## Apuntes de

# GEOMETRÍA I

## Doble Grado en
## Ingeniería Informática y Matemáticas

**1$^{er}$ curso**

Explicaciones teóricas muy breves, basadas en ejemplos y gran variedad de ejercicios de exámenes resueltos.

José L. Ruiz Benito

Febrero de 2018

# Espacio Vectorial

* $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ se consideran las bases:

$B = \{(1,-1,2),\ (0,3,-2),\ (1,0,1)\}$

$B' = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$

¿Matriz de cambio de base de B a B'?

$u_1 = (1,-1,2) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a+b+c \\ -1 = b+c \\ 2 = c \end{array}\right\} \quad u_1 = (a,b,c)_{B'} = (2,-3,2)_{B'}$$

$u_2 = (0,3,-2) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a+b+c \\ 3 = b+c \\ -2 = c \end{array}\right\} \quad u_2 = (a,b,c)_{B'} = (-3,5,-2)_{B'}$$

$u_3 = (1,0,1) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a+b+c \\ 0 = b+c \\ 1 = c \end{array}\right\} \quad u_3 = (a,b,c)_{B'} = (1,-1,1)_{B'}$$

$$\boxed{M(I,\ B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ecuación del cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'}$$

Cambio de base contrario $\rightarrow$ matriz inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{10} + 6 + 6 - \cancel{10} - 4 - 9 = -1$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = M(I, B \leftarrow B') = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Cambio de base de B a la base canónica:

$$M(I, B_c \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

---

*) Sea $v = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$. ¿Pueden existir 17 bases ordenadas distintas de $\mathbb{R}^3$ en las que dicho vector tenga coordenadas $(1, 1, 1)$?

Sí, es verdadero. Por ejemplo, las siguientes bases:

$B_1 = \{(3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)\}$

$B_2 = \{(1, 0, 0), (2, 2, 0), (0, 0, 1)\}$

$B_3 = \{(2,0,0), (1,2,0), (0,0,1)\}$

$B_4 = \{\{3,0,0\}, (0,1,0), (0,1,1)\}$

... y así sucesivamente.

*) Sea $V(K)$ un e.v de dimensión $n \geq 2$ y sea $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ un subconjunto con $n$ vectores. Se sabe que $S$ es un s.d.g de $V$ ($V = L(S)$) y $S - \{u_i\}$ no genera a $V$ $\forall i \in \{1 \dots n\}$. Demostrar que $S$ es una base.

Como $S$ tiene $n$ vectores y $\dim V = n$, basta con demostrar que $S$ es l.i. Supongo que $S$ no es una base y llego a una contradicción:

$S$ no es base $\Rightarrow$ $S$ es l.d. $\Rightarrow$ puedo escribir alguno de sus vectores como combinación lineal del resto. Sin pérdida de generalidad, escojo el primero:

$$u_1 = a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots + a_n u_n \quad (1)$$

Como $V = L(S) \Rightarrow \forall v \in V: v = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$

Utilizo (1) y obtengo:

$$v = b_1(a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) + \dots + b_n u_n =$$
$$= (b_1 a_2 + b_2) u_2 + \dots + (b_1 a_n + b_n) u_n$$

por lo que $V$ está generado por $n-1$ vectores, lo cual es una contradicción. $\Rightarrow$ $S$ es una base

23/11/2016

1) Sea $B=(v_1, \dots, v_n)$ una base del espacio vectorial $V(k)$, y sea $w = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ un vector de $V$. Demostrar que el conjunto que se obtiene reemplazando en $B$ el vector $v_i$ (para algún $i \in \{1, \dots, n\}$) por $w$ es una base si y sólo si $a_i \neq 0$.

Demostrar $B' = \{v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots v_n\}$ base $\Leftrightarrow$ $a_i \neq 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponemos que $B'$ es base y demuestro que $a_i \neq 0$. Para ello supongo $a_i = 0$ y llego a una contradicción.

$B'$ base $\Rightarrow \forall v \in V: \; v = b_1v_1 + \dots + b_{i-1}v_{i-1} + b_iw + b_{i+1}v_{i+1} + \dots + b_nv_n =$

$= b_1v_1 + \dots + b_{i-1}v_{i-1} + b_i(a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} + \overset{a_i=0}{\cancel{a_iv_i}} + a_{i+1}v_{i+1} + \dots a_nv_n) + b_{i+1}v_{i+1} + \dots + b_nv_n =$

$= (b_1 + b_ia_1)v_1 + \dots + (b_{i-1} + b_ia_{i-1})v_{i-1} + (b_{i+1} + b_ia_{i+1})a_{i+1} + \dots + (b_n + b_ia_n)b_n$

$\Rightarrow$ v se puede expresar como c.l de $n-1$ vectores $\Rightarrow$ $B'$ no es base ⚠ Contradicción $\Rightarrow$ $\boxed{a_i = 0}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponemos $a_i \neq 0$ y demuestro que $B'$ es base. Como $B'$ tiene n vectores, bastará con demostrar que $B'$ es linealmente independiente.

Tomo una combinación lineal de $B'$ igualada a $\vec{0}$:

$b_1v_1 + \dots + b_{i-1}v_{i-1} + b_iw + b_{i+1}v_{i+1} + \dots + b_nv_n = \vec{0}$

$b_1v_1 + \dots + b_{i-1}v_{i-1} + b_i(a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} + a_iv_i + a_{i+1}v_{i+1} + \dots + a_nv_n) + b_{i+1}v_{i+1} + \dots + b_nv_n = \vec{0}$

$(b_1 + b_ia_1)v_1 + \dots + (b_{i-1} + b_ia_1)v_{i-1} + b_ia_iv_i + (b_{i+1} + b_ia_{i+1})v_{i+1} + \dots + (b_n + b_ia_n)v_n = \vec{0}$,

que es una combinación lineal de $B$ (no $'$). Como $B$ es linealmente independiente $\Rightarrow$ los escalares son cero:

$b_1 + b_ia_1 = \dots = b_{i-1} + b_ia_1 = b_ia_i = b_{i+1} + b_ia_{i+1} = b_n + b_ia_n = 0$

De $b_ia_i = 0 \Rightarrow b_i = 0$ (porque $a_i \neq 0$). $\Rightarrow b_1 = \dots = b_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B'$ es l.i $\Rightarrow$ B es base

22/01/2018

1) Determinar si son verdaderos o falsos los siguientes asertos:

a) Sea una matriz $A \in M_4(K)$ cuyas cuatro columnas, consideradas como un subconjunto $C$ del e.v $K^4(K)$, verifican: cualquier subconjunto de tres elementos de $C$ es linealmente independiente. Entonces $C$ es linealmente independiente.

Falso. Sea $C = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,1,0)\}$

Tomados los vectores de tres en tres, son l.i, pero los cuatro son l.d, porque

$$\operatorname{ran}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

b) Sean $S = \{u, v\}$, $S' = \{u', v'\}$ dos subconjuntos de un espacio vectorial $V(K)$ tales que:

- Cada subconjunto $S$ y $S'$ es linealmente independiente
- Ningún vector de $S$ se puede escribir como combinación lineal de vectores de $S'$, ni ninguno de $S'$ como combinación lineal de los de $S$.

Entonces $S \cup S'$ es linealmente independiente.

FALSO.

$S = \{u, v\}$ l.i  $u \notin L(S')$, $v \notin L(S')$
$S' = \{u', v'\}$ l.i  $u' \notin L(S)$, $v' \notin L(S)$

Contraejemplo:

$S \cup S' = \{u, v, u', v'\} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,1,0)\}$

Todos los subconjuntos son l.i, pero no $S \cup S'$.

## Reflexiones sobre e.v y sus dimensiones

$\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$; $B_c = \{(1,0), (0,1)\}$

$\mathbb{C}^2(\mathbb{C})$: $\dim \mathbb{C}^2 = 2$; $B_c = \{(1,0), (0,1)\}$

$\mathbb{Q}^2(\mathbb{Q})$: $\dim \mathbb{Q}^2 = 2$; $B_c = \{(1,0), (0,1)\}$

Generalizando: $K^n(K)$: dimensión $n$

---

$\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$: $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$; $B_c = \{(1,0)(i,0), (0,1), (0,i)\}$

$M_2(\mathbb{C})(\mathbb{R})$: $\dim_{\mathbb{R}} M_2\mathbb{C} = 8 \quad (4 \cdot 2)$ $\mathbb{C}$

$\hookrightarrow B_c = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right)$

Generalizando: $\dim_K M_n(K) = n^2$

---

$\mathbb{R}^2(\mathbb{C}) \rightarrow$ NO ES UN ESPACIO VECTORIAL

porque sea $\alpha \in \mathbb{C}$ y $(a,b) \in \mathbb{R}^2(\mathbb{C})$: $\alpha \cdot (a,b) \notin \mathbb{R}^2(\mathbb{C})$

---

$\mathbb{R}^2(\mathbb{Q}) \rightarrow$ ES e.v

Pero no es finitamente generado.

---

$K_1 \subset K_2$, cuerpos

$K_2^n(K_1)$ sí es <u>e.v</u> $\longrightarrow$ ej: $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ sí e.v

$K_1^n(K_2)$ <u>No e.v</u> $\longrightarrow$ ej: $\mathbb{R}^2(\mathbb{C})$ no e.v.

## Suma de subespacios

$U+W=\{v\in V(k)\ /\ v=u+w,\ u\in U \text{ y } w\in W\}$

↳ es el menor subespacio que contiene a $U$ y $W$

## Intersección de subespacios

$U\cap W=\{v\in V(k)\ /\ v\in U \text{ y } v\in W\}$

## Fórmula de Grassmann

$\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)$

## Suma directa

- $U\oplus W$ si $U\cap W=\{\vec{0}\}$
- $V=U\oplus W$ si $U+W=V$ y $U\cap W=\{\vec{0}\}$

$\Leftrightarrow \forall v\in V: v=u+w \quad u\in U$ y $w\in W$ de forma única

Se dice que $U, W$ son complementarios o suplementarios.

## Matrices simétricas

$M_n(k)$: $\dim M_n(k)=n^2$

$S_n(k)=\{A\in M_n(k)\ /\ A=A^t\}$; $\dim S_n(\mathbb{R})=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{B_c}$ Ejemplo:

$S_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$S_3(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

## Matrices antisimétricas

$A_n(K) = \{A \in M_n(K) \,/\, A = -A^t\}$ ; $\dim A_n(K) = \frac{n(n-1)}{2}$

(la diagonal principal debe ser 0)

$A_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$A_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)}$

---

22/01/2018

2) Se considera, en el espacio de las matrices simétricas $S_2(\mathbb{R})$, los subespacios vectoriales:

$U_\lambda = L\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \right\}$, $W_\lambda = L\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$

Calcular, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimensión de $U_\lambda \cap W_\lambda$.

Calcularé la dimensión de la suma y mediante la fórmula de Grassmann obtendré la dimensión de la intersección

$U_\lambda + W_\lambda = L\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$

Para calcular la dimensión de $U_\lambda + W_\lambda$ estudio el rango de la matriz que tiene por filas las coordenadas de cada vector en la base usual de las matrices simétricas

$B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda + 2\lambda + 4\lambda = -\lambda^3 + 10\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 10)$$

$$\lambda(-\lambda^2+10) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm\sqrt{10} \end{cases}$$

Caso $\lambda = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} &\operatorname{ran}(A) = 3 \\ &\dim U_{\lambda=0} = 1 \\ &\dim W_{\lambda=0} = 2 \end{aligned}$$

Caso $\lambda \neq 0$

$\operatorname{ran}(A) = 3$

$\dim U_\lambda = 2$

$\dim W_\lambda = 2$

Solución:

$\lambda \neq 0 \Rightarrow \dim(U_\lambda + W_\lambda) = 3 \Rightarrow \dim(U_\lambda \cap W_\lambda) = 1$

$\lambda = 0 \Rightarrow \dim(U_\lambda + W_\lambda) = 3 \Rightarrow \dim(U_\lambda \cap W_\lambda) = 0$.

27/01/2017

3) Se consideran en $M_2(\mathbb{R})$ los siguientes subespacios vectoriales $U_\lambda$ y $W_\mu$ dependientes de los parámetros $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$U_\lambda = L\left\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W_\mu = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \mu x + y + z = 0,\ x + \mu y + z = 0,\ x + y + \mu z = 0 \right\}$$

a) Determinar las dimensiones de $U_\lambda$ y $W_\mu$ según el valor de los parámetros $\lambda, \mu$.

$\boxed{U_\lambda}$ $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ -1+\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=-3$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0;\ 1-\lambda^2+8=0 \Rightarrow -\lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda=\pm 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0;\ -2\lambda-2-4=0,\ -\lambda-3 \Rightarrow \lambda=-3$$

- $\lambda=-3 \Rightarrow ran=1 \Rightarrow \dim U_{\lambda=-3}=1;\ B_{U_{\lambda=-3}}=\left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}$
- $\lambda\neq-3 \Rightarrow ran=2 \Rightarrow \dim U_{\lambda\neq-3}=2;$

  $B_{U_{\lambda\neq-3}}=\left\{\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}\right\}$

$\boxed{W_\mu}$

$$\begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & \mu \end{vmatrix} = \mu^3+1+1-\mu-\mu-\mu = \mu^3-3\mu+2 \overset{=0}{\rightarrow} \mu=-2,\ \mu=1$$

- $\mu\neq-2, \mu\neq1$

  $ran(A)=3 \Rightarrow \dim W_{\mu\neq-2,1}=1,\ B_{W_{\mu\neq-2,1}}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

- $\mu = 1 \Rightarrow ran(A) = 1$

$\dim W_{\mu=1} = 3$

Para la base, busco tres vectores l. i.

