TEMA 2: FORMAS BILINEALES | CUADRÁTICAS

0 INTRODUCCIÓN

Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$:

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$y = (y_1, y_2, y_3)$

$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$

$\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto xy$

i) $(x + x') \cdot y = xy + x'y$ // $x \cdot (y + y') = xy + xy'$

ii) $(\alpha x) \cdot y = \alpha x \cdot y$ // $x (\alpha y) = \alpha x y$

iii) $xy = yx$

iv) $x \cdot x \geq 0 \Rightarrow x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

1 FORMA BILINEAL. EXPRESIÓN MATRICIAL. CONVERGENCIA DE MATRICES

<u>Definición</u>. Sea V un ev sobre $\mathbb{R}$, diremos que una aplicación $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal si b verifica:

- $b(\lambda u + \mu v, w) = \lambda b(u, w) + \mu b(v, w)$ $\forall u, v, w \in V$
- $b(u, \lambda v + \mu w) = \lambda b(u, v) + \mu b(u, w)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Observación La única aplicación lineal y bilineal es la cero

Dem.

$$\left.\begin{array}{l} b(2(u,v)) \underset{\text{lineal}}{=} 2\cdot b(u,v) \\ \quad \| \\ 2b(u,2v) \underset{\text{biln}}{=} 4b(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow (u,v)=0$$

Definición. Denotaremos $B(V)$ al conjunto de las formas bilineales en un ev V.

$$\begin{array}{rcl} b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & u_{1\times n}\, A \cdot v_{n\times 1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \forall u,v \in \mathbb{R}^n \\ A \in M_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

- $b_A(\lambda u+\mu v,\ w) = \lambda b_A(u,w) + \mu b_A(v,w)$

Dem.

$$b_A(\lambda u+\mu v,\ w) = (\lambda u+\mu v)\cdot A w = \lambda u A w + \mu A v w =$$

$$= \lambda \cdot b_A(u,w) + \mu b_A(v,w)$$

- Propiedades

i) $b(0,v) = b(u,0) = 0$

ii) $b(-u,v) = -b(u,v)$

$b(u,-v) = -b(u,v)$

iii) $b\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\ ,\ \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \ b(u_i,v_j)$

Dem.

i)

$$b(0,v) = b(0\cdot v,v) = 0\, b(v,v) = 0$$

ii)

$$b(-u,v) = b((-1)\cdot u, v) = -b(u,v)$$

iii) Por inducción:

Para $n=1$, $m=1$ es cierto:

$$b(\alpha u_1, \beta v_1) = \alpha\beta b(u_1, v_1)$$

Suponemos que es cierto para $n-1$ y $m-1$ y veamos que es cierto para n y m.

$$b\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i + \alpha_n u_n , \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j v_j + \beta_m v_m\right) =$$

$$= b\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i , \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j v_j + \beta_m v_m\right) + \alpha_n \cdot b\left(u_n , \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j v_j + \beta_m v_m\right) =$$

$$= b\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i , \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j v_j\right) + \beta_m \cdot b\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i , v_m\right) + \alpha_n b\left(u_n , \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j v_j\right) +$$

$$+ \alpha_n \beta_m b(u_n, v_m) =$$

$$\underset{\text{hip. ind.}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_i \beta_j \, b(u_i, v_j) + \beta_m \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, b(u_i, v_m) + \alpha_n \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \, b(u_n, v_j) +$$

$$+ v_n \beta_n \cdot b(u_n, v_m)$$

EJEMPLOS.

- En el ev de $M_n(\mathbb{R})$

$M \in M_n(\mathbb{R})$

$b_1, b_2, b_3, b_4 : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b_1(X, Y) = tr(XMY)$$

$$b_2(X, Y) = tr(XMY^t)$$

$$b_3(X, Y) = tr(X^tMY)$$

$$b_4(X, Y) = tr(X^tMY^t)$$

$\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R})$

Dem.

Son formas bilineales:

- $b_4(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda b_4(X, Z) + \mu b_4(Y, Z)$

$$b_4(\lambda X + \mu Y, Z) = tr\left((\lambda X + \mu Y)^t \cdot M \cdot Z^t\right) \underset{t\ lineal}{=} tr\left((\lambda X^t + \mu Y^t) M Z^t\right) =$$

$$= tr\left(\lambda X^t \cdot M \cdot Z^t + \mu Y^t M Z^t\right) \underset{tr\ lin.}{=} \lambda tr\left(X^t M Z^t\right) + \mu tr\left(Y^t M Z^t\right) =$$

$$= \lambda b_4(X, Z) + \mu b_4(Y, Z)$$

- En el ev de $\mathbb{R}_n[x]$

Sea $f(x)$ cta en $[a,b]$

$$b: \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(p(x), q(x)) \longmapsto \int_a^b p(x) \cdot q(x) \cdot f(x)\, dx$$

Dem.

¿b es bilineal?

- $b(\lambda p(x) + \mu q(x), r(x)) = \lambda b(p(x), r(x)) + \mu b(q(x), r(x))$

$$b(\lambda p(x) + \mu q(x), r(x)) = \int_a^b (\lambda p(x) + \mu q(x)) \cdot r(x) f(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b \left(\lambda p(x) r(x) \cdot f(x) + \mu q(x) r(x) f(x)\right) dx =$$

$$= \int_a^b \lambda p(x) r(x) f(x)\, dx + \int_a^b \mu q(x) r(x) f(x)\, dx =$$

$$= \lambda \int_a^b p(x) r(x) f(x)\, dx + \mu \int_a^b q(x) r(x) f(x)\, dx =$$

$$= \lambda b(p(x), r(x)) + \mu b(q(x), r(x))$$

- Otras formas bilineales:

$$b: \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(p(x), q(x)) \longmapsto \int_a^b p'(x)\, q(x)\, f(x)\, dx$$

$$\longmapsto \int_a^b p'(x)\, q''(x)\, f(x)\, dx$$

$$\longmapsto p(3)\cdot q(7)$$

$$\longmapsto p'(3)\; q''(e)$$

1.1 Expresión matricial

Sea V un ev sobre $\mathbb{R}$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$u, v \in V$: $u = (a_1, \dots, a_n)_B$, $v = (b_1, \dots, b_n)_B$

Dada $b \in B(V)$ tenemos que:

$$b(u,v) = b\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i \,,\, \sum_{j=1}^n b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n a_i \; b\left(v_i \,,\, \sum_{j=1}^n b_j v_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \left[\sum_{j=1}^n b_j \; b(v_i, v_j)\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \cdot b(v_i, v_j)$$

A la matriz cuya entrada (i,j) es $b(v_i, v_j)$ la denotamos $M(b, B)$ y la llamamos matriz de la forma bilineal b en la base B.

$$M(b, B) = \left(b(v_i, v_j)\right)_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$$

$b(u,v) =$

$$= (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & b(v_1,v_2) & \cdots & b(v_1,v_n) \\ b(v_2,v_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b(v_n,v_1) & \cdots & \cdots & b(v_n,v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = u^t \cdot M(b,B) \cdot v$$

Scanned by CamScanner

Observación.

