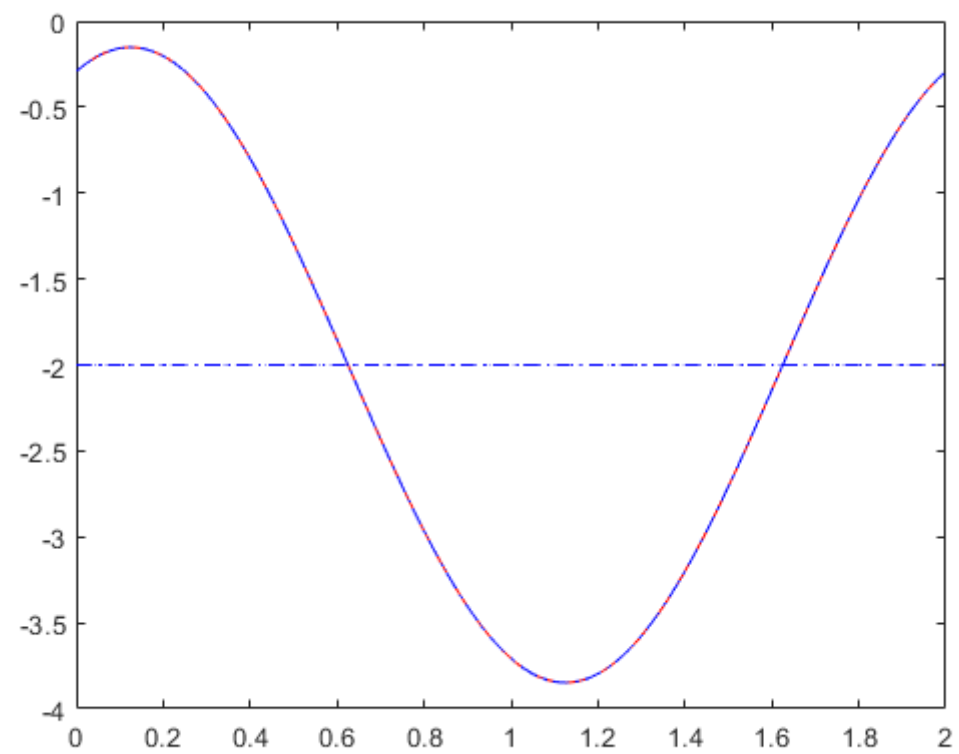
%=====1.1.5=====
figure(3)
plot(t,x,'r');
hold on

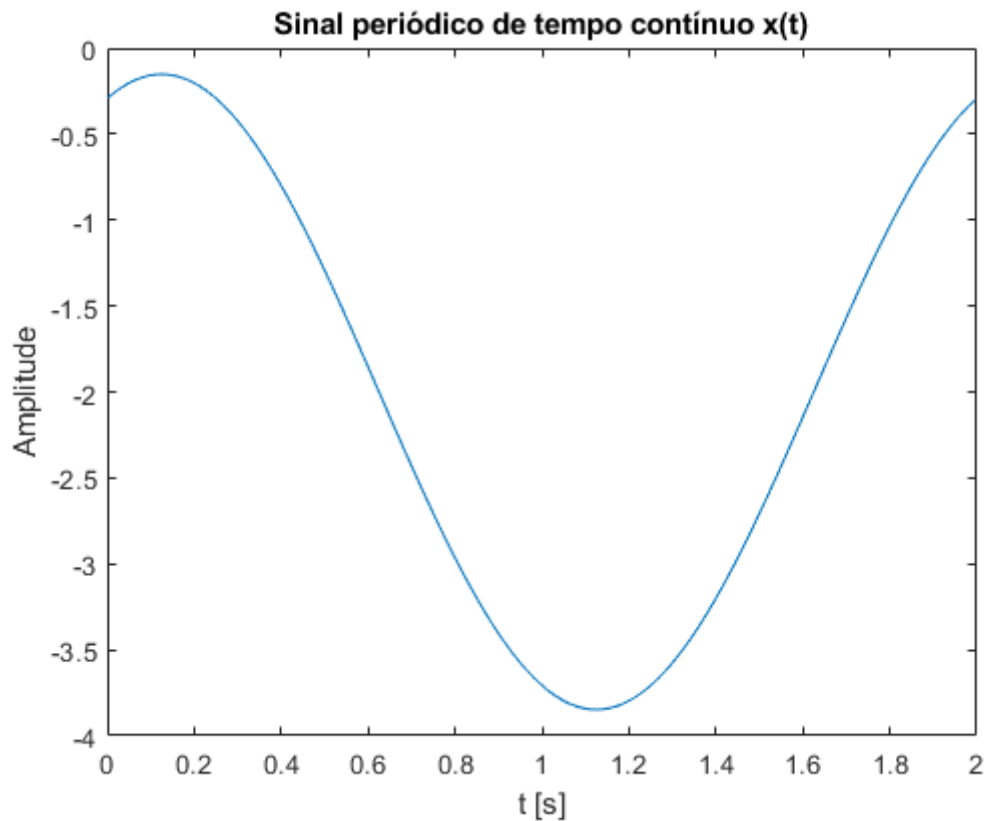
%mt=input('Valores limites de m (como vetor)=');
mt=[0 1 3 5];
if isempty(mt)
    mt=[0 1 3 5 10 50];
end