$x + y + z = 0$

$z = -x - y$

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \Rightarrow z=-1 \\ t=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=1 \Rightarrow z=-1 \\ t=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \Rightarrow z=0 \\ t=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Como son l. i, los tres vectores forman una base:

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $\mu = -2 \Rightarrow ran(A) = 2 \Rightarrow \dim W_{\mu=-2} = 2$

$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

$z = 2x - y$

$y = x$

$\left.\begin{matrix} x=1 & y=1 \\ t=0 & z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix} x=0 & y=0 \\ t=1 & z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ l. i

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) Para cada par de valores de $(\lambda, \mu)$ determinar si es verdadero o falso que se verifica:

1) $U_\lambda \oplus W_\mu \iff U_\lambda \cap W_\mu = \{0\}$

2) $M_2(\mathbb{R}) = U_\lambda + W_\mu \iff \dim(U_\lambda + W_\mu) = \dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

$\boxed{\lambda = -3} \to B_{U_{\lambda=-3}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\mu \neq 1 \quad \mu \neq -2}$

$B_{W_{\mu \neq 1,-2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

① Sí, pues $U_{\lambda=-3} \cap W_{\mu \neq 1,-2} = \{0\}$

$U_\lambda + W_\mu = L\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\dim(U_\lambda + W_\mu) = 2$

② No, pues $\dim U_\lambda + W_\mu \neq 4$

$\boxed{\mu = 1}$

$B_{W_{\mu=1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$U_{\lambda=-3} + W_{\mu=1} = L\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Como son l.i $\Rightarrow \dim U_{\lambda=-3} + W_{\mu=1} = 4$

② Sí

Por Grassmam: $\dim(U_{\lambda=-3} \cap W_{\mu=1}) = \{0\}$

① Sí

$\boxed{\mu = -2}$

$B_{W_{\mu=-2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathcal{U}_{\lambda=-3}+\mathcal{W}_{\mu=-2}=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}2&-1\\0&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\operatorname{ran}\begin{pmatrix}2&-1&0&-2\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=3\Rightarrow \dim(\mathcal{U}+\mathcal{W})=3$$

② NO

$$\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W})=\dim\mathcal{U}+\dim\mathcal{W}-\dim\mathcal{U}+\mathcal{W}=1+2-3=0$$

① SÍ

$\boxed{\lambda\neq-3}$

$\boxed{\mu\neq-1,\ \mu=-2}$

$$\mathcal{U}_\lambda+\mathcal{W}_\mu=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1-\lambda&-2\\0&-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&-1\\0&\lambda+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda&-2&0&-4\\2&-1&0&\lambda+1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-4\\2&-1&\lambda+1\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2\\2&-1\end{vmatrix}=$$

$$=-1+\lambda+4=\lambda+3\Rightarrow\lambda+3\neq0 \text{ porque } \lambda\neq-3\Rightarrow \operatorname{ran}=3$$

$$\Rightarrow \dim\mathcal{U}_\lambda+\mathcal{W}_\mu=3$$

② NO

$$\dim\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\dim\mathcal{U}+\dim\mathcal{W}-\dim\mathcal{U}+\mathcal{W}=2+1-3=0$$

① SÍ

$\boxed{\mu=1}$

$$\mathcal{U}_\lambda+\mathcal{W}_\mu=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1-\lambda&-2\\0&-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&-1\\0&\lambda+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

Como mucho habrá cuatro vectores l. i.

$$\begin{vmatrix}2&-1&0&\lambda+1\\1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow\operatorname{ran}=4$$

$\Rightarrow \dim \mathcal{U}+\mathcal{W} = 4$

② Sí

$\dim \mathcal{U}\cap \mathcal{W} = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} - \dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = 2+3-4=1$

① NO

$\boxed{\mu=-2}$

$\mathcal{U}+\mathcal{W} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \dim \mathcal{U}+\mathcal{W} = 4$

② Sí

$\dim \mathcal{U}\cap \mathcal{W} = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} - \dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = 2+2-4=0$

① Sí

# Aplicaciones Lineales

Ejemplo: $P_2(x) \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$f(1) = (1, -1, 2, 0)$

$f(x) = (0, 1, 3, 2)$

$f(x^2) = (1, 1, 1, 1)$

App Inyectiva → lleva vectores independientes a independientes

$$\boxed{f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow \text{Núc}(f) = \{0\}}$$

App Sobreyectiva → aplica un s.d.g de V en un s.d.g de V'

$$\boxed{f \text{ sobreyectiva} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = V'}$$

App Biyectiva → aplica una base de V en una base de V'

↳ inyectiva + sobreyectiva

---

Condición de una app lineal

$V(K)$, $V'(K)$.

$f: V \longrightarrow V'$

$f$ lineal $\Rightarrow \forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in K$:

$$\boxed{f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)}$$

---

## Núcleo e imagen $f: V \longrightarrow V'$

$\rightarrow$ $Núc(f) = \{v \in V \,/\, f(v) = \vec{0}\}$ (s.v de $V(K)$)

$\rightarrow$ $Im(f) = \{v' \in V' \,/\, \exists v \in V : f(v) = v'\}$ (s.v de $V'(K)$)

$$\boxed{\dim V = \dim[Núc(f)] + \dim[Im(f)]}$$

$\rightarrow$ $\dim(Im(f)) = ran[M(f, B' \leftarrow B)]$

$\rightarrow$ $\dim[Núc(f)] = \dim(V) - \dim(Im(f)) =$

$= \dim(V) - ran[M(f, B' \leftarrow B)]$

## Matriz asociada a una App lineal

Sea $f: V \rightarrow V'$, $B$ base de $V$, $B'$ base de $V'$

Matriz asociada: $\boxed{M(f, B' \leftarrow B)}$

Ejemplo:

$$f: \underset{V}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{V'}{\mathbb{R}^2}$$

$f(1,-1,0) = (1,3)$

$f(0,1,1) = (-1,2)$

$f(1,0,1) = (0,5)$

a) ¿El enunciado define una aplicación lineal?

Para ello, los vectores de V tendrán que formar una base.

Veo si son l.i.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{no son l.i} \Rightarrow \text{no forman una base}$$

b) ¿Existe alguna aplicación lineal cumpliendo el enunciado? En caso afirmativo, da una.

Como $(1,0,1) = (1,-1,0) + (0,1,1)$, debe cumplirse que $f(1,0,1) = f(1,-1,0) + f(0,1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,1) = (0,5) \\ f(1,-1,0) + f(0,1,1) = (1,3) + (-1,2) = (0,5) \end{array}\right\} \checkmark$$

$\Rightarrow$ Existe alguna aplicación lineal que cumple el enunciado.

Para poner un ejemplo, tomo un vector l.i respecto a los otros dos de V y doy una imagen:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(1,-1,0) = (1,3)$$
$$f(0,1,1) = (-1,2)$$
$$f(0,0,1) = (1,1)$$

c) Calcula la matriz de f en las bases:

$$B_1 = \{u_1(1,0,0),\ u_2(1,1,0),\ u_3(1,1,1)\}$$
$$B_2 = \{v_1(-1,1),\ v_2(0,1)\}$$

$$B = \{(1,-1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

$$M(f, B_c \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_2 \leftarrow B_1) = M(I, B_2 \leftarrow B_c) \cdot M(f, B_c \leftarrow B) \cdot M(I, B \leftarrow B_1)$$

$$M(I, B_2 \leftarrow B_c) = M(I, B_c \leftarrow B_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$M(I, B \leftarrow B_1)$:

$$(1,0,0) = a_{11}(1,-1,0) + a_{21}(0,1,1) + a_{31}(0,0,1)$$

$$\begin{cases} 1 = a_{11} \\ 0 = -a_{11} + a_{21} \Rightarrow a_{21} = 1 \\ 0 = a_{21} + a_{31} \Rightarrow a_{31} = -1 \end{cases}$$

$$(1,1,0) = a_{12}(1,-1,0) + a_{22}(0,1,1) + a_{32}(0,0,1)$$

$$\begin{cases} 1 = a_{12} \\ 1 = -a_{12} + a_{22} \Rightarrow a_{22} = 2 \\ 0 = a_{22} + a_{32} \Rightarrow a_{32} = -2 \end{cases}$$

$$(1,1,1) = a_{13}(1,-1,0) + a_{23}(0,1,1) + a_{33}(0,0,1)$$

$$\begin{cases} 1 = a_{13} \\ 1 = -a_{13} + a_{23} \Rightarrow a_{23} = 2 \\ 1 = a_{23} + a_{33} \Rightarrow a_{33} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(I, B \leftarrow B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_2 \leftarrow B_1) = M(I, B_2 \leftarrow B_c) \cdot M(f, B_c \leftarrow B) \cdot M(I, B \leftarrow B_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

c) La matriz de $f$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$M(f, B_c \leftarrow B_c) = M(f, B_c \leftarrow B) \cdot M(I, B \leftarrow B_c)$$

$$M(f, B_c \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(I, B \leftarrow B_c) = M(I, B_c \leftarrow B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_c \leftarrow B_c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

## Matrices equivalentes

$A, C \in M_{m \times n}(k)$ equivalentes si $\exists P \in GL_n(k)$ y $Q \in GL_m(k)$:
$GL_n(k)$ → matrices con inversa

$$A = Q^{-1} \cdot C \cdot P$$

$$\boxed{A \text{ y } C \text{ equivalentes} \iff \operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(C)}$$

Todas las matrices asociadas a la misma aplicación lineal en distintas bases son equivalentes.

$f: V \longrightarrow V'$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M(f{,}B' \leftarrow B)"] & B' \\ \overline{B} \arrow[u, bend left, "P"] \arrow[r, "M(f{,}\overline{B}' \leftarrow \overline{B})"'] & \overline{B}' \arrow[u, bend right, "Q"'] \end{tikzcd}$$

$$M(f, \overline{B}' \leftarrow \overline{B}) = Q^{-1} \cdot M(f, B' \leftarrow B) \cdot P$$

## Matrices semejantes

$A, C \in M_n(K)$ son semejantes si $\exists P \in GL_n(K) : A = P^{-1} \cdot C \cdot P$

$$A \text{ y } C \text{ semejantes} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(C) \\ \det(A) = \det(B) \\ \operatorname{traza}(A) = \operatorname{traza}(B) \end{cases}$$

Dos matrices asociadas al mismo endomorfismo en distintas bases son semejantes.

$f: V \to V$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M(f,B)"] \arrow[d, phantom] & B \arrow[d, bend left, "P^{-1}"] \\ B' \arrow[r, "M(f,B')"'] \arrow[u, bend left, "P"] & B' \end{tikzcd}$$

$$M(f, B') = P^{-1} M(f,B) \cdot P$$

**Ejercicio**

$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z,t) = (2x - y - 2z + t,\ x - y - z + t,\ x - 2y - z + 2t)$

Halla una base $B$ de $\mathbb{R}^4$ y una base $B'$ de $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$M(f, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \dim(\operatorname{Nuc} f) =$ nº columnas nulas

$\dim(\operatorname{Im}(f)) =$ nº 1s

Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$

Para obtener la matriz tiene que ser:

$$\left.\begin{array}{l} f(u_1)=(1,0,0)=v_1 \\ f(u_2)=(0,1,0)=v_2 \end{array}\right\} v_1, v_2 \in Im(f)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(u_3)=\vec{0} \\ f(u_4)=\vec{0} \end{array}\right\} u_3, u_4 \in Nuc(f)$$

Calculo el núcleo de f:

$$Nuc(f)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : f(x,y,z,t)=(0,0,0)\}$$

$$\Rightarrow (2x-y-2z+t,\ x-y-z+t,\ x-2y-z+2t)=(0,\ 0,\ 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y+2z+t=0 \\ x-y-z+t=0 \\ x-2y-z+2t=0 \end{cases}$$ (ecuaciones cartesianas de Nuc(f))

Miro cuantas ecuaciones independientes hay

$$ran\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow 2 \text{ ec independientes.}$$

$$\dim Nuc(f)=\dim\mathbb{R}^4 - 2\,ec.indep = 4-2=2$$

$\Rightarrow$ Necesito 2 vectores l.i. para la base de Nuc(f)

Tomando dos ec. l.i:

Me lo invento $\rightarrow$ $\begin{cases} z=1 \\ y=0 \\ x=1 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow (1,0,1,0)$ $\quad$ $\begin{array}{l} z=0 \\ y=1 \\ x=0 \\ t=1 \end{array} \Rightarrow (0,1,0,1)$

$$B_{Nuc(f)}=\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$$

Calculo la imagen de f

$$B_c=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}\Rightarrow Im f = L\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}=$$

$$=L\{(2,1,1),(-1,-1,-2),(-2,-1,-1),(1,1,2)\}$$

como sólo dos vectores son l.i.: $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ y necesito dos vectores l.i. para la base de $\mathrm{Im}(f)$

$$B_{\mathrm{Im}(f)} = \{(2,1,1), (1,1,2)\}$$

$f(u_1) = v_1 = (2,1,1) \in \mathrm{Im} f$ ; $u_1 = (1,0,0,0)$

$f(u_2) = v_2 = (1,1,2) \in \mathrm{Im} f$ ; $u_2 = (0,0,0,1)$

$f(u_3) = \vec{0}$ ; $u_3 = (1,0,1,0) \in B_{Nuc}$

$f(u_4) = \vec{0}$ ; $u_4 = (0,1,0,1) \in B_{Nuc}$

$B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \{(1,0,0,0)\ (0,0,0,1), (1,0,1,0), (0,1,0,1)\}$

el que quera l.i.