Sean $b, b' \in B(V)$, B base de V $\Big\}$ $b = b' \iff M(b, B) = M(b', B)$

Proposición.

Dada B base de V, tenemos

$$\varphi : B(V) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$
$$b \longmapsto M(b, B)$$

isomorfismo (apl. lin. biy.)

Luego $\dim(B(V)) = n^2$

Dem.

- $\varphi(\lambda b + \mu b') = \lambda \varphi(b) + \mu \varphi(b')$, $\forall b, b' \in B(V)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\underset{(a_{ij})}{M(\lambda b + \mu b', B)} = \lambda \underset{(b_{ij})}{M(b, B)} + \mu \underset{(c_{ij})}{M(b', B)}$, $1 \leq i, j \leq n$

$a_{ij} = (\lambda b + \mu b')(v_i, v_j) = \lambda b(v_i, v_j) + \mu \cdot b'(v_i, v_j)$

$b_{ij} = b(v_i, v_j)$

$c_{ij} = b'(v_i, v_j)$

- Calculamos $\ker(\varphi) = \{b \in B(V) : \varphi(b) = 0\} =$
$= \{b \in B(V) : M(b, B) = 0\} = \{0\} \Rightarrow \varphi$ es inyect.

- ¿φ sobrey.?

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b : V \times V \to \mathbb{R}$ con $b(u, v) = (a_1, \dots, a_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Observación. Si V es un ev real, B base de V y $A \in M_n(\mathbb{R})$

Podemos definir $b : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal como:

$$b(u, v) = x^t \cdot A \cdot y$$

, donde x, y son coord. de u, v en la base B

⊕aaa

$b(\lambda u+\mu v, w) = \lambda b(u, w) + \mu b(v, w)$, $u=(a_1, \ldots a_n)_B$

$v=(b_1, \ldots, b_n)_B$

$w=(c_1, \ldots, c_n)_B$

Entonces:

$\lambda u+\mu v = (\lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu \cdot b_n)_B$

Por lo que:

$b(\lambda u+\mu v) = (\lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$\lambda b(u,w) + \mu b(v,w) = \lambda (a_1, \ldots, a_n) A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \mu (b_1, \ldots, b_n) A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Usando las props. de matrices:

$(\lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n) \cdot A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \left[\lambda (a_1, \ldots, a_n) + \mu (b_1, \ldots, b_n)\right] A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$

$= \lambda (a_1, \ldots, a_n) A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \mu (b_1, \ldots, b_n) A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda b(u,v) + \mu b(v,w)$

Lo mismo con la linealidad en la segunda variable

$b(u, \lambda v + \mu w) = \lambda b(u,v) + \mu b(u,w)$

etc

Ahora vamos a probar que $\varphi(b) = A$

$\varphi(b) = M(b, B)$

$b(v_i, v_j)$

$$b(u,v) = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots 0) \cdot A \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow j$$

Concluimos que φ es un isomorfismo

EJEMPLOS

- $V = \mathbb{R}^3$

$B_u = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$$M(b_0, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$V = \mathbb{R}^n \Rightarrow b_0$ forma bilineal asociada a I_n si $B = B_u$

- $\mathbb{R}^2$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Big\{ \; \underline{b_1}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2 \; x_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{x_2 y_1 + x_1 y_2}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{b_2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{x_1 y_1 - x_2 y_2}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{b_3}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-5x_1 + 3x_2 \quad x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{-5x_1 y_1 + 3x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2}$$

- $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 5x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - 4x_2 y_1 + 10 x_2 y_2$$

$$= (x_1 \; x_2) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2 x_2 - x_2 y_1 \quad \Rightarrow$ No es bilineal (x_1^2)

$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 x_2 + 1 \quad \Rightarrow$ No es bilineal (hay una cte)

Métrica de Lorentz - Minkowski

$b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

$$M(b, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ \hline O_{1\times(n-1)} & -1 \end{array}\right)$$

Cuando $\underline{n=4}$ $\Rightarrow$ b es la métrica de Minkowski $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $V = M_n(\mathbb{R})$

$b: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(M, N) \longmapsto b(M, N) = tr(M \cdot N^t)$

$\underline{n=2}$

$$M(b, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 \Rightarrow \text{En general} \Rightarrow \boxed{M(b, B) = I_{n^2}}$$

- $C = ([a,b], \mathbb{R}) = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R}$ cta $\}$ ev sobre $\mathbb{R}$

$b: C([a,b], \mathbb{R}) \times C([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f, h) \longmapsto \int_a^b f(t) h(t) \, dt$

A b se le llama producto L^2 en $C([a,b], \mathbb{R})$

- $S \subset V$
  b forma bilineal de V $\left\{ \begin{array}{l} b: V\times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ b_{|S\times S}: S\times S \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \right.$ $\Rightarrow b_{|S\times S}$ es forma bil en S

- b_1 forma b. en V_1 : $b_1 : V_1 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{R}$
  b_2 forma b. en V_2 : $b_2 : V_2 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Entonces:

$$b_1 \times b_2 : (V_1 \times V_2) \times (V_1 \times V_2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u_1, u_2), (v_1, v_2) \longmapsto (b_1 \times b_2)((u_1, u_2), (v_1, v_2)) =$$

$$= b_1(u_1, v_1) + b_2(u_2, v_2)$$

$b_1 \times b_2$ es una forma bilineal en $V_1 \times V_2$

- $V(\mathbb{R})$
  $\varphi, \psi \in V^*$
  $\varphi, \psi : V \to \mathbb{R}$ apl. lin.