for k=1:length(mt)
    x1=zeros(size(t));
    for m=0:mt(k)
        x1=x1+Cm(m+1)*cos(m*2*pi/T0*t+tetam(m+1));
    end
    plot(t,x1,'-.b');
end
hold off

%=====1.1.6=====
cm=[flip(Cm(2:end)/2.*exp(-j*tetam(2:end)));...
    Cm(1)*cos(tetam(1));Cm(2:end)/2.*exp(j*tetam(2:end))];

```





Exercício 1.2.4. Sinal $x(t) = 2\sin(5\pi t)^2 + 4\cos(20\pi t - \pi/4)\sin(45\pi t)$ (sugestão: $m_{max} = 20$).

In [6]:

```
%--- Ex 1.2.4
%=====1.1.1=====
%T0= input('Introduza o período fundamental ');
T0 = 0.4;
%=====1.1.2=====
t=0:T0/500:T0-T0/500;%linspace(0,T0-T0/500,500)
%=====1.1.3=====
%opt=menu('Sinal x(t)', 'Onda quadrada', ...
%'Dente de serra', 'Expressão');
opt = 3;
switch opt
    case 1,
        x=square(2*pi/T0*t);
        syms t
        xt=heaviside(t)-2*heaviside(t-T0/2);
        t=0:T0/500:T0-T0/500;
        %x=double(subs(xt));
    case 2,
        x=sawtooth(2*pi/T0*t);
        syms t
        xt=(t-T0/2)*2/T0;
        t=0:T0/500:T0-(T0/500);
        %x=double(subs(xt));
    otherwise,
        syms t
        %xt=input('x(t)= ');
        xt=2*sin(5*pi*t)^2+4*cos(20*pi*t-pi/4)*sin(45*pi*t);
        t=0:T0/500:T0-T0/500;
        x=double(subs(xt));
end

figure(1)
plot(t,x);
```

```

title('Sinal periódico de tempo contínuo x(t)')
xlabel('t [s]')
ylabel('Amplitude');

% m_max=input('Valor de m_max (default=50)=');
m_max=20;
if isempty(m_max)
    m_max=50;
end

%=====1.1.4=====
[Cm,tetam]=SerieFourier(t',x',T0,m_max);
m=0:m_max;

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(m,Cm,'bo');
title('Coeficientes da Série de Fourier trigonométrica')
ylabel('Cm');
xlabel('m');
subplot(2,1,2)
plot(m,tetam,'bo');
ylabel('tetam (rad)');
xlabel('m');