$B' = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(2,1,1), (1,1,2), (0,0,1)\}$

22/01/2018

3) Se considera, en el espacio vectorial de matrices cuadradas $M_2(\mathbb{R})$, la aplicación lineal:

$$F: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad F(A) = A - \frac{1}{2}A^t, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$$

Determinar, en caso de que sea posible (o, en caso contrario, justificar la imposibilidad):

a) Dos bases, $B$ y $B'$ de $M_2(\mathbb{R})$ tales que la matriz de $F$ en esas bases sea diagonal y con sus elementos pertenecientes a $\{0,1\}$

Me piden:

$$M(f, B' \leftarrow B) = \begin{array}{c} 1\acute{o}0 \\ \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}_{4\times 4} \end{array}$$

$$\text{ran}\left[M(f, B' \leftarrow B)\right] = \dim\left[\text{Im}(f)\right]$$

Calculo la imagen de f, haciendo las imágenes de la base de V (utilizo la base canónica).

$$f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Im} f = L\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{\text{ran} = 4 \Rightarrow \text{l.i.}}\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} B = B_c = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \\ B' = \left\{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right\} \end{array}}$$

b) Una base B de $M_2(\mathbb{R})$ tal que la matriz F en esa base sea diagonal y con todos sus elementos pertenecientes a $\{0, 1\}$

Me piden:

$$\exists B \text{ base } / M(f, B) = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

$$B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$$

Tendría que ser:

$$\left.\begin{array}{l} f(M_1) = M_1 \\ f(M_2) = M_2 \\ f(M_3) = M_3 \\ f(M_4) = M_4 \end{array}\right\} \Rightarrow f = I_{M_2(\mathbb{R})}$$

No es posible, porque f no es la identidad.

*) Se consideran los subespacios:

$\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x+y-2z=0\}$ en $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$

$W = \{p(x) \in P_2(x) \,/\, p(0) = p'(1) = 0\}$ en $P_2(x)$

Construye si es posible una app lineal tal que $Im(f) = \mathcal{U}$ y $Ker(f) = W$:

$$f: P_2(x) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dando la matriz en las bases usuales.

Calculo una base de $Im(f)$:

$\dim Im(f) = \dim \mathcal{U} = 3 - 1 = 2$

Obtengo dos vectores l.i:

$\begin{matrix} x=1 \\ z=0 \end{matrix} \Rightarrow y = -2$ | $\begin{matrix} x=0 \\ z=1 \end{matrix}$ $y=2$

$B_{Im(f)} = \{(1,-2,0), (0,2,1)\}$

Calculo una base del núcleo:

$\dim Nuc(f) = \dim P_2(x) - \dim Im(f) = 3 - 2 = 1$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\left.\begin{matrix} p(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \\ p'(1) = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ dos ecuaciones cartesianas l. i.

Para la base necesito un vector que cumpla las ecuaciones.

$\Rightarrow (-2x + x^2)$

$B_W = \{(-2x+x^2)\}$

Defino la aplicación:

$$\boxed{\begin{aligned} f: P_2(x) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(-2x+x^2) &= (0,0,0) \\ f(1) &= (1,-2,0) \\ f(x) &= (0,2,1) \end{aligned}}$$

(La definición es válida porque $\{-2x+x^2, 1, x\} = B$ forman base de $P_2(x)$ )

La matriz asociada a la aplicación:

$$M(f, B'_c \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B'_c \leftarrow B_c) = M(f, B'_c \leftarrow B) \cdot M(I, B \leftarrow B_c) =$$

$$= M(f, B'_c \leftarrow B) \cdot M(I, B_c \leftarrow B)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} = \boxed{M(f, B'_c \leftarrow B_c)}$$

*) Construye un endomorfismo de $M_2(\mathbb{R})$ tal que:

$\hookrightarrow f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $f \circ f = f$

Calcula la expresión de $f$ en la base usual.

¿Se cumple que $M_2(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?

$$f \circ f = f \Rightarrow (f \circ f)(M) = f(M) \Rightarrow f(f(M)) = f(M)$$

$$f\left(f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$f\left(f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Defino la aplicación:

$$\boxed{\begin{array}{l} f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}$$

→ Válido porque los vectores $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ son l.i y por tanto forman base.

$$M(f, B_c \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_c) = M(f, B_c \leftarrow B) \cdot M(I, B \leftarrow B_c)$$

$$M(I, B \leftarrow B_c) = M(I, B_c \leftarrow B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Expresión de f:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a+d \\ c \\ -a+c+d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a+d \\ c & -a+c+d \end{pmatrix}}$$

¿$M_2(\mathbb{R}) = Nuc(f) \oplus Im(f)$?

1. $Nuc(f) \cap Im(f) = \{0\}$
2. $\dim M_2(\mathbb{R}) = \dim Nuc f + \dim Im(f)$ ✓

Calculo el núcleo:

$$Nuc(f) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, f(A) = \vec{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} c & a+d \\ c & -a+c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a+d = 0 \\ a+c+d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a+d = 0 \end{cases}$$ ec. cartesianas del núcleo

$\dim Nuc(f) = \dim M_2(\mathbb{R}) - 2\text{ec} = 4-2 = \boxed{2}$

$\dim Im(f) = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim Nuc(f) = 4-2 = \boxed{2}$

Base de la imagen: Dos vectores l.i.

$$B_{Im(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Base del núcleo: dos vectores l.i.

$$B_{Nuc(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(Nuc(f) + Im(f)) = ran \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\dim(Nuc(f) \cap Im(f)) = \dim(Nuc(f)) + \dim(Im(f)) - \dim(Nuc(f) + Im(f))$$
$$= 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow \text{(1) se cumple}$$

Es cierto que $M_2(\mathbb{R}) = Nuc(f) \oplus Im(f)$.

---

*) Sea V un e.v real de dimensión 2. Sea $f \in End(V)$ que cumple $f \circ f = f_0$, siendo $f_0$ el endomorfismo nulo.

a) Demostrar que o bien $f = f_0$ y si $f \neq f_0 \Rightarrow \exists$ B base de V tal que $M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $\underline{f = f_0} \Rightarrow f \circ f = f_0 \circ f_0 = f_0 \Rightarrow$ cierto

Si $\underline{f \neq f_0}$:

$\exists v \in V : f(v) \neq \vec{0} \Rightarrow v \notin Nuc(f)$

Sea $v_1, v_2 \in V$. Supongo $f(v_1) = \vec{0}$ y $f(v_2) = v_1$

Demuestro que $\{f(v_2), v_2\}$ forman una base, para ello deben ser l.i.

Supongo que son l.d $\Rightarrow f(v_2) = \lambda v_2$

$f(f(v_2)) = f(\lambda v_2) \Rightarrow f(v_1) = \lambda f(v_2) \Rightarrow \vec{0} = \lambda f(v_2)$

$\lambda = 0 \Rightarrow f(v_2) = \vec{0}$: NO PUEDE SER

$f(v_2) = \vec{0} \Rightarrow$ NO.

$\Rightarrow$ son l.i.

$f(v_1) = \vec{0}$
$f(v_2) = v_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

b) Utilizando el apartado anterior encuentra todas las matrices cuadradas, reales de orden 2, tal que $A^2 = 0$.

$M_2(\mathbb{R}) \underset{\text{Isomorfo}}{\cong} End(V) \Rightarrow A^2 = 0 \Leftrightarrow f \circ f = f_0$

Opciones

$\dim V = \dim[Nuc(f)] + \dim[Im(f)]$

| | $2 =$ | |
|---|---|---|
| ① | 0 | 2 |
| ② | 1 | 1 |
| ③ | 2 | 0 |

Opción ①.

No se puede dar:

$f$ sería biyectiva $\Rightarrow \exists f^{-1} \Rightarrow \det(M(f,B)) \neq 0$ -

y si $A^2 = 0 \Rightarrow \det(A^2) = \det(A)^2 = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$

$\Rightarrow$ No tiene inversa ⚠ Contradicción

Opción ②:

$\left.\begin{array}{l} \dim[Nuc(f)] = 1 \\ \dim[Im(f)] = 1 \end{array}\right\}$ Por el apartado a) $\Rightarrow \exists B$ base /

$M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: Matrices de la forma

$\left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P \;/\; P \in GL_2(\mathbb{R}) \right\}$

Caso ③:

$\dim[Nuc(f)] = 2$

$\dim[Im(f)] = 0$

$\Rightarrow Nuc(f) = V \Rightarrow f = 0 \Rightarrow M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{A \in M_2(\mathbb{R}) / A^2 = 0 \text{ son } A \in \left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P / P \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

*) Sea V de $M_2(\mathbb{C})$ que coincide con la traspuesta de su conjugada y tienen traza 0.

$V = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \;/\; A = \bar{A}^t \text{ y } traza(A) = 0 \}$

a) ¿Es V un e.v. Complejo? ¿Lo es real?

$V \subseteq M_2(\mathbb{C})$

Sea $A, B \in V$ y $\alpha, \beta \in (\mathbb{C})$.

¿$\alpha A + \beta B \in V$?

1ª Condición:

$\overline{\alpha A + \beta B}^t = [\overline{\alpha A} + \overline{\beta B}]^t = \overline{\alpha A}^t + \overline{\beta B}^t =$

$= \bar{\alpha} \bar{A}^t + \bar{\beta} \bar{B}^t = \bar{\alpha} A + \bar{\beta} B \Rightarrow$ sólo si $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow$

V no es e.v complejo

2ª Condición:

$tr(\alpha A + \beta B) = tr(\alpha A) + tr(\beta B) = \alpha\, tr(A) + \beta\, tr(B) = 0$ ✓

$\Rightarrow$ V es un e.v real $\Rightarrow V(\mathbb{R})$

b) Construye un epimorfismo de V en $S_2(\mathbb{R})$. Calcula el núcleo del mismo

$$f: V(\mathbb{R}) \longrightarrow S_2(\mathbb{R})$$

Calculo una base de $V(\mathbb{R})$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1+b_1 i & a_2+b_2 i \\ a_3+b_3 i & a_4+b_4 i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \;/\; A = \bar{A}^t \text{ y } \text{traza}(A) = 0 \right\}$$

Obtengo ecuaciones cartesianas.

$$A = \bar{A}^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1+b_1 i & a_2+b_2 i \\ a_3+b_3 i & a_4+b_4 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 i & a_3-b_3 i \\ a_2-b_2 i & a_4-b_4 i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1+b_1 i = a_1 - b_1 i & \Rightarrow \underline{b_1 = 0} \\ a_2+b_2 i = a_3 - b_3 i & \\ a_3+b_3 i = a_2 - b_2 i & \Rightarrow \underline{a_2 = a_3} \;;\; \underline{b_2 = -b_3} \\ a_4 + b_4 i = a_4 - b_4 i & \Rightarrow \underline{b_4 = 0} \end{cases}$$

$$\text{traza}(A) = 0 \Rightarrow a_1 + b_1 i + a_4 + b_4 i = 0;\; (a_1+a_4) + (b_1+b_4) i = 0$$

$$\Rightarrow \underline{a_1 + a_4} = 0$$

Ecuaciones cartesianas de V:

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ a_2 = a_3 \\ b_2 = -b_3 \\ b_4 = 0 \\ a_1 = -a_4 \end{cases}$$

$\dim(V) = \dim\left[M_2(\mathbb{C})(\mathbb{R})\right] - 5ec = 8 - 5 = 3 \Rightarrow$ la base tendrá tres vectores l.i

Obtengo los vectores dando valores:

$$a_3 = 1 = a_2 \quad b_3 = 0 = b_2 \quad a_1 = 0 = a_4 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad a_3 = 0 = a_2 \quad b_3 = 1 \Rightarrow b_2 = -1 \quad a_1 = 0 = a_4 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = 0 = a_2 \quad b_3 = 0 = b_2 \quad a_1 = 1 \quad a_4 = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Veamos si son l.i.

$$a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0$$

$\Rightarrow$ l.i.

$$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Una base de $S_2(\mathbb{R})$: $B_{S_2(\mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Defino la app lineal.

$$\boxed{\begin{array}{l} f: V(\mathbb{R}) \longrightarrow S_2(\mathbb{R}) \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

Sobreyectiva, porque $\operatorname{Im}(f) = S_2(\mathbb{R})$

Como también es un monomorfismo, $\operatorname{Nuc}(f) = \{0\}$

---

Otras cosas:

$$M(f, B_{S_2(\mathbb{R})} \leftarrow B_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

# Espacio Dual

$f: V \longrightarrow V'$ app lineal

$Lin_K(V, V') = \{ f: V \to V' \ / \ f \text{ app lineal} \}$

Ley de composición interna: $+$

Suma de apps lineales:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Ley de composición externa: $\circ$

Producto por escalar:

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

$\triangleright$ $Lin_K(V, V')(K)$ es un espacio vectorial

$\dim[Lin(V, V')(K)] = \dim(V) \times \dim(V') = n \times m$

$Lin_K(V, V') \underset{\substack{\downarrow \\ \text{isomorfo}}}{\cong} M_{m \times n}(K)$

En particular:

$End_K(V) \cong M_n(K)$

$Automorf_n(V) \cong GL_n(K)$

---

## FORMA LINEAL

$V(K)$ e.v. Una forma lineal es una app lineal

$\varphi: V(K) \longrightarrow K(K)$

Ejemplo:

$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\varphi(x,y,z) = x + yz$ → no es forma lineal porque no es app lineal.

Ejemplo:

$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\varphi(x,y,z) = x + 3y - 2z \Rightarrow$ ES FORMA LINEAL

## Matriz asociada a una forma lineal

$B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$

$B'_c = \{1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(e_1) = 1 \\ \varphi(e_2) = 3 \\ \varphi(e_3) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow M(\varphi, \{1\} \leftarrow B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

↳ Matriz asociada a la forma lineal $\varphi$.

$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Calcular la matriz $M(\varphi, \{7\} \leftarrow B_c)$

$$M(\varphi, \{7\} \leftarrow B_c) = M(I, \{7\} \leftarrow \{1\}) \cdot M(f, \{1\} \leftarrow B_c) =$$

$$= \left(\tfrac{1}{7}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix}}$$

## ESPACIO DUAL:

$$\boxed{\mathrm{Lin}_K(V, K) = \{\varphi: V \to K \,/\, \varphi \text{ es forma lineal}\} = V^*}$$

$$\boxed{\dim V = \dim V^*}$$

## Base dual

$V(K)$, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de $V$

Defino:

$\varphi^1 : V \to K$ $\qquad$ $\varphi^2 : V \to K$ $\qquad$ $\varphi^i : V \to K$

$\varphi^1(v_1) = 1$ $\qquad$ $\varphi^2(v_1) = 0$ $\qquad$ $\varphi^i(v_j) = \delta_i^j =$

$\varphi^1(v_2) = 0$ $\qquad$ $\varphi^2(v_2) = 1$ $\qquad$ $= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$\dots$ $\qquad$ $\varphi^3(v_3) = 0$

$\varphi^1(v_n) = 0$ $\qquad$ $\dots$

$\dots$ $\qquad$ $\varphi^2(v_n) = 0$

$\rightarrow$ Delta de Krönecker

**Base dual**: $B^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\}$, base de $V^*$

Para toda base en $V$ existe una base dual de $V^*$

**Propiedad** Sean $\begin{cases} B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ base de } V \\ B^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\} \text{ base dual de } B \end{cases}$

Sea $v \in V$: $\quad v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \Rightarrow a_j = \varphi^i(v)$

Demostración:

$$\varphi^1(v) = \varphi^1(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 \underbrace{\varphi^1(v_1)}_{1} + a_2 \underbrace{\varphi^1(v_2)}_{0} + \dots + a_n \underbrace{\varphi^1(v_n)}_{0}$$

$$= a_1 \Rightarrow \underline{\varphi^1(v) = a_1}$$

y así sucesivamente.