  $\left\{ \begin{array}{l} b: V\times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) \longmapsto \varphi(u) \cdot \psi(v) \end{array} \right.$ siendo b bilineal

1.2 Congruencia de matrices

Sea $V(\mathbb{R})$ ev

$b \in B(V)$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base V

$B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ base V

$u = (a_1, \dots, a_n)_B = (a'_1, \dots, a'_n)_{B'}$

$w = (b_1, \dots, b_n)_B = (b'_1, \dots, b'_n)_{B'}$

Entonces:

$$b(u, w) = (a_1, \dots, a_n) \cdot M(b, B) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a'_1, \dots, a'_n)\, M(b, B') \cdot \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Si $P = M(I_V, B', B) \in Gl(n, \mathbb{R})$:

$$P \cdot \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad , \quad P \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$b(u, v) = \left[P \cdot \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \right]^t \cdot M(b, B) \cdot P \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = (a'_1, \dots, a'_n) \cdot P^t \cdot M(b, B) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$\boxed{M(b, B) = P^t \cdot M(b, B') \cdot P}$$

<u>Definición</u>. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ son congruentes si $\exists P \in Gl(n, \mathbb{R})$:

$$A = P^t \cdot B \cdot P$$

Observaciones

1) Cualquier matriz es congruente a sí misma

2) Dos matrices son congruentes $\Rightarrow$ tienen el mismo rango

(por ser equivalentes)

3) ¿A es congruente a C?

$$\left.\begin{array}{l} A = P^t B P \\ B = Q^t C Q \end{array}\right\} \quad A = P^t \cdot Q^t C Q P = (QP)^t \cdot C (QP)$$

Luego A es congruente a C

4) Dos matrices congruentes no tienen por qué tener el mismo determinante ni la misma traza

Ej.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = P^t A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 2 \neq \det(C) = 18$

$tr(A) = 3 \neq tr(C) = 11$

5) Dos matrices congruentes tienen el mismo signo del determ.

$$\det(C) = \det(P^t A P) = \underbrace{\det(P^t)}_{\det(P)} \cdot \det(A) \cdot \det(P) = \underbrace{\det(P)^2}_{>0} \cdot \det(A)$$

6) Dos matrices con distinto rango no son congruentes

7) La simetría se conserva en la congruencia

$$A = P^t B P \Rightarrow A^t = (P^t B P)^t = P^t B^t \cdot (P^t)^t = P^t B^t P$$

8) A simétrica y C antisimétrica $\Longrightarrow$ A y C no congruentes

9) A y C semejantes no tienen por qué ser congruentes

Ej.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

10) Dos matrices congruentes no tienen por qué ser semejantes

Ej.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición. A y C congruentes:

$$\left.\begin{array}{l} A = P^t \cdot C \cdot P \\ A, C \in M_n(\mathbb{R}) \\ P \in Gl(n, \mathbb{R}) \\ B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base } V \\ b \in B(V) \\ C = M(b, B) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\, B' \text{ base de } V: \quad M(b, B') = A$$

Por lo que:

$$M(b, B') = P^t \cdot M(b, B) \cdot P \qquad \Rightarrow \quad P = M(I_V, B', B)$$

Proposición

$$\left.\begin{array}{l} V(\mathbb{R}) \\ \dim V = n \\ B(V) \neq \emptyset \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} +: B(V) \times B(V) \longrightarrow B(V) \\ \quad (b, b') \longmapsto b + b' : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad (u, v) \longmapsto b(u,v) + b'(u,v) \end{array}$$

Dem. $(b+b')$ es bilineal

$$¿(b+b')(\lambda u + \mu v, w) = \lambda (b+b')(u,w) + \mu (b+b')(v,w)?$$

$$(b+b')(\lambda u + \mu v, w) = b(\lambda u + \mu v, w) + b'(\lambda u + \mu v, w) =$$

$$= \lambda \cdot b(u,w) + \mu \cdot b(v,w) + \lambda b'(u,w) + \mu b'(v,w) =$$

$$= \lambda \cdot (b(u,w) + b'(u,w)) + \mu \cdot (b(v,w) + b'(v,w)) =$$

$$= \lambda \cdot (b+b')(u,w) + \mu (b+b')(v,w)$$

Lo mismo para:

$$(b+b')(u, \lambda v + \mu w) = \lambda (b+b')(u,v) + \mu (b+b')(u,w)$$

Ejemplos de formas bilineales

- $\mathbb{R}^n \quad A \in M_n(\mathbb{R})$

$b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u, v) \longmapsto uAv \quad , \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

$B_u = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$M(b_A, B_u) = (c_{ij})$

Como $\underset{a_{ij}}{\overset{}{c_{ij}}} = b_A(e_i, e_j) = \underbrace{(0\,0 \dots \overset{(i)}{0 1 0} \dots 0)}_{\text{i-ésima fila de A}} \cdot A \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} {}^{(j)}$

Entonces

$$M(b_A, B_u) = (c_{ij}) = A$$

- $b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$B_u, \quad M(b, B_u)$

$u, v \in \mathbb{R}^n$

$u = (a_1, \dots, a_n)_{B_u}$

$v = (b_1, \dots, b_n)_{B_u}$

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot M(b, B_u) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b(u, v)$$

$$\| $$

$$b_{M(b, B_u)}(u, v)$$

$$b = b_{M(b, B_u)}$$

Scanned by CamScanner

◎ $M_2(\mathbb{R})$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$b_1(M)(X,Y) = tr(XMY)$

$b_2(M)(X,Y) = tr(XMY^t)$ $\quad \forall X, Y \in M_2(\mathbb{R})$

$b_3(M)(X,Y) = tr(X^t M Y)$

$b_4(M)(X,Y) = tr(X^t M Y^t)$

Calcular una matriz de las formas bilineales en la base usual

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B_u = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ base ordenada

$$\begin{pmatrix} b_1[E_{11}, E_{11}] & b_1[E_{11}, E_{21}] & \cdots \\ b_2[E_{21}, E_{11}] & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

◎ $b_1[X, Y] = tr[XMY]$

$$M(b_1, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

◎ $b_2[X,Y] = tr[XMY^t]$

$$M(b_2, B_u) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

◎ $b_3[X, Y] = tr[X^t M Y]$

$$M(b_3, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

$b_4[X,Y] = tr(X^t M Y^t)$

$$M(b_4, B_u) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \quad , \quad M(b_3, B_2) = M(b_4, B_u)$$

- ¿ Coinciden las formas bilineales?

