Ejercicio resueltos cutres de Lógica y métodos discretos

Dedico estos apuntes a todos mis compañeros,

pero en especial al más rancio de todos,

sin él nunca viéseis tenido una portada.

EJERCICIOS LMD

curso 1º GIM 2017 – 2018

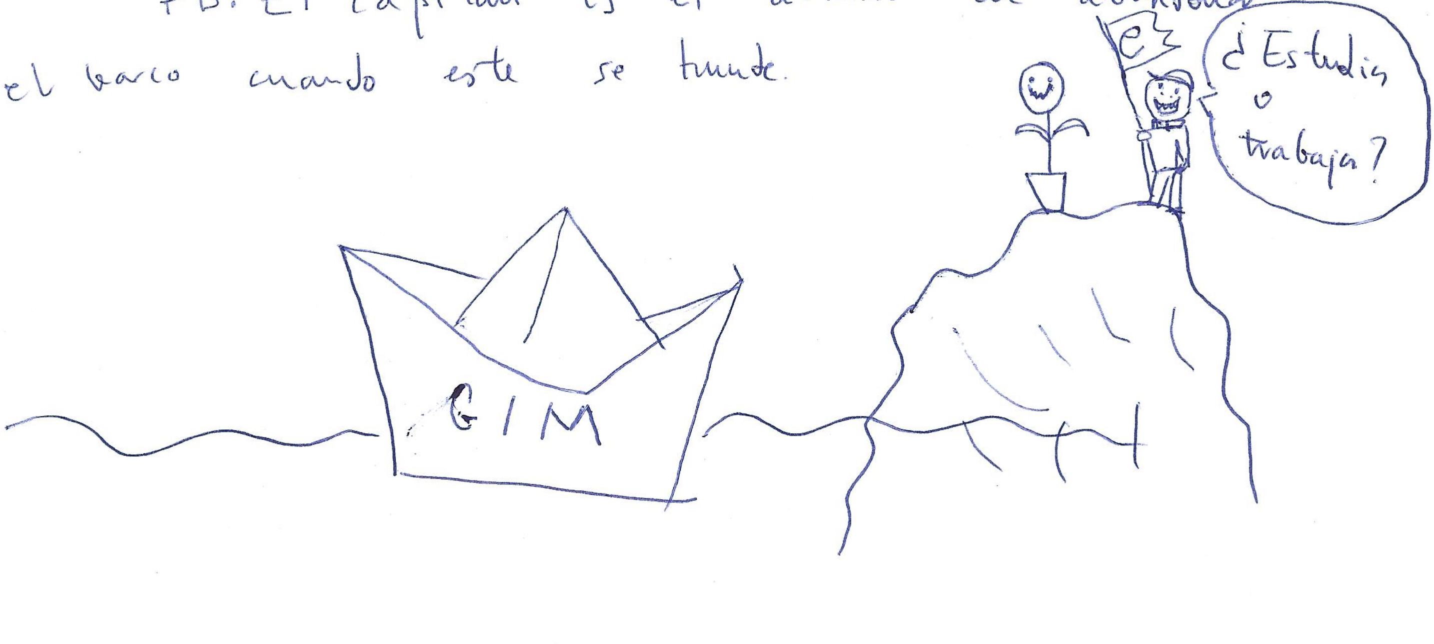
Querido lector, con frecuencia echo en falta ejercicios de ejemplo, así que aunque estos no son perfectos (no te fíes de mi forma prenexa, que la ciencia infusa abunda en los cuantificadores) espero que te ayuden (y si alguna vez me los quieres gratificar φ agradecer, cuenta conmigo para irnos de tapas).

Qué disfrutes de todo lo que hagas,

Blanca.

Granada 15/II/18

PD: El capitán es el último en abandonar el barco cuando este se hunde.



Comentarios de los supervivientes al primer cuatrimestre:

Para toda $K \in$ de depresión, $\exists$ una $M \gg K$ $M \in$ grito, Blanca.

Hola!

APELLIDOS: .... GRUPO: ....

NOMBRE: .... NIF: .... Nº HOJAS: ......

LMD

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

14 de febrero de 2018

1. Demuestre que para todo número natural n, $\sum_{i=0}^{n} i!i = (n+1)! - 1$.

2. Resuelva la relación de recurrencia $u_n = 3u_{n-1} + 10u_{n-2} + 7 \cdot 5^n$ y encuentre la solución particular que cumple $u_0 = 4$ y $u_1 = 3$.

3. Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ un conjunto de fórmulas del lenguaje proposicional. Demuestre que si $\alpha \vee \beta \in \mathrm{Con}(\Gamma)$ y $\neg\alpha \vee \gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma)$, entonces $\beta \vee \gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma)$.

4. Haciendo uso del algoritmo de Davis y Putnam, estudie si el siguiente conjunto de cláusulas:
$$\{\neg a \vee c \vee d, \neg b \vee c \vee c, a \vee \neg c \vee d, a \vee d \vee e, \neg a \vee \neg c, \neg a \vee \neg b, \neg a \vee b \vee \neg d, a \vee b \vee \neg d\}$$
es o no insatisfacible y caso de ser satisfacible, dé una asignación que lo ponga de manifiesto.

5. Determine una expresión de mínimo costo como suma de productos y otra como producto de sumas para la función:
$$f(a,b,c,d) = \sum m(4,6,8,10,11,12,15) + \sum d(3,5,7,9)$$
y dé el costo de cada una de ellas.

6. Demuestre que para cualesquiera fórmulas de primer orden α y β es cierta la afirmación:
$$\vDash \exists x(\alpha \wedge \beta) \to ((\exists x\alpha) \wedge (\exists x\beta))$$
pero que en general **no** es cierta la afirmación:
$$\vDash ((\exists x\alpha) \wedge (\exists x\beta)) \to \exists x(\alpha \wedge \beta)$$

7. Use el algoritmo de unificación para decidir si son unificables las siguientes fórmulas:
   - $p(g(f(x),u), f(a), g(z, f(y)))$
   - $p(g(f(f(y)), g(v,a)), f(v), g(g(x,b),x))$

   y en caso de serlo, dé un unificador de ambas que sea de máxima generalidad o principal.

8. Demuestre, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula
$$\neg\forall x o(x)$$
es consecuencia de las fórmulas:
   - $\forall x((q(x) \wedge \neg t(x)) \to s(x))$
   - $\forall x((q(x) \wedge t(x)) \to (r(x) \vee p(x)))$
   - $\forall x((s(x) \vee r(x) \vee p(x)) \to \neg o(x)$
   - $\exists x q(x)$

APELLIDOS: .... GRUPO: ....

NOMBRE: .... NIF: .... Nº HOJAS: ......

LMD

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

24 de enero de 2018

1. Sea e la función de argumentos naturales dada por:

$$e(a,0) = 1,$$
$$e(a,b) = \begin{cases} e\left(a^2, \frac{b}{2}\right), & \text{si } b \text{ es par.} \\ e\left(a^2, \frac{b-1}{2}\right)a, & \text{si } b \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b, $e(a,b) = a^b$.

2. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n, \quad n \geq 0.$$

y encuentre la solución particular que cumple $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$.

3. Demuestre que para todo conjunto de fórmulas proposicionales $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ se cumple:

   a) $\mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = \mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha, \beta\})$
   b) $\mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\}) = \mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha\}) \cap \mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\beta\})$

4. Estudie si el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\{\neg a \vee c \vee f, b \vee c \vee f, b \vee \neg c \vee f, \neg b \vee f, a \vee \neg b \vee f, \neg a \vee d \vee f, d \vee f,$$
$$b \vee d \vee e \vee \neg f, b \vee \neg d \vee e \vee \neg f, b \vee \neg e \vee \neg f, a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg f, \neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg f\}$$

es o no insatisfacible y caso de ser satisfacible, de una asignación que lo evidencie.

5. Considere la función booleana de cuatro variables:

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{c}\bar{d} + cd + \bar{a}\bar{b}d + ab\bar{c}d$$

Si supone que hay también términos "no importa" definidos por $D(a,b,c,d) = \sum d(9,12,14)$, dé para f:

   a) una descomposición minimal como suma de productos,
   b) una descomposición minimal como producto de sumas y
   c) al menos una expresión que mejore el costo de cualquiera de las dos anteriores.

6. Considere las cuatro fórmulas cerradas siguientes:

   - $\gamma_1 \equiv \forall x \forall y (r(x,y) \rightarrow r(y,x))$
   - $\gamma_2 \equiv \forall x \forall y \forall z (r(x,y) \wedge r(y,z) \rightarrow r(x,z))$
   - $\gamma_3 \equiv \forall x \exists y r(x,y)$
   - $\varphi \equiv \forall x r(x,x)$

   Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Es φ consecuencia lógica de $\{\gamma_1, \gamma_2\}$?

b) ¿Es φ consecuencia lógica de $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$?

7. Encuentre una fórmula en forma normal prenexa lógicamente equivalente a:

$$\forall x p(x,y) \to \big(\forall y p(y,x) \to \forall x(q(x) \land \exists y \forall z r(a,y,z))\big)$$

y que tenga el mínimo número de cuantificadores. Seguidamente dé una forma normal de Skolem para esa forma normal prenexa antes hallada.

8. Demuestre, usando resolución lineal input, que la fórmula:

$$\neg \exists x(r(x) \land s(x))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x((r(x) \land s(x)) \to \exists y(q(y) \land p(x,y)))$
- $\forall x(q(x) \to t(x))$
- $\forall x(t(x) \to o(x))$
- $\forall x \forall y((r(x) \land o(y)) \to \neg p(x,y))$

9. Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Demuestre que un árbol finito G (con al menos un vértice) tiene al menos dos vértices de grado 1.

b) Halle el número m de aristas de los grafos: K_8, K_{12} y K_{15}. ¿Cuál es el diámetro de K_n?

c) Dé un grafo de 6 vértices que sea hamiltoniano pero no euleriano. Dé su matriz de adyacencia.

EJERCICIOS INDUCCIÓN

Autor: Blanca Cano Camarero DGIIM

Observaciones:

Ej 6: No sé si mi demostración es válida o del todo rigurosa.

Ej 16: ¿Válida esta resolución?

Ej 22: ¿Válida?

Ej 5: ¿Válido?

DEMOSTRACIONES. DE TEOREMAS EN LOS QUE ME BASO PARA RESOLVER LOS PROBLEMAS

D1.) $\underline{\text{Si } k \mid m}$ y $\underline{k \mid m-n \Rightarrow k \mid n}$

Si $k \mid m \Rightarrow m = k \cdot m_0$

Si $k \mid n \Rightarrow n = k \cdot n_0$

$m-n = km_0 - kn_0$ por la propiedad conmutativa $k(m_0-n_0) \Rightarrow$

$\boxed{k \mid m-n}$

INDUCCIÓN

Función sucesor de Peano.

$S: \omega \to \omega \quad S(n) = n^+$

$n^+ = n \cup \{n\}$

Postulados de Peano

1) $0 \in \omega$

2) Si $n \in \omega \Rightarrow S(n) \in \omega$

3) $\neg\exists$ $n \in \omega$ $S(n) = 0$

4) Si $S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$

5) Si $P \subseteq \omega$ y cumple ~~tas~~ $\Rightarrow P = \omega$

i) $0 \in P$

ii) $S(n) \in P$ siempre que $n \in P$

PRINCIPIO INDUCCIÓN FINITA

Principio del Buen orden

"Todo conjunto de $\mathbb{N} \neq \emptyset$ tiene mínimo"

Dem. Inducción : $P(n)$ "No existe ningún elemento menor o igual que n que pertenezca a S"

Fin: $S = \emptyset \quad P = \omega$

Segundo principio de Inducción Finita

"Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$n \in P$ siempre que $n \subseteq P$

Entonces $P = \omega$

Dem.: A partir del PBO $J = \omega / P$

$J = \emptyset$ $\quad \neg$ Jo mínimo, ni $J_0 = \emptyset$ ni $J_0 = m$

- Base en definición $S(n) = n \cup \{n\}$

Equivalencia entre principios:

. "Si es válido el principio del buen orden entonces es válido el principio de inducción finita"

$J = \omega \setminus P \qquad J = \emptyset$

. $0 \in P$ por definición

$m = \min(J) \quad m = S(q)$

$q < m$ pero m es el mín.

"Si es válido el segundo principio de inducción finita entonces es válido el principio del buen orden"

A = Subconjunto sin mínimo $\subseteq \mathbb{N}$

$P = \omega \setminus A$

Si $n \subseteq A \overset{2PIF}{\Rightarrow} n \in A \Rightarrow n = \min A$

$n \subseteq P \Rightarrow n \in P \Rightarrow P = \omega$

$\Downarrow$

$A = \emptyset$

Teorema de la recursión

12.- Sea N un número natural y sea S un conjunto de números naturales menores que N. Demuestre que o S es vacío o S tiene máximo.

Sea nuestra proposición $P(n)$ "No existe ningún número menor que n para S"

Se aprecia que si existiera n sería el máximo de S.

Definimos el conjunto $P = \{x \in \omega : P(x)\}$

Caso base

El 0 es el menor número natural, por tanto ~~al ser~~ n siempre será mayor que él convirtiéndose en el máximo luego $0 \in P$

Hipótesis de inducción

Supongamos que $n \in S$: $(n+1)$ no podría pertenecer a S porque sino sería su máximo, pero tampoco puede pertenecer a P por incumplir su condición de existir un número menor en S.

De aquí deducimos que $n \in P$ y $n+1 \in P$ y $S = \emptyset$ si imponemos que no tiene máximo.

A concrete introduction to higher Algebra

Lindsay N. Childs.

Elements of Algebra and algebraic computing

John D. Lipson

6/10/17

9.- Es cierto que de un número n en adelante se tiene que $n! > 100^n$. Encontrarlo y demostrar por inducción lo dicho a partir del hallado.

Ese número es el 269. "$P(n) = n! > 100^n \quad \forall n \geq 269$"

Caso base demostrado

Hipótesis de inducción

$P(n) \quad n! > 100^n$ $\qquad P(n+1) \; (n+1)! > 100^{n+1}$

~~Si P es cierto y P(n+1) también~~ $\frac{P(n+1)}{P(n)}$

~~$\frac{P(n+1)}{P(n)}$: $(n+1) > 100$ como $n \geq 269$ esto siempre~~
será cierto. Queda demostrada ~~nuestra hipótesis de inducción~~

$P(n+1)$ es equivalente a $(n+1)n! > 100^n \cdot 100$

como $(n+1) > 100$

la diferencia al realizar el producto será mayor

y por tanto queda demostrada nuestra hipótesis de inducción.

13/10/17

2.- Demuestra que para cualquier número natural n el número $n^2 - n$ es par.

$$P(n) = \text{“} 2 \mid n^2 - n \quad \forall n \in \omega \text{”}$$

Caso base $P(0)$ es cierto $2 \mid 0$

Hipótesis de inducción

$P(n) : 2 \mid n^2 - n$

$P(n+1) : n^2 + 2n + 1 - (n+1)$

Por D1 si $P(n+1)$ es cierto $2 \mid P(n+1) - P(n)$

Resto : $n^2 + n - (n^2 - n) = 2n$ $\quad 2 \mid 2n$ por tanto queda demostrado por inducción que "$n^2 - n$" siempre es par.

15/10/17

3.- Usar el teorema de inducción para demostrar que:

$2^{n-1} \leq n!$ para todo $n>0$.

$P(n) = " 2^{n-1} \leq n! \quad \forall n \in \mathbb{N} "$

$P(1)$ caso base $\quad 2^{1-1} = 1 \quad 1! = 1 \quad P(1)$ es cierto.

Hipótesis de inducción

$P(n) : \dfrac{2^n}{2} \leq n! \qquad 2^n \leq 2n!$

$P(n+1) = 2^n \leq n! \cdot (n+1)$

Si n es cierto podemos observar que $P(n+1)$ lo será si $2 \leq n+1$

si $1 \leq n$, como este es el dominio de nuestra hipótesis...

Queda demostrado por ~~i~~inducción $P(n)$.

15/10/17

4.- Utiliza el teorema de inducción para demostrar que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Caso base $n=2$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{?}{\geq} \sqrt{2} \qquad \sqrt{2}+1 \geq 2 \qquad \sqrt{2} \geq 1$$

Esto es cierto, por tanto el caso base queda demostrado.

Hipótesis de inducción

$$n: \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$$

Intentaré demostrar que para $n+1$ es cierto suponiendo que n es cierto.

$$n+1: \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n+1} \quad \text{equivale a} \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n+1}$$

Si ambas relaciones (n y $n+1$) son ciertas puedo restar $(n+1)-n$ que el resultado seguirá siendo cierto.

$$(n+1)-n: \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Sumo en ambos miembros $\sqrt{n}$

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} \; ; \quad \frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

Multiplico por $\sqrt{n+1}$

$$\sqrt{n^2+n} + 1 > n+1$$

Resto 1 y elevo al cuadrado, se mantiene igualdad porque $n>0$

$$n^2+n > n \implies \boxed{n^2 > 0}$$

Por tanto queda demostrada nuestra igualdad. y que

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad \forall n \in \omega : n \geq 2}$$

5/10/17

5.- Utiliza el teorema de inducción para demostrar que $\forall n > 1$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\,4\,6 \ldots (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Nuestra hipótesis $P(n)$ " $\frac{1\,3\,5 \ldots (2n-1)}{2\,4\,6 \quad (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \forall n > 1$"

o de otro modo

$$\sqrt{n+1} \leq \frac{2\,4\,6 \ldots 2n}{1\,3\,5 \ldots 2n-1}$$

Para caso base. $P(2)$ $\quad \sqrt{2+1} \overset{?}{\leq} \frac{2 \cdot 4}{1\,3}$ $\quad \sqrt{3} \overset{?}{\leq} \frac{8}{3}$ $\quad 9 \cdot 3 \overset{?}{\leq} 81$ $\quad \boxed{27 \leq 81}$

se confirma

Supongo que $P(n-1)$ es cierto.

Demuestro que $P(n)$ es cierto.

$$\sqrt{n+1} \leq 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{5} \ldots 1 + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$\sqrt{n+1} \leq 2 \cdot \left((n-1) + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$\sqrt{n+1} \leq 2n-2 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{2n-1}\right) \qquad 2n-2 \leq 2n-2+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5} \ldots \frac{1}{2n+1}\right)$$

Si demuestro que $\sqrt{n+1} \leq 2n-2$ Por tanto habré demostrado ↓

$n+1 \leq (2n-2)^2 \qquad 4n^2 - 8n + 4 \geq n+1 \qquad 4n^2 - 9n + 3 \geq 0$

$4n^2 - 9n + 3 = 0 \qquad n = \frac{9 \pm \sqrt{81-48}}{8} = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{8} \qquad n_1 \simeq 1{,}84$
$\qquad n_2 \simeq 0{,}406$

$(0{,}406 ; 1{,}84)$ No se cumple, pero como nos dice $\forall n > 1$
y el siguiente $n \in \mathbb{N}$ 1, 2, y $2 > 1{,}84$ entonces quedaría demostrado.

14/10/17

6.- Todo número natural mayor que 1 es divisible por al menos un número primo.

Sea $f(n,m)$ una aplicación tal que $\begin{array}{l} \omega \to \omega \\ n \mapsto n \cdot m \end{array}$

Sea $M(n)$ el conjunto de los múltiplos de n definido de la siguiente manera:

$$M(n) = \{ f(n,m) \ \forall m \in \omega : m > 0 \}$$

Sea $A(n)$ el siguiente conjunto definido por inducción

$$A(0) = A(1) = \varnothing \qquad A(n) = \{ M(n) \cup A(n-1) \}$$

* Obsérvese que si $n \in A(n-1)$ $A(n) \subset A(n-1)$ y por tanto n será múltiplo de almenos un número m ; $m < n$.

Definamos $P(n)$ como el conjunto de los números primos

$$P = \{ p : p \notin A(p-1) \}$$

Todo número primo es múltiplo de sí mismo, así que para los elementos de P se cumple la hipótesis.

Si $m \notin P$ por la observación * m ~~tendrá al menos~~ será múltiplo de almenos un número ~~v~~ v y si $v \notin P$ por * podríamos buscar otro v' divisor de v que sí cumpliera que $v' \in P$ por tanto v y m' serán al menos múltiplos de un número primo.

12/10/17

7.- Usar el teorema de inducción para demostrar que 3^n+7^n-2 es divisible por 8, para todo $n\geq 1$.

$P(n)$ " $8 \mid 3^n+7^n-2$ para $n\geq 1$ en ω "

Caso Base cierto $P(1) = 3^1+7^1-2 = 8$ como $8 \mid 8$

Supongo que $P(n)$ es cierto por D1 $P(n+1)$ es cierto si $P(n+1)-P(n)$ lo es.

$3.3^n + 7.7^n - 2 - (3^n+7^n-2) = 3^n(3-1) + 7^n(7-1) = 2(3^n+3.7^n)$

Procedo a demostrar por inducción que $q(n)$ " $4 \mid 3^n+3.7^n$ para $n\geq 1$ en ω "

si q es cierto P lo será.

Caso base de $q(1)$ cierto $3+3.7 = 24 \Rightarrow 4 \mid 24$.

Supongo que $q(n)$ es cierto. por D1 $q(n+1)$ lo será si $q(n+1)-q(n)$ también lo es.

$q(n+1) - q(n) = 3^n(3-1) + 3.7^n(7-1) = 2(3^n+9.7^n)$

Procedo de la siguiente manera, si $w(n)$ " $2 \mid 3^n+9.7^n$ " es cierto $q(n)$ lo será y por tanto $P(n)$ también.