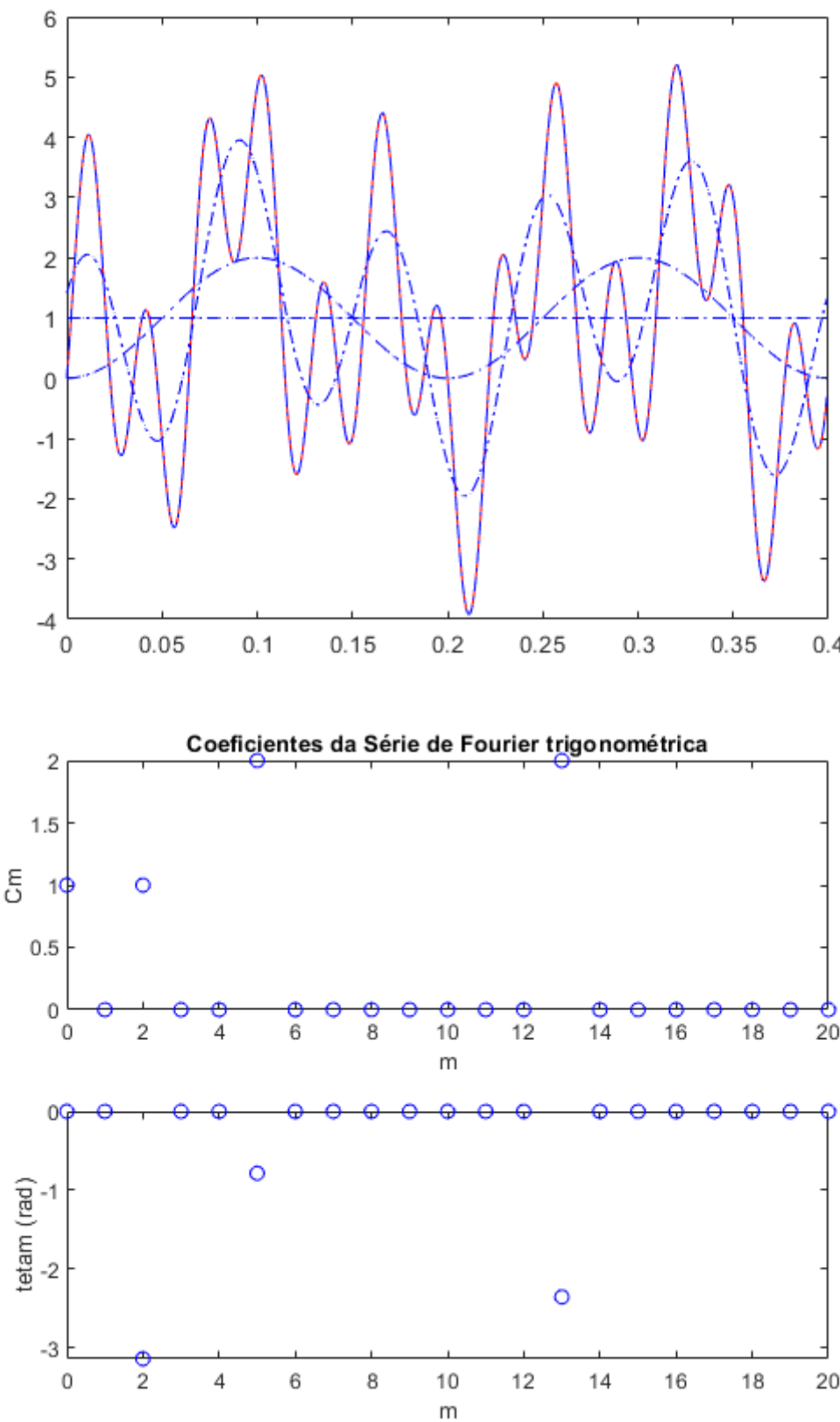
%=====1.1.5=====
figure(3)
plot(t,x,'r');
hold on