---

Sea $\phi \in V^*$: $\phi = b_1 \varphi^1 + b_2 \varphi^2 + \dots + b_n \varphi^n$

$$\phi(v_1) = (b_1 \varphi^1 + b_2 \varphi^2 + \dots + b_n \varphi^n)(v_1) = b_1 \underbrace{\varphi^1(v_1)}_{1} + b_2 \underbrace{\varphi^2(v_1)}_{0} + \dots + b_n \underbrace{\varphi^n(v_1)}_{0}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\phi(v_1) = b_1}$

*) $\mathbb{R}^3$; $B = \{u_1(1,-1,0), u_2(1,2,1), u_3(0,1,3)\}$

Calcular la base dual:

$\boxed{B^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}}$, $\varphi^0: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Calculo la matriz asociada a cada forma lineal:

$$M(\varphi^0; \{1\} \leftarrow B_c) = (a \ \ b \ \ c)$$

$\boxed{\varphi 1}$

$$\varphi^1(u_1) = 1 = (a \ b \ c)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = a - b$$

$$\varphi^1(u_2) = 0 = (a \ b \ c)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = a + 2b + c$$

$$\varphi^1(u_3) = 0 = (a \ b \ c)\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = b + 3c$$

$$\begin{cases} a - b = 1 \longrightarrow a = 1 + b \\ a + 2b + c = 0 \rightarrow \begin{cases} 3b + c = -1 \rightarrow c = -1 - 3b \\ b + 3c = 0 \rightarrow b + 3(-1-3b) = 0 \Rightarrow \end{cases} \\ b + 3c = 0 \longrightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow b - 9b - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -3/8}$$

$$c = -1 - 3 \cdot \frac{-3}{8} \Rightarrow \boxed{c = 1/8}$$

$$a = 1 - \frac{3}{8} \Rightarrow \boxed{a = 5/8}$$

$$M(\varphi^1, \{1\} \leftarrow B_c) = \left(\frac{5}{8} \ \ \frac{-3}{8} \ \ \frac{1}{8}\right)$$

$\boxed{\varphi 2}$

$$\varphi^2(u_1) = 0 = (a \ b \ c)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = a - b$$

$$\varphi^2(u_2) = 1 = (a \ b \ c)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = a + 2b + c$$

$$\varphi^2(u_3) = 0 = (a \ b \ c)\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = b + 3c$$

$$\begin{cases} a-b=0 \rightarrow a=b \\ a+2b+c=1 \\ b+3c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3b+c=1 \\ b+3c=0 \rightarrow b=-3c \end{matrix}$$

$$3(-3c)+c=1 \Rightarrow \boxed{c=-1/8}$$

$$b=-3\left(\frac{-1}{8}\right) \Rightarrow \boxed{b=\frac{3}{8}} \Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{8}}$$

$$M(\varphi^2, \{1\} \leftarrow B_c) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\varphi^3}$

$$\varphi^3(u_1)=0=(a \ b \ c)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=a-b$$

$$\varphi^3(u_2)=0=(a \ b \ c)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=a+2b+c$$

$$\varphi^3(u_3)=1=(a \ b \ c)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=b+3c$$

$$\begin{cases} a-b=0 \rightarrow a=b \\ a+2b+c=0 \\ b+3c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3b+c=0 \rightarrow c=-3b \\ b+3c=1 \end{matrix}$$

$$b+3(-3b)=1 \Rightarrow \boxed{b=\frac{-1}{8}} \Rightarrow \boxed{a=\frac{-1}{8}}$$

$$c=-3\cdot\left(\frac{-1}{8}\right) \Rightarrow \boxed{c=\frac{3}{8}}$$

$$M(\varphi, \{1\} \leftarrow B_c) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Solución}}$

$$\left.\begin{matrix} \varphi^1(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{-3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{5}{8}x-\frac{3}{8}y+\frac{1}{8}z \\ \varphi^2(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{3}{8}x+\frac{3}{8}y-\frac{1}{8}z \\ \varphi^3(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=-\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}y+\frac{3}{8}z \end{matrix}\right\} B^*$$

---

Sean $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B_c^* = \{\phi^1, \phi^2, \phi^3\}$ bases duales

$\varphi^1 = a_1\phi^1 + a_2\phi^2 + a_3\phi^3$

Como $a_i = \varphi^1(e_i)$

La matriz de una forma lineal coincide con sus coordenadas en la base dual.

$\Rightarrow \varphi^1 = \left(\frac{5}{8}, \frac{-3}{8}, \frac{1}{8}\right)_{B_c^*}$

La base del ejercicio anterior en coordenadas es

$B^* = \left\{\varphi^1\left(\frac{5}{8}, \frac{-3}{8}, \frac{1}{8}\right), \varphi^2\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{-1}{8}\right), \varphi^3\left(\frac{-1}{8}, \frac{-1}{8}, \frac{3}{8}\right)\right\}$

## Disquisiciones sobre los espacios duales

$\left.\begin{array}{l} B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \\ B^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n\} \end{array}\right] \rightarrow$ duales

Sea $\omega \in V^*$

$\omega \nearrow \omega: V \longrightarrow K$ aplicación lineal: $M(\omega, \{1\} \leftarrow B)$

$\searrow$ vector de $V^* \Rightarrow B^*$ base $V^* \Rightarrow \omega = a_1\varphi^1 + a_2\varphi^2 + \ldots + a_n\varphi^n$

$\omega(v_1) = (a_1\varphi^1 + \ldots + a_n\varphi^n)(v_1) = a_1\varphi^1(v_1) + \ldots + a_n\varphi^n(v_1) = \boxed{a_1}$

Análogamente:

$\omega(v_2) = a_2$

...

$\omega(v_n) = a_n$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow M(\omega, \{1\} \leftarrow B) = (a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ \ a_n) \\ \omega \equiv (a_1, a_2, \dots, a_n)_{B^*} \end{array}}$$

EXAMEN

*) Se consideran $\varphi^1, \varphi^2 \in M_2^*(\mathbb{R})$ dadas por:

$\varphi^1(A) = \text{traza}(A)$

$\varphi^2(A) = a - d$

Se pide:

a) (1 punto) Demuestra que $\varphi^1$ y $\varphi^2$ son linealmente independientes y amplía este conjunto hasta obtener una base de $M_2^*(\mathbb{R})$.

Para ver si $\varphi^1$ y $\varphi^2$ son l.i primero tengo que carcular sus coordenadas respecto de una base.

Sean:

$B_C = \{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$

$B_C^* = \{ \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4 \}$

duales

Expreso $\varphi^1$ y $\varphi^2$ como c. l de $B_C^*$:

$$\varphi^1 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + a_4\omega^4$$

$$a_1 = \varphi^1(M_1) = \varphi^1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{traza}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$a_2 = \varphi^1(M_2) = \varphi^1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_3 = \varphi^1(M_3) = \varphi^1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_4 = \varphi^1(M_4) = \varphi^1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \varphi^1 \equiv (1, 0, 0, 1)_{B_C^*}$$

40x

$$\varphi^2 = b_1\omega^1 + b_2\omega^2 + b_3\omega^3 + b_4\omega^4$$

$$b_1 = \varphi^2(M_1) = \varphi^2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = 1$$

$$b_2 = \varphi^2(M_2) = \varphi^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = 0$$

$$b_3 = \varphi^2(M_3) = \varphi^2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = 0$$

$$b_4 = \varphi^2(M_4) = \varphi^2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = -1$$

$$\Rightarrow \varphi^2 \equiv (1,0,0,-1)_{B_c^*}$$

Veo si $\varphi^1$ y $\varphi^2$ son linealmente independientes.

$$\operatorname{ran}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&-1\end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{l.i}$$

Para obtener una base $B^*$ de $M_2^*(\mathbb{R})$ añado otras dos formas linealmente independientes:

$$\varphi^3 = (0,1,0,0)\ ;\quad \varphi^4 = (0,0,1,0)$$

Como $\operatorname{ran}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} = 4$

$$\Rightarrow \boxed{B^* = (\varphi^1(1,0,0,1),\ \varphi^2(1,0,0,-1),\ \varphi^3(0,1,0,0),\ \varphi^4(0,0,1,0)\}}$$

Expreso tambien $B^*$ como aplicaciones

$$\varphi^i : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi^1\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = a+d$$

$$\varphi^2\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = a-d$$

$$\varphi^3\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = (0\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = b$$

$$\varphi^4\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = (0\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = c$$

$B^*$

b) (1 punto) Encuentra la base $B$ de $M_2(\mathbb{R})$ de la que la anterior es dual

$B=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ $(A_i \in M_2(\mathbb{R}))$

$\boxed{A_1}$ $A_1=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi^1(A_1)=1=a+d \\ \varphi^2(A_1)=0=a-d \\ \varphi^3(A_1)=0=b \\ \varphi^4(A_1)=0=c \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} 1=a+d \\ 0=a-d \\ 0=b \\ 0=c \end{array}\right. \Big\} \Rightarrow a=d=1/2$$

$$A_1=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A_2}$ $A_2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi^1(A_2)=0=a+d \\ \varphi^2(A_2)=1=a-d \\ \varphi^3(A_2)=0=b \\ \varphi^4(A_2)=0=c \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} 0=a+d \rightarrow a=-d \\ 1=a-d \rightarrow 1=a+a \rightarrow a=\frac{1}{2},\ d=-\frac{1}{2} \\ 0=b \\ 0=c \end{array}\right.$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A_3}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi^1(A_3)=0=a+d \\ \varphi^2(A_3)=0=a-d \\ \varphi^3(A_3)=1=b \\ \varphi^4(A_3)=0=c \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} 0=a+d \\ 0=a-d \\ 1=b \\ 0=c \end{array}\right. \Big\} \begin{array}{l} 2a=0 \\ a=d \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a=0 \\ d=0 \end{array}$$

$$A_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5c/c

$\boxed{A_4} =$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi^1(A_4) = 0 = a+d \\ \varphi^2(A_4) = 0 = a-d \\ \varphi^3(A_4) = 0 = b \\ \varphi^4(A_4) = 1 = c \end{array}\right\} \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 0 = a+d \\ 0 = a-d \end{array}\right\} \Rightarrow a=0,\ d=0 \\ 0 = b \\ 1 = c \end{cases}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Calcula las coordenadas de la forma:

$$\phi : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi(A) = a - b + 2c$$

en la base obtenida en el apartado A.

$$\phi = a_1 \varphi^1 + a_2 \varphi^2 + a_3 \varphi^3 + a_4 \varphi^4$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \phi(A_1) = 1/2 \\ a_2 = \phi(A_2) = 1/2 \\ a_3 = \phi(A_3) = -1 \\ a_4 = \phi(A_4) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\phi = (1/2, 1/2, -1, 2)_{B^*}}$$

(utilizando las propiedades del dual)

EXAMEN

*) Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}_3[x]^*$ dadas por:

$$\varphi^1(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx$$
$$\varphi^2(p(x)) = p'(0)$$

a) Calcula una base $\bar{B}^*$ ampliada a partir de $\varphi^1$ y $\varphi^2$

$B_C = \{1, x, x^2, x^3\}$ $(= \{p_1, p_2, p_3, p_4\})$

$B_C^* = \{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$

Calculo las coordenadas de $\varphi^1$ y $\varphi^2$ respecto de $B_C^*$:

$\boxed{\varphi^1} = a_1\omega^1 + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + a_4\omega^4$

$a_1 = \varphi^1(p_1) = \varphi^1(1) = \int_0^1 1\,dx = x\Big]_0^1 = 1$

$a_2 = \varphi^1(p_2) = \varphi^1(x) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 = 1/2$

$a_3 = \varphi^1(p_3) = \varphi^1(x^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = 1/3$

$a_4 = \varphi^1(p_4) = \varphi^1(x^3) = \int_0^1 x^3\,dx = 1/4\,x^4\Big]_0^1 = 1/4$

$\Rightarrow \varphi^1 = (1, 1/2, 1/3, 1/4)_{B_C^*}$

$\boxed{\varphi^2} = b_1\omega^1 + b_2\omega^2 + b_3\omega^3 + b_4\omega^4$

$b_1 = \varphi^2(p_1) = \varphi^2(1) = 0$

$b_2 = \varphi^2(p_2) = \varphi^2(x) = 1$

$b_3 = \varphi^2(p_3) = \varphi^2(x^2) = 0$

$b_4 = \varphi^2(p_4) = \varphi^2(x^3) = 0$

$\Rightarrow \varphi^2 = (0, 1, 0, 0)_{B_C^*}$

GCX

$$\text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow \text{l.i} \Rightarrow \text{base}$$

me los invento para ampliar $\{\psi^1, \psi^2\}$ a una base.

$$\overline{B}^* = \{\psi^1(1, 1/2, 1/3, 1/4), \psi^2(0,1,0,0), \psi^3(0,0,1,0), \psi^4(0,0,0,1)\}$$

Equivalentemente, $\psi^3$ y $\psi^4$ como aplicaciones son:

$$\psi^3, \psi^4 : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi^3(p(x)) = (0\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_2$$

$$\psi^4(p(x)) = (0\ 0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_3$$

donde $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ es un polinomio genérico

b) Calcula la base de $\mathbb{R}_3[x]$ de la cual $\overline{B}^*$ es su dual.

$$\overline{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

$\boxed{p_1}$ $\psi^1(p_1) = 1 = (1\ \ 1/2\ \ 1/3\ \ 1/4)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3$

$$\psi^2(p_1) = 0 = (0\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1$$

$$\psi^3(p_1) = 0 = a_2$$
$$\psi^3(p_1) = 0 = a_3$$

$$\begin{cases} 1 = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 \\ 0 = a_1 \\ 0 = a_2 \\ 0 = a_3 \end{cases} \Rightarrow a_0 = 1$$

$\underline{p_1 = 1}$

$\boxed{p_2}$

$$\left.\begin{array}{l} \psi^1(p_2) = 0 = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 \\ \psi^2(p_2) = 1 = a_1 \\ \psi^3(p_2) = 0 = a_2 \\ \psi^4(p_2) = 0 = a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_0 = -1/2$$

$\underline{p_2 = \frac{-1}{2} + x}$

$\boxed{p_3}$

$$\left.\begin{array}{l} \psi^1(p_3) = 0 = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 \\ \psi^2(p_3) = 0 = a_1 \\ \psi^3(p_3) = 1 = a_2 \\ \psi^4(p_3) = 0 = a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_0 = -1/3$$

$p_3 = \frac{-1}{3} + x^2$

$\boxed{p_4}$

$$\left.\begin{array}{l} \psi^1(p_4) = 0 = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 \\ \psi^2(p_4) = 0 = a_1 \\ \psi^3(p_4) = 0 = a_2 \\ \psi^4(p_4) = 1 = a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_0 = -\frac{1}{4}$$

$\underline{p_4 = \frac{-1}{4} + x^3}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{B} = \{1, \frac{-1}{2} + x, -\frac{1}{3} + x^2, \frac{-1}{4} + x^3\}}$$

c) Calcula usando las propiedades del dual las coordenadas del polinomio en la base del apartado b.