Puesto que 3^n siempre será impar al igual que 9.7^n también y la suma de dos impares es siempre par queda demostrado $w(n)$ al igual que $q(n)$ y $P(n)$ por inducción

15/10/17

8.- Usar el teorema de inducción para demostrar que $n^3 + 2n$ es divisible por 3, para $n \geq 1$

"Sea $P(n)$ la afirmación "$3 \mid n^3 + 2n$"

Para caso base

$P(1)$ $(1)^2 + 2 \cdot 1 = 3$ $3 \mid 3$ por tanto $P(1)$ es cierto.

Base en la hipótesis de inducción para demostrar que $P(n+1)$ es cierto

$P(n) : 3 \mid n^3 + 2n$

$P(n+1) = 3 \mid (n+1)^3 + 2(n+1)$

$(n+1)^3 + 2(n+1) =$ Binomio de Newton (B2)

$(n^3 + 1 + 3n^2 + 3n) + (2n + 2) = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$

En base a (D1) si $3 \mid n$ y $3 \mid (n+1) - 1 \implies 3 \mid (n+1)$

Resto $(n+1) - n$: $(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) - (n^3 + 2n) = 3n^2 + 3n + 3$

Saco factor común $3(n^2 + n + 1)$

Se observa claramente q3 $3 \mid (n+1) - n \implies 3 \mid n+1$

y queda demostrada nuestra $P(n)$ para $n \geq 1$ por el principio de inducción.

6/10/17

10.- Se ha dado una demostración falaz del enunciado falso siguiente:

"Todos los niños tienen el mismo color de ojos"

Si el grupo de niños es de 1 está claro que todos los del grupo tiene el mismo color de ojos. Supongamos el resultado cierto para todo grupo de tamaño n (con $n \geq 1$) y veamos que es cierto para $n+1$. Si nos dan un grupo de $n+1$ niños y los ordenamos por edad (de menor a mayor), los n primeros tienen el mismo color de ojos al igual que los n últimos. Por tanto todos los niños del grupo tienen el mismo color de ojos. Ahora bien, los niños forman un conjunto como los mencionados de menor a mayor, por lo que el resultado está demostrado. Indique en el argumento donde está el fallo.

El error reside en pensar que para un conjunto de niños A, $A > n$ todos los subconjuntos de A con n o menos elementos tienen la misma característica, cuando lo único que sabemos con certeza es que n elementos de A la cumplen.

Granada 6/10/17

11.- Cualquiera dos números naturales a, b tienen un mínimo común múltiplo, esto es, un número m que es múltiplo común a a y b y es menor o igual que cualquier otro múltiplo común de ambos.

Sea $M = \{x, \cancel{y} \in N : (yx | a \text{ y } yx | b) \text{ o } (a | xy \text{ y } b | xy)\}$

Sabemos que M no es vacío por el ~~principio del buen orden.~~ que $x = a$ y $y = b$ está en el conjunto y además por el principio del buen orden, este conjunto tiene un mínimo.

15/10/17

14.- Demuestre que para todo número natural n, $3^{4n} - 1$ es múltiplo de 5.

Sea nuestra proposición $P(n)$ " $3^{4n} - 1$ es múltiplo de 5 para todo número $\mathbb{N}$ "

Demuestro para caso base

$P(1) = 3^{4 \cdot 1} - 1 = 81 - 1 = 80$ $\quad 5 | 80$ por tanto queda demostrado

Por nuestra hipótesis de inducción

$P(n) \quad 5 \,|\, 3^{4n} - 1$

$P(n+1) \quad 3^{4(n+1)} - 1 = 3^{4n} \cdot 3^{4} - 1$

$P(n-1) - P(n) = 3^{4n}(3^{4} - 1)$ El paréntesis coincide con $P(1)$

por tanto $5 \,|\, P(n-1) - P(n)$ y por (D1) $5 \,|\, P(n-1)$

Con esto queda demostrado $P(n)$ por inducción

6/10/17

15.- Demuestre que para todo número impar n, 9 divide a 4^n+5^n

$P(n) = $ " $9 \mid 4^{2n+1} + 5^{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ "

$P(0)$ Es cierto ya que $9 \mid 4+5$

Hipótesis de inducción

Supongamos que $P(n)$ es cierto. Si $P(n+1)$ lo fuese $P(n+1) - P(n)$ también.

Resto:

$$\left.\begin{array}{ll} P(n+1): & 4^2 \cdot 4^{2n+1} + 5^2 \cdot 5^{2n+1} \\ P(n): & 4^{2n+1} + 5^{2n+1} \end{array}\right\} \quad 4^{2n+1}(\underbrace{4^2-1}_{15}) + 5^{2n+1}(\underbrace{5^2-1}_{3.8}) = 3\left(5.4^{2n-1} + 8.5^{2n-1}\right)$$

Sea $q(n) = $ " $3 \mid 5.4^{2n-1} + 8.5^{2n-1}$ " si esto es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$ quedaría demostrado P.

$q(1) = 20 + 40 = 60 \qquad 3 \mid 60 \qquad q(1)$ el caso base es cierto.

Hipótesis de inducción (sigo la misma idea antes)

$q(n+1) - q(n)$: $5 \cdot 4^{2n-1}(4^2-1) + 8.5^{2n-1}(5^2-1) =$

$= 3\left(25\, 4^{2n-1} + 64\, 5^{2n-1}\right)$

Queda demostrado $q(n) \Rightarrow P(n)$ también por inducción

15/10/17

16.- Sea p la función dada por:

$$p(a,1) = a$$

$$P(a,b) = \begin{cases} p\left(2a, \frac{b}{2}\right) & \text{si es par} \\ p\left(2a, \frac{b-1}{2}\right) + a & \text{si es impar.} \end{cases}$$

Demuestra por inducción que $p(a,b) = a.b$, para todo $1 \leq a, b$.

$P(n)$: " $p(a,b) = a.b \;\forall\; 1 \leq a, b$ "

<u>Caso base</u>

$b = 1$ $\quad p(a,1) = a$ por definición se cumple.

<u>Hipótesis de inducción.</u>

i) Si nos fijamos para el caso par

$P(a,b) = \left(2a, \frac{b}{2}\right)$ si cogemos los miembros $2a \cdot \frac{b}{2} = a.b$

Por tanto obsérvese que sólo modifica la forma de apreciar a y b.

ii) Caso impar

$P(a,b) = \left(2a, \frac{b-1}{2}\right) + a \quad \left(2a \cdot \frac{b-1}{2}\right) + a = ab - a + a = ab.$

Se sigue manteniendo la igualdad, por tanto $P(n)$ es cierto para todo $\mathbb{N}$.

12/10/17

13 Demuestre que para todo número natural n, $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5.

$P(n) =$ " $5 \mid 8^n - 3^n \quad \forall n \in \omega$ "

$P(0)$ Caso base $\quad 8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0 \quad ¿5 \mid 0?$ sí Caso base demostrado

Hipótesis de inducción

$P(n)\ 5 \mid 8^n - 3^n$

$P(n+1)\quad 8^{n+1} - 3^{n+1}$

Por D1 $\quad$ si $5 \mid P(n+1) - P(n)$ queda demostrado

Resta: $\quad 8^n(8-1) - 3^n(3-1) = 7(8^n) - 2.(3^n)$

17 r. Sea e la función dada por

$$e(a,0) = 1$$
$$e(a,b) = \begin{cases} e\left(a^2, \frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par} \\ e\left(a^2, \frac{b-1}{2}\right) a & \text{si } b \text{ es impar} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualquier a, b naturales $e(a,b) = a^b$.

$$P(n) = \text{" } e(a,b) = a^b \quad \forall, a,b \in \mathbb{N} \text{ "}$$

a. los valores de a son indiferentes así que haremos la inducción sobre la b.

Caso b: $e(a,0) = 1$ $\quad a^0 = 1$ Queda demostrado.

Supongamos que a^b es cierto, si $b+1$ fuera par o impar influiría en la función que cojo, hago las dos.

Para b+1 impar.

$$a^{b+1} \xrightarrow{\cancel{a^2}} e\left(a^2, \frac{(b+1)-1}{2}\right) a \quad (a^2)^{\frac{(b+1)-1}{2}} \cdot a = a^b \cdot a = \boxed{a^{b+1}}$$

Para $b+1$ par

$$e\left(a^2 \frac{b+1}{2}\right) = (a^2)^{\frac{b+1}{2}} = \boxed{a^{b+1}}$$

Por tanto queda demostrada $P(n)$ por inducción.

15/10/17

18.- Demuestra que para todo número natural n:

P(n) " $\sum_{i=0}^{n} i!\,i = (n+1)! - 1$ para todo $n \in \omega$ "

Demuestro caso base

$P(0) = 0!\,0 = (0+1)! - 1 = 0 = 0$ Cierto.

A partir de nuestra hipótesis de inducción

$P(n) : \sum_{i=0}^{n} i!\,i = (n+1)! - 1$

$P(n+1) : \sum_{i=0}^{n+1} i!\,i = (n+2)! - 1$

Suponiendo que n es cierta, si $P(n-1)$ también lo es; $P(n+1) - P(n)$ sería cierto.

$P(n+1) - P(n)$: $(n+1)!\,(n+1) = (n+1)!\,(n+2-1)$

$(n+1)!\,(n+1) = (n+1)!\,(n+1)$

Se ve claro que ambos miembros son iguales y por tanto $P(n+1)$ también se cumple.

Queda demostrado $P(n)$ por la hipótesis de inducción

7/10/17

19.- Demuestra que para todo número natural n se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} 2i+1 = (n+1)^2$$

~~Lamento comunicar que esto no se puede demostrar,~~ ~~pero~~ $P(n)$ " $\sum_{i=0}^{n+1} 2i+1 = (n+1)^2$ " sí

Caso base $P(1)$ sí: $\sum_{i=0}^{1} 2i+1 = 4 \qquad (1+1)^2 = 4$

Hipótesis de inducción

Supongo que $P(n)$; lo es; si $P(n+1)$ también $P(n+1)$ $P(n)$ debe ser cierto.

$$P(n+1) = 2(n+1)+1+\sum_{i=0} 2i+1 = (n+2)^2 = n^2+4n+4$$

$$P(n_0) = \sum_{i=0}^{n} 2i+1 = (n+1)^2 = n^2+2n+1$$

Resto: $\qquad 2n+3 = 2n+3$ Como vemos la igualdad es cierta

Con esto queda demostrada $P(n)$ por inducción.

15/10/17

20.- Supongamos que disponemos en cantidad suficiente de sellos de 3 y 8 céntimos sólo. Demuestre que con esos sellos, una carta podría ser franqueada con una cantidad de céntimos superior a 13.

Nuestra hipótesis de inducción, $P(n)$ " $n = 3a + 8b \quad \forall n \in \omega : n > 13$
$\forall a, b \in \omega$ "

Caso base
~~Hipótesis de inducción~~
El mínimo número natural mayor que 13 es 14, esto será nuestro caso base.
$P(14) \quad 14 = 3.2 + 8.1 \qquad P(14)$ es cierto.

Hipótesis de inducción

Supongamos $P(n)$ cierta por tanto $n = a3 + b8$
$P(n+1) : n+1 = a3 + b8 + 1$

Tenemos dos posibilidades para b:

i) Si $b \geq 1$: $8 + 1 = 9 = 3.3$ por tanto podríamos expresar $n+1$ como $= (a+3)3 + (b-1)8$ y sería cierto nuestro caso.

ii) Si $b = 0$: por ser 14 el mínimo posible, si o sí debe ser $a \geq 5$ ya que $14 < 5.3$ y $5.3 + 1 = 2.8$ por tanto podríamos expresar $n+1$ como

$(a-5)3 + (b+2)8$

Por tanto queda demostrado $P(n)$.

* Obsérvese además que para $b \geq 1$ y $a \geq 5$ existen 2 formas de expresar n.

12/10/17

21.- Difinamos los <u>números de Fibonacci</u> como cualquier sucesión:

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0; \\ 1, & \text{si } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } 1 < n; \end{cases}$$

Demuestra que para todo número natural n se cumple

$$F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

22.- Definamos los números de Lucas como cualquier número de la sucesión:

$$L_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ 1 & \text{si } n=1 \\ L_{n-1} + L_{n-2} & \text{si } 1 < n \end{cases}$$

Demuestre que para todo número natural se cumple: $L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

Busca la ecuación de esta recurrencia

$U_{n3} = U_{n2} + U_{n1}$ $k=2$ Ecuación característica $x^2 - x - 1 = 0$

Raíces son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Por tanto

$X_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$; $\alpha_1 \alpha_2$ son incognitas que despejo sabiendo los valores de frontera.

$X_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 2$; $\alpha_1 = 2 - \alpha_2$

$X_1 = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$

$\Rightarrow (2-\alpha_2)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$1 + \sqrt{5} - \alpha_2 \sqrt{5} = 1$ $\alpha_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$ $\alpha_1 = 1$

La ~~ecuación característica de~~ La función de recurrencia del número de lucas es:

$$X_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

~~Ahora demostraré por inducción que:~~

$P(n)$: " $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ "

Caso base

$P(1)$ ~~$1+1+1<7$~~ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}<\frac{7}{4}$

Multiplico por dos el principio de la izquierda y ~~se olvido del denominador~~ todo por 4

$2+2<7$; cierto caso base demostrado.

(Para hipótesis de inducción)

$P(n)$ es cierto si $P(n+1)$ lo es $\frac{P(n+1)}{P(n)}$ también lo será.

Para simplificar $a^n+b^n<c^n$ sabiendo que $a^n+b<c$

$\frac{P(n+1)}{P(n)}$ $a \cdot a^n + b \cdot b^n < c \cdot c^n$

Por la base sé que $a+b<c$

sustituyo $(a+b)^n > a^n + b^n$

y $(a+b)^n < c^n$ por ser $a, b, c > 0$

por tanto $a^n+b^n<(a+b)^n \leq c^n$

$\boxed{\text{De aquí } a^n+b^n \leq c^n}$

Se demuestra nuestra hipótesis.

12/10/17

LPOR 5

[8] Demostrar usando resolución lineal input, que la fórmula: $\neg \exists x\,(r(x) \wedge s(x))$ es consecuencia de

$\gamma_1)\ \forall x\,((r(x) \wedge s(x)) \rightarrow \exists y\,(q(y) \wedge p(x,y)))$

$\gamma_2)\ \forall x\,(q(x) \rightarrow t(x))$

$\gamma_3)\ \forall x\,(t(x) \rightarrow o(x))$

$\gamma_4)\ \forall x\,\forall y\,((r(x) \wedge o(y)) \rightarrow \neg p(x,y))$

Escribo las hipótesis en forma de prenex, Skolem

$\gamma_1 \equiv \forall x\,((\neg r(x) \vee \neg s(x)) \vee \exists y\,(q(y) \wedge p(x,y)))$

$\gamma_1 \equiv \forall x\,\exists y\,((\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee q(y)) \wedge (\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee p(x,y)))$

$$\boxed{\gamma_1^S = \forall x\,((\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee q(f(x))) \wedge (\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee p(x,f(x))))}$$

$\gamma_2^S = \forall x\,(\neg q(x) \vee t(x))$

$\gamma_3^S = \forall x\,(\neg t(x) \vee o(x))$

$\gamma_4^S \equiv \forall x\,\forall y\,(\neg r(x) \vee \neg o(y) \vee \neg p(x,y))$

la negación de la tesis

$\gamma_0^S = r(a) \wedge s(a)$

Las cláusulas resultantes en un universo cerrado:

$\sigma_0)\ r(a)$

$\sigma_1)\ s(a)$

$\sigma_2)\ \neg r(x) \vee \neg s(x) \vee q(f(x))$

$\sigma_3)\ \neg r(x) \vee \neg s(x) \vee p(x,f(x))$

$\sigma_4)\ \neg q(x) \vee t(x)$

$\sigma_5)\ \neg t(x) \vee o(x)$

$\sigma_6)\ \neg r(x) \vee \neg o(y) \vee \neg p(x,y)$

Realizo una demostración lineal input, cuya raíz es σ_3

$\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee p(x,f(x)) : \sigma_3$

$\neg r(x_1) \vee \neg o(y) \vee \neg p(x_1,y) : \sigma_6$

$\Psi(x|x_1)$

$\Phi(x_1|x)\,(y|f(x))$

$\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee \neg o(f(x))$

$r(a) : \sigma_0$

$\Psi = \epsilon$

$\Phi = (x|a)$

$\neg s(a)$

$s(a)$

$\Psi = \epsilon$

$\Phi = \epsilon$

$\square$

Por tanto el conjunto de fórmulas $\Gamma' \cup \neg\gamma_0$ es insatisfacible, lo que equivale a que $\Gamma' \models \gamma_0$

$(\Gamma' = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\})$

$\boxed{23}$ Demostrar, usando OL-resolución, que la fórmula $\exists x (r(x) \vee \exists y (q(x,y) \wedge p(y)))$ es consecuencia de las fórmulas

$\gamma_1 \quad \forall x ((o(x) \wedge \exists y (q(y,x) \wedge s(y))) \rightarrow p(x))$

$\gamma_2 \quad \forall x (o(x) \wedge v(x) \longrightarrow s(x))$

$\gamma_3 \quad \forall x (o(x) \wedge \neg v(x) \rightarrow r(x))$

$\gamma_4 \quad \forall x (\exists y (q(y,x) \wedge o(y)) \rightarrow o(x))$

$\gamma_5 \quad o(a) \wedge q(a,b)$.

Escribo en forma prenexa y de Skolem

$\gamma_1 : \forall x (\neg o(x) \vee \forall y (\neg q(y,x) \vee \neg s(y))) \vee p(x))$

$\gamma_1^{S'} \quad \forall x \forall y (\neg o(x) \vee \neg q(y,x) \vee \neg s(y) \vee p(x))$

$\gamma_2^{S} \equiv \forall x (\neg o(x) \vee \neg v(x) \vee s(x))$

$\gamma_3^{S} = \forall x (\neg o(x) \vee v(x) \vee r(x))$

$\gamma_4^{S} = \forall x \forall y (\neg q(y,x) \vee \neg o(y) \vee o(x))$

$\gamma_5^{S'} = o(a) \wedge q(a,b)$

Idem con $\neg \varphi$

$\neg \varphi = \forall x (\neg r(x) \wedge \forall y (\neg q(x,y) \vee \neg p(y))$

Clausulas resultantes:

$\sigma_0 : \neg r(x)$

$\sigma_1 : \neg q(x,y) \vee \neg p(y)$

$\sigma_2 : \neg o(x) \vee \neg q(y,x) \vee \neg s(y) \vee p(x)$

$\sigma_3 : \neg o(x) \vee \neg v(x) \vee s(x)$

$\sigma_4 : \neg o(x) \vee v(x) \vee r(x)$

$\sigma_5 : \neg q(y,x) \vee \neg o(y) \vee o(x)$

$\sigma_6 : o(a)$

$\sigma_7 : q(a,b)$

Comienzo resolución OL con raíz en: σ_7

$q(a,b)$

$\Phi(x|a)(y|b) \quad | \quad \neg r(x) \vee \neg q(x,y) : \sigma_0$

$\neg r(a)$

$\Phi(x|a) \quad | \quad \neg o(x) \vee v(x) \vee r(x) : \sigma_4$

$\neg o(a) \vee v(a)$

$\Phi(x|a) \quad | \quad \neg o(x) \vee \neg v(x) \vee s(x) : \sigma_3$

$\neg o(a) \vee s(a)$

$\Phi = (y|a)(x|b) \quad | \quad \neg o(x) \vee \neg q(y,x) \vee \neg s(y) \vee p(x) : \sigma_2$

$\neg o(a) \vee \neg o(b) \vee \neg q(a,b) \vee p(b)$

$\Phi = (y|a)(x|b) \quad | \quad \neg q(y,x) \vee \neg o(y) \vee o(x) : \sigma_5$

$\neg o(a) \vee \neg q(a,b) \vee p(b)$

$\Phi : (y|b) \quad | \quad \neg r(x) \vee \neg p(y) \quad \sigma_1$

$\neg o(a) \vee \neg q(a,b) \vee \neg r(x)$

Reitera con la segunda iteración.

Ejercicio 8.