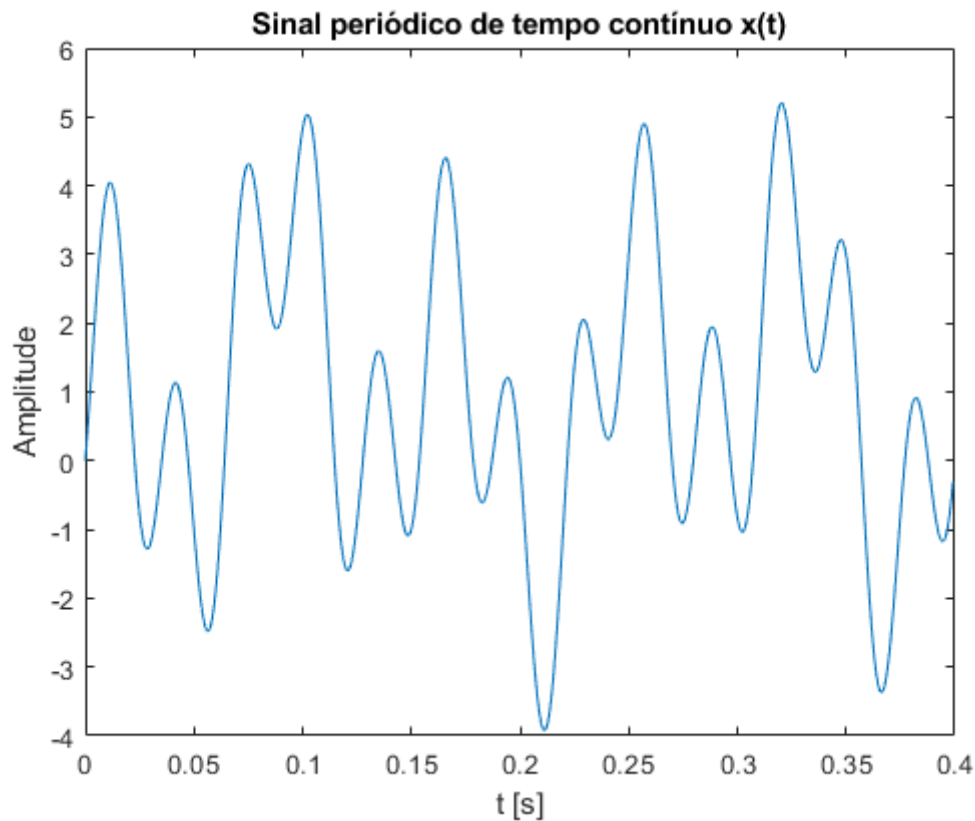
% mt=input('Valores limites de m (como vetor)=');
mt=[0 1 3 5 10 20];
if isempty(mt)
    mt=[0 1 3 5 10 50];
end

for k=1:length(mt)
    x1=zeros(size(t));
    for m=0:mt(k)
        x1=x1+Cm(m+1)*cos(m*2*pi/T0*t+tetam(m+1));
    end
    plot(t,x1,'-.b');
end
hold off

%=====1.1.6=====
cm=[flip(Cm(2:end)/2.*exp(-j*tetam(2:end)))+...
    Cm(1)*cos(tetam(1))+Cm(2:end)/2.*exp(j*tetam(2:end))];

```





Exercício 1.2.5 Sinal $x(t) = -2 + 4\cos(4\pi t + \pi/3) - 2\sin(10\pi t)$ (sugestão: $m_{max} = 10$).

In [7]:

```
%--- Ex 1.2.5
%=====1.1.1=====
%T0= input('Introduza o período fundamental ');
T0 = 1;
%=====1.1.2=====
t=0:T0/500:T0-T0/500;%linspace(0,T0-T0/500,500)
%=====1.1.3=====
%opt=menu('Sinal x(t)', 'Onda quadrada', ...
%'Dente de serra', 'Expressão');
opt = 3;
switch opt
    case 1,
        x=square(2*pi/T0*t);
        syms t
        xt=heaviside(t)-2*heaviside(t-T0/2);
        t=0:T0/500:T0-T0/500;
        %x=double(subs(xt));
    case 2,
        x=sawtooth(2*pi/T0*t);
        syms t
        xt=(t-T0/2)*2/T0;
        t=0:T0/500:T0-(T0/500);
        %x=double(subs(xt));
    otherwise,
        syms t
        %xt=input('x(t)= ');
        xt=-2+4*cos(4*pi*t+pi/3)-2*sin(10*pi*t);
        t=0:T0/500:T0-T0/500;
        x=double(subs(xt));
end

figure(1)
plot(t,x);
title('Sinal periódico de tempo contínuo x(t)')
```

```

xlabel('t [s]')
ylabel('Amplitude');

% m_max=input('Valor de m_max (default=50)=');
m_max=10;
if isempty(m_max)
    m_max=50;
end

%=====1.1.4=====
[Cm,tetam]=SerieFourier(t',x',T0,m_max);
m=0:m_max;

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(m,Cm,'bo');
title('Coeficientes da Série de Fourier trigonométrica')
ylabel('Cm');
xlabel('m');
subplot(2,1,2);
plot(m,tetam,'bo');
ylabel('tetam (rad)');
xlabel('m');

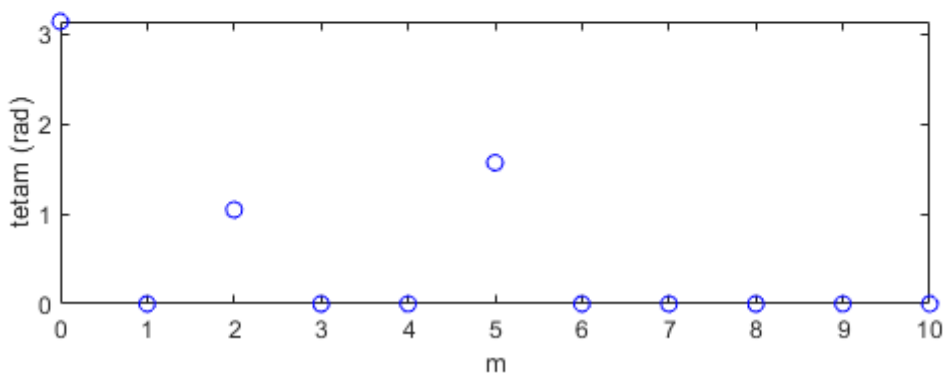
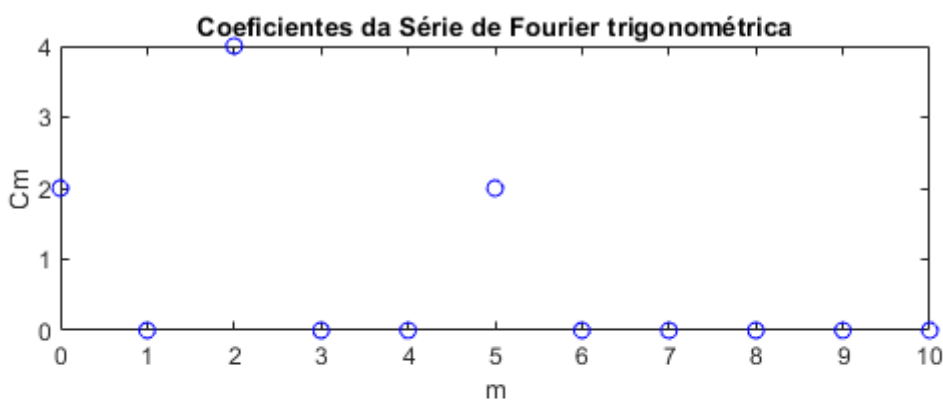
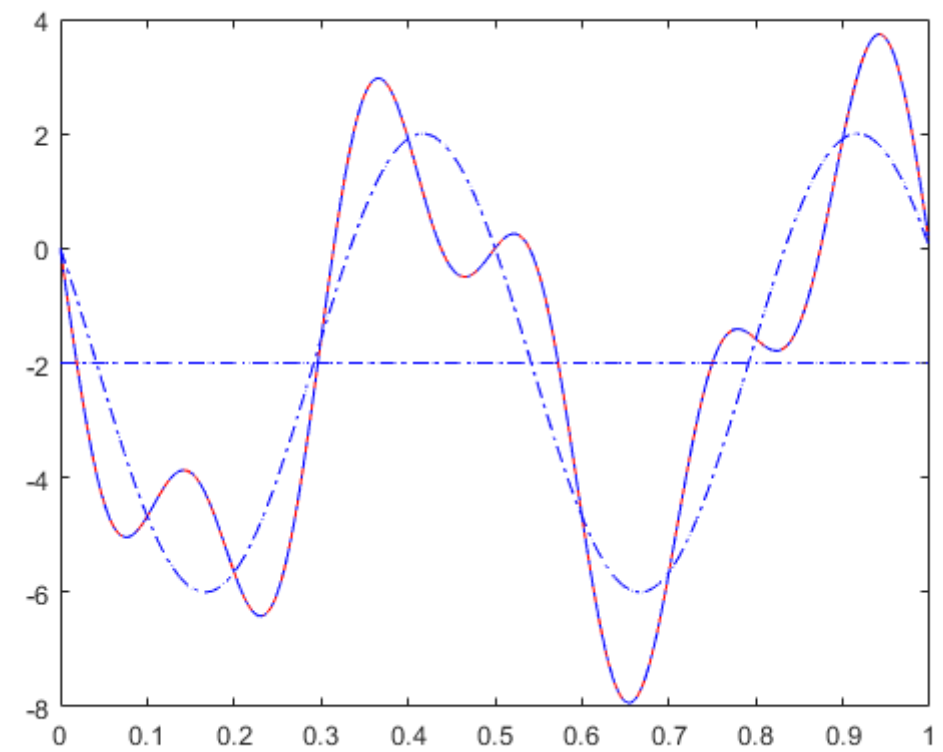
%=====1.1.5=====
figure(3)
plot(t,x,'r');
hold on