- ¿$b_1(M) = b_2(M)$?

$$M(b_1, B_u) = M(b_2, B_u) \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \iff \underline{M=0}$$

- $b_1(M) = b_3(M) \iff \underline{M=0}$

- $b_1(M) = b_4(M) \iff \begin{matrix} a=d \\ b=c=0 \end{matrix} \iff \underline{M = a I_2}$

- $b_2(M) = b_3(M) \iff \begin{matrix} a=d \\ b=c=0 \end{matrix} \iff \underline{M = a I_2}$

- $b_2(M) = b_4(M) \iff \underline{M=0}$

- $b_3(M) = b_4(M) \iff \underline{M=0}$

Proposición. $(B(V), +)$ es un grupo abeliano.

i) $(b+b')+b'' = b + (b'+b'')$

ii) $[(b+b')+b''](u,v) = (b+b')(u,v) + b''(u,v) = [b(u,v) + b'(u,v)] + b''(u,v)$

Proposición.

$$\cdot : \mathbb{R} \times B(V) \longrightarrow B(V)$$
$$(\lambda, b) \longmapsto \lambda \cdot b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto \lambda \cdot b(u,v)$$

Dem.

¿ $(\lambda \cdot b)(\mu u + \gamma v, w) = \mu(\lambda b)(u,w) + \gamma(\lambda b)(v,w)$?

$$(\lambda b)(\mu u + \gamma v, w) = \lambda \cdot b(\mu u + \gamma v, w) = \lambda \cdot [\mu b(u,w) + \gamma b(v,w)] =$$

$$= \mu \cdot \lambda b(u,w) + \gamma \lambda b \cdot (v,w) =$$

$$= \mu(\lambda b)(u,w) + \gamma(\lambda b)(v,w)$$

Proposición.

i) $(\lambda + \mu) b = \lambda b + \mu b$

ii) $\lambda \cdot (b+b') = \lambda b + \lambda b'$

iii) $(\lambda \mu) \cdot b = \lambda \cdot (\mu \cdot b)$

iv) $1b \cdot b$

Dem.

i)

$$¿\left[(\lambda+\mu)\cdot b\right](u,v) = \left[\lambda b+\mu\cdot b\right](u,v)?$$

$$\left[(\lambda+\mu)\cdot b\right](u,v) = (\lambda+\mu)\cdot b(u,v) = \lambda b(u,v)+\mu b(u,v) =$$

$$= (\lambda b)(u,v) + (\mu b)(u,v) =$$

$$= \left[\lambda b+\mu b\right](u,v)$$

2.1 Formas bilineales simétricas y antisimétricas

Sea V un ev real y $b \in B(V)$. Se dice que b es una forma bilineal simétrica o métrica si:

$$\boxed{b(u,v) = b(v,u)} \qquad \forall u,v \in V$$

b es una forma bilineal antisimétrica si:

$$\boxed{b(u,v) = -b(v,u)} \qquad \forall u,v \in V$$

Recordemos que teníamos dada B base de V un isomorfismo

$$\begin{aligned} \underset{F_B}{\psi}: B(V) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) \\ b &\longmapsto M(b,B) \end{aligned}$$

- $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ $\Rightarrow$ $\dim(S_n) = \frac{(n+1)n}{2}$
- $A_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$ → diag 0 siempre $\Rightarrow$ $\dim(A_n) = \frac{n(n-1)}{2}$

$$A = \underset{\substack{\cap \\ S_n(\mathbb{R})}}{\frac{1}{2}(A+A^t)} + \underset{\substack{\cap \\ A_n(\mathbb{R})}}{\frac{1}{2}(A-A^t)}$$

- ψ envía matrices simétricas a las matrices simétricas
- ψ " " antisimétricas " " antisimétricas.

<u>Definición</u>. Denotaremos $B_s(V)$ y $B_A(V)$ a las formas bilineales simétricas y antisimétricas de V.

Proposición.

$$T: B(V) \longrightarrow B(V)$$
$$b \longmapsto T(b): V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto T(b)(u,v) = b(v,u)$$

Dem.

$T(b) \in B(V)$

- ¿ $T(b)(\lambda u+\mu v, w) = \lambda T(b)(u,w) + \mu T(b)(v,w)$?

$$\overset{\shortparallel}{b(w, \lambda u+\mu v)} = \lambda b(w,u) + \overset{\shortparallel}{\mu b(w,v)}$$

etc

- ¿ $T(\lambda b+\mu b') = \lambda T(b) + \mu T(b')$?

$$T(\lambda b+\mu b')(u,v) = (\lambda b+\mu b')(v,u) = \lambda b(v,u) + \mu b'(v,u) =$$
$$= \lambda T(b)(u,v) + \mu T(b)(u,v) = [\lambda T(b) + \mu T(b')](u,v)$$

- ¿ $T^2 = I_{B(V)}$?

$$T^2(b) = b \quad , \forall b \in B(V)$$
$$\overset{}{T^2(b)(u,v)} = b(u,v)$$
$$\overset{\shortparallel}{T(T(b))(u,v)} = T(b)(v,u) = b(u,v)$$

Formas bilineales simétricas:

$B_S(V) = Ker\left(T - I_{B(V)}\right) = \{ b\in B(V) : T(b) = b \} = \{ b \in B(V) : b(u,v) = b(v,u),\ \forall u,v \in V \}$

Formas bilineales antisimétricas:

$B_A(V) = Ker\left(T - I_{B(V)}\right) = \{ b \in B(V) : T(b) = -b \} = \{ b \in B(V) : b(u,v) = -b(v,u),\ \forall u,v\in V \}$

Proposición $B(V) = B_S(V) \oplus B_A(V)$

Dem.