$\neg r(x) \vee \neg o(y) \vee \neg p(x,y)$

$\quad \llcorner\; r(a) \qquad (x|a)$

$\neg o(y) \vee \neg p(a,y)$

$\quad \llcorner\; o(x) \vee \neg t(x) \qquad (x|y)$

$\neg t(y) \vee \neg p(a,y)$

$\quad \llcorner\; t(x) \vee \neg q(x) \qquad (x|y)$

$\neg q(y) \vee \neg p(a,y).$

$\quad \llcorner\; \neg r(x) \vee \neg s(x) \vee q(f(x)) \qquad (y|f(x))$

$\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee \neg p(a, f(x))$

$\quad \llcorner\; \neg r(x_1) \vee \neg s(x_1) \vee p(x_1, f(x_1))$

$(x_1|a)(x|a)$

$\neg r(a) \vee \neg s(a)$

$\quad \llcorner\; r(a)$

$\neg s(a)$

$\quad \llcorner\; s(a)$

$\square$

por tanto. el conjunto es insatisfacible y como consecuencia

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \models \gamma_0.$

$$\frac{11}{4} < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$\{0\} \cup \{n : n \in \omega$ y $P(n)\}$

*

7

Ejercicio 7 del examen.

$$\forall x\, p(x,y) \rightarrow (\forall y\, p(y,x) \rightarrow \forall x\, (q(x) \wedge \exists y \forall z\, r(a,y,z)))$$

$$\neg \forall x\, p(x,y) \vee (\neg \forall y\, p(y,x) \vee \forall x\, (q(x) \wedge \exists y \forall z\, r(a,y,z)))$$

$$\exists x \neg p(x,y) \vee \exists y \neg p(y,x) \vee (\forall x\, q(x) \wedge \exists y \forall z\, r(a,y,z))$$

$$\exists x \neg p(x,y) \vee \exists y \neg p(y,x) \vee \exists y\, (\forall x\, q(x) \wedge \forall z\, r(a,y,z))$$

$$\exists w \neg p(w,y) \vee \exists w \neg p(w,x) \vee \exists w\, (\forall z\, q(z) \wedge \forall z\, r(a,w,z))$$

$$\exists w\, (\neg p(w,y) \vee \neg p(w,x) \vee \forall z (q(z) \wedge r(a,w,z)))$$

$$\exists w \forall z\, (\neg p(w,y) \vee \neg p(w,x) \vee (q(z) \wedge r(a,w,z)))$$

$$\exists w \forall z\, ((\neg p(w,y) \vee \neg p(w,x) \vee q(z)) \wedge (\neg p(w,y) \vee \neg p(w,x) \vee r(a,w,z)))$$

$$\exists w \forall z\, ((\neg p(w,y) \vee \neg p(w,x) \vee q(z)) \wedge (\neg p(b,y) \vee \neg p(b,x) \vee r(a,b,z)))$$

$$\forall z\, ((\neg p(b,y) \vee \neg p(b,x) \vee q(z)) \wedge (\neg p(b,y) \vee \neg p(b,x) \vee r(a,b,z)))$$

si $a r b \overset{\text{simetría}}{\Longrightarrow} b r a$

por transitividad, $a r b$ y $b r a \Longrightarrow a r a$

$\Longrightarrow$ reflexividad.

a) $\mathcal{A}\begin{cases} A = \{0,1,2\} \\ (r)^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\} \end{cases}$

$(r)^{\mathcal{A}}$ es simétrica y transitiva, pues $(r)^{\mathcal{A}}$ es la relación total en $\{1,2\}$, o sea, $\nabla(\{1,2\})$ "nabla"

o sea, $\{1,2\}\times\{1,2\}$.

Sin embargo $(r)^{\mathcal{A}}$ no es reflexiva, pues $\langle 0,0\rangle \notin (r)^{\mathcal{A}}$. Sea v una asignación cualquiera.

Habrá que demostrar que

$I_{\mathcal{A}}^{v}(\gamma_1) = 1 = I_{\mathcal{A}}^{v}(\gamma_2)$ y sin

embargo $I_{\mathcal{A}}^{v}(\varphi)=0$.

$I_{\mathcal{A}}^{v}(\gamma_1) = 1$

sii para toda $a\in A$, $I_{\mathcal{A}}^{v(x|a)}(\forall y(r(x,y)\to r(y,x)))=1$

sii para todo $a,b\in A$, $I_{\mathcal{A}}^{v(x|a)(y|b)}(r(x,y)\to r(y,x))=1$

sii para todo $a,b\in A$, $I_{\mathcal{A}}^{v(x|a)(y|b)}(r(x,y))=0$ ó

$I_{\mathcal{A}}^{v(x|a)(y|b)}(r(y,x))=1$

sii para todo $a,b\in A$, $\langle a,b\rangle \notin (r)^{\mathcal{A}}$ ó $\langle b,a\rangle\in(r)^{\mathcal{A}}$.

esto es cierto (comprobar y lo restante)

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

b)

* $\forall x \forall y (r(x,y) \rightarrow r(y,x))$

$\forall x \forall y (\neg r(x,y) \vee r(y,x))$

* $\forall x \forall y \forall z (r(x,y) \wedge r(y,z) \rightarrow r(x,z))$

$\forall x \forall y \forall z (\neg r(x,y) \vee \neg r(y,z) \vee r(x,z))$

* $\forall x \exists y\, r(x,y)$

$\forall x\, r(x, f(x))$

* $\neg \varphi$

$\neg \forall x\, r(x,x)$

$\exists x \neg r(x,x)$

$\neg r(a,a)$

$\neg r(a,a)$

$\quad \lfloor \neg r(x,y) \vee \neg r(y,z) \vee r(x,z)$

$\neg r(a,y) \vee \neg r(y,a)$ $(x|a)(z|a)$

$\quad \lfloor r(x, f(x))$

$(x|a)(y|f(a))$

$\neg r(f(a), a)$

$\quad \lfloor \neg r(x,y) \vee r(y,x)$

$(y|f(a))(x|a)$

$\neg r(a, f(a))$

$\quad \lfloor r(x, f(x))$ $(x|a)$

$\square$

luego $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \models \varphi$

Indu 0

$\boxed{32}$ Definamos los números de Lucas como cualquier número de la sucesión:

$$L_n = \begin{cases} 2 & si\ n=0 \\ 1 & si\ n=1 \\ L_{n-1}+L_{n-2} & si\ 1<n; \end{cases}$$

Sea $P(n)$ la siguiente enunciado "Todo $L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ es cierto"

Sea $P = \{ n \in \omega : P(n)$ es cierto $\}$

Demostremos que P es un conjunto inductivo y que por el segundo principio de inducción $P \subseteq \omega \Rightarrow P = \omega$

Demostremos que $P(1)$ es cierto $\Rightarrow 1 \in P$ para $P(2)$ también es cierto.

$1 < \frac{7}{4} \Rightarrow P(1)$ es cierto y $1 \in P$.

Comprobemos ahora que $P(n)$ es cierto siempre que n lo sea.

Sea nuestra hipótesis de inducción que $L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ demostremos que $L_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$

$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ por definición de los números de Lucas.

$$L_{n+1} < \underbrace{\left(\frac{7}{4}\right)^n}_{L_n} + \underbrace{\left(\frac{7}{4}\right)^n \cdot \frac{4}{7}}_{L_{n-1}} = \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(\frac{11}{7}\right)$$

Por tanto: $\quad \frac{11}{7} \overset{?}{<} \frac{7}{4} \quad 44 \overset{?}{<} 49$ sí

$$L_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(\frac{11}{7}\right) \overset{?}{<} \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(\frac{7}{4}\right)$$

Queda por tanto demostrado que $P(n+1)$ es cierto si $P(n)$ lo es. Por el segundo principio de inducción.

P es un conjunto inductivo y por el segundo [principio] de inducción $P \subseteq \omega \Rightarrow P = \omega$ y queda demostrado $P(n)$ tal como se pretendía.

$\boxed{6}$ Considere las cuatro fórmulas cerradas siguientes

$\gamma_1 \equiv \forall x \forall y \, (r(x,y) \to r(y,x))$ Propiedad simétrica

$\gamma_2 \equiv \forall x \forall y \forall z \, ((r(x,y) \wedge r(y,z)) \to r(x,z))$ Propiedad transitiva

$\gamma_3 \equiv \forall x \exists y \, r(x,y)$

$\varphi \equiv \forall x \, r(x,x)$ Propiedad reflexiva.

a) ¿Es φ consecuencia lógica de $\{\gamma_1, \gamma_2\}$?

Sí, si se cumple la propiedad simétrica entonces tenemos que $\forall x \forall y \, r(x,y) \to r(y,x)$ y por la propiedad transitiva

$(r(x,y) \wedge r(y,\cancel{x})) \to r(x,x)$

b) ¿Es φ consecuencia lógica de $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$?

$\gamma_i \models \varphi \iff \{\gamma_i^{S} \vee \neg \varphi^{S}\}$ es insatisfacible

Escrito en forma de Skolem.

$\gamma_1^{S} = \neg r(x,y) \vee r(y,x)$ $\quad \gamma_2^{S} = \neg r(x,y) \vee \neg r(y,z) \vee r(x,z)$ $\quad \gamma_3^{S} = r(x, f(x))$

$\neg \varphi^{S} = \neg r(a,a)$.

Utilizo algoritmo david Putnam.

$\{ r(x,y) \vee r(y,x) \,,\, \neg r(x,y) \vee \neg r(y,z) \vee r(x,z) \,,\, \underbrace{r(x,f(x)) \,,\, \neg r(a,a)}_{\text{Unit}} \}$

$\lambda = r(y,x)$ $\qquad \lambda$

$r(x,y) \vee$ $\qquad \neg r(y,z) \vee r(y,z)$

$\downarrow$ $\qquad |$ Unit

$\emptyset$ $\qquad \emptyset$

Por tanto este conjunto es satisfacible

$\boxed{17}$ (En el examen el 1) Sea e la función de argumentos naturales dada por

$$e(a,0)=1$$

$$e(a,b)\begin{cases} e\left(a^2, \frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par} \\ e\left(a^2, \frac{b-1}{2}\right)a & \text{si } b \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostrar por inducción que para cualquiera números naturales a y b, $e(a,b)=a^b$.

Sea $P(n)$ el siguiente enunciado proposicional:

$P(n) \equiv$ " Para cualquier valor de a perteneciente a los números naturales, se cumple que $e(a,n)$ es igual a a^b "

Sea $P \equiv \{n\in\omega : P(n)\}$

Demostración por inducción usando el principio de inducción:

Comprobemos que $0\in P$

Por definición de la función $e(a,0)=1$ y $a^0=1 \quad \forall a\in\omega$ por tanto $e(a,0)=a^0$ y $P(0)$ es cierta.

Comprobemos que $S(n)\in P$ siempre que $n\in P$

(Donde S es la función sucesor de Peano)

En esta situación contamos con dos casos:

I) Que $S(n)=n+1$ sea impar.

Tenemos que demostrar que $e\left(a^2, \frac{(n+1)-1}{2}\right)a = a^{n+1}$

Pero por hipótesis de inducción $e\left(a^2, \frac{n}{2}\right)=a^n$, por tanto

$$e\left(a^2, \frac{(n+1)-1}{2}\right)a = e\left(a^2, \frac{n}{2}\right)\cdot a \overset{\text{Hip. Ind}}{=} a^n\cdot a = a^{n+1}$$

Que es lo que se buscaba demostrar. $S(n)\in P$ si $S(n)$ es impar,

II) Que si los impares $\in P \Rightarrow$ pares también.

Por hipótesis de inducción n es impar y cumple que $e\left(a^2, \frac{n-1}{2}\right)\cdot a = a^n$ por tanto dividiendo entre a resulta que $e\left(a^2, \frac{n-1}{2}\right)=a^{n-1}$

Donde $n-1$ es par, por tanto también se cumple para ellos.

$\frac{=}{\approx}$ 1_1

Los números de Lucas L_n están definidos por:

$$L_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n=0 \\ 1, & \text{si } n=1 \\ L_{n-1}+L_{n-2}, & \text{si } 1<n. \end{cases}$$

Demuestre que para todo número natural n se cumple:

$$L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

dem. $P(n) \overset{def}{\equiv}$ "$L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$" ; $i_0 = 1$

$\left[P(n) \overset{def.}{\equiv} \text{" si } n>0 \text{, entonces } L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \text{"} \right]$?

Demostración por inducción usando el 2º principio

Sea $n \in \omega^*$ y supongamos que $P(k)$ es cierta para todo $1 \le k < n$ (hip. de induc.).

Según la definición de L_n hay varios casos

*) $n=1$; $L_1 = 1$ y $1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ por lo que $L_1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ y así $P(1)$ es cierto.

*) $n=2$;

$$L_2 = L_1 + L_0 = 1+2 = 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

*) $n>2$;

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + L_{n-2} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\left(1+\frac{7}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{11}{4}\right) \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{49}{16}\right) \end{aligned}}$$

$$= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

Por el 2º principio de induc. $P(n)$ vale para todo $1 \le n$.

[13] Demuestre que para todo número natural KYOWA KIRIN
n, $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5.

Sea $P(n)$ el siguiente enunciado " $5 | 8^n - 3^n$ " $\forall n \in \omega$
y sea $P = \{n \in \omega : P(n)\}$

Por el primer principio de inducción:

si $0 \in P$ ... entonces $P \subseteq \omega$ y $P = \omega$
y $P \ni n+1$ ... siempre que $n \in P$

Demostremos entonces que:

I) $0 \in P$

$8^0 - 3^0 = 0$ $\quad 5 | 0$ entonces $P(0)$ es cierto y $0 \in P$

II Si $n \in P$ entonces $n+1$ también

$P(n+1) = 8^{n+1} - 3^{n+1}$ $\quad P(n) = 8^n - 3^n$

+ Utilicemos que si $k | m$ y $k | m-n \Rightarrow k | n$

$km' = m$ $\quad k(m' - n') = m - n$ $\quad km' - kn' = m - n \Rightarrow \boxed{n = kn'}$

$P(n+1) - P(n)$: $8^{n+1} - 8^n - 3^{n+1} + 3^n = 8^n(8-1) + 3^n(1-3) = 8^n 7 + 3^n(-2)$

$8^n + 3^n = 5k + 5t$

$8^n(5+3) - 3^n(3$

$8^n 5 + 3 \cdot 8^n - 3^n 3 = 5 8^n + 3\underbrace{(8^n - 3^n)}_{5(x - 3')}$

5

23 Sean $n_0 \dots n_d$ puntos distintos de un dominio de integridad A en cantidad igual a $d+1$ y sea el polinomio $g(x)$ en una variable definido por la siguiente igualdad.

$$g(x) = \prod_{i=0}^{d} (x - n_i) \quad \text{entonces} \quad g'(x) = \sum_{i=0}^{d} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{d} (x - n_j)$$

Sea P(d) el siguiente enunciado.

: Para toda cantidad d natural de puntos se cumple que $g_d'(x) = \sum_{i=0}^{d} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{d} (x-n_j)$.

Probaremos la veracidad de P(d) ~~utilizar~~ sobre inducción sobre el número de puntos:

Para $d = 0$ la cantidad $= d+1$ (por definición).

$g(x) = (x - n_0)$ $\quad g'(x) = 1$ y utilizando la fórmula dada se tiene que $\sum_{i=0}^{0} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{0} (x - n_j) = 1$ por definición de sumatoria y productoria.

Probamos entonces que si $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$g_{d+1}(x) = (x - n_{d+1})\, g_d(x)$$

Por tanto bastaría con demostrar que $g_{d+1}'(x) = \sum_{i=0}^{d+1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{d+1} (x - n_j)$

* Sacamos factor común $(x - n_{d+1})$ en los d primeros:

$$(x - n_{d+1}) \sum_{j=0}^{d} \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{d} (x - n_j) + \prod_{i=0}^{d} (x - n_i) \quad (2)$$

Por otro lado se ~~tiene~~ sabe que $(g_{d+1}(x))' = ((x - n_{d+1})\, g_d(x))' =$

$$g_d(x) + g_d'(x) \cdot (x - n_{d+1}) \overset{(1)}{=} g_d(x) + (x - n_{d+1}) \cdot \sum_{i=0}^{d} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{d} (x - n_j)$$

(1) Por la hipótesis de inducción

Resultando entonces: $g_{d+1}(x)' = \prod_{i=0}^{d} (x - n_i) + (x - n_{d+1}) \cdot \sum_{i=0}^{d} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{d} (x - n_j)$

Que es ~~el~~ igual a ~~la ecua.~~ función (2)

Por tanto $P(n+1)$ ocurre si $P(n)$ por tanto queda demostrado por el primer principio de inducción.

21 Definamos los números de Fibonacci como cualquier número de la sucesión:

Demuestre que para todo $n \in \omega$ se cumple $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n=0 \\ 1, & \text{si } n=1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } 1<n \end{cases}$$

Sea el siguiente ~~proposición~~ enunciado

$$P(n) \quad \text{"} F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n \quad \forall n \in \omega \text{"}$$

Demostremos [illegible] mediante inducción usando el 2º principio:

(1) Para ello contamos con tres casos

$P(0): F_0 = 0 \qquad 0 < 1 \implies P(0)$ es cierto

$P(1): F_1 = 1 \qquad 1 < \frac{5}{3} \implies P(1)$ ✓

$P(n): n > 1$

(1) Sea $n \in \omega$ y supongamos que $P(k)$ es cierta para todo $0 \leq k < n$ (hipótesis de inducción)

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, Por hipótesis de inducción:

$$F_{n-1} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \quad \text{y} \quad F_{n-2} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n-2}$$

Por tanto

$$F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)$$

Si demostramos que

$$\left(\frac{5}{3}\right)^n \overset{?}{>} \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)$$

Habremos acabado

$$1 \overset{?}{>} \left(\frac{3}{5} + \frac{9}{25}\right) = \frac{15+9}{25} = \frac{24}{25}$$

$$\boxed{1 > \frac{24}{25}}$$

Por tanto por el segundo principio de inducción queda demostrado

P

$\boxed{1.18}$ Resuelva el problema de recurrencia: $\{x_n^n\}_{n\in\omega}$

$$U_{n+2} - 6U_{n+1} + 9U_n = 3\cdot 2^n + 7\cdot 3^n \text{ para todo } n \geq 0$$

y encuentre la solución particular que cumple $U_0 = 1$ y $U_1 = 4$ $\quad x_n^h = \ldots\ldots, \; n\in\omega$

La ecuación característica de la recurrencia es $x^2 - 6x + 9 = 0$, ~~sus~~ solución en 3, cuya multiplicidad es dos.

Por tanto $\{x_n^{(h)}\} = \{(\alpha_0 + \alpha_1 n)\, 3^n\}$ Donde α_0, α_1 son variables que dependerán de los valores de frontera. $x_n^{(h)} = (\alpha_0 + \alpha_1 n)\, 3^n, \; n\in\omega.$

Como tenemos dos funciones tenemos dos recurrencias particulares asociadas. La ~~soluci~~ la recurrencia particular asociada es la suma de ambas:

$f_1(x) = 3\cdot 2^n, \quad S = 2 \quad m = 0 \quad$ grado polinomio $= 0 \Rightarrow x_n^{(P_1)} = \beta_0 2^n$

$f_2(n) = 7\cdot 3^n \quad S = 3 \quad m = 0 \quad$ grado polino $= 0 \Rightarrow x_n^{(P_2)} = \beta_1 n^2 3^n$

$$x_n^{(P)} = x_n^{(P_1)} + x_n^{(P_2)} = \beta_0 2^n + \beta_1 n^2 3^n$$

β_0 y β_1 son incógnitas que se resuelven sustituyendo en la ~~de la ecuación~~ definición de la recurrencia.

$x_n = \beta_0 2^n + \beta_1 n^2 3^n$

$x_{n+1} = 2\beta_0 2^n + \beta_1 (n+1)^2 3^n\cdot 3$

$x_{n+2} = 4\beta_0 2^n + \beta_1 (n+2)^2 3^n 9$

$(4 - 12 + 9)\beta_0 2^n + (9n^2 + 36n + 36 - 18n^2 - 36n - 18 + 9n^2)\beta_1 3^n = 3\cdot 2^n + 7\cdot 3^n$ $\quad 18$

Igualando: $\beta_0 = \frac{3}{1} = 3$ $\qquad \beta_1 = \frac{7}{36-18} = \frac{1}{4}$ $\quad \frac{7}{18}.$

Por tanto:

$$x_n = x_n^{(H)} + x_n^{(P)} = (\alpha_0 + \alpha_1 n)3^n + 3\cdot 2^n + \frac{7n^2}{18}\cdot 3^n$$

Una solución particular

$U_0 = 1 \Rightarrow \alpha_0 + 3 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = -2}$

$U_1 = 4 \Rightarrow (-2 + \alpha_0)\cdot 3 + 3 + \frac{3}{4} = 4 \qquad \alpha_0 = \left(4 + 3 - \frac{3}{4}\right)\frac{1}{3} = \frac{25}{12}$

$\boxed{\alpha_1 = \frac{17}{18}}$

$$\boxed{x_n = \left(-2 + \frac{25}{12}n\right)3^n + 3\cdot 2^n + \frac{n^2}{4}\cdot 3^n}$$

$4\beta_0 2^n + \beta_1(n+2)^2 3^n\cdot 9 - 6(2\beta_0 2^n + \beta_1(n+1)^2 3^n\cdot 3)$
$+ 9(\beta_0 2^n + \beta_1 n^2 3^n) = 4\beta_0 2^n + 9\beta_1(n^2 + 4 + 4n)3^n$
$- 6(2\beta_0 2^n + 3\beta_1(n^2 + 1 + 2n))3^n + 9(\beta_0 2^n + \beta_1 n^2 3^n)$
$= 4\beta_0 2^n + 9\beta_1 n^2 + 36 + 36n$

$$u_n = \left(-2 + \frac{17}{18}n\right)3^n + 3\cdot 2^n + \frac{7}{18}n^2 3^n$$
$$= \left(-2 + \frac{17}{18}n + \frac{7}{18}n^2\right)3^n + 3\cdot 2^n.$$

1 Encuentre una fórmula en forma normal prenexa lógicamente equivalente a

$$\forall x\, p(x,y) \to (\forall y\, p(y,x) \to \forall x(q(x) \wedge \exists y \forall z\, r(a,y,z)))$$

con el mínimo de cuantificadores. Seguida de su forma de Skolem.

$\forall x$ $\wedge$ $\forall x$

- Equivalente implicación: $\varphi \to \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$
- Equivalente cuantificador: $\neg \forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \varphi$

I: $\exists x\, \neg p(x,y) \vee (\exists y\, \neg p(y,x) \vee (\forall x(q(x)) \wedge \boxed{\exists y} \forall z\, r(a,y,z)))$

- Introduzco $\forall x$ dentro paréntesis $(\forall x\, q(x) \wedge \exists y \forall z\, r(a,y,z))$
- Renombro z de $\exists y \forall z\, r(a,y,x)$ por z (*)
- Como y no ocurre en $\forall x\, q(x)$, puedo "sacarlo"
- Saco factor común $\forall x$

II $\exists x\, \neg p(x,y) \vee (\exists y\, \neg p(y,x) \vee \exists y \boxed{\forall x}(q(x) \wedge r(a,y,x)))$

- Saco factor común $\exists y\, \forall x(q(x) \wedge r(a,y,x))$
- renombro $(x|t)$ de
- como $\forall t$ no ocurre en $\neg p(y,x)$, puedo sacarlo.