$q(x) = x - 3x^3$

$$q(x) = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4$$

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_1 = \varphi^1(q(x)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \\
\lambda_2 = \varphi^2(q(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \\
\lambda_3 = \varphi^3(q(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \\
\lambda_4 = \varphi^4(q(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -3
\end{array}\right\}$$

Usando la base dual $\overline{B}^*$ puedo calcular las coordenadas en $\overline{B}$

$$\Rightarrow \boxed{q(x) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{\overline{B}}}$$

*) a) [0'5 puntos]. Sea $f$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de manera que existen $x, y \in \mathbb{R}^3$, ambos no nulos, tales que $f(x) = x$ y $f(y) = -y$
¿Es $\{x, y\}$ linealmente independiente?

Supongo $\{x, y\}$ l.d. $\Rightarrow \exists a \neq 0 \in \mathbb{R} : x = ay$

$\Leftrightarrow f(x) = f(ay) \Leftrightarrow f(x) = a f(y) \Leftrightarrow x = -ay \Leftrightarrow ay = -ay$

$\Leftrightarrow 2ay = 0 \nearrow a = 0 \Rightarrow x = \vec{0}$ No puede ser
$\searrow y = 0 \Rightarrow$ No puede ser

$\Rightarrow \{x, y\}$ es l.i.

b) [1'5 puntos]. Encuentra un endomorfismo $h$ de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ que cumpla $(1, -1, 1) \in \mathrm{Im}(h)$, $(1, 1, 1) \in \mathrm{Ker}(h)$ y traza $(h) = 1$, dando su matriz respecto de la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3$.

$h : \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$

$h(1,1,1) = (0,0,0)$
$h(1,-1,1) = (1,-1,1)$
$h(1,0,0) = (0,0,0)$

$B = \{(1,1,1), (1,-1,1), (1,0,0)\}$

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{traza } h = 1$$

$$M(h, B_u) = M(h, B_u \leftarrow B) \cdot M(h, B) \cdot M(h, B \leftarrow B_u)$$

$$M(h, B_u \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$M(h, B \leftarrow B_u) = M(h, B_u \leftarrow B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Examen

*) En el espacio vectorial $P_2[x]$ de polinomios reales y grado menor o igual que 2 se consideran las formas lineales $\varphi^1, \varphi^2 : P_2[x] \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\varphi_1(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx, \quad \varphi^2(p(x)) = p(0), \quad p(x) \in P_2[x].$$

En el espacio vectorial $S_2(\mathbb{R})$ de matrices simétricas reales de orden 2 se considera el subespacio:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \middle/ \begin{matrix} a+b+c=0 \\ a-b-c=0 \end{matrix} \right\}$$

(a) (3 puntos). Encontrar una aplicación lineal $f: P_2[x]^* \to S_2(\mathbb{R})$ tal que $\dim \ker(f) = 2$ y $f(U) = W$, con $U = L\{\varphi^1, \varphi^2\}$

Calculo las coordenadas de $\varphi^1$ y $\varphi^2$ en la base canónica de $P_2[x]^*$

$$B_C = \{p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2\}$$

$$B_C^* = \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$$

$\boxed{\varphi^1}$ $\quad \varphi^1 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2 + a_3\omega^3$

$$a_1 = \varphi^1(p_1) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2$$

$$a_2 = \varphi^1(p_2) = \int_{-1}^{1} x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$a_3 = \varphi^1(p_3) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = 2/3$$

$$\Rightarrow \varphi^1_{B_C^*} = (2, 0, 2/3)$$

9c

$\boxed{\psi^2}$ $\psi^2 = b_1 \omega^1 + b_2 \omega^2 + b_3 \omega^3$

$b_1 = \psi^2(p_1) = 1$

$b_2 = \psi^2(p_2) = 0$

$b_3 = \psi^3(p_3) = 0$

$\Rightarrow \psi^2_{B_c^*} = (1, 0, 0)$

$\text{ran}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \psi^1$ y $\psi^2$ son l.i.

Amplío a una base de $P_2[x]^*$.

$\text{ran}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \psi^3_{B_c^*} = (0, 1, 0)$

$\Rightarrow B_{P_2[x]^*} = \{\psi^1, \psi^2, \psi^3\}$

$\hookrightarrow \psi^3 = (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1]$

$\boxed{\text{Im} f} = W$

$\dim W = 3 - 2\text{ec} = 1 \Rightarrow B_{\text{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} f : P_2[x]^* \rightarrow S_2(\mathbb{R}) \\ f(\psi^1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ f(\psi^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f(\psi^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}$$

b) (3 puntos) Para la aplicación f del apartado anterior, calcular la matriz $M(f, B'_u \leftarrow B_u^*)$ siendo $B_u^*$ la base dual de $B_u = \{1, x, x^2\}$ y $B'_u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\overline{B} = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\} = \{(2, 0, 2/3), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

$$M(f, B'_u \leftarrow \overline{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B'_u \leftarrow B_u^*) = M(f, B'_u \leftarrow \overline{B}) \circ M(I, \overline{B} \leftarrow B_u^*) =$$
$$= M(f, B'_u \leftarrow \overline{B}) \cdot M(I, B_u^* \leftarrow \overline{B})^{-1}$$

$$M(I, B_u^* \leftarrow \overline{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B'_u \leftarrow B_u^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

# $\boxed{\text{ANULADOR}}$ DE UN SUBESPACIO VECTORIAL

Sea $V(K)$ un e.v y $\mathcal{U}$ un s.v de $V(K)$

Se define el anulador de $\mathcal{U}$:

$$an(\mathcal{U}) = \{ \varphi \in V^* \;/\; \varphi(u) = 0 \;\; \forall u \in \mathcal{U} \}$$

↳ subespacio vectorial de $V^*$

---

Sea $V^*(K)$ un e.v. dual y sea $W$ un s.v de $V^*$

Se define el anulador de $W$:

$$an(W) = \{ v \in V \;/\; \omega(v) = 0 \;\; \forall \omega \in W \}$$

↳ subespacio vectorial de $V$

## Propiedades de los anuladores

1) $an(an(S)) = L(S)$, siendo $S$ un subconjunto de $V(K)$
2) $an(an(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$, $\forall \mathcal{U}$ subespacio vectorial
3) $\dim[an(\mathcal{U})] = \dim V - \dim \mathcal{U}$
4) $\begin{cases} an(\mathcal{U} + W) = an(\mathcal{U}) \cap an(W) \\ an(\mathcal{U} \cap W) = an(\mathcal{U}) + an(W) \end{cases}$
5) $\mathcal{U} \subseteq W \Rightarrow an(W) \subseteq an(\mathcal{U})$
6) $an(V) = \{\varphi^0\} \Rightarrow an(\{\vec{0}\}) = V^*$

   $an(V^*) = \{\vec{0}\} \Rightarrow an(\{\varphi^0\}) = V$

Ejemplo:

$U$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$:

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{array}{l} x-y+2z=0 \\ x+z-t=0 \end{array} \right\}$$

Calcular una base de $an(U)$: ¿$B_{an(U)}$?

Obtengo una base de $U$:

$B_U = \{u_1(1,1,0,1),\ u_2(0,2,1,1)\}$

Amplío a una base de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$

$B_{\mathbb{R}^4} = \{u_1(1,1,0,1),\ u_2(0,2,1,1),\ u_3(0,0,1,0),\ u_4(0,0,0,1)\}$

duales

Considero la base dual $B^*_{\mathbb{R}^4} = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4\}$

$\Rightarrow$ como son bases duales, se cumple $\varphi^i(u_j) = \delta^i_j$

En particular, se cumple:

$\varphi^3(u_1)=0,\quad \varphi^3(u_2)=0 \Rightarrow \varphi^3 \in an(U)$

$\varphi^4(u_1)=0,\quad \varphi^4(u_2)=0 \Rightarrow \varphi^4 \in an(U)$

Se sabe que $\dim[an(U)] = \dim[\mathbb{R}^4] - \dim[U] = 4-2 = 2$

$\Rightarrow B_{an(U)} = \{\varphi^3, \varphi^4\}$

Calculo $\varphi^3$ y $\varphi^4 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\varphi^i(x,y,z,t) = (a\ b\ c\ d)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$\boxed{\varphi^3}$ $\varphi^3(u_1) = 0 = (a\ \ b\ \ c\ \ d)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a+b+d$

$\varphi^3(u_2) = 0 = (a\ \ b\ \ c\ \ d)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2b+c+d$

$$\varphi^3(u_3) = 1 = (a \ b \ c \ d)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = c$$

$$\varphi^3(u_4) = 0 = (a \ b \ c \ d)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = d$$

$$\begin{cases} a+b+d=0 \\ 2b+c+d=0 \\ c=1 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow a = 1/2, \quad b = -1/2, \quad c = 1, \quad d = 0$$

$$\Rightarrow \varphi^3 \equiv (1/2 \ \ -1/2 \ \ 1 \ \ 0)$$

$\boxed{\varphi^4}$

$$\varphi^4(u_1) = 0 = (a \ b \ c \ d)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = a+b+d$$

$$\varphi^4(u_2) = 0 = (a \ b \ c \ d)\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} = 2b+c+d$$

$$\varphi^4(u_3) = 0 = (a \ b \ c \ d)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = c$$

$$\varphi^4(u_4) = 1 = (a \ b \ c \ d)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = d$$

$$\Rightarrow a = -1/2, \quad b = -1/2, \quad c = 0, \quad d = 1$$

$$\Rightarrow \varphi^4 \equiv (-1/2, -1/2, 0, 1)$$

Expreso $\varphi^3$ y $\varphi^4$ como aplicaciones:

$$\varphi^3(x,y,z,t) = (1/2 \ \ -1/2 \ \ 1 \ \ 0)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = 1/2\, x - 1/2\, y + z$$

$$\varphi^4(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -1/2\, x - 1/2\, y + t$$

$$\boxed{B_{an(W)} = \{ \varphi^3, \varphi^4 \}}$$ FIN

De forma rápida:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^3(x,y,z,t) = x - y + 2z \\ \varphi^4(x,y,z,t) = x + z - t \end{array} \right\} \text{ecuaciones cartesianas de } W$$

$$B_{an(W)} = \{ \varphi^3, \varphi^4 \}$$

## Aplicación traspuesta

Sean $V(K)$ y $E(K)$ dos e.v cualesquiera sobre el mismo cuerpo $K$.

Sea $f: V \longrightarrow E$ una app lineal.