Si $b \in B_S(V)$ y $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ entonces:

$$(M(b,B))_{ij} = b(u_i, u_j) = b(u_j, u_i) = (M(b,B))_{ji} \Rightarrow M(b,B) \in S_n(\mathbb{R})$$

Si $b \in B_A(V) \Longrightarrow M(b;B) \in A_S(\mathbb{R})$

Es más, $\psi(B_S(V)) = S_n(\mathbb{R})$

$\psi(B_A(V)) = A_n(\mathbb{R})$

Sea $A \in S_n(\mathbb{R})$ y $b(u,v) = x^t A y$

x, y coord. de u y v en la base B:

$$b(u,v) = y^t A^t x \underset{A^t = A}{=} y^t A x = b(v,u) \Longrightarrow b \in B_S(V)$$

Luego $B_S(V)$ y $B_A(V)$ son <u>subespacios vectoriales</u> de $B(V)$

Además, si $b \in B(V)$ entonces:

$$b(u,v) = \underbrace{\frac{1}{2}\overbrace{(b(u,v) + b(v,u))}^{b+T(b)}}_{\in B_S(V)} + \underbrace{\frac{1}{2}\overbrace{(b(u,v) - b(v,u))}^{b-T(b)}}_{\in B_A(V)}$$

simétrica porque si la invierto queda =

antisim. pq si la invierto queda - lo que ya hay

Por lo que

$$B(V) = B_S(V) \oplus B_A(V)$$

2.2 Caracterización de las formas bilineales antisimétricas

Proposición

$$b \in B_A(V) \iff b(u,u) = 0 \quad , \quad \forall u \in V$$

Dem.

$\Rightarrow$ $b(u,v) = -b(v,u)$, $v=u$, entonces:

$$b(u,u) \underset{\text{invertir}}{=} -b(u,u) \Rightarrow b(u,u) = 0$$

$\Leftarrow$

$u,v \in V$

$$0 = b(u+v,\ u+v) \underset{\text{b bilin.}}{=} \overset{0}{b(u,u)} + b(u,v) + b(v,u) + \overset{0}{b(v,v)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(u,v) = -b(v,u)$$

EJEMPLOS

- $b_0 \in B_S(\mathbb{R}^n)$ porque $M(b_0, B_u) = I_n$

- $M(b_1, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1 \in B_S(\mathbb{R}^n)$ y $M(b, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- $(\mathbb{R}^n, b)$, $M(b, B_u) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Métrica de Lorentz-Minkowski

- $b: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b(A,C) = tr(A \cdot C^t)$$

$$b(C,A) = tr(C, A^t) = tr((A \cdot C^t)^t) = tr(A \cdot C^t) = b(A,C)$$

- $b: C([a,b], \mathbb{R}) \times C([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \times h \longmapsto \int_a^b f(t)\, h(t) \cdot dt$$

Proposición $F_B : B(V) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

$b \longmapsto M(b, B)$

Entonces

$$F_B(B_S(V)) = S_n(\mathbb{R})$$

$\boxed{\subseteq}$ $(1) \Rightarrow (2)$

$\boxed{\supseteq}$ $(3) \Rightarrow (1)$

$u = (a_1, \dots, a_n)_B$

$v = (b_1, \dots, b_n)_B$

$A \in S_n(\mathbb{R})$

$F_B^{-1}(A) = b$

$b : V \times V \to \mathbb{R}$

$M(b, B) = A$, $b(u,v) = (a_1, \dots, a_n)\, A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

2.3 Producto tensorial de dos formas lineales

$V(\mathbb{R})$

$\dim V = n$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base V

$B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

$\varphi, \psi \in V^*$

$\varphi \otimes \psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\varphi \otimes \psi)(u,v) = \varphi(u) \cdot \psi(v)$, $\forall u, v \in V$

es bilineal

<u>Proposición</u> Son equivalentes:

(1) $b \in \begin{array}{|l} B_S(V) \\ B_A(V) \end{array}$

(2) $\forall B$ base de V, $M(b,B) \in \begin{array}{|l} S_n(\mathbb{R}) \\ A_n(\mathbb{R}) \end{array}$

(3) $\exists B$ base de V, $M(b,B) \in \begin{array}{|l} S_n(\mathbb{R}) \\ A_n(\mathbb{R}) \end{array}$

<u>Dem</u> (Para simétricas)

1) $\Rightarrow$ 2)

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$M(b,B) = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in S_n(\mathbb{R}) \iff \underset{b(v_i,v_j)}{a_{ij}} = \underset{b(v_j,v_i)}{a_{ji}}$ $\forall i,j = 1,\dots,n$

2) $\Rightarrow$ 3) Trivial

3) $\Rightarrow$ 1)

$\exists B$ base de V

$M(b,B) \in S_n(\mathbb{R})$

$u,v \in V$, $u = (a_1, \dots, a_n)_B$, $v = (b_1, \dots, b_n)_B$

$$b(u,v) = (a_1, \dots, a_n) \cdot M(b,B) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$b(v,u) = (b_1, \dots, b_n)\, M(b,B) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ porque es una matriz 1×1

$$b(u,v) = b(u,v)^t = \left[(a_1, \dots, a_n)\, M(b,B) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right]^t =$$

$$= (b_1, \dots, b_n)\, M(b,B)^t \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} (b_1, \dots, b_n)\, M(b,B) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$= b(v,u) \quad \forall u,v \in V$$

Propiedades

(i) $\varphi \otimes \psi \in B(V)$, $\forall \varphi, \psi \in V^*$

Dem.

$$(\varphi \otimes \psi)(\lambda u + \mu v, w) = \varphi(\lambda u + \mu v) \cdot \psi(w) \overset{\varphi \in V^*}{=} [\lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)] \psi(w) =$$

$$= \lambda \varphi(u) \cdot \psi(w) + \mu \varphi(v) \psi(w) =$$

$$= \lambda (\varphi \otimes \psi)(u, w) + \mu (\varphi \otimes \psi)(v, w)$$

(ii) $\varphi \otimes \psi = 0 \iff \varphi = 0$ ó $\psi = 0$

(iii) $(\lambda \varphi + \mu \psi) \otimes \eta = \lambda \varphi \otimes \eta + \mu \psi \otimes \eta$

$\varphi \otimes (\lambda \psi + \mu \eta) = \lambda \varphi \otimes \psi + \mu \varphi \otimes \eta$

Dem.

$$V^* \times V^* \longrightarrow B(V)$$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \otimes \psi$$

$$¿ (\lambda \varphi + \mu \psi) \otimes \eta (u, v) = [\lambda \varphi \otimes \eta + \mu \psi \otimes \eta](u, v)$$

$$(\lambda \varphi + \mu \psi)(u) \eta(v) = \lambda \varphi \otimes \eta (u, v) + \mu \psi \otimes \eta (u, v) =$$

$$[\lambda \varphi(u) + \mu \psi(u)] \eta(v) = \lambda \varphi(u) \eta(v) + \mu \psi(u) \cdot \eta(v)$$

(iv) $\varphi \otimes \psi \ B_s(V) \iff \{\varphi, \psi\}$ es l.d.