III: $\exists x\, \neg p(x,y) \vee \exists y \forall t(\neg p(y,x) \vee (q(t) \wedge r(a,y,t)))$

- Renombro $(x|w)$ de $\neg p(x,y)$ y $(y|w)$ de $\exists y \forall t \ldots$
- Saco factor común $\exists w$, como t no ocurren en $\neg p(x,y)$, puedo sacarlo.

IV: $\exists w \forall t(\neg p(w,y) \vee \neg p(w,x) \vee (q(t) \wedge r(a,w,t)))$

Para que quede en forma normal conjuntiva, distribuyo.

$$\Phi \equiv \exists w \forall t\, ((\neg p(w,y) \vee \neg p(w,x) \vee q(t)) \wedge (\neg p(w,y) \vee \neg p(w,x) \vee r(a,w,t)))$$

$$\Phi^S \equiv \forall t\, ((\neg p(b,y) \vee \neg p(b,x) \vee q(t)) \wedge (\neg p(b,y) \vee \neg p(b,x) \vee r(a,b,t)))$$

Pr. 1

$$\underbrace{3}_{}\cdot 2^n + \underbrace{7}_{}\cdot 3^n = \underbrace{A_0}_{} 2^n + \underbrace{A_1}_{} \big(9(n^2+4+4n) - 18(n^2+1+2n) + 9n^2\big)\, 3^n$$

$$= A_0 2^n + A_1 \big(9n^2 + 36 + \cancel{36n} - \cancel{18n^2} - 18 - \cancel{36n} + \cancel{9n^2}\big) 3^n$$

$$= A_0 2^n + 18 A_1 3^n$$

basta con tomar

$$A_0 = 3 \quad y \quad A_1 = \frac{7}{18}.$$

Recurrencias

$\boxed{3}$ Resuelva la relación de recurrencia

$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0 \quad \forall\, n \geq 0$ y encuentre la solución particular que cumple: $u_0 = 1$ y $u_1 = 6$

Nos hallamos frente a una recurrencia homogénea, cuya ecuación característica es: $x^2 - 6x + 9 = (x-3)(x-3) = 0$

Donde 3 es raíz del polinomio cuya multiplicidad es 2, por tanto una solución general sería:

$x_n = (\alpha_0 + n\alpha_1)3^n$ Donde α_0, α_1 son constantes dependientes de los valores de frontera, en este caso:

$\left.\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_1 = 6 \end{array}\right\}$ De donde obtenemos:

$x_0 = (\alpha_0 + 0 \cdot \alpha_1)3^0 = 1 \Rightarrow \underline{\alpha_0 = 1}$

$x_1 = (1 + \alpha_1) \cdot 3 = 6 \Rightarrow \alpha_1 = 1$

$\boxed{\text{La solución particular es: } x_n = (1+n)3^n}$

$\boxed{4}$ Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \quad \forall n \geq 0$$

solución particular $u_0 = 2,\ u_1 = 5$

$u_2 = 15.$

Ecuación característica:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x+1)(x-1)(x-6)$$

Por tanto una solución general sería:

$$x_n = \alpha_0(1)^n + \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(6)^n$$

Utilizando los valores de frontera:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ x_1 &= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 6 = 5 \\ x_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 36 = 15 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo SEL:

$$\alpha_0 = \frac{11}{5} \qquad \alpha_1 = \frac{-4}{7} \qquad \alpha_2 = \frac{13}{35}$$

Resulta por tanto mi solución particular:

$$\boxed{x_n = \frac{11}{5} + (-1)^n \cdot \left(\frac{-4}{7}\right) + \frac{13}{35}(6)^n}$$

10 Resuelva la relación de recurrencia: $U_{n+2} = -4 n_{n+1} + 6 \cos\frac{n\Pi}{2} + 3 \sin\frac{n\Pi}{2}$

Nos hallamos frente a una recurrencia lineal no homogénea.

La recurrencia homogénea es $U_{n+2} = -4 U_{n+1}$; siendo su ecuación característica

$x^2 + 4x = x(x+4) = 0$ Por tanto $X_n^{(H)} = \alpha_0 (-4)^n$

Calculemos ahora $X_n^{(P)}$

La solución particular se compone de $f(x) + g(x)$ donde

$f(x) = 6 \cdot \cos\left(\frac{\Pi n}{2}\right)$ y $g(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right)$

Para funciones trigonométricas, la solución a su recurrencia tiene una forma tal que así:

$$f(x) = 6 \cdot \cos\left(\frac{\Pi n}{2}\right) \Rightarrow X_n^{(P_0)} a \cdot \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right) + b \cdot \cos\left(\frac{n\Pi}{2}\right) \quad \left.\begin{matrix} a + c = k_0 \\ b + d = k_1 \end{matrix}\right.$$

$$g(x) \Rightarrow X_n^{(P_1)} = c \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right) + d \cos\left(\frac{n\Pi}{2}\right) \quad X_n^{(P)} = X_n^{(P_0)} + X_n^{(P_1)}$$

$$\boxed{X_n^{(P)} = K_0 \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right) + K_1 \cos\left(\frac{n\Pi}{2}\right)}$$

K_0 y K_1 se calculan mediante la relación de recurrencia, utilizo igualdades trigonométricas:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$X_{n+1}^{(P)} = K_0 \cdot \sin\left(\frac{(n+1)\Pi}{2}\right) + K_1 \cdot \cos\left(\frac{(n+1)\Pi}{2}\right) \quad \left\{\begin{matrix} \alpha = \frac{n\Pi}{2} & \beta = \frac{\Pi}{2} \\ \sin\beta = 1 & \cos\beta = 0 \end{matrix}\right.$$

$$\boxed{X_{n+1}^{(P)} = K_0 \cdot \cos\left(\frac{n\Pi}{2}\right) - K_1 \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right)}$$

$$X_{n+2}^{(P)} = K_0 \cdot \sin\left(\frac{(n+2)\Pi}{2}\right) + K_1 \cdot \cos\left(\frac{(n+2)\Pi}{2}\right) \quad \left\{\begin{matrix} \alpha = \frac{n\Pi}{2} & \beta = \Pi \\ \sin\beta = 0 & \cos\beta = -1 \end{matrix}\right.$$

$$\boxed{X_{n+2}^{(P)} = (-K_0) \cdot \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right) - K_1 \cdot \cos\left(\frac{n\Pi}{2}\right)}$$

Sustituyendo en la relación de recurrencia

$$(4K_0 - K_0) \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right) + (4K_1 - K_1) \cos\left(\frac{\Pi n}{2}\right) = 3 \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right) + 6 \cos\frac{n\Pi}{2};$$

Por tanto $\boxed{K_0 = 1 \quad K_1 = 2}$

La solución general a la recurrencia $X_n = \{X_n^{(H)} + X_n^{(P)}\} = \alpha_0 (-4)^n + \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{n\Pi}{2}\right)$

R2

$\boxed{6}$ Resuelva la relación

$U_{n+2} = -4U_n$

Nos hallamos frente a una recurrencia lineal homogénea, cuya ecuación característica es $x^2+4=0$ cuya raíces son imaginarias:

$\boxed{\pm 2i}$

Expresando el resultado en forma trigonométrica $|r| = 2 = \sqrt{0^2+2^2}$

$\sigma = 2.\ arc\ \tan \frac{2}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\pm 2i = 2^n \cdot \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\ sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$

Su ecuación característica sería

$X_n = \left(2^n \left(k_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right)$

$\boxed{7}$ Resuelva: $U_{n+2} = -4U_{n+1} - 16U_n$

Ecuación característica: $X^2+4X+16=0$ solución $\frac{-4 \pm \sqrt{16-64}}{2} =$

$= \boxed{-2 \pm 2\sqrt{3}\, i}$

Procedo a escribir en forma trigonométrica.

$|r| = \sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$

$\sigma = 2\ arc\ \tan\left(\frac{2\sqrt{3}}{4+-2}\right) = \frac{2}{3}\pi$

Su representación en forma trigonométrica: $X_n = 4^n \left(k_1 \cos\left(\frac{2n}{3}\pi\right) + k_2 \sin\left(\frac{2n}{3}\pi\right)\right)$

$\boxed{11}$ Resuelva la relación de recurrencia

$$U_{n+2} = -4U_{n+1} - 16U_n + 4^{n+2}\cos\frac{n\Pi}{2} - 4^{n+3}\sin\frac{n\Pi}{2}$$

Nos hallamos frente a una relación de recurrencia no homogénea.

Ec: $x^2 + 4x + 16 = 0 \quad -2 \pm 2\sqrt{3}\,i$ $\qquad |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$\emptyset$ ¿. $\operatorname{arc\,tag}\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2+4}\right) = \frac{2\Pi}{3}$

La solución de la recurrencia lineal homogénea

$$x_n^{(H)} = 4^n \cdot \left(k_1 \cdot \cos\frac{2\Pi n}{3} + k_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\Pi n}{3}\right)\right)$$

$$f(x) = 16 \cdot \cos\left(\frac{n\Pi}{2}\right) \cdot 4^n = \beta_0 \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right) + \beta_1 \cos\left(\frac{n\Pi}{2}\right)$$

$$g(x) = \gamma_0 \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right) + \gamma_1 \cos\left(\frac{n\Pi}{2}\right)$$

$$x_{n+2} = \beta_0 \sin\left(\frac{n\Pi}{2}\right) + \beta_1 \cos\left(\frac{n\Pi}{2}\right)$$

$$4x_{n+1} = 4\beta_0 \sin($$

13. Resuelva la relación de recurrencia (1) $u_{n+3} = -5u_{n+2} - 8u_{n+1} - 4u_n + 2(-1)^n + (-2)^{n+3}$

Nos encontramos frente a una recurrencia lineal no homogénea:

$x_n^{(H)}$

La ecuación característica de la homogénea asociada es $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$

Por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \quad x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x+2)^2 = 0$

Por tanto las soluciones son $\begin{cases}(-1) & \text{con multiplicidad } 1 \\ (-2) & \text{con } \quad '' \quad 2.\end{cases}$

Resultando $x_n^{(H)} = \alpha_0(-1)^n + (\alpha_1 + \alpha_2 n)(-2)^n$

$x_n^{(P)}$

La expresión de la recurrencia particular asociada es: $2 \cdot (-1)^n + (-8)(-2)^n$

Donde (-1) es solución a la ecuación característica, con una multiplicidad de 1.

y (-2) es $''$ ....) con multiplicidad 2.

Por tanto resulta

$x_n^{(P)} = \beta_0 \cdot n(-1)^n + \beta_1 n^2 (-2)^n$ $\quad \beta_0, \beta_1$ son incógnitas deducibles de la definición de recurrencia

~~$5x_{n+2} = 5(\beta_0 \cdot (n+2)(-1))^{n+2} = (5n+10)\beta_0(-1)^n$~~

~~$x_{n+3} =$~~

$x_{n+3} = \beta_0(n+3)(-1)^{(3+n)} + \beta_1(n+3)^2(-2)^{n+3} = (-n-3)\beta_0(-1)^n + (-8n^2 - 24n - 72)\beta_1(-2)^n$

$5x_{n+2} = 5(\beta_0(n+2)(-1)^{2+n} + \beta_1(n+2)^2(-2)^{n+2}) = (5n+10)\beta_0(-1)^n + (20n^2 + 80n + 80)\beta_1(-2)^n$

$8x_{n+1} = 8(\beta_0(n+1)(-1)^{n+1} + \beta_1(n+1)^2(-2)^{n+1}) = (-8n-8)(-1)^n + (-16n^2 - 32n - 16)\beta_1(-2)^n$

$4x_n = 4(\beta_0(n)(-1)^n + \beta_1(n^2)(-2)^n) = (4n\beta_0(-1)^n + 4n^2\beta_1(-2)^n$

sustituyendo en la ecuación ~~u_{n+3}~~ $= (-1)$ 1, agrupando términos resulta:

$(-1)\beta_0(-1)^n + (-8)\beta_1(-2)^n = 2(-1)^n$ ~~$\beta_0(-1)^n$~~ $- 8(-2)^n$

Despejando de aquí: $\beta_0 = -2 \qquad \beta_1 = 1$

Por tanto $\boxed{x_n = x_n^{(P)} + x_n^{(H)} = (\alpha_0 - 2n)(-1)^n + (\alpha_1 + \alpha_2 n + n^2)(-2)^n}$

R. 3

$\boxed{9}$ Resuelva $U_{n+2} = -4U_{n+1} - 3U_n + 5(-2)^n$

Nos hallamos frente a una recurrencia lineal no homogénea.

La ecuación de la recurrencia lineal homogénea es. solución general homogénea

$$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1) = 0 \qquad \boxed{x_n^{(H)} = \alpha_0(-1)^n + \alpha_1(-3)^n}$$

La particular

$f(x) = 5(-2)^n \Rightarrow$ solución general $x_n^{(P)} = \beta \cdot (-2)^n$

Sustituyendo en la recurrencia:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+2} &= \beta(-2)^n(-2)^2 \\ 4x_{n+1} &= 4(-2)^n(-2)\beta \\ 3x_n &= 3(-2)^n \end{aligned}\right\} \qquad \beta\left((-2)^2 + 3 - 8\right) = 5$$

$$\beta = \frac{5}{-1} = -5$$

Mi solución general es:

$$\boxed{x_n^{(P)} + x_n^{(H)} = \alpha_0(-1)^n + \alpha_1(-3)^n + (-5)\cdot(-2)^n}$$

α_i son constantes deducibles a partir de los valores de frontera

$\boxed{17}$ Resuelva el problema de recurrencia: $U_n - 2U_{n-1} = 3^n$, para todo $n \geq 1$ y encuentre una solución particular que cumple $U_1 = 5$

La ecuación característica para esta recurrencia es: $X - 2 = 0$, siendo su solución 2 con multiplicidad 1.

Por tanto $X_n^{(h)} = \alpha_0 2^n$, $n \in \omega$. Donde α_0 es una variable que depende de los valores de frontera.

Para nuestra recurrencia particular, tenemos la función 3^n, formada por un polinomio de grado 0 y el 3 que no es solución de nuestra ecuación característica, por tanto resulta:

$X_n^{(P)} = \beta_0 3^n$ Donde β_0 es una incógnita calculable en la definición de la recurrencia:

Sustituyendo:

$$\left.\begin{array}{l} -2X_{n-1} = -2\beta_0 3^n \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}\beta_0 3^n \\ X_n = \beta_0 3^n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \beta_0 3^n - \frac{2}{3}\beta_0 3^n = 3^n \\ \frac{1}{3}\beta_0 3^n = 3^n \Rightarrow \boxed{\beta_0 = 3} \end{array}$$

La solución general para nuestra recurrencia es

$$X_n = X_n^{(P)} + X_n^{(h)} = \alpha_0 2^n + 3^{n+1}$$

Para la solución particular utilizo que $U_1 = 5$

$$X_1 = \alpha_0 2 + 9 = 5 \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = -2}$$

$$\boxed{X_n = -(2^{n+1}) + 3^{n+1}}$$

12 Resuelva: $U_{n+2} = 6U_{n+1} - 9U_n + 3^n$

$S=3 \quad m=2 \quad P^{a}=0$

Nos hallamos RLNH Ec hom. $X^2-6X+9=(X-3)(X-3)$ $\boxed{n^2\beta_0 \cdot 3^n} = X_n^{(P)}$

$X_n^{(H)} = (\alpha_0+\alpha_1 n)3^n$

Sustituyendo:

$X_{n+2} = (n+2)^2\beta_0 \cdot 3^n \cdot 3^2$;

$X_{n+1} = (n+1)\beta_0 \cdot 3^n \cdot 3$;

$X_n = (n)\beta_0 3^n$

$3^2(n+2)^2 - 6(3(n+1)^2 + 9n^2)\beta_0 = 1$

$\beta_0 = \cancel{9\ldots}$

$\cancel{9n^2 - 18n^2 + 9n^2 + 18n}$

$436 - 18\beta_0 = 1$ $\boxed{\beta_0 = \frac{+1}{18}}$ $\rightarrow$

$X_n = \{X_n^{(P)} + X_n^{(H)}\}$

$\boxed{(\alpha_0+\alpha_1 n)\cdot 3^n + \frac{n^2}{18}\cdot 3^n}$

Sacando factor 3^n

$\left(\alpha_0+\alpha_1 n + \frac{n^2}{18}\right)3^n$

---

14 Resuelva:

$U_n - 2U_{n-1} = (n+5)3^n$

Homogénea:

$X_n^{(H)} = \alpha_0 2^n$

$X_n^{(P)} = (\beta_0+\beta_1 n)3^n$

$X_n = \beta_0 + \beta_1 n)3^{n-1}$

$X_{n-1} = (\beta_0 + \beta_1(n-1))3^n$

$(\beta_0 - 2\beta_0) = $

$\boxed{\beta_0 = -5}$

$\beta_1 n \ldots + 2$

$(n-2n+2) = 1n$

$(\beta_0+\beta_1 n)3^n - 2\cdot(\beta_0+\beta_1(n-1))3^{n-1} =$

$= (n+5)\cdot 3^n$

$\left[3\beta_0 - 2\beta_0 + \beta_1 + (3b_1 - 2\beta_1)n\right]3^n =$

$= (15+3n)\,3^n$

$3\beta_0 - 2\beta_0 + \beta_1 = 15$ $\boxed{B_0 = 12}$

$b_1 n = 3n$ $\boxed{b_1 = 3}$

---

13 Resuelva la relación de recurrencia: $U_{n+3} = -5U_{n+2} - 8U_{n+1} - 4U_n + 2(-1)^n + (-2)^{n+3}$

Recurrencia LNH

Homogénea:

$U_{n+3} + 5U_{n+2} + 8U_{n+1} + 4U_n = 0$ Ec $X^3+5X^2+8X+4 = (X+1)(X+2)^2$

$X_n^{(H)} = \alpha_0(-1)^n + (\alpha_1+\alpha_2 n)(-2)^n$

$X_n^{(P)} = \beta_0$

$f(x) = 2(-1)^n \Rightarrow X_n^{(P_1)} = \beta_0 n(-1)^n$

$g(x) = (-2)^2\cdot(-2)^n \Rightarrow X_n^{(P_2)} = \beta_1 n^2(-2)^n$

Suma X_n $\beta_0 n(-1)^n + \beta_1 n^2(-2)^n$

Calculo β_0 y β_1 $\ldots n + \beta_1(-2)^n[n^2]$

(4) $X_n = \beta_0(-1)^n n$

(8) $X_{n+1} = \beta_0(-1)^n\cdot(-n+1) + \beta_1(-2)^n[-2(n^2+2n+1)]$

(5) $X_{n+2} = \beta_0(-1)^n\cdot n+2 + \beta_1(-2)^n[4(n^2+4n+4)]$

(1) $X_{n+3} = \beta_0(-1)^n(-n+3)\beta_1(-2)^n[-8(n^2+6n+9)]$

sustituyendo en la relación de equivalencia:

$\beta_0(-1)^n(-3+10-8+4n-8n+5n-n)$

$+\beta_1(-2)(-8n^2+20n^2-16n^2+4n^2-81+80-16)$

$= 2(-1)^n + (-2)^{n+3}$

$\boxed{\beta_0 = -2}$ $\boxed{\beta_1 = \frac{-4}{17}}$??

Solución general a la recurrencia

$(-2+\alpha_0)(-1)^n + \left(\alpha_1+\alpha_2 n + \frac{-4}{17}n^2\right)(-2)^n$

$$(\log_2 x)' = \frac{x'}{x}\frac{1}{\ln 2}$$

$$H(x) = 3P(x)\log_2\frac{1}{P(x)}$$

$$\cancel{H'(x) = 3P(x)\ P(x)'}$$

$$H(x)_{max} = 1.5849$$

$$H(x) = 3P(x)\log_2\frac{1}{P(x)}; \quad \frac{H(x)}{3} = P(x)\log_2\frac{1}{P(x)}$$

$$\cancel{2^{\left(\frac{H(x)}{3P(x)}\right)} = \frac{1}{P(x)}}$$

$$\cancel{\frac{H(x)}{3} = 2^{P(x)}\frac{1}{P(x)}}$$

$$1\quad H(x) = 3(-2e^{-ax_1}+1+e^{-ax_3})\log_2\frac{1}{-2e^{-ax_1}+1+e^{-ax_3}}$$

$$\cancel{P(x_1) = -e^{ax_2}+e^{-ax_1}}$$

$P(x_2) =$

$$P(x_1) = -e^{-ax_1}+1$$
$$P(x_2) = -e^{-ax_2}+e^{-ax_1}$$
$$P(x_3) = -e^{-ax_3}+e^{-ax_2}$$

$$-e^{-ax_1}+1 = -e^{-ax_2}+e^{-ax_1} \rightarrow -2e^{-ax_1} = -e^{-ax_2}-1$$

$$-2\cancel{e^{-ax}}$$

$$e^{-ax_2} = +2e^{-ax_1} - 1$$

$$P(x_1)+P(x_2)+P(x_3) = 1$$

$$\rightarrow -e^{-ax_3}+2e^{-ax_1}-1;$$

$$-\cancel{e^{-ax_3}}+ \quad -e^{-ax_1}+1+$$

$$-e^{-ax_1}+1 = -e^{-ax_2}+e^{-ax_1}$$
$$-e^{-ax_1}+1 = -e^{-ax_3}+e^{-ax_2}$$

$$e^{-ax_2} = 2e^{-ax_1}-1$$

$$e^{-ax_3} = e^{-ax_2}+e^{-ax_1}-1; \quad e^{-ax_3} = \underbrace{2e^{-ax_1}-1+e^{-ax_1}-1}_{3e^{-ax_1}-2}$$

$$\Rightarrow -ax_1 = -0.4054$$

$$x_1 = \frac{0.4054}{a}$$

$$e^{-ax_1} = \frac{2}{3}$$

$$-ax_1 = \log_e 2/3$$

$$-e^{-ax_1}+1-2e^{-ax_1}+1+e^{-ax_1}+(-3e^{-ax_1})+2+2e^{-ax_1}-1$$

$$-e^{-ax_1}+1 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$-3e^{-ax_1}+3 = 1 \Rightarrow$$

22 Sea n cualquier número natural y consideramos X_n definido por:

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} 2^{n-i} \cdot 3^i$$

Encuentra el valor de X_n.