La aplicación traspuesta:

$$f^t: E^* \longrightarrow V^*$$
$$\omega \longrightarrow f^t(\omega)$$

Siendo $\omega: E \to K$ y $f^t(\omega): V \to K$

$$\Rightarrow f^t(\omega)(v) \underset{\text{definición}}{=} \omega(f(v))$$

Además, se verifica:

$$M(f^t, B_{V^*}^* \leftarrow B_{E^*}^*) = M(f, B_E \leftarrow B_V)^t$$

DUALES

RC

## Ejemplo

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z) = (x-2y,\ 3y+z)$

$\omega: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (\omega \in \mathbb{R}^{2*})$

$\omega(x,y) = x+3y$

Calcula $f^t(\omega)$

Dos formas → Sin la matriz de f
→ Con la matriz de f

$\boxed{\text{SIN la matriz de f}}$

$$f^t: \mathbb{R}^{2*} \longrightarrow \mathbb{R}^{3*}$$
$$\omega \longrightarrow f^t(\omega)$$

$$f^t(\omega)(x,y,z) = \omega(f(x,y,z)) = \omega(x-2y,\ 3y+z) = x-2y+3(3y+z) =$$

$$= \boxed{x+7y+z = f^t(\omega)}$$

$\boxed{\text{Matricialmente}}$

$$M(f, B_{C(\mathbb{R}^2)} \leftarrow B_{C(\mathbb{R}^3)}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M(f^t, B^*_{\mathbb{R}^{3*}} \leftarrow B^*_{\mathbb{R}^{2*}}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f^t(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f^t(\omega)(x,y,z) = (1 \quad 7 \quad 3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{x+7y+3z}$$

## Propiedades de la app traspuesta

$Nuc(f^t) = an(Im(f))$

$Im(f^t) = an(Nuc(f))$

$ran(f^t) = ran(f)$

$traz(f^t) = traz(f)$

$Im(f) = an(Nuc(f^t))$

$Nuc(f) = an(Im(f^t))$

---

### Algún Examen

a) Determinar una aplicación lineal que cumpla:

$$f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$Nuc(f) = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] \;/\; p(1) = p'(1) = 0 \}$$

$$Im(f) = Nuc(\phi)$$

Siendo $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x,y,z) = x - z$$

Sea un polinomio genérico: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Calculo el núcleo de f.

$$\left.\begin{array}{l} p(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ p'(1) = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ecuaciones cartesianas de } Nuc(f)$$

$\Rightarrow \dim Nuc(f) = \dim \mathbb{R}_2[x] - 2 \text{ ec cart} = 3 - 2 = 1$

Tomo un vector de núcleo para la base:

$$B_{Nuc(f)} = \{ 1 - 2x + x^2 \}$$

13c

Calculo la imagen de f, para ello calculo el núcleo de $\phi$.

$$Nuc(\phi) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x,y,z) = 0 \}$$

$$\phi(x,y,z)=0 \Rightarrow x-z=0 \Rightarrow x=z$$

$$\dim Nuc(\phi) = 3 - 1ec = 2$$

Tomo dos vectores: $(1,0,1)$, $(0,1,0)$

$$B_{Im(f)} = \{ (1,0,1), (0,1,0) \}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(1-2x+x^2) = \vec{0} \\ f(1) = (1,0,1) \\ f(x) = (0,1,0) \end{array}}$$

$$B = \{ 1-2x+x^2, 1, x \}$$

$$M(f, B_{C_{\mathbb{R}^3}} \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_{C_{\mathbb{R}^3}} \leftarrow B_{C_{\mathbb{R}_2[x]}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot M(I, B \leftarrow B_{C_{\mathbb{R}_2[x]}})$$

$$M(I, B \leftarrow B_{C_{\mathbb{R}_2[x]}}) = M(I, B_{C_{\mathbb{R}_2[x]}} \leftarrow B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_{C_{\mathbb{R}^3}} \leftarrow B_{C_{\mathbb{R}_2[x]}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

b) Calcular $an(Nuc(f))$ y $Nuc(f^t)$

$Nuc(f) = \{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : a_0 + a_1 + a_2 = 0,\ a_1 + 2a_2 = 0 \}$

$$\boxed{\begin{array}{l} an(Nuc(f)) = \{\omega^1, \omega^2\} \\ \omega^1(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1 + a_2 \\ \omega^2(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2 \end{array}}$$

Se sabe que $Nuc(f^t) = an(Im(f))$

$Im(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$

$\dim[Nuc(f^t)] = \dim[An(Im(f))] = \dim \mathbb{R}^3 - \dim[Im(f)] = 3 - 2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} an[Im(f)] = \{\phi\} \\ \phi(x, y, z) = x - z \end{array}}$$

19/01/2017

1) [2 puntos]. Sea $V(k)$ un e.v de dimensión finita y sean $\phi, \psi \in V^*$. Demostrar que si $Nuc(\phi) \subset Nuc(\psi)$ entonces $\{\phi, \psi\}$ es l.d. Discutir si es cierto el recíproco.

$\phi, \psi : V(k) \longrightarrow k$

Sea $\dim V(k) = n$, como $Im\,\phi \subseteq k$; se dan las siguientes posibilidades:

| $\dim V$ | $=$ | $\dim[Nuc(\phi)]$ | $+$ | $\dim[Im(\phi)]$ |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | | | | |
| 1) | | $n$ | | $0$ |
| 2) | | $n-1$ | | $1$ |

NC

Caso 1:

$\dim[Nuc(\phi)] = n$ y $Nuc\,\phi \subset Nuc(\psi) \Rightarrow \dim[Nuc(\psi)] = n \Rightarrow$

$\Rightarrow Nuc(\psi) = V(K) \Rightarrow \psi = \varphi_0$ (forma lineal nula) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\phi, \psi\} = \{\phi, \varphi_0\}$, que es trivialmente linealmente dependiente.

Caso 2: Como $Nuc(\phi) \subset Nuc(\psi)$ y $\dim[Nuc(\phi)] = n-1$

$\rightarrow$ Caso 2a:

$\dim[Nuc(\psi)] = n \Rightarrow \psi = \varphi_0 \Rightarrow$ linealmente dependiente.

$\rightarrow$ Caso 2b: $\dim[Nuc(\psi)] = n-1 \Rightarrow Nuc(\phi) = Nuc(\psi)$ (misma dimensión y uno contenido en el otro).

Sea $B_{Nuc(\phi)=Nuc(\psi)} = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$

Amplío a una base de V: $B_V = \{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$

Considero su base dual:

$B_V^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^{n-1}, \varphi^n\}$

$\phi$ y $\psi$ deben poderse escribir como combinación lineal de $B_V^*$

$\phi = a_1\varphi^1 + \dots + a_{n-1}\varphi^{n-1} + a_n\varphi^n$

$\psi = b_1\varphi^1 + \dots + b_{n-1}\varphi^{n-1} + b_n\varphi^n$

Aplico la propiedad del espacio dual: $a_i = \sigma(v_i)$

$$\begin{cases} a_1 = \phi(v_1) = 0 \\ \dots \\ a_{n-1} = \phi(v_{n-1}) = 0 \\ a_n = \phi(v_n) \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_1 = \psi(v_1) = 0 \\ \dots \\ b_{n-1} = \psi(v_{n-1}) = 0 \\ b_n = \psi(v_n) \end{cases}$$

$\Rightarrow \phi = (0, \dots, 0, a_n), \quad \psi = (0, \dots, 0, b_n)$

$\Rightarrow \{\phi, \psi\}$ linealmente dependiente

Mcx

- ¿Es cierto el recíproco?

Me preguntan: $\{\phi, \Psi\}$ l.d $\Rightarrow Nuc(\phi) \subset Nuc(\Psi)$

Es cierto:

<u>Caso ①</u>: $\phi = \mathscr{C}^{\circ} = \Psi$

Evidentemente, $Nuc(\phi) = Nuc(\Psi) = V(k) \Rightarrow \underline{Nuc\,\phi \subset Nuc(\Psi)}$ ✓

<u>Caso ②</u>: $\phi \neq \mathscr{C}_0 \neq \Psi$

Com $\phi$ y $\Psi$ son l.d $\Rightarrow \phi = a\Psi$, con $a \neq 0$

Sea $v \in Nuc(\phi) \Rightarrow \phi(v) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \Psi(v) = 0 \Rightarrow \Psi(v) = 0$

$\Rightarrow v \in Nuc(\Psi) \Rightarrow \underline{Nuc\,\phi \subset Nuc(\Psi)}$ ✓

<u>Caso ③</u>: $\phi \neq \mathscr{C}_0$, $\Psi = \mathscr{C}_0$

Como $Nuc(\Psi) = V$, evidentemento, $\underline{Nuc\,\phi \subset Nuc(\Psi)}$ ✓

*) Sea $V(\mathbb{R}) = P_2(\mathbb{R}) = \{a + bx + cx^2 / a, b, c \in \mathbb{R}\}$ un e.v de polinomios de grado $\leq 2$.

Sean $U$ y $W$ subespacios de $V^*$:

$$U = \{\omega \in V^* / \omega(1 - x + x^2) = 0\},\ W = \{\omega \in V^* / \omega(1) = \omega(x)\}$$

a) Hallar bases de la intersección y la suma de $U$ con $W$.

<u>Base de $U$</u>:

$\omega \in V^*: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

Sea la matriz asociada a $\omega$: $M(\omega, \{1\} \leftarrow B_c) = (m \quad n \quad p)$

De $\omega(1 - x + x^2) = 0 \Rightarrow (m \quad n \quad p)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow m - n + p = 0$ (ecuación cartesiana de $U$)

$\dim U = 3 - 1\,ec = 2$.

15c

Tomo dos vectores l.i.

$n=1,\ p=0 \Rightarrow n=1$ ; $m=0,\ p=1 \Rightarrow n=1$

$\text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ l.i

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} B_{\mathcal{U}} = \{\omega^1(1,1,0),\ \omega^2(0,1,1)\} \\ \omega^1(a+bx+cx^2) = (1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a+b \\ \omega^2(a+bx+cx^2) = (0\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b+c \end{array}}$$

<u>Base de $W$:</u>

$\omega : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

Sea la matriz asociada a $M(\omega, \{1\} \leftarrow B_c) = (m\ \ n\ \ p)$

De $\omega(1) = \omega(x) \Rightarrow (m\ \ n\ \ p)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = n$

(ecuación cartesiana de $W$)

$\dim W = 3 - 1\text{ ec} = 2$

Tomo dos vectores l.i.

$n=1,\ p=0 \Rightarrow m=1$ ; $n=0,\ p=1 \Rightarrow m=0$

$\text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ l.i.

$$\boxed{\begin{array}{l} B_W = \{\varphi^1(1,1,0),\ \varphi^2(0,0,1)\} \\ \varphi^1(a+bx+cx^2) = (1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a+b \\ \varphi^2(a+bx+cx^2) = (0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c \end{array}}$$

$\boxed{\mathcal{U}+\mathcal{W}} = \mathcal{L}\{\underbrace{\omega^1, \omega^2}_{B_{\mathcal{U}}}, \underbrace{\varphi^1, \varphi^2}_{B_{\mathcal{W}}}\}$

$$\text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{l.i}$$

$$\boxed{B_{\mathcal{U}+\mathcal{W}} = \{\omega^1(1,1,0), \omega^2(0,1,1), \varphi^2(1,1,0)\}}$$

Como $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = 3 \Rightarrow \mathcal{U}+\mathcal{W} = P_2(\mathbb{R})$

$\boxed{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}}$

$\dim[\mathcal{U}\cap\mathcal{W}] = \dim[\mathcal{U}] + \dim[\mathcal{W}] - \dim[\mathcal{U}+\mathcal{W}] = 2+2-3 = 1$

Como teníamos que $\varphi^1 \in \mathcal{U}$ y $\varphi^1 \in \mathcal{W} \Rightarrow \boxed{B_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}} = \{\varphi^1(1,1,0)\}}$

Otra forma de ver este apartado:

$\mathcal{U} = an(\mathcal{L}\{1-x+x^2\})$

$\mathcal{W} = an(\mathcal{L}\{1-x\})$

$\mathcal{U}+\mathcal{W} = an(\mathcal{L}\{1-x+x^2\}) + an(\mathcal{L}\{1-x\}) \overset{\text{propiedad}}{=} an(\mathcal{L}\{1-x+x^2\} \cap \mathcal{L}\{1-x\})$

b) Calcular una base de $\mathcal{U}$ y ampliarla hasta una base $B^*$ de $V^*$

$B_{\mathcal{U}} = \{\omega^1(1,1,0), \omega^2(0,1,1)\}$ (calculada anteriormente)

Para ampliarla a una base $B^*$ de $V^*$ añado una forma lineal linealmente independiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} B^* = \{\omega^1(1,1,0), \omega^2(0,1,1), \omega^3(0,0,1)\} \\ \omega^3(a+bx+cx^2) = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c \end{array}}$$

c) Hallar la única base de V cuya base dual es $B^*$.

$B^* = \{\omega^1(1,1,0), \omega^2(0,1,1), \omega^3(0,0,1)\}$

$B_{P_2(\mathbb{R})} = \{p_1, p_2, p_3\}$

Duales

$\boxed{p_1}$

$$\omega^1(p_1) = 1 = (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a+b$$

$$\omega^2(p_1) = 0 = (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b+c \quad \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\omega^3(p_1) = 0 = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c$$

$\Rightarrow p_1 = 1$

$\boxed{p_2}$

$$\begin{aligned} \omega^1(p_2) &= 0 = a+b \\ \omega^2(p_2) &= 1 = b+c \\ \omega^3(p_2) &= 0 = c \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=1 \\ c=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow p_2 = -1+x$

$\boxed{p_3}$

$$\begin{aligned} \omega^1(p_3) &= 0 = a+b \\ \omega^2(p_3) &= 0 = b+c \\ \omega^3(p_3) &= 1 = c \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow p_3 = 1-x+x^2$

$$\boxed{B_{P_2(\mathbb{R})} = \{1, -1+x, 1-x+x^2\}}$$

a)

*) Determinar un endomorfismo lineal f de $\mathbb{R}^3$ que tenga:

$$Ker(f) = L\{(1,1,0)\} \text{ e } Im(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 3y = 0\}$$

$\dim Im(f) = 3 - 1ec = 2$

Tomo dos vectores l.i:

$ran\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ l. i $\Rightarrow B_{Im(f)} = \{(3,2,0), (0,0,1)\}$

Necesito una base del dominio, por ejemplo:

$B = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(1,1,1) = \vec{0} \\ f(0,1,0) = (3,2,0) \\ f(0,0,1) = (0,0,1) \end{array}} \longrightarrow \text{App correctamente definida.}$$

b) Demostrar que $G = \{g \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) / f \circ g = 0\}$ es un subespacio vectorial de $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

Sea $g_1, g_2 \in G$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ¿$\alpha g_1 + \beta g_2 \in G$?

$$[f \circ (\alpha g_1 + \beta g_2)](x) = f[(\alpha g_1 + \beta g_2)(x)] =$$

$$= f[\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)] = f(\alpha g_1(x)) + f(\beta g_2(x)) =$$

$$= \alpha [f \circ g_1](x) + \beta [f \circ g_2](x) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ G es un subespacio vectorial de $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$

c) Encontrar dos elementos de $G$ linealmente independientes

Utilizaré $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \cong M_3(\mathbb{R})$

Se tiene que cumplir $M(f, B_c) \cdot M(g, B_c) = 0$

Se sabe que $M(f, B_c) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, busco dos matrices $a_{ij}$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dos posibles soluciones son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Miro si son l. i. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \text{l. i.}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}_{B_c} \\ g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x+y \end{pmatrix}_{B_c} \end{array}}$$