(v) $\varphi \otimes \psi \in B_A(V) \iff \varphi \otimes \psi = 0 \iff \varphi = 0$ ó $\psi = 0$

(vi) $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

$\varphi = (a_1, \dots, a_n)_{B^*}$

$\psi = (b_1, \dots, b_n)_{B^*}$

$$\Rightarrow M(\varphi \otimes \psi, B) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & & \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}}_{rg = 1 \ \Rightarrow \varphi \otimes \psi \neq 0} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, \dots, b_n)$$

$$a_{ij} = (\varphi \otimes \psi)(v_i, v_j) = \varphi(v_i) \cdot \psi(v_j) = a_i b_j$$

Dem.

(iv) Observación

$T(\varphi \otimes \varphi)(u,v) = \varphi \otimes \varphi(v,u) = \varphi(v) \cdot \varphi(u) =$

$= \varphi(u)\varphi(v) = (\varphi \otimes \varphi)(u,v)$

$T(\varphi \otimes \varphi) = \varphi \otimes \varphi$

Además, $\varphi \otimes \psi = \underbrace{\frac{1}{2}\left[\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi\right]}_{\in B_S(V)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi\right]}_{\in B_A(V)}$

$\Leftarrow$

Supongamos $\{\varphi, \psi\}$ l.i.

Si $\varphi = 0$ ó $\psi = 0$ $\Rightarrow$ $\varphi \otimes \psi = 0 \Rightarrow \varphi \otimes \psi \in B_S(V)$

Si $\varphi \neq 0$ y $\psi \neq 0$ $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \varphi = \lambda \psi$

Tenemos que:

$\varphi \otimes \psi = (\lambda \psi) \otimes \psi = \lambda \psi \otimes \psi$

Entonces:

$T(\varphi \otimes \psi) = T(\lambda \psi \otimes \psi) = \lambda T(\psi \otimes \psi) \underset{\text{Teorema b. sim.}}{=} \lambda \psi \otimes \psi = \varphi \otimes \psi$

$\varphi \otimes \psi \in B_S(V)$

$\Rightarrow$

$T(\varphi \otimes \psi) = \varphi \otimes \psi \Rightarrow \psi \otimes \varphi = \varphi \otimes \psi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\psi \otimes \varphi)(u,v) = (\varphi \otimes \psi)(u,v)$

$\psi(u) \cdot \varphi(v) = \varphi(u) \psi(v)$.

(Fijamos u) $\quad \psi(u_0)\varphi(v) - \varphi(u_0)\psi(v) = 0, \quad \forall v \in V$

$[\psi(u_0) \cdot \varphi - \varphi(u_0)\psi](v) = 0$

$\psi(u_0) \cdot \varphi - \varphi(u_0)\psi = 0, \quad \forall u_0 \in V$

$\Downarrow$

$\{\varphi, \psi\}$ l.d

v)

$\Leftarrow$ Trivial

$\Rightarrow$ Supongamos que:

$$T(\varphi \otimes \psi) = -\varphi \otimes \psi$$

$$\psi \otimes \varphi$$

$$\varphi \otimes \psi = -\psi \otimes \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(\varphi \otimes \psi)(u,v)}_{\varphi(u)\cdot\psi(v)} = \underbrace{-(\psi \otimes \varphi)(u,v)}_{-\psi(u)\,\varphi(v)}$$

$$\varphi(u_0)\psi(v) + \psi(u_0)\varphi(v) = 0, \quad \forall v \in V$$

$$[\varphi(u_0)\psi + \psi(u_0)\varphi](v) = 0$$

$$\varphi(u_0)\psi + \psi(u_0)\varphi = 0, \quad \forall u_0 \in V$$

$$\Downarrow$$

$$\{\varphi, \psi\} \text{ ld}$$

$$\Downarrow \text{(iv)}$$

$$\varphi \otimes \psi \in B_s(V) \cap B_A(V) = \{0\}$$

Scanned by CamScanner

Proposición.

$$M(\varphi_i \otimes \varphi_j , B) = E_{ij}$$

↳ Tiene todo 0 excepto en ij que tiene un 1

Además, para el cálculo de bases, tenemos que:

$$\begin{aligned} F_B : \; B(V) &\xrightarrow{\text{Isom.}} M_n(\mathbb{R}) \\ b &\longmapsto M(b, B) \\ \varphi_i \otimes \varphi_j &\longleftarrow E_{ij} \end{aligned}$$

Por lo que

$\{\varphi_i \otimes \varphi_j : 1 \leq i,j \leq n\}$ es una base de $B(V)$

También tenemos esta igualdad:

$$b \in B(V) \Rightarrow M(b, B) = \sum_{i,j=1}^{n} b(v_i, v_j) \cdot E_{ij}$$

Por lo que:

$$\underbrace{F_B^{-1}(M(b,B))}_{b} = \sum_{i,j=1}^{n} b(v_i, v_j) \cdot \varphi_i \otimes \varphi_j$$

Así obtenemos las coord. de b respecto de $\varphi_i \otimes \varphi_j$

- BASE DE LAS SIMÉTRICAS

$\frac{n(n+1)}{2}$ $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} : 1 \leq i < j \leq n\}$ base de $S_n(\mathbb{R})$

- BASE DE LAS ANTISIMÉTRICAS:

$\frac{n(n-1)}{2}$ $\{E_{ij} - E_{ji} : 1 \leq i < j \leq n\}$ base de $A_n(\mathbb{R})$

● BASE DE LAS FORMAS BILINEALES SIMÉTRICAS

$\frac{n(n+1)}{2}$ $\{\varphi_i \otimes \varphi_i : 1 \le i \le n\} \cup \{\varphi_i \otimes \varphi_j + \varphi_j \otimes \varphi_i : 1 \le i < j \le n\}$

base de $B_S(V)$

● BASE DE LAS FORMAS BILINEALES ANTISIMÉTRICAS

$\frac{n(n-1)}{2}$ $\{\varphi_i \otimes \varphi_j - \varphi_j \otimes \varphi_i : 1 \le i < j \le n\}$ base de $B_A(V)$

EJEMPLO

● Calcula las coordenadas de b en la matriz de $B_S(V)$

$n=3$

$B=\{v_1, v_2, v_3\}$

$B^*=\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R})$$

$$b = \varphi_1 \otimes \varphi_1 - \varphi_2 \otimes \varphi_2 + 7\varphi_3 \otimes \varphi_3 + 3(\varphi_1 \otimes \varphi_2 + \varphi_2 \otimes \varphi_1) + 4(\varphi_2 \otimes \varphi_3 + \varphi_3 \otimes \varphi_2) + 2(\varphi_1 \otimes \varphi_3 + \varphi_3 \otimes \varphi_1)$$