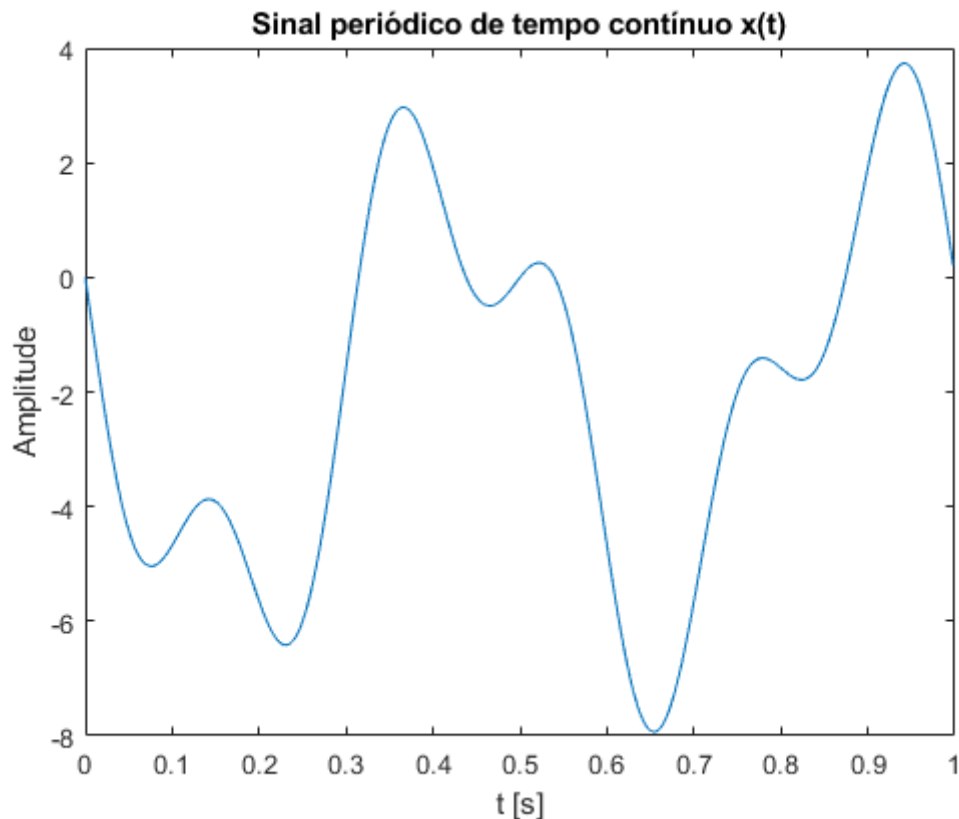
%mt=input('Valores limites de m (como vetor)=');
mt=[0 1 3 5 10];
if isempty(mt)
    mt=[0 1 3 5 10 50];
end