Esto es:

$X_0 = 1$
$X_1 = 2 + 3$
$X_2 = 2^2 + 2.3 + 3^2$
$X_3 = 2^3 + 2^2.3 + 2.3^2 + 3^3$
$X_4 = 2^4 + 2^3.3 + 2^2.3^2 + 2.3^3 + 3^4$

Donde podemos generalizar

$U_n = 2U_{n-1} + 3^n$

Por tanto procedo a resolver esta recurrencia lineal no homogénea:

Su ecuación característica es: $X - 2 = 0$, Donde 2 es solución de multiplicidad 1:

$X_n^{(h)} = \alpha_0 2^n$ $\quad \alpha_0$ es una variable que depende de los valores de frontera.

3^n es una función ~~que da~~ compuesta de un polinomio de grado 0 y 3^n no siendo el 3 una solución del polinomio característico,

Por tanto: $X_n^{(P)} = \beta_0 3^n$ $\quad \beta_0$ es una incógnita, ~~resultado~~ despejable de la definición de la recurrencia:

$-2X_{n-1} = -\frac{2}{3}\beta_0 3^n$

* Esta recurrencia da solución general y particular igual a la del ejercicio 17,

por tanto $X_n = \alpha_0 2^n + 3^{n+1}$

Calculo la particular. $\boxed{X_n = -2 \cdot 2^n + 3^{n+1}}$

Ejercicios lógica proposicional

4 Sean α, β y δ fórmulas del lenguaje proposicional estándard. Demostrar que:

$$(((\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)) \to \gamma) \to \beta \models (\beta \to \alpha) \to (\delta \to \alpha)$$

Aplicando el teorema de la deducción dos veces $(\Gamma \models \beta \to \alpha \equiv \{\Gamma, \beta\} \models \alpha)$

$$\{(((\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)) \to \gamma) \to \beta,\ \beta \to \alpha,\ \delta\} \models \alpha$$

Esta implicación semántica es equivalente a comprobar que

$$\{(((\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)) \to \gamma) \to \beta,\ \beta \to \alpha,\ \delta,\ \neg\alpha\}$$ es insatisfacible

Escribo la forma clausular de cada fórmula:

i) $\beta \to \alpha \equiv \neg\beta \vee \alpha$

ii) $[((\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)) \to \gamma] \to \beta \equiv \neg[\neg((\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)) \vee \gamma] \vee \beta \equiv$

$\neg[\neg(\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\gamma \vee \neg\delta)) \vee \gamma] \vee \beta$

Aplicando leyes de Morgan:

$[(\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\gamma \vee \neg\delta)) \wedge \neg\gamma] \vee \beta \equiv [((\alpha \wedge \beta) \vee (\gamma \vee \neg\delta)) \wedge \neg\gamma] \vee \beta$

Aplicando que $\varphi \vee (\phi \wedge \psi) \equiv (\varphi \vee \phi) \wedge (\varphi \vee \psi)$:

$[((\alpha \vee \gamma \vee \neg\delta) \wedge (\beta \vee \gamma \vee \neg\delta)) \wedge \neg\gamma] \vee \beta \equiv (\beta \vee ((\alpha \vee \gamma \vee \neg\delta) \wedge (\beta \vee \gamma \vee \neg\delta))) \wedge (\neg\gamma \vee \beta)$

$\equiv ((\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \neg\delta) \wedge (\beta \vee \gamma \vee \neg\delta)) \wedge (\neg\gamma \vee \beta)$ Eliminando paréntesis:

$(\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \neg\delta) \wedge (\beta \vee \gamma \vee \neg\delta) \wedge (\neg\gamma \vee \beta)$

Por lo que nos queda comprobar la insatisfacibilidad del conjunto de cláusulas $\{(\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \neg\delta), (\beta \vee \gamma \vee \neg\delta), (\neg\gamma \vee \beta), (\neg\beta \vee \alpha), \delta, \neg\alpha\}$

Por el algoritmo de David Putman

↓ I literal Unit $\lambda = \neg\alpha$

$\{(\beta \vee \gamma \vee \neg\delta), (\neg\gamma \vee \beta), \neg\beta, \delta\}$

↓ I literal Unit $\lambda = \delta$

$\{(\beta \vee \gamma), (\neg\gamma \vee \beta), \neg\beta\}$

↓ I literal Unit $\lambda = \neg\beta$

$\{\gamma, \neg\gamma\}$ → II Descomposición $\lambda = \gamma$

$\square$

Al haber llegado a la cláusula vacía el conjunto de fórmulas es insatisfacible, y por tanto la implicación semántica es veraz.

[5] Consideremos las fórmulas del lenguaje proposicional estándar:

$\alpha = a \to (b \wedge \neg c)$ $\quad \beta = (a \leftrightarrow \neg b) \vee c$

Encuentre una fórmula $v(\gamma) = v(\alpha) + v(\alpha)v(\beta)$

Por las valoraciones sé que: $v(\psi \to \varphi) = v(\psi) + v(\psi).v(\varphi) + 1$ y que $v(\neg\psi) = v(\psi) + 1$

Por otro lado: $1 + 1 = 0$

Por tanto: $v(\neg(\psi \to \varphi)) = v(\psi) + v(\psi).v(\varphi)$ // valoración buscada

Sustituyendo ψ por α y φ por β:

$\gamma = \neg(\alpha \to \beta) = \neg\left[(a \to (b \wedge \neg c)) \to ((a \leftrightarrow \neg b) \vee c)\right]$

[6] En el lenguaje proposicional estándar, sea α la fórmula: $(a \to (b \to (c \to d))) \to ((a \to b) \to (a \to (c \to d)))$ Demuestre que α es tautología.

Para α sea tautología: $\models \alpha$;
Aplicando repetidamente la ley de la deducción:

$\{(a \to (b \to (c \to d)))\} \models ((a \to b) \to (a \to (c \to d))) \equiv$

$\{(a \to (b \to (c \to d))), (a \to b), a, c\} \models d$ Esta explicación semántica es equivalente a comprobar que $\{(a \to (b \to (c \to d))), (a \to b), a, c, \neg d\}$ es insatisfacible.

~~Empleando David Putman~~. Escribo en forma clausular:

i) $a \to b \equiv \neg a \vee b$

ii) $(\neg a \vee (\neg b \vee (\neg c \vee d))) \equiv (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d)$ // los paréntesis no son relevantes

Empleando el algoritmo de David Putmans:

$\{(\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d), (\neg a \vee b), a, c, \neg d\}$

$\downarrow$ I Clausula unit $\lambda = \neg d$

$\{(\neg a \vee \neg b \vee \neg c), (\neg a \vee b), a, c\}$

$\downarrow$ I Clausula unit $\lambda = c$

$\{(\neg a \vee \neg b), (\neg a \vee b), a\}$

$\downarrow$ I Clausula unit $\lambda = a$

$\{b, \neg b\}$

$\downarrow$ I Unit $\lambda = \neg b$

$\square$ Por tanto el conjunto de fórmulas es insatisfacible;

Por ser insatisfacible, nuestra fórmula α es tautología.

L PB2

7 Clasifique la siguiente fórmula del lenguaje stándar:

$\alpha = ((((a \vee b) \wedge \neg c) \to d) \wedge (\neg d \wedge (b \vee a))) \to (c \vee e)$

Dentro de clasificación una fórmula puede ser:
{ Tautología : para toda valoración es verdadera
Contradicción si $\neg \varphi$ es tautología
Satisfacible existe alguna valoración v tal que $v(\varphi)=1$
Refutable : si $(\neg \varphi)$ es satisfacible

Empezaré comprobando si $\models \alpha$, es decir si es tautología:
Aplicando repetidamente la regla de la deducción:

$\{ [(((a \vee b) \wedge \neg c) \to d) \wedge (\neg d \wedge (b \vee a))] \} \models (e \vee c)$ Esta implicación semántica es verdad si $\{ \_\_\_\_ , \neg(c \vee e) \}$ es insatisfacible

Escribo cada subfórmula en forma clausular: $a \to b \equiv \neg a \vee b$ y que $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ Leyes de Morgan

i) $[(\neg((a \vee b) \wedge \neg c) \vee d) \wedge (\neg d \wedge (a \vee b))] \equiv$

$[(\neg(a \vee b) \vee c) \vee d) \wedge (\neg d \wedge (a \vee b))] \equiv [((\neg a \wedge \neg b) \vee c) \vee d) \wedge (\neg d \wedge (a \vee b))] =$

$\equiv [((\neg a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee d)) \wedge ((a \vee \neg d) \wedge (b \vee \neg d))] \equiv$

$[(\neg a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (a \vee \neg d) \wedge (b \vee \neg d)$

ii) $\neg(c \vee e) \equiv \neg c \wedge \neg e$

Aplicando el algoritmo de David Putman:

$\{(\neg a \vee c \vee d), (\neg b \vee c \vee d), (a \vee \neg d), (b \vee \neg d), \neg c, \neg e\}$

$\downarrow$ I Clausula Unit $\neg e = \lambda$ y $\lambda = \neg c$

$\{(\neg a \vee d), (\neg b \vee d), (a \vee \neg d), (b \vee \neg d)\}$

$\lambda = d$ $\downarrow$ II Descomposición $\lambda^c = \neg d$

$\{(\neg a, \neg b\}$ $\{a, b\}$

Reglas Unit $\downarrow$ $\lambda = \neg a, \lambda = \neg b$

$\emptyset$ Por tanto nuestra fórmula no es tautología, analicemos todas las clausulas por David Putman:

$\boxed{7}$ $\varphi = (((((a \vee b) \wedge \neg c) \to d) \wedge (\neg d \wedge (b \vee a))) \to (c \vee e))$

Escribo en forma clausular: (Utilizo $\psi \to \phi \equiv \neg\psi \vee \phi$ y Leyes de Morgan)

$\varphi \equiv \neg((\neg((a \vee b) \wedge \neg c) \vee d) \wedge (\neg d \wedge (b \vee a))) \vee (c \vee d)$ // Morgan

Morgan

$\varphi \equiv (\neg(\neg((a \vee b) \wedge \neg c) \vee d) \wedge \neg(\neg d \wedge (b \vee a))) \vee (c \vee d)$ M

$((((a \vee b) \wedge \neg c) \wedge d) \wedge (d \vee \neg(b \vee a))) \vee (c \vee d)$ Morgan.

Quitar paréntesis

$(((a \vee b) \wedge \neg c \wedge d) \wedge (d \vee (\neg b \wedge \neg a))) \vee (c \vee d)$

Distributiva distributiva

$((((a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c)) \wedge d) \wedge ((\neg b \vee d) \wedge (\neg a \vee d))) \vee (c \vee d)$

Distributiva

$((((a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c)) \wedge d) \vee (c \vee d) \wedge ((\neg b \vee d) \wedge (\neg a \vee d)) \vee (c \vee d))$ Distributiva

$\equiv ((((a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c)) \wedge d) \vee (c \vee d) \wedge ((\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee d)))$

$\equiv (((a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c) \vee (c \vee d)) \wedge (c \vee d)) \wedge ((\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee d)))$

$\equiv (((a \vee \neg c \vee c \vee d) \wedge (b \vee c \vee \neg c \vee d) \wedge (c \vee d)) \wedge ((\neg b \vee c \vee d)$

Puedo eliminar paréntesis, en modo clausular resulta

$\{(a \vee \neg c \vee c \vee d), (b \vee c \vee \neg c \vee d) \wedge (c \vee d), (\neg b \vee c \vee d), (\neg a \vee c, d)\}$ Aplicando Davis Putnam

Elimino Tautologías $(\alpha \vee \neg \alpha)$ $\{(c \vee d), (\neg b \vee c \vee d), (\neg a \vee c \vee d)\}$

$\downarrow$ I Regla literal pura: $\lambda = c$

$\emptyset$

$\uparrow$

Satisfacible.

$f: A \to B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ Examen $\boxed{3}$

$\Gamma' \models \{\}$

$f_*(X) = \{f(x) : x \in X\}$ $Con(\Gamma')$.

$f^*(Y) = \{x : f(x) \in Y\}$.

4/0.0

1) Sabemos que $\Gamma', \alpha \wedge \beta \models \gamma$ sii $\Gamma', \alpha, \beta \models \gamma$. Por tanto.

$$Con(\Gamma' \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = Con(\Gamma' \cup \{\alpha, \beta\})$$

2) Sea $\Gamma' \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de fórmulas

Demostremos que $Con(\Gamma', \alpha \vee \beta) \subseteq Con(\Gamma', \alpha)$

Sea $\varphi \in Con(\Gamma', \alpha \vee \beta)$ (1) y sea v tq

$$v_*(\Gamma' \cup \{\alpha\}) = \{1\}.$$

Se tiene entonces que $v(\alpha \vee \beta) = 1$, con lo que $v_*(\Gamma' \cup \{\alpha \vee \beta\}) = \{1\}$ y en consecuencia, por (1), $v(\varphi) = 1$, Se tiene que $\varphi \in Con(\Gamma', \alpha)$

Como $\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$, lo demostrado demuestra que $Con(\Gamma', \alpha \vee \beta) \subseteq Con(\Gamma', \beta)$. y por tanto $Con(\Gamma', \alpha \vee \beta) \subseteq Con(\Gamma', \alpha) \cap Con(\Gamma', \beta)$

Pero ocurre que $Con(\Gamma', \alpha) \cap Con(\Gamma', \beta) \subseteq Con(\Gamma', \alpha \vee \beta)$

En efecto, sea $\gamma \in Con(\Gamma', \alpha) \cap Con(\Gamma', \beta)$ y sea v tal que $v_*(\Gamma' \cup \{\alpha \vee \beta\}) = \{1\}$, por lo que sabemos que $v(\alpha \vee \beta) = 1$, por lo que $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$. En el primer caso, acontece que $v_*(\Gamma' \cup \{\alpha\}) = \{1\}$, por lo que $v(\gamma) = 1$ (ya que $\gamma \in Con(\Gamma', \alpha)$)

y en el segundo que $v_*(\Gamma' \cup \{\beta\}) = \{1\}$ por lo que $\underline{v(\gamma)} = 1$, ya que $\gamma \in Con(\Gamma', \beta)$.

Por doble inclusión tenemos lo que queríamos

$\boxed{8}$ Estudie si cada una de las siguientes implicaciones semánticas es cierta o no. Cuando no lo sea encuentre una asignación de variables que lo revele.

a) $(a\wedge\neg b)\to(a\vee c)\models((\neg a\vee b)\to(a\vee c))\to(a\vee c)$

b) $(a\vee d)\to(b\to c)\models((a\vee d)\to\neg b)\to\neg c$

a) Aplicando el teorema de la deducción reiteradamente:

$\{\neg(a\wedge\neg b)\vee(a\vee c), ((\neg a\vee b)\to(a\vee c)), a\}\models(c\vee a)$ que esta implicación sea cierta $\{\neg(a\wedge\neg b)\vee(a\vee c), ((\neg a\vee b)\to(a\vee c))\ \neg(a\vee c)\}$

para cada valoración implicaría que $\{\neg(a\wedge\neg b)\vee(a\vee c)$, $((\neg a\vee b)\to(a\vee c)$ sea insatisfacible.

Escribo en modo clausular:

i) $((\neg a\vee b)\vee(a\vee c))\underset{M}{\equiv}(a\vee\neg a\vee b\vee c)$

ii) $\neg(\neg a\vee b)\vee(a\vee c))\equiv((a\wedge\neg b)\vee(a\vee c))\overset{D}{\equiv}((a\vee c)\wedge(a\vee\neg b\vee c))$

iii) $\neg a\wedge\neg c$; es tautología.

Aplico algoritmo de David Putnam:

$\{(a\vee c), (a\vee\neg b\vee c), \neg a, \neg c\}$

$\downarrow$ I cláusula unit $\lambda=\neg a$

$\{c, (a\vee\neg b)\ \{\cancel{\neg c}\}$

$\downarrow$ I cláusula unit $\lambda=\neg c$

La cláusula $\square$

Por ser vacía a) es tautología.

b) $(a\vee d)\to(b\to c)\models((a\vee d)\to\neg b)\to\neg c$ T^a deducción $\{(a\vee d)\to(b\to c), ((a\vee d)\to\neg b)\}\models\neg c$

Esta implicación semánti. es ~~satisfacible~~ cierta si $\{(\ldots), c\}$ es insatisfacible.

Escribo en forma clausular:

i) $(a\vee d)\to(b\to c)\equiv(\neg a\wedge\neg d)\vee(\neg b\vee c)\equiv(\neg a\vee\neg b\vee c)\wedge(\neg b\vee c\vee\neg d)$

ii) $(\neg a\wedge\neg d)\vee\neg b\equiv(\neg a\vee\neg b)\wedge(\neg b\vee\neg d)$

iii) c Aplicando David Putnam

$\{(\neg a\vee\neg b\vee c), (\neg b\vee c\vee\neg d), (\neg a\vee\neg b), (\neg b\vee\neg d), c\}$

$\downarrow$ I Cláusula Unit $\lambda=c$

$\{(\neg a\vee\neg b), (\neg b\vee\neg d)\}$

$\downarrow$ II literal puro $\lambda=\neg b$

$\emptyset$

Satisfacible, por tanto "b)" no es tautología.

Un ejemplo de asignación sería:

a	b	c	d
0	0	1	0

9 Sea $\Gamma = \{(\neg a \vee a \vee c), (b \vee c), (\neg a \vee c \vee d \vee e), (\neg e), (a \vee \neg c \vee \neg d), (\neg a \vee \neg d),$
$(c \vee \neg d), (a \vee d), (\neg c \vee d)\}$ Decida si es satisfacible.

Ignorando las tautologías: aplico Algoritmo de David Putman

$\{(b \vee c), (\neg a \vee c \vee d \vee e), (\neg e), (a \vee \neg c \vee \neg d), (\neg a \vee \neg d), (\neg c \vee d), (c \vee \neg d), (a \vee d)\}$

$\downarrow$ I Cláusula Unit $\lambda = \neg e$

$\{(b \vee c), (\neg a \vee c \vee d), (a \vee \neg c \vee \neg d), (\neg a \vee \neg d), (\neg c \vee d), (c \vee \neg d), (a \vee d)$

$\downarrow$ III ~~Descom~~ literal puro $\lambda = b$

$\{(\neg a \vee c \vee d), (a \vee \neg c \vee \neg d), (\neg a \vee \neg d), (\neg c \vee d), (c \vee \neg d), (a \vee d)$

$\lambda = d$ $\quad\downarrow$ III Descomposición $\quad \lambda^c = \neg d$

$\lambda = d$	$\lambda^c = \neg d$
$\{(\neg a \vee c), (\neg c), a\}$	$\{(a \vee \neg c), \neg a, c\}$
$\downarrow$ I Cláusula Unit $\lambda = a$	$\downarrow$ Unit $\lambda = c$
$\{c, \neg c\}$	$\{a, \neg a\}$
$\downarrow$ I Unit $\lambda = c$	$\downarrow$ Unit $\lambda = a$
$\square$	$\square$

Por no haber ninguna rama $\emptyset$ este conjunto es insatisfacible.

Lp 4

Ejercicio examen 4

Estudie si el siguiente conjunto de ~~fórmulas~~ cláusulas es o no satisfacible, en caso de serlo de asignación que lo evidencie.

$\{ \neg a \vee c \vee f,\ b \vee c \vee f,\ b \vee \neg c \vee f,\ \neg b \vee f,\ a \vee \neg b \vee f,$
$\neg a \vee d \vee f,\ d \vee f,\ b \vee d \vee e \vee \neg f,\ b \vee \neg d \vee e \vee \neg f,$
$b \vee \neg c \vee \neg f,\ a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg f,\ \neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg f \}$

$\lambda = f$ III Descomposición

$\{ \neg a \vee c,\ b \vee c,\ b \vee \neg c,\ \neg b$
$a \vee \neg b,\ \neg a \vee d,\ d \}$

$\downarrow$ I cláusula Unit
$\lambda = \neg b$

$\{ \neg a \vee c,\ c,\ b \vee \neg c,$
$\neg a \vee d,\ d \}$

$\downarrow$ I Cláusula Unit

$\lambda = c$

$\{ b,\ \neg a \vee d,\ d \}$

$\downarrow$ I cláusula Unit λb

$\{ \neg a \vee d,\ d \}$

$\downarrow$ I cláusula Unit
$\lambda = d$

$\emptyset$

Por haber hallado $\emptyset$ ~~este~~ conjunto es satisfacible.

Siendo una asignación: $\forall x \in \{1, 0)$

a	b	c	d	e	f
x	1	1	1	x	1

12 Sean las siguientes fórmulas del lenguaje proposicional standar:

a) $\gamma_1 = (a \vee b) \to (c \vee d)$

b) $\gamma_2 = (\neg a \wedge \neg d) \to (\neg c \wedge (c \vee e))$

c) $\gamma_3 = a \to (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b))$

d) $\varphi = (d \to (b \vee a)) \to (d \wedge \neg(a \vee \neg b))$

Estudia si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \models \varphi$ y caso de NO serlo, dé una asignación de variables que lo evidencie.