¿Y las de $M(b,B) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$?

$$b = 4(\varphi_1 \otimes \varphi_2 - \varphi_2 \otimes \varphi_1) - 3(\varphi_1 \otimes \varphi_3 - \varphi_3 \otimes \varphi_1) + 2(\varphi_2 \otimes \varphi_3 - \varphi_3 \otimes \varphi_2)$$

● Encuentra la parte simétrica y la antisimétrica de

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} = A$$

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 9/2 \\ 5 & 9/2 & 7 \end{pmatrix}}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 1/2 \\ -3 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}}_{\in A_n(\mathbb{R})}$$

Además:

$$b = \overset{S}{\Big[} \varphi_1 \otimes \varphi_1 - \varphi_2 \otimes \varphi_2 + 7 \varphi_3 \otimes \varphi_3 + 5 (\varphi_1 \otimes \varphi_3 + \varphi_3 \otimes \varphi_1) +$$

$$+ \frac{9}{2} (\varphi_2 \otimes \varphi_3 + \varphi_3 \otimes \varphi_2) \Big] + \overset{A}{\Big[} 3 (\varphi_1 \otimes \varphi_2 - \varphi_2 \otimes \varphi_1) +$$

$$+ 3 (\varphi_1 \otimes \varphi_3 - \varphi_3 \otimes \varphi_1) + \frac{1}{2} (\varphi_2 \otimes \varphi_3 - \varphi_3 \otimes \varphi_2) \Big]$$

(La descomposición es única)

3 BASES ORTOGONALES Y ORTONORMALES

3.1 Formas cuadráticas reales. Perpendicularidad

<u>Definición</u>. Sea V un ev real y g una métrica (forma bilineal simétrica) en V, al par (V, g) se le denomina un ev métrico o, simplemente, espacio métrico.

EJEMPLOS

- $(\mathbb{R}^n, g_0)$ → donde g_0 es la métrica euclídea o usual en $\mathbb{R}^n$
- $(\mathbb{R}^n, g_1)$ → donde g_1 es la métrica de Lorentz - Minkowski
- $(M_n(\mathbb{R}), g)$ → $g(A, C) = \text{traza}(A \cdot C^t)$

<u>Definición</u>. Sea (V, g) un ev métrico, definimos una aplicación

$$\begin{aligned} w_g : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto g(v, v) \end{aligned}$$

donde w_g es una forma cuadrática asociada a la métrica g

<u>Proposición</u>. Las propiedades de w_g son:

i) $w_g(0) = 0 = g(0, 0)$

ii) $w_g(\lambda v) = g(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 g(v, v) = \lambda^2 w_g(v)$ ⇒ No es lineal

iii) $w_g(u+v) = g(u+v, u+v) \underset{g \in B(V)}{=} g(u, u) + g(v, v) + g(u, v) + g(v, u) \underset{g \text{ simétrica}}{=}$

$$= w_g(u) + 2g(u, v) + w_g(v)$$

De aquí, $g(u,v) = \frac{1}{2}\left(w_g(u+v) - w_g(u) - w_g(v)\right)$, $\forall u,v \in V$

iv) $w_g(u-v) = g(u-v, u-v) \underset{\substack{\uparrow \\ g \in B(V)}}{=} g(u,u) - g(u,v) - g(v,u) + g(v,v) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ simétr.}}}{=}$

$= w_g(u) - 2g(u,v) + w_g(v)$

De aquí, $g(u,v) = \frac{1}{2}\left(w_g(u+v) - w_g(u-v)\right)$

v) Sea B base de V y $x = (x_1, \dots, x_n)$ coordenadas de $v \in V$. Entonces:

$w_g(v) = g(v,v) = x^t \cdot M(g,B) \cdot x$ (expresión cuadrática en $\{x_1, \dots, x_n\}$)

Definición. En general, se denomina forma cuadrática sobre V a una aplicación $w: V \to \mathbb{R}$ tal que verifica:

- $w_g(\lambda v) = \lambda^2 w_g(v)$
- $g(u,v) = \frac{1}{2}\left(w_g(u+v) - w_g(u) - w_g(v)\right)$

w es una métrica en V.

Denotaremos $F(V)$ a las formas cuadráticas sobre V. Tenemos entonces una aplicación:

$$\begin{aligned} \phi : B_s(V) &\longrightarrow F(V) \\ g &\longmapsto w_g \\ g &\longleftarrow\!\!\shortmid\; w \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Scanned by CamScanner

Proposición $(F(V), +, \cdot)$ es un ev.

Además, $\dim(F(V)) = \dim(B_s(V)) = \dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$

Ejemplos

- $(\mathbb{R}^n, g_0)$

$x \in \mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$w_{g_0}(x) = g_0(x,x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2$$

- $(\mathbb{R}^n, g_1)$

$$w_{g_1}(x) = g_1(x,x) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$$

- $(\mathbb{R}^n, g)$

$$H(g, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_g((x,y)) = (x \;\; y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y \;\; x) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = yx + xy = 2xy$$

Perpendicularidad

Definición. Sea (V, g) un ev métrico, diremos que dos vectores $u, v \in V$ son ortogonales o perpendiculares si $g(u,v) = 0$.

Si u y v son ortogonales escribiremos $u \perp v$.

Ejemplos

- $(\mathbb{R}^3, g_0)$

Los vectores de la $B_u = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ son ortogonales entre sí:

$$g((1,-1,0),(1,1,1)) = 1-1+0=0$$

- $(\mathbb{R}^3, g_1)$

$$g((1,0,1),(1,0,1)) = 1-1=0$$

$(1,0,1)$ es un vector luminoso.

<u>Definición</u>. Llamaremos vectores luminosos de un ev métrico a los vectores $v \in V\setminus\{0\}$: $g(v,v)=0$, es decir, $v \perp v$.

Si $u \in V$ y S es un subespacio vectorial de V, diremos que u es ortogonal a S si $g(u,v)=0$, $\forall v \in S$. Denotaremos $u \perp S$ si u es ortogonal a S.