for k=1:length(mt)
    x1=zeros(size(t));
    for m=0:mt(k)
        x1=x1+Cm(m+1)*cos(m*2*pi/T0*t+tetam(m+1));
    end
    plot(t,x1,'-.b');
end
hold off

%=====1.1.6=====
cm=[flip(Cm(2:end)/2.*exp(-j*tetam(2:end))));...
    Cm(1)*cos(tetam(1));Cm(2:end)/2.*exp(j*tetam(2:end))];

```





Exercício 1.3 Determinar analiticamente os coeficientes da Série de Fourier trigonométrica, C_m e θ_m , dos sinais indicados em 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5. Comparar com os resultados obtidos em 1.2.

Exercício 1.4 Determinar analiticamente os coeficientes da Série de Fourier complexa, c_m , dos sinais indicados em 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5, a partir dos coeficientes da Série de Fourier trigonométrica, C_m e θ_m , obtidos em 1.3. Comparar com os resultados obtidos em 1.2.

Exercício 1.5 Determinar os coeficientes da Série de Fourier complexa, c_m , dos sinais indicados em 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5, através da expressão $c_m = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt$. Comparar com os resultados obtidos em 1.2 e em 1.4.

In [8]:

```
%--- Ex 1.5

syms t m
cms=int(xt*exp(-j*m*2*pi*t/T0)/T0,t,0,T0);
cm1=[];
for m=-m_max:m_max
    cm1=[cm1; double(limit(cms,m))];
end