Escribo γ_i en forma normal conjuntiva, para obtener el conjunto de cláusulas.

$$\gamma_1 \equiv \neg(a \vee b) \vee (c \vee d) \equiv (\neg a \wedge \neg b) \vee (c \vee d) \equiv (\neg a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee d)$$

$$\gamma_2 \equiv (a \vee d) \vee (\neg c \wedge e)$$

$$\gamma_2 \equiv (a \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee d \vee e)$$

$$\gamma_3 = \neg a \vee (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b)) = (\neg a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg d)$$

Procedo de igual manera con $\neg\varphi$:

$$\neg\varphi \equiv \neg((d \to (b \vee a)) \to (d \wedge \neg a \wedge b)) \equiv$$

$$\neg\varphi \equiv \neg(\neg(\neg d \vee (b \vee a)) \vee (d \wedge \neg a \wedge b)) \equiv (\neg d \vee (a \vee b)) \wedge \neg(\neg a \wedge b \wedge d) \equiv$$

$$\equiv (a \vee b \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg d)$$

$\{\neg a \vee c \vee d,\ \neg b \vee c \vee d,\ a \vee \neg c \vee d,\ a \vee d \vee e,\ \neg a \vee \neg c,\ \neg a \vee \neg b,\ \neg a \vee b \vee \neg d,\ \neg d \vee b \vee a,\ \neg d \vee \cancel{a \vee \neg b}\}$ Literal puro $\lambda = e$,

$\lambda = a$ | División

$\{\neg c \vee d,\ \neg d \vee b,\ \neg d \vee \neg b,\ \neg b \vee c \vee d\}$

λb

$\{\neg c \vee d,\ \neg d\}$

$\downarrow$

$\{\neg c\}$

$\downarrow$

$\emptyset$

a	b	c	d	e
0	0	0	0	1

NOCIONES SOBRE RETÍCULOS Y ÁLGEBRAS DE BOOLE

$\boxed{1}$ Sean m y n números naturales no nulos. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $D(m) \times D(n)$ es isomorfo a $D(mn)$

b) $(m, n) = 1$

$\boxed{4}$ Minimice la función de conmutación $f(a,b,c,d) = \prod(0,1,2,3,4,6,15)$.

ab \ cd	00	01	11	10
00	0_{0}	0_{1}	0_{3}	0_{2}
01	0_{4}	1_{5}	1_{7}	0_{6}
11	1_{12}	1_{13}	0_{15}	1_{14}
10	1_{8}	1_{9}	1_{11}	1_{10}

$$\cancel{F(a,b,c,d) = (a+b)\cdot(a+d)\cdot(a+b+c+d)}$$

$$f(a,b,c,d) = (a+b)\cdot(a+d)\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})$$

$\boxed{5}$ Minimice la función de conmutación $f(a,b,c,d) = \sum(0,1,2,3,4,6,7,8,9,11,15)$ mediante el algoritmo de Quine-McCluskey y el de los mapas K.

Mediante mapas K

ab \ cd	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{1}	1_{3}	1_{2}
01	1_{4}	0_{5}	1_{7}	1_{6}
11	0_{12}	0_{13}	1_{15}	0_{14}
10	1_{8}	1_{9}	1_{11}	0_{10}

B A

$$f(a,b,c,d) = cd + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}c + \cancel{\bar{a}\bar{c}d}\ \bar{a}\bar{d}.$$

Escrito en binario

1: 0001
2: 0010
3: 0011
4: 0100
6: 0110
7: 0111
8: 1000
9: 1001
~~10: 1010~~
11: 1011
15: 1111

Mediante el algoritmo de Quine-McCluskey

Tablas implicantes-0

Nº Dígitos con 1	Implicante-0	patrón
0	0	0000 ✓
1	1	0001 ✓
	2	0010 ✓
	4	0100 ✓
	8	1000 ✓
2	3	0011 ✓
	6	0110 ✓
	9	1001 ✓
3	7	0111 ✓
	11	1011 ✓
4	15	1111 ✓

Implicante-1	Patrón
{0,1}	000- ✓
{0,2}	00-0 ✓
{0,4}	0-00 ✓
{0,8}	-000 ✓
{1,3}	00-1 ✓
{1,9}	-001 ✓
{2,6}	0-10 ✓
{2,3}	001- ✓
{4,6}	01-0 ✓
{8,9}	100- ✓
{3,7}	0-11 ✓
{3,11}	-011 ✓
{6,7}	011- ✓
{9,11}	10-1 ✓
{7,15}	-111 ✓
{11,15}	1-11 ✓

Implicante -2	Patrón	
{0,1,2,3}	0 0 – –	X
{0,1,8,9}	– 0 0 –	X
{0,2,4,6}	0 – – 0	X
{1,3,9,11}	– 0 – 1	X
{2,3,6,7}	0 – 1 –	X
{3,7,11,15}	– – 1 1	X

Implicante -3	Patrón

Dominación por filas

	0	1	2	3	4	6	7	8	9	11	15	a b c d
{0,1,2,3}												
✓ {0 1 8 9}	x	x						x	x			– 0 0 –
✓ {0 2 4 6}	x		x		x	x						0 – – 0
{1 3 9 11}												
{2 3 6 7}												
✓ 3 7 11 15				x			x			o	o	– – 1 1
Total	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	

Patrones de los escogidos en letras $\boxed{f(a,b,c,d) = \bar{b}\cdot\bar{c} + \bar{a}\cdot\bar{d} + c\cdot d}$

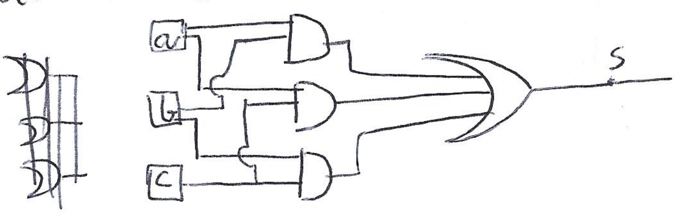
AB 3

$\boxed{8}$ Comité formado por tres personas. Cada uno vota sí o no. Una respuesta prospera cuando la votan un mínimo de dos personas.

	bc: 00	01	11	10
a = 0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$f(a,b,c) = bc + ac + ab$$

Diseño del circuito



$\boxed{12}$ Diseñe un circuito con una entrada binaria de cinco bits, digamos (a,b,c,d,e), que produzca salida alta sii detecta un primo.

16, 8, 4, 2, 1

Tabla de salida

Numero	binario	salida (si es primo)
0	00000	0
1	00001	0
2	00010	1
3	00011	1
4	00100	0
5	00101	1
6	00110	0
7	00111	1
8	01000	0
11	01011	1
13	01101	1
15	01111	0
…	…	…
17	10001	1
19	10011	1
23	10111	1
29	11101	1
31	111111	1

Por el método de Quine - Mc Cluskey.

D°	Implicants – 0	patrón	
1	2	00010	✓
2	3	00011	✓
	5	00101	✓
	17	10001	✓
3	7	00111	✓
	11	01011	✓
	13	01101	✓
	19	10011	✓
4	23	10111	✓
	29	11101	✓
5	31	11111	✓

Implicants – 3	patrón
{3,7,19,23}	–0–11

Implicants – 1	patrón	
{2,3}	0001–	×
{3,7}	00–11	✓
{3,11}	0–011	× ✓
{3,19}	–0011	
{5,13}	0–101	×
{17,19}	100–1	×
{7,23}	–0111	✓
{13,29}	–1101	×
{19,23}	10–11	✓
{23,31}	1–111	×
{29,31}	111–1	×

tabla de implicants primos

		2	3	5	7	11	13	19	23	17	29	31
$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$ ←	{2,3}	×	×									
$\bar{a}\bar{c}de$ ←	{3,11}		×			×						
$\bar{a}c\bar{d}e$ ←	{5,13}			×			×					
$a\bar{b}\bar{c}e$ ←	{17,19}							×		×		
	{13,23}											
	{23,31}										×	×
abc_e ←	{29,31}											
$\bar{b}de$ ←	{3,7,19,23}		×		×			×	×			
		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

$$\boxed{f(a,b,c,d,e) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{c}de + \bar{a}c\bar{d}e + a\bar{b}\bar{c}e + abce}$$

LPO 1

$\boxed{3}$ Calcular la interpretación de las siguientes fórmulas de las L-estructuras.

a) $\forall x \forall y\, e(f(x,y), f(y,x))$ en las L-structuras.

1) A definida por:

$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ $\quad (f)^A(x,y) = \begin{cases} x+y & , \text{si } x+y \in A \\ x & , \text{en otro caso.} \end{cases}$

$(e)^A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(5,5),(6,6),(7,7),(1,7)(7,1),(2,6),(6,2)$

$(3,5),(5,3)\}$;

Cada casilla $\langle f(x,y), f(y,x)\rangle$

y \ x	1	2	3	4	5	6	7
1	⟨2,2⟩	⟨3,3⟩	⟨4,4⟩	⟨5,5⟩	⟨6,6⟩	⟨7,7⟩	⟨7,1⟩
2	3,3	⟨4,4⟩	⟨5,5⟩	⟨6,6⟩	⟨7,7⟩	⟨6,2⟩	⟨7,3⟩
3					⟨5,3⟩	⟨6,3⟩	
4							
5							
6							

Relación no definida

por tanto $I_A = 0$

2) B definida por:

$\left.\begin{array}{l} B = M_3(\mathbb{R}) \\ (f)^B(x,y) = xy \\ (e)^B = \Delta(B) \end{array}\right\}$ $\quad I_B = 1$ Entiendo con Δ por todas las posibles combinaciones

$\boxed{4}$ Determinar carácter (satisfacible y refutable, universalmente válido, contradicción) de las siguientes fórmulas de primer orden:

a) $\forall x\ \forall y\ (p(x,y) \rightarrow p(y,x))$ Relación de simetría: satisfacible y refutable

Ejemplo refutable: relación ser menor o igual, satisfacible: múltiplos comunes.

b) $(\forall x \exists y (p(x,y) \rightarrow p(y,x))) \rightarrow (\exists x \exists y (p(x,y) \rightarrow p(y,x)))$

¿Si se toman las x del $\{\emptyset\}$, entonces satisfacible y refutable

c) $\forall x \forall y\ (p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x))$ Satisfacible y refutable

Ejemplo satisfacibilidad: Ejemplo refutable.

La relación menor estricto. Relación igualdad

(En el ámbito de los números naturales)

d) $\forall x \exists y\ (p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x))$

Esto sería universalmente válido para la relación de números naturales ~~menor o i~~ estricto.

Demuestre que:

$$\models (\forall x\, \alpha \vee \forall x\, \beta) \to \forall x\, (\alpha \vee \beta)$$

y sin embargo no es cierto, en general:

$$\models \forall x (\alpha \vee \beta) \to (\forall x \alpha \vee \forall x \beta)$$

Sol

Sea $\langle \mathcal{A}, v \rangle$ una interpretación del lenguaje, fija pero arbitraria,

Sup. que $I_{\mathcal{A}}^{v}((\forall x \alpha) \vee \forall x \beta)) = 1$ (pues si fuese igual a 0, nuestra labor habría concluido)

o sea, que $I_{\mathcal{A}}^{v}(\forall x \alpha) = 1$ o $I_{\mathcal{A}}^{v}(\forall x \beta) = 1$

Supongamos pues que $I_{\mathcal{A}}^{v}(\forall x \alpha) = 1$, o sea, que para todo $a \in A$, $I_{\mathcal{A}}^{v(x|a)}(\alpha) = 1$.

Entonces, para todo $a \in A$, $I_{\mathcal{A}}^{v(x|a)}(\alpha \vee \beta) = 1$

o equivalentemente $I_{\mathcal{A}}^{v}(\forall x (\alpha \vee \beta)) = 1$.

El caso $I_{\mathcal{A}}^{v}(\forall x \beta) = 1$ se trata análogamente.

Lo demostrado para un caso que no tiene nada en particular, vale para todos.

$\alpha = r(x) \qquad \beta = q(x).$

$\mathcal{A}$

$A = \{0, 1\}$

$(r)^{\mathcal{A}} = \{0\}$

$(q)^{\mathcal{A}} = \{1\}$

Sea cual sea la asignación v,

$$I^{v}_{\mathcal{A}}(\forall x\,(r(x) \vee q(x))) = 1.$$

Sin embargo

$I^{v}_{\mathcal{A}}(\forall x\, r(x)) = 0$, pues $(r)^{\mathcal{A}} \subsetneq A$

y en particular $1 \notin (r)^{\mathcal{A}}$.

y análogamente $I^{v}_{\mathcal{A}}(\forall x\, q(x)) = 0$, por lo que $I^{v}_{\mathcal{A}}(\forall x\, r(x) \vee \forall x\, q(x)) = 0$.

así pues

$$\not\models \forall x\,(r(x) \vee q(x)) \rightarrow (\forall x\, r(x) \vee \forall x\, q(x))$$

Demostre que

$$\models \exists x(\alpha \wedge \beta) \to (\exists x\, \alpha \wedge \exists x\, \beta)$$

Sea $\langle A, \sigma \rangle$ una interpretación del lenguaje fija pero arbitraria.

Supongamos que $I_A^{\sigma}(\exists x(\alpha \wedge \beta)) = 1$, (En el caso $\sigma := 0$) nuestra labor habría concluido.

$\exists x(\alpha \wedge \beta)$ entonces $a \in A$ $I_A^{\sigma(x|a)}(\alpha \wedge \beta) = 1$

por tanto $I_A^{\sigma(x|a)}(\exists x\, \alpha) = 1$ y $I_A^{\sigma(x|a)}(\exists x\, \beta) = 1$

Lo que equivale que a que $I_A^{\sigma(x|a)}(\exists x\alpha \wedge \exists x\, \beta) = 1$

Lo demostrado para un caso que no tiene nada en particular, vale para todos.

Ejercicios sobre forma prenexa

3

a) $\models \varphi = (\forall x \alpha \vee \forall x \beta) \to \forall x (\alpha \vee \beta)$

$\varphi \overset{(I)}{\equiv} \neg(\forall x \alpha \vee \forall x \beta) \vee \forall x (\alpha \vee \beta) \equiv$

$\overset{E}{\equiv} \neg(\neg\exists x \neg\alpha \vee \neg\forall x \neg\beta) \vee \forall x (\alpha \vee \beta) \equiv$

$\equiv \neg\neg\exists x (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \forall x (\alpha \vee \beta) \equiv$

1º Forma prenexa

2º Forma Skolem

Clausulas

Útil

(I) $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

(M) leyes Morgan

$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$

(E) $\neg\forall x \psi = \exists x \neg\psi$

(S) $\forall x \varphi \wedge \forall x \psi = \forall x (\varphi \wedge \psi)$

$\boxed{4}$ Encontrar una fórmula en forma prenexa cuya matriz esté expresada como conjunción de disyunciones de literales y que sea lógicamente equivalente a la siguiente

a) $\varphi \equiv (\forall x \exists y\ p(x,y) \wedge (\exists y\, q(y) \rightarrow q(a))) \vee \forall y (\exists y \forall x\ p(x,y) \vee \exists z\ p(y,a))$

- Como z no ocurre en $\exists z\ p(y,a)$ esto es equivalente a $p(y,a)$
- Escribo la implicación de la forma $\psi \rightarrow \phi \equiv \neg \varphi \vee \phi$

$\mathrm{I} \equiv (\forall x \exists y\ p(x,y) \wedge (\neg \exists y q(y) \vee q(a))) \vee \forall y (\exists y \forall x\ p(x,y) \vee p(y,a))$

- $\neg \exists y\, \varphi \equiv \forall y \neg \varphi$, como y no ocurre en $q(a)$
- Como x no ocurre en $p(y,a)$

$\mathrm{II} \equiv (\forall x \exists y\ p(x,y) \wedge \forall y (\neg q(y) \vee q(a))) \vee \forall y \forall x (\exists y\ p(x,y) \vee p(y,a))$

- Renombro $\neg q(\cancel{x})$ $(y|x)$, saco $\exists y$ ya que no ocurre en $\forall x\ (\neg q(y) \vee q(a))$ y saco factor común en $\forall x$.
- Renombro $(y|z)$ en $\exists y\ p(x,y)$, lo saco:

III $\exists y \forall x (p(x,y) \wedge (\neg q(x) \vee q(a))) \vee \forall y \forall x \exists z (p(x,z) \vee p(y,a))$

- $(y|t)$ en $p(y,a)$
- Saco $\exists y$ e $\exists z$, ya que no ocurren en el otro miembro disyunción

IV $\exists y \exists z ((\forall x\ p(x,y) \wedge (\neg q(x) \vee q(a))) \vee (\forall y \forall x\ (p(x,z) \vee p(y,a)))$

- En segundo miembro disyunción $(y|x)$ y (x,w)
- Puesto que x no ocurre libremente en en segundo miembro ni tampoco w en el primero puedo sacarlos.

V: $\exists y \exists z \forall x \forall w ((p(x,y) \wedge (\neg q(x) \vee q(a))) \vee (p(w,z) \vee p(w,a)))$

- Aplico que $\varphi \wedge (\phi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \phi) \wedge (\varphi \vee \psi)$

VI : $\underline{\exists y\ \exists z}\ \underline{\forall x \forall w} ((p(x,y) \vee \neg q(x)) \wedge (p(x,y) \vee q(a))) \vee (p(w,z) \vee p(w,a))$

¿puedo eliminar uno?

VII: $\exists y \exists z \forall x \forall w ((p(x,y) \vee \neg q(x) \vee p(w,z) \vee p(w,a)) \wedge (p(x,y) \vee q(a) \vee p(w,z) \vee p(w,a))$

4 Escribe fórmula equivalente, expresada en forma prenexa y como conjunción de disyunciones. Lpo 3

b) $(\forall x (r(x) \vee \exists y \forall x\, p(x,y)) \vee \exists x\, q(x,y)) \wedge (\exists z\, r(z) \to \forall x (r(x) \wedge \forall x\, p(x,a)))$

- En conjunción de la izquierda:
  - Puedo sacar $\exists y$, renombro $(x|t)$. La saco ya que no ocurre. $(x|w)$ en $\exists x\, q(w,y)$, la saco.
- En miembro derecha:
  - $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$, renombro $(x|v)$ en $\forall x (p(x)(\dots)$ renombro $(x|m)$ en $\forall x\, p(x,a)$

I $(\forall x \exists y \forall t \exists w (r(x) \vee p(t,y)) \vee q(w,y)) \wedge (\neg \exists z\, r(z) \vee (r(v) \wedge \forall m\, p(m,a)))$

- Propiedad asociativa en disyunción $\to$ elimino paréntesis
- $\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$, saco $\forall z$ y $\forall m$ reiteradamente, distributiva

II $\forall x \exists y \forall t \exists w (r(x) \vee p(t,y) \vee q(w,y)) \wedge \forall z \forall m ((r(z) \vee r(v)) \wedge (r(z) \wedge p(m,a))$

Puedo sacarlo todo.

III $\forall x \exists y \forall t \exists w \forall z \forall m (r(x) \vee p(t,y) \vee q(w,y)) \wedge ((r(z) \vee r(v)) \wedge (r(z) \wedge p(m,a))$

c) $\forall x\, p(x,y) \to (\forall y\, p(y,x) \to \forall x (q(x) \wedge \exists y \forall z\, r(a,y,z)))$

- Equivalencia en implicaciones $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
- $\neg \forall_x \phi \equiv \exists x \neg \phi$

I: $\exists x \neg p(x,y) \vee (\exists y \neg p(y,x) \vee \forall x (q(x) \wedge \exists y \forall z\, r(a,y,z)))$

- Saco $\exists y$ y $\forall z$, ya que no ocurren en $q(x)$

II: $\exists x \neg p(x,y) \vee (\exists y \neg p(y,x) \vee \forall x \exists y \forall z (q(x) \wedge r(a,y,z)))$

- Puedo sacar $\exists y$ por no ocurrir libremente en y $(x|t)$ en $\forall x (q(x) \wedge r(a,y,z))$

III: $\exists x \neg p(x,y) \vee \exists y \forall t \forall z (\neg p(y,x) \vee (q(x) \wedge r(a,y,z)))$

Renombro: $(x|w)$ en $\exists x \neg p(x,y)$ y $(y|w)$ en $\exists y \forall t \forall z (\neg p(y,x) \vee (q(x) \wedge r(a,y,z)))$
La saco

IV: $\exists w (\neg p(w,y) \vee \forall t \forall z (\neg p(w,x) \vee (q(x) \wedge r(a,w,z)))$

- Como $\forall t$ y $\forall t$ no ocurren en $\neg p(w,y)$ puedo sacarlos, aplico antes distrib

V: $\exists w \forall t, \forall z (\neg p(w,y) \vee ((\neg p(w,x) \vee q(x)) \wedge (\neg p(w,x) \vee r(a,w,z))) \equiv$

$\equiv \exists w \forall t \forall z ((\neg p(w,y) \vee \neg p(w,x) \vee q(x)) \wedge (\neg p(w,y) \vee \neg p(w,x) \vee r(a,w,z))$

d) $(\forall x\, p(a,x) \vee \forall x\, p(x,a)) \to (\forall z\, p(x,z) \wedge \forall w \forall y\, (p(a,y) \to \exists z\, q(z)))$

· Implicaciones $\varphi \to \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$

I: $\neg(\forall x\, p(a,x) \vee \forall x\, p(x,a)) \vee (\forall z\, p(x,z) \wedge \forall w \forall y\, (\neg p(a,y) \vee \exists z\, q(z)))$

· Leyes Morgan y que $\neg \forall x \psi \equiv \exists x \neg \psi$

· Renombro $(z|y)$ en $\forall z\, p(x,z)$, saco la $\forall y$; Saco $\exists z$, reiteradamente.