Si S_1 y S_2 son dos subespacios de V, diremos que S_1 y S_2 son ortogonales y los escribiremos $S_1 \perp S_2$ si $g(u,v)=0$, $\forall u \in S_1$ $\forall v \in S_2$

<u>Definición</u>. Sean $U_1, \ldots, U_k$ subespacios de V. Diremos que V es suma ortogonal de los s.v $U_1, \ldots, U_k$ y lo denotaremos $V = U_1 \oplus^{\perp} \ldots \oplus^{\perp} U_k$ si:

i) $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$

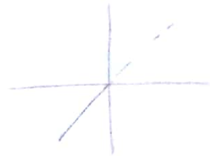
ii) $U_i \perp U_j$, $\forall i,j \in \{1,\ldots,k\}$, $i \neq j$

<u>Definición</u>. Si $V = U_1 \oplus^{\perp} U_2$, diremos que U_2 es un suplementario ortogonal de U_1 y viceversa.

EJEMPLO.

- $(\mathbb{R}^3, g_0)$

$U_1 = L(\{(1,0,0)\})$, $U_2 = L(\{(0,1,0)\})$, $U_3 = L(\{(0,0,1)\})$



Entonces $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$

Si $U = L(\{(0,1,0), (0,0,1)\}) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U$

3.2 Tipos de matrices. E.V. métrico

Definición. Diremos que g es una métrica degenerada si $\exists v \in V \setminus \{0\} : g(v,u) = 0, \ \forall u \in V$. Es decir, $\exists v \in V \setminus \{0\} : v \perp u, \ \forall u \in V$

Definición. Diremos que g es una métrica no degenerada si

$$g(u,v) = 0 \Rightarrow v = 0, \quad \forall u \in V.$$

Definición. Diremos que g es semidefinida positiva si $g(u,v) \geq 0$ $\forall u \in V$

Definición. Diremos que g es semidefinida negativa si $g(u,v) \leq 0$, $\forall u \in V$

Definición. Diremos que g es una métrica definida positiva o euclídea si $g(u,u) > 0$, $\forall u \in V \setminus \{0\}$

Proposición. Equivalen:

i) g es definida positiva.

ii) g es semidefinida positiva y no degenerada.

iii) g es semidefinida positiva y $g(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Dem.

i) $\Rightarrow$ ii) $\quad g(u,u) > 0$ es semidefinida positiva

$g(u,v) = 0 \;\; \forall v \in V \Rightarrow g(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow$ No degen.

ii) $\Longrightarrow$ iii) $\quad$ Sea $u \in V$: $g(u,u) = 0$

Sean $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Entonces:

$$\underset{\substack{\text{ii)} \\ \text{def. posit.}}}{0 \leq} g(\lambda u + v, \lambda u + v) \underset{g \text{ métrica}}{=} \lambda^2 \overbrace{\cancel{g(u,u)}}^{0 \text{ (hip.)}} + 2\lambda g(u,v) + g(v,v)$$

Por lo que:

$2\lambda g(u,v) + g(v,v) \geq 0 \Rightarrow$ Recta que siempre queda sobre el eje x y nunca lo corta $\Rightarrow$ será paralela al eje x

$g(u,v) = 0 \;, \; \forall v \in V \Rightarrow$ Para que sea paralela al eje x

Tenemos que:

$g(v,v) \geq 0$

Por ser g no degenerada $\Rightarrow u = 0$

Definición. Diremos que g es una métrica definida negativa si $g(u,u) < 0 \;, \; \forall u \in V \setminus \{0\}$

Definición. Diremos que g es indefinida si $\exists u_1, u_2 : g(u_1, u_2) > 0$

Resumen

- g métrica
  - no degenerada
    - def. positiva (euclídeas)
    - def. negativa
    - indefinida
  - degenerada
    - semidef. positiva
    - semidef. negativa
    - indef. degenerada

3.3 Subespacio perpendicular. Radical de una métrica

Sea (V,g) un ev métrico y U un s.v. de U

Definición. Se define el ortogonal de U respecto de g como

$$U^{\perp} = \{ v \in V : g(u,v) = 0 , \ \forall u \in U \}$$

(Siendo $v \in V$, formarán parte de $U^{\perp}$ todos $u \in U$: $u \cdot v = 0$ ← prod. escalar)

Proposición. $U^{\perp}$ es s.v. de V

Dem.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in U^{\perp}$

Veamos que $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U^{\perp}$

$$g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) \underset{g \text{ bilin.}}{=} \alpha \underbrace{g(u, v_1)}_{0} + \beta \underbrace{g(u, v_2)}_{0} = 0 \quad , \quad \forall u \in U$$

Definición. Diremos que $U^{\perp}$ es un subespacio ortogonal de U respecto de g.

Proposición. Si $C \subseteq V \implies C^{\perp}$ es s.v. de V

EJEMPLO

- $(\mathbb{R}^2, g)$, $M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $U = L(\{(1,1)\})$

$U^{\perp} = \{(x,y) : g((x,y),u) = 0, \ \forall u \in U\} = \{(x,y) : g((x,y),(1,1)) = 0\} =$

$= \{(x,y) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\} = \{(x,y) : (x,y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\} =$

$= \{(x,y) : x+y = 0\} = L(\{(1,-1)\})$

Definición. Si (V,g) es un ev métrico, denotaremos

$Rad(g) = V^{\perp} = \{u \in V : g(u,v) = 0, \ \forall v \in V\}$ y lo denominaremos

radical de la métrica g.

Proposición. Si (V,g) es un ev métrico, se tiene:

g es no degenerada $\iff$ $Rad(g) = \{0\}$ $\iff$ Matriz(g,B) es regular

$\forall B$ base de V $\iff$ $\det(M(g,B)) \neq 0$

Dem.

Veamos que g es degenerada $\iff$ $Rad(g) \neq \{0\}$ $\iff$ $M(g,B)$ no regular $\forall B$ base de V

Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$

$Rad(g) = \{\sum_{j=1}^{n} x_j u_j : g(u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j) = 0\} = \{\sum_{j=1}^{n} x_j u_j : \sum_{j=1}^{n} x_j \, g(u_i, u_j) = 0, \ \forall i = 1, \dots, n\} =$

$= \{\sum_{j=1}^{n} x_j u_j : M(g,B) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Si este sistema tiene soluciones no triviales $\Rightarrow$ $Rad(g) \neq \{0\}$

y para que no tenga sol. triviales tiene que ser no regular.

NOTA:

Si es regular $\Rightarrow$ solo hay ~~una~~ sol. trivial