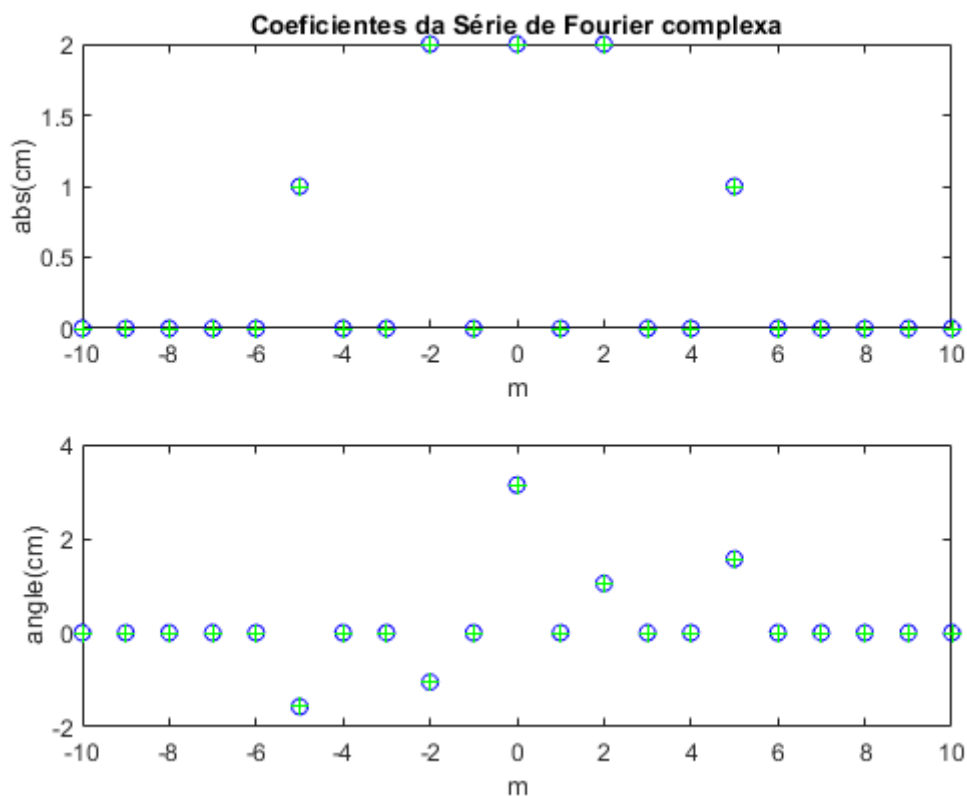
figure(4);
subplot(211);
plot(-m_max:m_max,abs(cm),'bo',-m_max:m_max,abs(cm1),'g+');
title('Coeficientes da Série de Fourier complexa')
ylabel('abs(cm)')
xlabel('m')
subplot(212);
plot(-m_max:m_max,angle(cm),'bo',-m_max:m_max,angle(cm1),'g+');
ylabel('angle(cm)')
xlabel('m')

m=(-m_max:m_max)';
disp(' m | cm aproximado | cm efetivo')
[m cm cm1]
```

m | cm aproximado | cm efetivo

ans =

```
-10.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
-9.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
-8.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
-7.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
-6.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
-5.0000 + 0.0000i   -0.0000 - 1.0000i    0.0000 - 1.0000i
-4.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
-3.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
-2.0000 + 0.0000i    1.0000 - 1.7321i    1.0000 - 1.7321i
-1.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
 0.0000 + 0.0000i   -2.0000 + 0.0000i   -2.0000 + 0.0000i
 1.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
 2.0000 + 0.0000i    1.0000 + 1.7321i    1.0000 + 1.7321i
 3.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
 4.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
 5.0000 + 0.0000i   -0.0000 + 1.0000i    0.0000 + 1.0000i
 6.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
 7.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
 8.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
 9.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
10.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
```



Exercício 1.6 Determinar os coeficientes da Série de Fourier trigonométrica, C_m e θ_m , dos sinais indicados em 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5, a partir dos coeficientes da Série de Fourier complexa, cm , obtidos em 1.4. Comparar com os resultados obtidos em 1.2 e em 1.3.

In [9]:

```
%--- Ex 1.6

Cm1=[abs(cm1(m==0)); 2*abs(cm1(m>0))];
tetam1=[angle(cm1(m>=0))];

disp(' m | Cm aproximado | Cm efetivo')
[m(m>=0) Cm Cm1]
```

```
disp(' m | tetam aproximado | tetam efetivo')
[m(m>=0) tetam tetam1]
```

```
m | Cm aproximado | Cm efetivo
```

```
ans =
```

0	2.0000	2.0000
1.0000	0	0
2.0000	4.0000	4.0000
3.0000	0	0
4.0000	0	0
5.0000	2.0000	2.0000
6.0000	0	0
7.0000	0	0
8.0000	0	0
9.0000	0	0
10.0000	0	0

```
m | tetam aproximado | tetam efetivo
```

```
ans =
```

0	3.1416	3.1416
1.0000	0	0
2.0000	1.0472	1.0472
3.0000	0	0
4.0000	0	0
5.0000	1.5708	1.5708
6.0000	0	0
7.0000	0	0
8.0000	0	0
9.0000	0	0
10.0000	0	0