· Como $\forall w$ no ocurren en $\forall y\, (\neg p(a,y) \vee \exists z\, q(z))$, la quito.

II: $(\exists x \neg p(a,x) \wedge \exists x \neg p(x,a)) \vee \forall y \exists z\, (p(x,y) \wedge (\neg p(a,y) \vee q(z)))$

· Renombro $(x|z)$ en $\exists x \neg p(a,x)$

· Saco $\exists z$ y $\exists x$ en $\exists z \neg p(a,z) \wedge \exists x \neg p(x,a)$ ya que no ocurren.

· Propiedad distributiva.

III $\exists z \exists x\, (\neg p(a,z) \wedge \neg p(x,a)) \vee \forall y \exists z\, ((p(x,y) \vee \neg p(a,y)) \wedge (p(x,y) \vee q(z)))$

· Saco factor común $\exists z$ y saco $\forall y$, ya que no ocurre libremente.

→ IV: $\exists z \forall y\, (\exists x\, (\neg p(a,z) \wedge p(x,a)) \vee ((p(x,y) \vee \neg p(a,y)) \wedge (p(x,y) \vee q(z))))$
¿Renombro x?

· Como x no ocurre en $((p(x,y) \vee \neg p(a,y)) \wedge (p(x,y) \vee q(z))$

V: $\exists z \forall y \exists x\, (\neg p(a,z) \wedge p(x,a)) \vee ((p(x,y) \vee \neg p(a,y)) \wedge (p(x,y) \vee q(z)))$

· Propiedad distributiva, reiteradamente.

VI: $\exists z \forall y \exists x\, ((\neg p(a,z) \vee p(x,y) \vee \neg p(a,y)) \wedge (\neg p(a,z) \vee q(x,y) \vee q(z)) \wedge$

$\wedge (p(x,a) \vee p(x,y) \vee \neg p(a,y)) \wedge (p(x,a) \vee p(x,y) \vee q(z)))$

e) $\forall x \forall z ((\forall z\, p(x,z) \wedge \forall x\, p(x,z)) \rightarrow \forall x (\exists y\, p(x,y) \vee \forall x\, q(x))$

- Equivalencia de implicación $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$
- Equivalencia $\neg \forall x\, \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$
- Renombro $(x|t)$ en $\forall x\, q(x)$
- Puedo sacar $\exists y$ ya que no ocurre en $\forall x\, q(x)$

I: $\exists x \exists z ((\exists z \neg p(x,z) \vee \exists x \neg p(x,z)) \vee \forall x \exists y (p(x,y) \vee \forall t\, q(t))$

- Saco $\forall t$ ya que no ocurre en $p(x,y)$.
- Renombro $(y|z)$ en $\exists y (p(x,y) \vee \forall t\, q(t))$
- Saco factor común $\exists y$
- Renombro $(x|w)$ en $\exists x \neg p(w,z)$

II: $\exists z (\exists x ((\exists z \neg p(x,z) \vee \exists w \neg p(w,z)) \vee \forall x \forall t (p(x,y) \vee q(t))$

- Renombro $(x|v)$ en $(p(x,y \vee q(t))$
- Saco $\forall v$ y $\forall t$, ya que no ocurren en el otro miembro disyunción
- Renombro $(z|w)$ en $\exists z \neg p(x,z)$
- Saco factore común $\exists w$

¿Tendría que haber renombrado $\exists x$? → III: $\exists x \forall v \forall t (\exists x \exists w (\neg p(x,w) \vee \neg p(w,z)) \vee (p(v,y) \vee q(t))$

- Saco los $\exists x$ y $\exists w$ ya que ocurren libremente.

IV: $\exists x \forall v \forall t \exists x \exists w (\neg p(x,w) \vee \neg p(w,z) \vee p(v,y) \vee q(t))$

f) $(\forall w (\forall x\, r(x,y) \rightarrow (\forall x\, p(x) \rightarrow \exists x (q(x) \vee p(w)))) \wedge \forall z (p(z) \vee \exists z\, q(z))$

- Equivalencia en la implicación $\varphi \rightarrow \phi \equiv \neg \varphi \vee \phi$
- Equivalencia $\neg \forall x\, \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$,
- Renombro $(z|x)$ en $\exists z\, q(z)$ y la saco

I: $(\forall w (\exists x \neg r(x,y) \vee (\exists x \neg p(x) \vee \exists x (q(x) \vee p(w)))) \wedge \forall z \exists x (p(z) \vee q(x))$

- Saco factor común $\exists x$ reiteradamente.
- → Renombro $(z|w)$ en $\forall z \exists x (p(z) \vee q(x))$ saco factor común

II: $\exists x \forall w ((\neg r(x,y) \vee \neg p(x) \vee q(x) \vee p(w)) \wedge (p(w) \vee q(x)))$

- Distributiva y omisión de repetición y $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$

III: $\exists x \forall w (\neg r(x,y) \vee \neg p(x) \vee q(x) \vee p(w))$

g) $\forall x\,(r(x) \wedge \neg \exists x\,(p(x) \to \exists y\, q(f(y), x))) \wedge \forall w\, \exists z\,(q(z, a) \vee p(w) \vee (\forall y\, p(f(y)) \to q(x, z)))$

- Implicaciones $\varphi \to \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$
- Equivalencia $\neg \exists x \alpha \equiv \forall x \neg \alpha$,
- Equivalencia $\neg \forall y\, \psi \equiv \exists y\, \psi$
- Leyes De Morgan

I: $\forall x\,(r(x) \wedge \forall x\, \neg(p(x) \wedge \forall y\, \neg q(f(y), x))) \wedge \forall w\, \exists z\,(q(z, a) \vee p(w) \vee (\exists y\, \neg p(f(y)) \vee q(x, z)))$

- Puesto que y actúa libremente en $p(x)$, puedo sacarlo
- Renombro $(y|z)$ en $\exists y\, \neg p(f(y))$, lo saco reiteradamente, puedo omitirlo por repetición

- Renombro $(x|t)$ lo saco, junto con el $\forall y$

II $\forall x\, \forall t\, \forall y\,(r(x) \wedge (p(t) \wedge \neg q(f(y), t))) \wedge \forall w\, \exists z\,(q(z, a) \vee p(w) \vee \neg p(f(z)) \vee q(x, z))$

- Renombro $(w|x)$ en $\forall w\, \exists z\,(q(z, a) \vee p(w) \dots)$

Se puede? → - Renombro $(t|x)$ en $\forall x\, \forall t\, \forall y\,(r(x) \wedge (\dots))$
- Saco cuantificadores

III $\forall x\, \forall y\, \exists z\,((r(x) \wedge p(x) \wedge \neg q(f(y), x)) \wedge (q(z, a) \vee p(x) \vee \neg q(f(z)) \vee q(x, z)))$

- Distribuyo

IV: $\forall x\, \forall y\, \exists z\,((r(x) \vee \overbrace{q(z, a) \vee q(x) \vee \neg q(f(z)) \vee q(x, z)}^{\alpha}) \wedge (\alpha \wedge (\neg q(f(y), x) \vee \alpha))$

h) $(\forall y\, p(x, y) \to \exists x\, r(x)) \wedge \neg \exists x\,((\forall y\, v(y)) \wedge \neg p(x, a)) \wedge \forall x\,((\exists y\, p(x, y)) \vee r(x))$

- Equivalencias implicación $\psi \to \phi \equiv \neg \psi \vee \phi$ y
- Equivalencias $\neg \exists x\, \psi \equiv \forall x \neg \psi$ $\neg \forall x\, \psi \equiv \exists x\, \neg \psi$.
- Leyes De Morgan
- Renombro $\exists x\,(r(x))$ $(x|y)$

I: $(\exists y\, \neg p(x, y) \vee \exists y\, r(y)) \wedge \forall x\,(\exists y\, \neg v(y) \vee p(x, a)) \wedge \forall x\, \exists y\,(p(x, y) \vee r(x))$

- Saco $\forall x$
- Saco $\exists y$ del primer miembro de la conjunción.

II $\forall x\,(\exists y\,(\neg p(x, y)) \wedge \exists y\,(\neg v(y) \vee p(x, a)) \wedge \exists y\,(p(x, y) \vee r(x))$

- Puesto que por estar en conjunción no puedo sacar $\exists y$ no me queda más remedio que renombrar.
- Saco tras renombrar

III: $\forall x\, \exists y\, \exists z\, \exists t\,(\neg p(x, y) \wedge (\neg v(z) \vee p(x, a)) \wedge (p(x, t) \vee r(x))$

g) $\forall x (r(x) \land \neg \exists x (p(x) \rightarrow \exists y\, q(f(y), x))) \land \forall w \exists z\, (q(z,a) \lor p(w) \lor (\forall y\, p(f(y)) \rightarrow q(x,z)))$

. ~~Saco cuantificadores,~~ . Equivalencia implicación + cuantificad.

I $\forall x (r(x) \land \forall x (p(x) \land \forall y\, \neg q(f(y), x))) \land \forall w \exists z\, (q(z,a) \lor p(w) \lor (\exists y\, \neg p(f(y)) \lor q(x,t))))$

. Como y no aparece en p(x) puedo "sacarlo" o ~~necesario~~ introduzco $\forall x$ en forma y saco factor común.
. Puedo sacar $\exists y$, renombro y|x, introduzco $\exists z$ y saco factor común.

II $\forall x \forall y\, (r(x) \land (p(x) \land \neg q(f(y), x))) \land \forall w \exists y\, (q(y,a) \lor p(w) \lor (\neg p(f(y)) \lor q(x,t)))$

. Renombro (y | w) saco factor común, ~~como~~ y no aparece puedo sacarlo.

$\forall w\, \forall x_1 \exists y\, (r(x_1) \land (p(x_1) \land \neg q(f(w), x_1))) \land (q(y,a) \lor p(w) \lor (\neg p(f(y)) \lor q(x,t)))$

LP05

[6] Para cada fórmula en el ejercicio 4. encontra su fórmula de Skolem asociada

a) $\forall x \forall w((p(x,a) \vee \neg q(x) \vee p(w,a_2)) \vee p(w,a)) \wedge (p(x,a_1) \vee q(a) \vee p(w,a_2) \vee p(w,a_2) \vee p(w,a))$

b) $\varphi_1 = \forall x \exists y \forall t \exists w \forall z \forall n (r(x) \vee p(t,y) \vee q(w,y)) \wedge ((r(z) \vee r(v)) \wedge (r(z) \wedge p(n,w))$

$\varphi_1^S = \forall x \forall t \forall z \forall n (r(x) \vee p(t, f_1(x)) \vee q(f_1(x,t),y)) \wedge ((r(z) \vee r(v)) \wedge r(z) \wedge p(n, f_f(x,t))$

c) $\varphi_2^S = \ , \forall t \forall z((\neg p(a_1,y) \vee \neg p(a_1,x) \vee q(x)) \wedge (\neg p(a_1,y) \vee \neg p(a_1,x) \vee r(a,a_1,z))$

d) $\varphi_3^S = \forall y ((\neg p(a,a_1) \vee p(f_1(y),y) \vee \neg p(a,y) \wedge (\neg p(a,a_1) \vee q(f_1(y),y) \vee q(a_1)) \wedge$

$p(f_1(y),a) \vee p(f(y),y) \vee \neg p(a,y) \vee \ p(f(y),a) \vee p(f(y),a) \vee$ 〃

f) $\varphi_5^S = \forall w (\neg r(a_1,y) \vee \neg p(a_1) \vee q(a_2) \vee p(w))$

h) $\varphi_7^S = (\neg p(x,f_1(x)) \wedge (\neg \vee f_2(x)) \vee p(x,a) \wedge (p(x,f_3(x)) \vee r(x))$

$\boxed{8}$ Dado el conjunto de cláusulas:

$\neg p(x) \vee r(f(x))$

$\neg p(x) \vee q(x, f(x))$

$p(a)$

$\neg q(x,y)$

expresar el universo de Herbarand, la base de Herbrand y el sistema de Herbrand.

Universo de Herbrand

$H_0 = \{a\}$ $\quad H_1 = \{a, f(a)\}$ $\quad H_2 = \{a, f(a), f(f(a))\}$

$U_\Sigma = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))) \dots\}$

Base de Herbrand

$B_\Sigma = \{ p(a), r(a), q(a,a), p(f(a)), r(f(a)), q(a, f(a)), q(f(a), a)$

$q(f(a), f(a)), p(f \circ f(a)) \dots \}$

Sistema de Herbrand

$S_\Sigma = \{ \neg p(a) \vee r(f(a)), \neg p(a) \vee q(a, f(a)), p(a), \neg p(a,a),$

$\neg p(f(a)) \vee r(f \circ f(a)), \neg p(f(a)) \vee q(f(a), f \circ f(a)), p(f(a)), \neg p(f(a), a), \neg p(f(a), f(a)),$

$\neg p(a, f(a)) \dots \}$

$\boxed{9}$ Sea el conjunto de cláusulas Σ. Usar el Teorema de Herbrand, combinado con el algoritmo de David-Putnam, para demostrar que es insatisfacible.

$$\Sigma = \{ \neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(x,v,w) \vee p(u,z,w),$$
$$\neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(u,z,w) \vee p(x,v,w),$$
$$p(g(x,y),x,y),\ p(x,h(x,y),y),$$
$$p(x,y,f(x,y)),\ \neg p(k(x),x,k(x)) \}$$

$$U_\Sigma = \{ a, f(a,a), g(a,a), h(a,a), k(a), k(k(a)), k(f(a,a)), k(h(a,a)),$$
$$k(g(a,a)), f(a,k(a)) \ldots \}$$

$$B_\Sigma = \{ p(a,a,a),\ p(a,a,k(a)),\ p(k(a), f(a,a), h(a,a)) \ldots \}$$

$$S_\Sigma = \{ \neg p(a,a,a) \vee \neg p(a,a,a) \vee \ldots p(a,a,a),\ p(g(a,a),a,a),\ p(a,h(a,a),a),$$
$$p(a,a,f(a,a)),\ \neg p(k(a),a,k(a)) \ldots \}$$

Si Σ es insatisfacible, alguno de sus subconjuntos Σ' de S_Σ, también lo será.

$$\Sigma' = \{ p(a,h(a,a),a),\ p(g(a,k(h(a,a))), a, k(h(a,a))),\ \neg p(k(h(a,a))$$
$$\neg p(a,h(a,a),a) \vee$$

$\boxed{4}$ f) $(\forall w(\forall x\ r(x,w) \to (\forall x\, p(x) \to \exists x\,(q(x) \vee p(w))))) \wedge \forall z\,(p(z) \vee \exists z\, q(z))$

I) $\forall w\,(\exists x\, \neg r(x,w) \vee (\exists x \neg p(x) \vee \exists x\,(q(x) \vee p(w))))) \wedge \forall z\,(p(z) \vee \exists z\, q(z))$

$(\forall \cancel{t}(\exists x\ \neg r(x,\cancel{t}) \vee \exists x(\neg p(x) \vee q(x) \vee p(\cancel{t})))) \wedge \forall \cancel{t} \exists z (p(t) \vee q(z))$

$\forall t\,(\exists x\,(r(x,t) \vee \neg p(x) \vee q(x) \vee p(t)) \wedge \exists z\,(p(t) \vee q(z)))$

$\forall t\ \exists x \exists x\ (r(x,t)\ \vee \neg \underline{p(x) \vee q(x) \vee p}(t)) \wedge \exists z\,(p(t) \vee q(z))$

f) $(\forall w\,(\forall x\ r(x,w) \to (\forall x\, p(x) \to \exists x\,(q(x)\ \vee p(w))))) \wedge \forall z\,(p(z) \vee \exists z\, q(z))$

$(\forall \cancel{t}\ (\exists x\ \neg r(x,\cancel{t}) \vee (\exists x \neg p(x) \vee \exists x\,(q(x) \vee p(\cancel{t}))))) \wedge \forall t \exists z (\,p(t) \vee q(z))$

$\forall t\ (\exists x\,(\neg r(x,t)\ \vee \neg p(x) \vee q(x)\ \vee p(t)) \wedge \exists z\,(p(t) \vee q(z))$

$\mathcal{C} \equiv \forall t\ \exists x \exists z (\neg r(x,t)\ \vee \neg p(x) \vee q(x) \vee p(t)) \wedge (p(t) \vee q(\cancel{z}))$

$\mathcal{C}^S \equiv \forall t\ (\neg r(f(t),t)\ \vee \neg p(f(t) \vee q(f(x) \vee p(t))\ \wedge p(t) \vee q(g(t))$

LPO AO

18.1 Determina si el siguiente conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible.

$$\Sigma = \{ c(x) \vee d(f(x), x),\quad c(y) \vee \neg d(x,y) \vee b(x),\quad \neg a(x) \vee b(x),$$
$$\neg b(x) \vee \neg a(x) \vee c(y) \vee \neg d(x,y),\quad a(x) \vee \neg b(x) \}$$

El conjunto de los predicados anteriores renombrados:

$a = \neg a_1$

$\sigma_0)$ $\neg a_1(x) \vee \neg b(x)$

$\sigma_1)$ $a_1(x) \vee b(x)$

...

Es un conjunto de Cláusulas de Horn

Salvo la σ_0, aplicaremos la resolución lineal ordenada:

$\neg a_1(x) \vee \neg b(x)$

$\Psi(x|x_1)$ $\quad a_1(x_1) \vee b(x_1)$

$\Phi(x_1|x)$

$\square$

Por consiguiente este conjunto de fórmulas es insatisfacible.

Obsérvese que $\sigma_i \ \forall i \in \{2 \ldots 5\}$ No se ha prestado al servicio.

* Ψ es una sustitución de renombramiento para que $\sigma\Psi$ no tengan símbolos en común.

Φ Es un unificador de máxima generalidad.

18.2 Construya una refutación lineal ordenada del conjunto de cláusulas formado por las siguientes: [ver pag 49 de lógica de primer orden, apuntes esquemas de Mª García Olmedo].

Renombro $S = \neg S$

$\neg S(x,y,y,x)$

$\Psi(x|x_1)(y|y_1)$ $\quad \neg S(x_1,y_1,u,v) \vee S(u,v,x_1,y_1)$

$\Phi(u|x)(v|y)$

$(x_1|y)(y_1|x)$

$\neg S(y,x,x,y)$

$\Psi(x|x_1)(y|y_1)$ $\quad S(u,v,x_1,y_1) \vee \neg S(v,u,x_1,y_1)$

$\Phi(u|y)(v|x)$

$(x_1|x)(y_1|y)$

$\neg S(x,y,x,y)$

$\Psi(x|x_1)(y,y_1)$ $\quad T(y,z,x) \vee \neg T(x,y,z)$

$\neg S(x,y,x,y) \vee T(y_1,z,x_1) \vee \neg T(x_1,y_1,z)$

$\Psi(x|x_2)(y|y_2)$ $\quad T(x,y,z) \vee \neg T(y,x,z)$

$(z|z_2)$

$\Phi(x_2|x_1)(y_2|y_1)$

$(z_2|z)$

$\neg S(x,y,x,y) \vee T(y_1,z,x_1) \vee \neg T(y_1,x_1,z)$

$\Psi(x|x_2)(y|y_2)$ $\quad A(u,v,w,x,y,z) \vee \neg T(u,v,w,x,y,z)$

$(z|z_2)$

$\neg S(x,y,x,y) \vee T(y_1,z,x_1) \vee \neg T(y_1,x_1,z)$
$\vee A(u,v,w,x_2,y_2,z_2) \vee \neg C(u,v,w,x_2,y_2,z_2)$

σ_8

10 Demostrar vía el Teorema de Herbrand y el Algoritmo de David-Putnam que:

$$\forall x(p(x)\to\exists y(r(y)\wedge q(x,y))),\ \exists x p(x)\models\exists x\exists y\, q(x,y)$$

Escribo fórmulas en forma Prenexa

$\varphi_1=\forall x(p(x)\to\exists y(r(y)\wedge q(x,y)))$

· Equivalencia implicación:

$\varphi_1=\forall x(\neg p(x)\vee\exists y(r(y)\wedge q(x,y)))$

· Como y no ocurre en $\neg p(x)$ puedo sacarlo

$\varphi_1=\forall x\exists y(\neg p(x)\vee(r(y)\wedge q(x,y)))$

· Distributiva

$\varphi_1=\forall x\exists y((\neg p(x)\vee r(y))\wedge(\neg p(x)\vee q(x,y)))$

$$\boxed{\varphi_1^S=\forall x((\neg p(x)\vee r(f_1(x)))\wedge(\neg p(x)\vee q(x,f_1(x))))}$$

$$\boxed{\varphi_2=\exists p(x)\quad \varphi_2^S=p(a)}$$

$\neg\varphi_0=\neg\exists x\exists y\, q(x,y)$

Equivalencia $\neg\exists x\,\Psi\equiv\forall x\neg\Psi$

$\neg\varphi_0=\forall x\forall y\,\neg q(x,y)$

$$\boxed{\varphi_0^S=\forall x\forall y\,\neg q(x,y)}$$

Por teorema de Herbrand

$U_\Sigma=\{a,f_1(a),f(f(a))\dots\}\quad B_\Sigma=\{p(a),r(a),q(a,a),r(f_1(a)),q(f(a),a)\dots\}$

$\Sigma'=\{\neg p(a)\vee r(f_1(x)),\ \neg p(a)\vee q(a,f(a)),\ p(a),\neg q(a,f(a))\}$

Por David-Putnams | Clausula Unit $\lambda=p(a)$

$\{r(f_1(x)),\ q(a,f(a)),\ \neg q(a,f(a))\}$

$\downarrow$ clausula unit $\lambda=r(f_1(x))$

$\{q(a,f(a)),\ \neg q(a,f(a))\}$

$\downarrow$ clausula unit $\lambda=q(a,f(a))$

$\square$

Por quedar la clausula vacía este conjunto es insatisfacible, y por tanto $\{\forall x(p(x)\to\exists y(r(y)\wedge q(x,y))),\exists x\,p(x)\}$ implica semánticamente a $\exists x\exists y\,q(x,y)$.