## Examen 22/01/2018

(4) Se considera, en el espacio vectorial de polinomios $\mathbb{R}_3[x]$:

- Las formas lineales: $\phi(p(x)) = p(1)$, $\psi(p(x)) = p'(1) - p(0)$
- El subespacio vectorial $U = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3;\ a_1 = 0,\ a_3 = -2a_2\}$

Determinar, calculando su matriz en la base usual de $\mathbb{R}_3[x]$, un endomorfismo $f$ de $\mathbb{R}_3[x]$ cuyo traspuesto verifique:
$Nuc(f^t) = L\{\phi, \psi\}$, $Im f^t = an\, U$

Sabemos de los resultados de la teoría que:

$$\begin{cases} Nuc(f^t) = an[Im(f)] \iff Im(f) = an[Nuc(f^t)] \\ Im(f^t) = an[Nuc(f)] \iff Nuc(f) = an[Im(f^t)] \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \underline{Im(f)} = an[Nuc(f^t)] = an(L\{\phi, \psi\}) \\ \underline{Nuc(f)} = an[Im(f^t)] = an[an(U)] = \underline{U} \end{cases}$$

1. Ver que $\phi$ y $\psi$ son l. i.

$$an(L\{\phi, \psi\}) = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, \phi(p(x)) = 0 \text{ y } \psi(p(x)) = 0\}$$

$$\phi(p(x)) = 0 \iff p(1) = 0 \qquad \psi(p(x)) = 0 \iff p'(1) - p(0) = 0$$

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$p(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$p'(1) - p(0) = 0 \Rightarrow (a_1 + 2a_2 + 3a_3) - a_0 = 0$

$Im(f) = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0,\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 - a_0 = 0\}$

Nuc(f): $a_1 = 0$ $a_2 = 1$ $a_3 = -2$ $\Rightarrow x^2 - 2x^3$

$a_3 = -2a_2$ $a_0 = 0$

---

$a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $a_3 = 0$ $\Rightarrow 1$

$a_0 = 1$

$$\operatorname{ran}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow l.i.$$

$$B_{Nuc(f)} = \{x^2 - 2x^3, 1\}$$

Im(f):

$$B_{Im(f)} = \{1 - 3x + 2x^2, 1 - 2x + x^3\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ f(x^2 - 2x^3) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f(x) = 1 - 3x + 2x^2 \\ f(x^3) = 1 - 2x + x^3 \end{array}}$$

$B = \{x^2 - 2x^3, 1, x, x^3\}$ base ✓

$$f(x^2) - 2f(x^3) \Rightarrow f(x^2) = 2f(x^3) = 2 - 4x + 2x^3$$

$$M(f, B_c) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

## Examen

Sea $f: V \to V$, $n \geq 2$, $x_0 \in V \,/\, f^i(x_0) \neq \vec{0}$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $f^n(x_0) = \vec{0}$

Demostrar que $B = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$ es base de $V$ y calcular $M(f, B)$.

Como hay $n$ vectores y $V$ tiene dim $= n$, hay que demostrar que $B$ es linealmente independiente.

Lo hago con una combinación lineal igualada a $\vec{0}$.

$$a_1 x_0 + a_2 f(x_0) + \dots + a_n f^{n-1}(x_0) = \vec{0}$$

$$f(a_1 x_0 + a_2 f(x_0) + \dots + a_n f^{n-1}(x_0)) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0) + \cancel{a_n f^n(x_0)}^{\,0 \text{ por hip}} = \vec{0}$$

$$f(a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$a_1 f^2(x_0) + a_2 f^3(x_0) + \dots + a_{n-2} f^{n-1}(x_0) + \cancel{a_{n-1} f^n(x_0)}^{\,0 \text{ por hip}} = \vec{0}$$

Aplicando el procedimiento $n-1$ veces se obtiene que:

$$a_1 f^{n-1}(x_0) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

Sustituyendo en el paso anterior:

$$0 \cdot f^{n-1}(x_0) + a_2 f^{n-1}(x_0) = \vec{0} \Rightarrow \underline{a_2 = 0}$$

Análogamente: $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0 \Rightarrow B$ es l.i.

$\Rightarrow B$ es base de $V$

## M (f, B)

$B = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$f(v_1) = f(x_0) = v_2$

$f(v_2) = f(f(x_0)) = v_3$

$\dots$

$f(v_{n-1}) = f^{n-1}(x_0) = v_n$

$f(v_n) = f^n(x_0) = \vec{0}$ (por hipótesis.

$$\boxed{M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

*) Sea $V(\mathbb{R})$ un e.v de dimensión $n$.
Sea $f: V \to V \ / \ f \circ f = -1_V$
Demuestra que la dimensión de $V$ es par.

Demuestro que $\{v_1, f(v_1)\}$ son l.i. $(v_1 \neq \vec{0})$

Supongo que no: $f(v_1) = a v_1$, $a \in \mathbb{R}$

$f(f(v_1)) = f(a v_1) \Rightarrow -v_1 = a f(v_1) \Rightarrow -v_1 = a \cdot a \cdot v_1 \Rightarrow -v_1 = a^2 v_1$

$\to v_1 \neq \vec{0}$ (No por hip)

$\to a^2 = -1$ No puede ser, por e.v. real

$\Rightarrow \{v_1, f(v_1)\}$ es l.i.

Si $\dim V = 2$ ✓

19cx

Si $\dim V > 2$: Demuestro que $\{v_1, f(v_1), v_2\}$ l.i. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{v_1, f(v_1), v_2, f(v_2)\}$ l.i.

Supongo que $\{v_1, f(v_1), v_2, f(v_2)\}$ es l.d

En ese caso $f(v_2) = \alpha v_1 + \beta f(v_1) + \lambda v_2$

$\Rightarrow f(f(v_2)) = f(\alpha v_1 + \beta f(v_1) + \lambda v_2)$;

$-v_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(f(v_1)) + \lambda f(v_2)$;

$-v_2 = \alpha f(v_1) - \beta v_1 + \lambda f(v_2)$

$f(v_2) = \frac{-\alpha}{\lambda} f(v_1) + \frac{\beta}{\lambda} v_1 - \frac{v_2}{\lambda}$

$\alpha v_1 + \beta f(v_1) + \lambda v_2 = -\frac{\alpha}{\lambda} f(v_1) + \frac{\beta}{\lambda} v_1 - \frac{v_2}{\lambda}$

$\alpha = \frac{\beta}{\lambda}$, $\beta = \frac{-\alpha}{\lambda}$; $\lambda = \frac{-1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow$ Contradicción

⚠

$\Rightarrow$ conjunto l.i.

$\rightarrow \dim V = 4$ ✓

$\rightarrow \dim V > 4 \Rightarrow$ razono de forma análoga.

$B_V = \{v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_m, f(v_m)\}$

Demuestra que existe una base tal que:

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_m \\ \hline I_m & 0 \end{array}\right) \text{ con } \dim V = 2m$$

Reordeno a conveniencia la base $B_V$:

$$\overline{B} = \{ \underset{u_1}{\underset{\downarrow}{v_1}}, \underset{u_2}{\underset{\downarrow}{v_2}}, \dots, \underset{u_m}{\underset{\downarrow}{v_m}}, \underset{u_{m+1}}{\underset{\downarrow}{f(v_1)}}, \underset{u_{m+2}}{\underset{\downarrow}{f(v_2)}} \dots \underset{u_n}{\underset{\downarrow}{f(v_m)}} \}$$

$f(u_1) = f(v_1) = u_{m+1}$

$f(u_2) = f(v_2) = u_{m+2}$

$\vdots$

$f(u_m) = f(v_n) = u_n$

$f(u_{m+1}) = f(f(v_1)) = -v_1 = -u_1$

$f(u_{m+2}) = f(f(v_2)) = -v_2 - u_2$

$\dots$

$f(u_n) = f(f(v_n)) = -v_n = -u_m$

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

*) Examen.

Sea $f: V \longrightarrow V'$

a) Demostrar $an[Im(f)] = Nuc[f^t]$

Lo demuestro por doble inclusión:

$an[Im(f)] \subseteq Nuc[f^t]$ :

$f: V \longrightarrow V'$

$f^t: V'^* \longrightarrow V^*$

Sea $w' \in an[Im(f)] \in V'^* \Rightarrow \forall v' \in Im(f): w'(v') = 0$

$v' \in Im(f) \Rightarrow \exists v \in V: f(v) = v'$

$\Rightarrow w'(f(v)) = 0 \overset{def}{\Longrightarrow} f^t(w')(v) = 0 \Rightarrow f^t(w') = \omega_0'$ (forma nula)

$\Rightarrow w' \in Nuc(f^t)$

$Nuc[f^t] \subseteq an[Im(f)]$ :

Sea $w' \in Nuc[f^t] \Rightarrow f^t(w') = w_0'$ (forma nula)

$\forall v \in V: f^t(w')(v) = 0 \overset{def}{\Longrightarrow} w'(f(v)) = 0.$

Como $f(v) \in Im(f) \Rightarrow w' \in an[Im(f)]$

$an[Im(f)] \subseteq Nuc(f^t)$ y $Nuc(f^t) \subseteq an[Im(f)] \Rightarrow an[Im(f)] = Nuc[f^t]$

2k

b) Razonar:

$$\text{ran}(f) = \text{ran}(f^t) \iff \dim[\text{Im}(f)] = \dim[\text{Im}(f^t)]$$

Sabemos $\text{an}[\text{Im}(f)] = \text{Nuc}[f^t] \Rightarrow \dim[\text{Nuc}\, f^t] = \dim[\text{an}[\text{Im}(f)]]$

$$\Rightarrow \cancel{\dim(V'^*)} - \dim[\text{Im}\, f^t] = \cancel{\dim V'} - \dim[\text{Im}(f)]$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim[\text{Im}\, f^t] = \dim[\text{Im}\, f]}$$

21cx

Monogrado. Enero 2018

② Sean $V$, $V'$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $K$, y sea $f: V \to V'$ una aplicación lineal. Si $V$ tiene dimensión finita, probar que:

$$\dim[\mathrm{Ker}(f)] + \dim[\mathrm{Im}(f)] = \dim[V]$$

Tomo una base del núcleo: $B_{\mathrm{Ker}(f)} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$

Amplio a una base de $V$: $B_V = \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, u_n\}$

$\forall v \in V$: $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m + \alpha_{m+1} u_{m+1} + \ldots + \alpha_n u_n$

$f(v) = f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m + \alpha_{m+1} u_{m+1} + \ldots + \alpha_n u_n)$

$f(v) = \underbrace{\alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_m f(u_m)}_{\vec{0}} + \alpha_{m+1} f(u_{m+1}) + \ldots + \alpha_n f(u_n)$

$f(v) = \alpha_{m+1} f(u_{m+1}) + \ldots + \alpha_n f(u_n) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}\{f(u_{m+1}) \ldots f(u_n)\} \Rightarrow$ s.d.g.

Miro si es l.i.:

$a_{m+1} f(u_{m+1}) + \ldots + a_n f(u_n) = \vec{0}$

$f(a_{m+1} u_{m+1} + \ldots + a_n u_n) = f(\vec{0})$

$f(a_{m+1} u_{m+1} + \ldots + a_n u_n) = \vec{0} \Rightarrow a_{m+1} u_{m+1} + \ldots + a_n u_n \in \mathrm{Ker}(f)$

$\Rightarrow a_{m+1} u_{m+1} + \ldots + a_n u_n = b_1 u_1 + \ldots + b_m u_m$

$\Rightarrow$ ~~$a_{m+1} u_m$~~ sólo se da si los escalares son nulos $\Rightarrow$ l.i

Así:

$$\begin{cases} \dim \mathrm{Ker}(f) = m \\ \dim \mathrm{Im}(f) = n - m \end{cases}$$

3 Encontrar una app lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

- La imagen por f del plano $x_1 - x_2 = 0$ es el plano $x_1 - x_3 = 0$
- $f(1,-1,0) = (1,0,1)$

Calcular la matriz de f en la base usual de $\mathbb{R}^3$.

$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$

$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0\}$

$\dim U = \dim \mathbb{R}^3 - 1$ ecuación $= 3 - 1 = 2$

$\dim W = \dim \mathbb{R}^3 - 1$ ecuación $= 3 - 1 = 2$

Tomo dos vectores l. i.:

$U$: $x_3 = 1,\ x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ $\Rightarrow B_U = \{(0,0,1), (1,1,0)\}$

$x_3 = 0,\ x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$

$W$: $x_2 = 1,\ x_1 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ $\Rightarrow B_W = \{(0,1,0), (1,0,1)\}$

$x_2 = 0,\ x_1 = 1 \Rightarrow x_3 = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ f(0,0,1) = (0,1,0) \\ f(1,1,0) = (1,0,1) \\ f(1,-1,0) = (1,0,1) \end{array}}$$

$\Rightarrow B = \{(0,0,1), (1,1,0), (1,-1,0)\}$

base ✓ $\Rightarrow$ app bien definida

$$M(f, B_c \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_c) = M(f, B_c \leftarrow B) \cdot M(I, B \leftarrow B_c) = M(f, B_c \leftarrow B) \cdot M(I, B_c \leftarrow B)^{-1}$$

$$M(I, B_c \leftarrow B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(4) Sea $V$ un e.V de dim 4 sobre $\mathbb{R}$ y sean $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de $V$ y $B^* = \{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ su base dual.

Se considera en $V$ el subespacio vectorial:

$$\mathcal{U} := L(u_1 + u_2 + u_3,\ u_3 + u_4)$$

(a) calcular una base de $\mathcal{U}^\circ$ (el anulador de $\mathcal{U}$). Dar un conjunto independiente de ecuaciones implícitas de $\mathcal{U}$.

$$\mathcal{U} = L\{(1,1,1,0)_B, (0,0,1,1)_B\}$$

$$\text{Sea } B_V = \{\underset{v_1}{(1,1,1,0)_B}, \underset{v_2}{(0,0,1,1)_B}, \underset{v_3}{(1,0,0,0)_B}, \underset{v_4}{(0,0,0,1)_B}\}$$

Duales

$$\text{Sea } B_V^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4\}$$

$$\varphi^3(v_1) = 0, \quad \varphi^3(v_2) = 0 \Rightarrow \varphi^3 \in An(\mathcal{U})$$

$$\varphi^4(v_1) = 0, \quad \varphi^4(v_2) = 0 \Rightarrow \varphi^4 \in An(\mathcal{U})$$

$$\dim[An(\mathcal{U})] = \dim V - \dim \mathcal{U} = 4 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow B_{An(\mathcal{U})} = \{\varphi^3, \varphi^4\}$$

Calculo $\varphi^3$ y $\varphi^4$:

2dx

$\varphi^3, \varphi^4 : V \longrightarrow \mathbb{R}$

Sea $M(\varphi^i, \{1\} \leftarrow B) = (a \ \ b \ \ c \ \ d)$

$$\varphi^3(v_1) = 0 = (a \ \ b \ \ c \ \ d)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = a+b+c$$

$$\varphi^3(v_2) = 0 = (a \ \ b \ \ c \ \ d)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = c+d$$

$$\varphi^3(v_3) = 1 = (a \ \ b \ \ c \ \ d)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = a$$

$$\varphi^3(v_4) = 0 = (a \ \ b \ \ c \ \ d)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = d$$

$$\varphi^3 \equiv (1 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 0)_{B^*}$$

---

$$\left.\begin{array}{l}\varphi^4(v_1) = 0 = a+b+c \\ \varphi^4(v_2) = 0 = c+d \\ \varphi^4(v_3) = 0 = a \\ \varphi^4(v_4) = 1 = d\end{array}\right\} \varphi^4 \equiv (0 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 1)_{B^*}$$

$$\varphi^3(x,y,z,t) = (1 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 0)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = x-y$$

$$\varphi^4(x,y,z,t) = (0 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = y-z+t$$

$$\Rightarrow B_{an(U)} = \{\varphi^3, \varphi^4\}$$

Ecuaciones implícitas de $\mathcal{U}$:

$\forall (x,y,z,t) \in \mathcal{U}$:

$$\varphi^3(x,y,z,t) = 0 \Rightarrow x-y=0$$

$$\varphi^4(x,y,z,t) = 0 \Rightarrow y-z+t=0$$

$$\boxed{\mathcal{U} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y=0,\ y-z+t=0\}}$$

b) Extender una base de $\mathcal{U}$ a una base $B'$ de $V$.

$$B' = B_V = \{(1,1,1,0)_B, (0,0,1,1)_B, (1,0,0,0)_B, (0,0,0,1)_B\}$$

(calculada anteriormente)

c) Base dual $(B')^*$ en función de las formas lineales de la base $B^*$

$$B'^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4\}$$

*) Sea $V$ un e.v y $B=\{e_1 \dots e_n\}$ base de $V$.
Sea $H=\{v_1 \dots v_r\}$, $r \leq n$ un subconjunto de $V$. Probar que $H$ es l.i. si y sólo si existe un automorfismo $f$ de $V$ tal que $f(e_i)=v_i \quad \forall i \in \{1 \dots r\}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Demuestro $H$ l.i. $\Rightarrow \exists f: V \to V$ biyectiva : $f(e_i)=v_i \quad \forall i \in \{1 \dots r\}$

Como $H$ es l.i. $\Rightarrow B'=\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es base de $V$.

Sea $f: V \longrightarrow V$
$\qquad f(e_i)=v_i \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$

Veamos que es un automorfismo.

$Im(f)=L\{f(e_1) \dots f(e_r), f(e_{r+1}), \dots, f(e_n)\}=$

$=L\{v_1 \dots v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}=V \Rightarrow$ app sobreyectiva

$\dim V = \dim Nuc(f) + \dim Im(f) \Rightarrow \dim Nuc(f) = \dim V - \dim Im f =$

$= n-n=0 \Rightarrow$ app inyectiva

Sobreyectiva e inyectiva $\Rightarrow$ automorfismo

$\boxed{\Leftarrow}$ Demuesto $\exists f: V \to V$ biyectiva: $f(e_i)=v_i \quad \forall i \in \{1 \dots r\} \Rightarrow H$ l.i.

Tomo una c.l de $H$ igualada a $\vec{0}$:

$\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_r v_r = \vec{0}$

$\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_r f(e_r) = \vec{0}$

$f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r \in Nuc(f)$

Como $f$ es biyectiva, $Nuc(f)=\{0\}$, por tanto

$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r = \vec{0} \xrightarrow{B \text{ base}} \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0 \Rightarrow H$ l.i.

*) Sea $V$ un e.v. y sean $y \in V$, $\varphi \in V^*$. Definimos un endomorfismo $f$ de $V$ mediante $f(x) = \varphi(x)y$, $x \in V$. Demostrar que la traza de $f$ es $\varphi(y)$

$f: V \longrightarrow V$

Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de $V(k)$

$$f(e_1) = \varphi(e_1)y$$

$$\dots$$

$$\underbrace{f(e_n)}_{\text{f aplicada a B}} = \underbrace{\varphi(e_n)y}_{\text{lo expreso en la base B}}$$

$$f(e_1) = \varphi(e_1)y = \varphi(e_1)(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) = a_1\varphi(e_1)e_1 + \dots + a_n\varphi(e_1)e_n$$

$$\dots$$

$$f(e_n) = \varphi(e_n)y = \varphi(e_n)(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) = \underbrace{a_1\varphi(e_n)e_1 + \dots + a_n\varphi(e_n)e_n}_{\text{Imagenes expresadas en B}}$$

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} a_1\varphi(e_1) & \dots & a_1\varphi(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n\varphi(e_n) & \dots & a_n\varphi(e_n) \end{pmatrix}$$

$$\text{traza}(f) = a_1\varphi(e_1) + \dots + a_n\varphi(e_n) = \varphi(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) = \boxed{\varphi(y)}$$

*) Sea $f \in End(V)$ con $f \circ f = f$. Probar que $f^t$ satisface

a) $f^t \circ f^t = f^t$ y que:

b) $V^* = an[ker(f)] \oplus an[Im(f)]$.

ⓐ $f: V \longrightarrow V$

$f^t: V^* \longrightarrow V^*$

$f^t \circ f^t = f^t \iff \forall w \in V^* \; (f^t \circ f^t)(w) = f^t(w)$

$\iff \forall x \in V: \; (f^t \circ f^t)(w)(x) = f^t(w)(x)$

$(f^t \circ f^t)(w)(x) = f^t(f^t(w)(x)) = f^t((f^t \circ w)(x)) =$

$= f^t((w \circ f)(x)) = f^t(w(f(x))) = (f^t \circ w)(f(x)) =$

$= (w \circ f)(f(x)) = w((f \circ f)(x)) = w(f(x)) = (w \circ f)(x) =$

$= (f^t \circ w)(x) = f^t(w)(x)$

ⓑ Sabemos

$an[Ker(f)] = ker(f^t)$ (1)

$an[Im(f)] = Im(f^t)$ (2)

Por lo que basta con demostrar $V^* = ker[f^t] \oplus Im[f^t]$

$\iff V^* = ker[f^t] + Im[f^t]$ y $Ker[f^t] \cap Im[f^t] = \{0\}$

Sea $w \in Im(f^t) \cap ker f^t$

- Como $w \in Im[f^t] \Rightarrow \exists \varphi \in V^*: f^t(\varphi) = w$ (3)
- Como $w \in ker(f^t) \Rightarrow f^t(w) = w_0$ (forma nula) (4)

Aplico $f^t$ en (3): $f^t(f^t(\varphi)) = f^t(w)$. (5)

Como $f^t \circ f^t = f^t$, de (5) : $f^t(\varphi) = f^t(\omega)$

De (4): $f^t(\varphi) = \omega_0$ . Como en (3) se tenía $f^t(\varphi) = \omega \Rightarrow \omega = \omega^0$

$\Rightarrow Im(f^t) \cap ker f^t = \{0\}$

$$\dim[Im f^t] + \dim[Nuc f^t] = \dim[Im f^t + Nuc f^t] + \dim[Im f^t \cap Nuc f^t]$$

$$\underbrace{\dim[Im f^t] + \dim[Nuc f^t]}_{\dim V^*} = \dim[Im f^t + Nuc f^t] + 0$$

$$\dim V^* = \dim[Im f^t + Nuc f^t]$$

$$\Rightarrow \boxed{V^* = Im[f^t] + Nuc[f^t]}$$

*) Sea $V(\mathbb{R})$ un e.v de $\dim V = n$.

Sean $U$ y $W$ dos subespacios

Probar:

① $an\, U+W = an(U) \cap an(W)$

② $an(U \cap W) = an(U) + an(W)$

① • $an(U+W) \subseteq an(U) \cap an(W)$

Sea $\varphi \in an(U+W) \Rightarrow \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in (U+W) \Rightarrow v = u + w : u \in U, w \in W$

$\forall u \in U \Rightarrow u = u + \vec{0} \Rightarrow u \in U+W \Rightarrow \varphi(u) = 0 \Rightarrow \varphi \in an(U)$

$\forall w \in W \Rightarrow w = w + \vec{0} \Rightarrow w \in U+W \Rightarrow \varphi(w) = 0 \Rightarrow \varphi \in an(W)$

$\varphi \in an(U) \wedge \varphi \in an(W) \Rightarrow \varphi \in an(U) \cap an(W)$

- $an(\mathcal{U}) \cap an(\mathcal{W}) \subseteq an(\mathcal{U}+\mathcal{W})$

Sea $\varphi \in an(\mathcal{U}) \cap an(\mathcal{W}) \Rightarrow \varphi \in an(\mathcal{U}) \wedge \varphi \in an(\mathcal{W})$

$\forall v \in \mathcal{U}+\mathcal{W} \Rightarrow v = u + w,\ u \in \mathcal{U},\ w \in \mathcal{W}$

$\varphi(v) = \varphi(u+w) = \varphi(u) + \varphi(w) = 0 \Rightarrow \varphi \in an(\mathcal{U}+\mathcal{W})$

$an(\mathcal{U}+\mathcal{W}) \subseteq an(\mathcal{U}) \cap an(\mathcal{W}) \wedge an(\mathcal{U}) \cap an(\mathcal{W}) \subseteq an(\mathcal{U}+\mathcal{W})$

$\Rightarrow \underline{an(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = an(\mathcal{U}) \cap an(\mathcal{W})}$

② Aplico ①:

$an[an(\mathcal{U}) + an(\mathcal{W})] = an[an(\mathcal{U})] \cap an[an(\mathcal{W})] = \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$

$an[an[an(\mathcal{U}) + an(\mathcal{W})]] = an(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$

$an(\mathcal{U}) + an(\mathcal{W}) = an(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$

*) Sea f un endomorfismo el cual verifica que $f^2 + 2f + 1_V = f_0$ donde $f^2 = f \circ f$, $1_V$ es la identidad en V y $f_0$ es un endomorfismo nulo.

¿Se puede garantizar que f es un automorfismo?

Como f es un endomorfismo es equivalente demostrar que f es inyectiva, sobreyectiva e inyectiva.

Sea $v \in Nuc(f) \Rightarrow f(v) = \vec{0}$

$(f^2 + 2f + 1_V)(v) = f_0(v) = \vec{0}$

$(f \circ f)v + 2f(v) + 1_V(v) = \vec{0}$

$f(\vec{0}) + ?\cdot\vec{0} + v = \vec{0} \Rightarrow v = \vec{0} \Rightarrow Nuc(f) = \{0\}$

$\Rightarrow$ app inyectiva.

$\dim V = \dim Nuc(f) + \dim Im(f) = 0 + \dim Im(f)$

$\Rightarrow \dim V = \dim Im(f) \Rightarrow$ app sobreyectiva

inyectiva $\wedge$ sobreyectiva $\Rightarrow$ automorfismo

*) a) En $\mathbb{R}^2$ se consideran dos vectores no nulos $u$ y $v$ y una forma lineal $\phi$ perteneciente a $\mathbb{R}^{2*}$ no nula, verificando

$\phi(v) = \phi(u) = 0.$

¿Son $u$ y $v$ linealmente dependientes?

Sí. Supongo $u$ y $v$ l.i

$\phi(v) = \phi(u) = 0 \Rightarrow v, u \in Ker(f)$. Como $u$ y $v$ l.i. y $V = \mathbb{R}^{2*} \Rightarrow \dim Ker(f) = 2 = \dim V \Rightarrow$ forma nula:

⚠ Contradicción.

b) La misma pregunta si $\phi(u) = \phi(v) = 1$

No. Contraejemplo

$\phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\phi(x,y) = x$

$\phi(1,0) = 1$ y $(1,0)$ y $(1,2)$ son l.i

$\phi(1,2) = 1$

*) En $\mathbb{R}_3[x]$ y $U = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \,/\, a_0 + a_1 = 0,\ a_2 + a_3 = 0 \}$
Halla dos bases distintas $B$ y $B'$ de $U$ tales que la matriz del cambio de base de $B$ a $B'$ sea

$$M(1_U;\ B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$B = \{u_1, u_2\}$, $B' = \{u_1', u_2'\}$

$u_1 = a_1 u_1' + a_2 u_2'$
$u_2 = b_1 u_1' + b_2 u_2'$

$$M(1_U, B \leftarrow B) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \\ b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \end{array}$$

$u_1 = 1 \cdot u_1' \pm 1 u_2' \Rightarrow u_1\ (1, -1)_{B'}$
$u_2 = 1\, u_1' + 2 u_2' \Rightarrow u_2\ (1, 2)_{B'}$

Fijo una base $B'$ de $U$:

$B' = \{1 - x,\ x - x^2\}$

Para dicha base $B$ es:

$u_1 = 1(1-x) - 1(x - x^2) = 1 - 2x + x^2$
$u_2 = 1(1-x) + 2(x - x^2) = 1 + x + x^2$

$$\boxed{B = \{1 - 2x + x^2,\ 1 + x + x^2\}}$$