$\boxed{1}$ Decir si son unificables o no las fórmulas $r(x, f(a), y)$ y $r(f(y), x, b)$. En caso de respuesta afirmativa, dar un unificador principal.

¿Qué respuesta para las fórmulas $r(x, f(a), y)$ y $r(f(y), x, z)$

No es unificable $(x|f(b))$ y $(y|f(b))$ $r(f(b), \underline{f(a)}, b)$ $r(f(b), \underline{f(b)}, b)$ $\neq$

Para $r(x, f(a), y)$ y $r(f(y), x, z)$ Φ $(x|f(a))$ $(y|a)$ $(z|a)$

$\boxed{r(f(a), f(a), a)}$

$\boxed{2}$ Dados los literales $p(g(f(x), u), f(a), g(z, f(y)))$,

$p(g(f(f(y)), g(v, a)), f(v), g(g(x, b), x))$

Di cuál de las siguientes sustituciones es un unificador de máxima generalidad o principal.

a) $(v|a)$ $(u|g(v,a))$ $(z|g(a,b))$ $(x|a)$

Un unificador ϕ de máxima generalidad o principal para ellos si y sólo si por definición, para todo unificador ϕ' existe una única sustitución Ψ tal que $\phi' = \phi\Psi$

$\boxed{6}$ Probar que el conjunto formado por las siguientes cláusulas es insatisfacible.

$$\{ t(x, g(a), z, f(u)) \vee \neg p(g(a)) \vee s(y,z) \vee \neg r(f(y)),\ \ q(x, f(y)) \vee \neg p(g(x)),$$
$$\neg s(f(a), f(a)) \vee \neg r(f(f(f(a)))) \vee \neg p(g(x)),\ \ r(f(x)),\ \ p(g(a)) \vee \neg q(g(b), f(x)),$$
$$\neg p(x) \vee s(y,z) \vee \neg t(a, x, y, f(y)) \vee \neg q(g(b), z),\ \ p(g(x)) \}$$

$t(x, g(a), z, f(u)) \vee \neg p(g(a)) \vee s(y,z) \vee \neg r(f(y))$

$(x_1|y)$ $r(f(x_1))$

$T(x, g(a), z, f(u)) \vee \neg p(g(a)) \vee s(y,z)$

$(x_1|a)$ $p(g(x_1))$

$T(x, g(a), z, f(u)) \vee s(y,z)$

$(y|f(a), z|f(a))$ $\neg s(f(a), f(a)) \vee \neg r(f(f(f(a)))) \vee \neg p(g(x))$

$T(x, g(a), f(a), f(u)) \vee \neg r(f(f(f(a)))) \vee \neg p(g(x))$

$p(g(x))$

$T(x, g(a), f(a), f(u)) \vee r(f(f(f(a))))$

$(x_1|f(a))$ $r(f(x_1))$

$T(x, g(a), f(a), f(u))$

$(x|a)\ (x_1|g(a))$
$(y|f(a))\ (z|u)$ $\neg p(x_1) \vee s(y,z) \vee \neg t(a, x_1, y, f(z)) \vee \neg q(g(b), z)$

$\neg p(g(a)) \vee s(f(a), u) \vee \neg q(g(b), u)$

$(x|a)$ $p(g(x))$

$s(f(a), u) \vee \neg q(g(b), u)$

...

$q(x, f(y)) \vee \neg p(g(x))$

$p(g(x))$

$q(x, f(y))$

$(x|g(b))(x_1|y)$ $p(g(a)) \vee \neg q(g(b), f(x_1))$

$p(g(a))$

$\neg s(f(a), f(a)) \vee \neg r(f(f(f(a)))) \vee \neg p(g(x))$

$(x|a)$

$\neg s(f(a), f(a)) \vee \neg r(f(f(f(a))))$

$(x|f(f(a)))$ $r(f(x))$

$\neg s(f(a), f(a))$

$(y|f(a))\ (z|f(a))$ $\neg p(x) \vee s(y,z) \vee \neg t(a, x, y, f(y)) \vee \neg q(g(b), z)$

$\neg p(f(a)) \vee \neg t(a, f(a), f(a), f \cdot f(a)) \vee \neg q(g(b), z)$

Lpo A 2.0

$\boxed{7}$ Encuentra el conjunto apropiado de cláusulas a través del cual estudiar si la fórmula $\exists x\, p(f(x))$ es consecuencia semántica del conjunto de hipótesis:

$\varphi_1\ \exists x\, \neg p(f(x)) \to \forall x\, q(x)$

$\varphi_2\ \exists y\, \forall z(r(z,y) \wedge r(z,a)) \to \forall x\, p(x)$

$\varphi_3.\ \forall x\, \forall z(q(z) \to p(x) \vee q(z,a))$

Escribo en forma prenexa y Skolem

$\varphi_1 : \forall x\, p(f(x)) \vee \forall x\, q(x)$

Renombro $(x|y)$ de $\forall x\, q(x)$

$\varphi_1\ \forall x\, p(f(x)) \vee \forall y\, q(y)$

Puedo sacar porque no ocurre

$\varphi_1 : \forall x\, \forall y\, (p(f(x) \vee q(y)))$

$\varphi_1^S = \forall x\, \forall y\, (p(f(x)) \vee q(y))$

$\varphi_2 : \exists y\, \forall z\, ((r(z,y) \wedge r(z,a)) \to \forall x\, p(x)$

Equivalencia $\to$ y Morgan $\quad \neg \exists y\, \phi \equiv \forall y\, \neg \phi \quad \neg \forall z\, \phi \equiv \exists z\, \neg \phi$

$\forall y\, \exists z\, (\neg r(z,y) \vee \neg r(z,a)) \vee \forall x\, p(x)$

Como y y x no ocurren y $\exists x$ tampoco los saco con orden

$\varphi_S = \forall y\, \forall x\, \exists z (\neg r(z,y) \vee \neg r(z,a) \vee p(x))$

$\varphi_2^S = \forall y\, \forall x\, (\neg r(f_1(y,x),y) \vee r(f_1(\cancel{z},x),a) \vee p(x))$

$\varphi_0 = \neg \exists\, x\, p(f(x))$

$\varphi_0 = \forall x\, p\, (f(x)) = \varphi^S$

$\varphi_3 : \forall x\, \forall z (q(z) \to p(x) \vee q(z,a))$

Equivalencia implicación

$\varphi_3 : \forall x\, \forall z\, (\neg q(z) \vee p(x) \vee q(z,a))$

$\varphi_3^S : \forall x\, \forall z\, (\neg q(z) \vee p(x) \vee q(z,a))$

$\{ p(f(x)) \vee q(y), \neg q(z) \vee p(x) \vee q(z,a), \neg r(\neg \vee f_1(y,x),y) \vee r(f_1(y,x),a) \vee p(x)) \}$

$\boxed{8}$ Dar una refutación lineal ordenada del conjunto de las siguientes cláusulas:

$$\{\neg r(x, f(a), f(g(z))) \vee \neg q(a,x)$$

$$\neg p(z,y) \ , \ \neg q(a,x) \ , \ q(y, g(x)) \vee p(y,z) \ ;$$

$$q(x,z) \vee r(g(y), f(y), z) \vee p(x,z)\}$$

LPO B 2.1

8 Dar una refutación lineal del conjunto de las siguientes cláusulas:

$\sigma_0)$ $\neg r(x, f(a), f(g(z))) \vee \neg q(a,x)$

$\sigma_1)$ $\neg p(z,y)$

$\sigma_2)$ $\neg q(a,x)$

$\sigma_3)$ $q(y, g(x)) \vee p(y,z)$

$\sigma_4)$ $q(x,z) \vee r(g(y), f(y), z) \vee p(x,z)$

Transformo el conjunto de cláusulas renombrando

$\neg p_1 = p \qquad \neg r = r_1$

El conjunto renombrado y ordenado es el siguiente:

$\sigma_0)$ $\neg q(a,x)$ $\qquad$ $\sigma_1)$ $q(y, g(x)) \vee \neg p(y,z)$

$\sigma_2)$ $p_1(z,y)$ $\qquad$ $\sigma_3)$ $r(x, f(a), f(g(x))) \vee \neg q(a,x)$

$\sigma_4)$ $q(x,z) \vee \neg r(g(y), f(y), z) \vee \neg p_1(x,z)$

¿Se podría?

Resolución lineal ordenada

$\neg q(a,x)$ | $q(y, g(x)) \vee \neg p(y,z)$

$\Psi(x|x_1)$, $\Phi(x|g(x))$, $(x_1|x)$

$\neg p(y,z)$ | $p(z,y)$

$\Psi(z|z_1)(y|y_1)$, $\Phi(z_1|y)(y_1|z)$

$\square$

Por tanto el conjunto de cláusulas es insatisfacible.

Procedo a una demostración lineal con raíz en σ_0

$\neg r(x, f(a), f(g(z))) \vee \neg q(a,x)$ | $q(x_1, z_1) \vee r(g(y), f(y), z_1) \vee p(x_1, z_1)$

$\Psi(y|a)(x|g(a))$ $(x_1|a)(z_1|g(a))$ $(z|a)$

$p(a, g(a))$ | $\neg p(z,y)$

$\Psi(z|a)(y|g(a))$

$\square$

Por tanto este conjunto de cláusulas es insatisfacible.

11 Si es posible extraer la cláusula vacía como resolvente del siguiente conjunto de cláusulas:

$\sigma_1)$ $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$

$\sigma_2)$ $\neg p(x) \vee r(f(x))$

$\sigma_3)$ $p(a)$

$\sigma_4)$ $\neg q(x,y)$

Realizo una resolución lineal input como raíz σ_3:

$p(a)$ | $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$

$\Psi(x|a)$

$q(a, f(a))$ | $\neg q(x,y)$

$\Psi(x|a)$ $(y|f(a))$

$\square$

Por tanto el conjunto de fórmulas es insatisfacible, observese que σ_2 no se ha empleado.

14 Demostrar que el conjunto de fórmulas $\{\forall x\,(p(x) \to \forall y\,(q(x,y) \to r(y))),\ \neg\exists z\, \neg q(f(x), g(z)), P(f(a))\}$ implica semánticamente $r(g(a))$

Escribo el conjunto de fórmulas en forma prenexa y Skolem de las hipótesis

$\gamma_1 \equiv \forall x\,(p(x) \to \forall y\,(q(x,y) \to r(y)))$

- Equivalente implicación $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
- Equivalente cuantificador $\forall y$
- Ley De Morgan

$\gamma_1 \equiv \forall x\,(\neg p(x) \vee \forall y\,(\neg q(x,y) \vee r(y)))$

- Como y no ocurre en $\neg p(x)$ puedo sacar cuantificador $\forall y$
- Asociatividad paréntesis.

$\gamma_1 \equiv \forall x\,\forall y\,(\neg p(x) \vee \neg q(x,y) \vee r(y))$

$\boxed{\gamma_1^S \equiv \forall x\,\forall y\,(\neg p(x) \vee \neg q(x,y) \vee r(y))}$

$\gamma_2 \equiv \neg\exists z\, \neg q(f(z), g(z))$

- Equivalencia cuantificador $\neg\exists z\,\varphi \equiv \forall z\,\neg\varphi$

$\gamma_2 \equiv \forall z\ q(f(z), g(z))$

$\boxed{\gamma_2^S \equiv \forall z\ q(f(z), g(z))}$

$\gamma_3 = p(f(a))$

$\boxed{\gamma_3^S \equiv p(f(a))}$

Negación de la supuesta tesis:

$\gamma_0 = \neg r(g(a))$

$\boxed{\gamma_0^S \equiv \neg r(g(a))}$

Esta situación $\{\gamma_i\}\ \forall i \in \{0 \ldots 3\}$ conduce a refutar el conjunto de cláusulas bajo el cierre universal:

$\sigma_0)\ \neg r(g(a))$

$\sigma_1)\ \neg p(x) \vee \neg q(x,y) \vee r(y)$

$\sigma_2)\ q(f(z), g(z))$

$\sigma_3)\ p(f(a))$

Realizo refutación lineal con raíz σ_0

$\neg r(g(a))$ $\quad : \sigma_0$

$\Psi(y|g(a))$ $\quad \neg p(x) \vee \neg q(x,y) \vee r(y) \quad : \sigma_1$

$\neg p(x) \vee \neg q(x, g(a))$

$\Psi(x|f(a))$ $\quad p(f(a)) \quad : \sigma_3$

$\neg q(x, g(a))$

$\Psi(z|a)\ (x|f(a))$ $\quad q(f(z), g(z)) \quad : \sigma_2$

$\square$

Por consiguiente, el conjunto de cláusulas es insatisfactible, lo que equivale a que el conjunto de hipótesis implique semánticamente a la tesis.

15 Demuestra usando resolución, que la fórmula:

$\forall x \forall y ((r(x,y) \vee q(x)) \wedge \neg r(x, g(x)) \wedge \neg q(y))$ es insatisfacible.

Sean σ_i el conjunto de cláusulas que componen la fórmula

$\sigma_0)$ $r(x,y) \vee q(x)$

$\sigma_1)$ $\neg r(x, g(x))$

$\sigma_2)$ $\neg q(y)$

Resolviendo por resolución:

$r(x,y) \vee q(x) \quad : \sigma_0$

$\neg r(x, g(x)) : \sigma_1$

$\Psi\ (x|x_1)$

$\Phi\ (x_1|x)(y|g(x))$

$q(x)$

$\neg q(y) \quad : \sigma_2$

$\Psi\ \epsilon$

$\Phi\ (y|x)$

$\square$

16 Construir una derivación de la cláusula vacía a partir de la fórmula clausulare que se obtiene del conjunto de fórmulas $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4\}$ donde

$\mathcal{C}_1 = \forall x (\exists y\, p(x,y) \vee \neg q(x))$ $\qquad$ $\mathcal{C}_2 = \forall x (r(x) \to (t(x) \vee q(x)))$

$\mathcal{C}_3 = \forall y (t(y) \to \exists z\, p(y,z))$ $\qquad$ $\mathcal{C}_4 = \exists z (\forall y\, \neg p(z,y) \wedge r(z))$

Escribo $\{\mathcal{C}_i\}$ en forma prenexa y Skolem

$\mathcal{C}_1 \equiv \forall x \exists y (p(x,y) \vee \neg q(x))$

$\boxed{\mathcal{C}_1^S = \forall x (p(x, f(x)) \vee \neg q(x))}$

$\mathcal{C}_2 \equiv \forall x (\neg r(x) \vee t(x) \vee q(x))$

$\boxed{\mathcal{C}_2^S \equiv \forall x (\neg r(x) \vee t(x) \vee q(x))}$

$\mathcal{C}_3 \equiv \forall y \exists z (\neg t(y) \vee p(y,z))$

$\boxed{\mathcal{C}_3^S \equiv \forall y (\neg t(y) \vee p(y, f(y)))}$

$\mathcal{C}_4 \equiv \exists z \forall y (\neg p(z,y) \wedge r(x))$

$\boxed{\mathcal{C}_4^S \equiv \forall y (\neg p(a,y) \wedge r(x))}$

De donde obtengo las siguientes cláusulas bajo el cierre universal

$\sigma_1)$ $p(x, f(x)) \vee \neg q(x)$

$\sigma_2)$ $\neg r(x) \vee t(x) \vee q(x)$

$\sigma_3)$ $\neg t(y) \vee p(y, f(y))$

$\sigma_4)$ $\neg p(a,y)$

$\sigma_5)$ $r(x)$

Procedo a una derivación de la cláusula vacía, parto de σ_1

$p(x, f(x)) \vee \neg q(x) \quad : \sigma_1$

$\neg p(a,y) : \sigma_4$

$\Psi = \epsilon$

$\Phi\ (x|a)(y|f(a))$

$\neg q(x) \quad : \sigma_6$

$\neg r(x) \vee t(x) \vee q(x) : \sigma_2$

¿ϵ? $\begin{cases} \Psi = (x|x_1) \\ \Phi = (x_1|x) \end{cases}$

$\neg r(x) \vee t(x) \quad : \sigma_7$

$r(x) \quad : \sigma_5$

"

$t(x) \quad : \sigma_8$

$\neg t(y) \vee p(y, f(y)) : \sigma_3$

$\Psi = \epsilon$

$\Phi\ (y|x)$

$p(x, f(x)) \quad : \sigma_9$

$p(x, f(x)) \ : \sigma_9$

$\neg p(a, y) \ : \sigma_4$

$\Psi = \epsilon$

$\Phi = (x|a)$

$(y|f(a))$

$\square$

17 Construir derivación de la cláusula vacía a partir de las fórmulas que se obtiene del conjunto $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$

$C_1 = \forall x\,(\exists y\, p(x,y) \vee \neg q(x))$ $\quad C_2 = \forall x\,(m(x) \to (t(x) \vee q(x)))$

~~$C_3 = \forall y\,(t(y) \to \exists z\, p(y, z$~~ $\quad C_3 = \forall x\,(q(x, f(x)) \wedge q(x, g(x)))$

$C_4 = \forall x\,(\neg m(x) \vee \forall y\, \neg q(y,x))$

Equivalente en forma prenexa y Skolem

$C_1 = \boxed{m(a) = C_1^S}$

$C_2 \equiv \forall x\,(\neg m(x) \vee m(f(x)) \vee m(g(x)))$

$\boxed{C_2^S = \neg m(x) \vee m(f(x)) \vee m(g(x))}$

$\boxed{C_3^S = q(x, f(x)) \wedge q(x, g(x))}$

$C_4 \equiv \forall x\, \forall y\,(\neg m(x) \vee \neg q(y,x))$

$\boxed{C_4^S = \neg m(x) \vee \neg q(y,x)}$

Estas fórmulas de Skolem dan lugar al siguiente conjunto clausular bajo el cierre universal.

σ_0) $m(a)$

σ_1) $\neg m(x) \vee m(f(x)) \vee m(g(x))$

σ_2) $q(x, f(x))$

σ_3) $q(x, g(x))$

σ_4) $\neg m(x) \vee \neg q(y,x)$

Procedo a la derivación como raíz σ_0

- $m(a)$ $\quad \sigma_0$
- $\neg m(a) \vee m(f(a)) \vee m(g(a))$ $\quad \sigma_1$
- $\Psi = \epsilon$, $\Phi = (x|a)$
- $m(f(a)) \vee m(g(a))$ $\quad : \sigma_5$

- $\neg m(x) \vee \neg q(y,x)$ $\quad : \sigma_4$
- $\Psi = \epsilon$, $\Phi(x \mid f(a))$
- $m(g(a)) \vee \neg q(y, f(a))$ $\quad : \sigma_6$

- $m(g(a)) \vee \neg q(y, f(a))$ $\quad : \sigma_6$
- $q(x, f(x))$ $\quad \sigma_2$
- $\Psi : \epsilon$, $\Phi = (x|a)\,(y|a)$
- $\sigma : 7$

- $m(g(a))$
- $\neg m(x) \vee \neg q(y,x)$ $\quad \sigma_4$
- $\Psi = \epsilon$, $\Phi\,(x \mid g(a))$
- $\neg q(y, g(a))$ $\quad : \sigma_8$

- $q(x, g(x))$ $\quad : \sigma_3$
- $\Psi = \epsilon$, $\Phi = (x|a)\,(y|a)$
- $\square$

Aquí concluye la derivación a la cláusula vacía.

GPO A 4

18 Demostrar usando la resolución, que la fórmula $\exists x \exists y (p(x,y) \wedge q(y))$ es consecuencia semántica de las fórmulas:

$\varphi_1: q(a)$

$\varphi_2: \forall x (q(x) \rightarrow q(g(x)) \vee q(f(x)))$

$\varphi_3: \forall x (p(x, g(x)) \wedge p(x, f(x)))$

Escribo las cláusulas de hipótesis en forma prenexa y de Skolem.

$\varphi_1^S = q(a)$

$\varphi_2^S \equiv \neg q(x) \vee q(g(x)) \vee q(f(x))$

$\varphi_3^S = p(x, g(x)) \wedge p(x, f(x))$

Negación de la supuesta implicación semántica.

$\varphi_0 = \neg \exists x \exists y (p(x,y) \wedge q(y))$

$\varphi_0 \equiv \forall x \forall y (\neg p(x,y) \vee \neg q(y))$

$\varphi_0^S \equiv \neg p(x,y) \vee \neg q(y)$

Bajo el cierre universal surgen las siguientes cláusulas:

$\sigma_0)$ $\neg p(x,y) \vee \neg q(y)$

$\sigma_1)$ $q(a)$

$\sigma_2)$ $\neg q(x) \vee q(g(x)) \vee q(f(x))$

$\sigma_3)$ $p(x, g(x))$

$\sigma_4)$ $p(x, f(x))$

$\{\varphi_i\} \models \varphi_0 \ \forall i = \{1,2,3\}$ sii el conjunto σ_i es insatisfacible,

Procedo a refutarlo por el método de resolución.

Raíz σ_0 =

$\neg p(x,y) \vee \neg p(y) : \sigma_0$

$p(a) : \sigma_1$

$\Psi = \epsilon$

$\Phi(y|a)$

$\neg p(a,y)$

$p(x, g(x)) : \sigma_3$

$\Psi = \epsilon$

$\Phi(x|a)(y|f(a))$

$\square$

Ha surgido la cláusula vacía, lo que es equivalente a que:

$\{\varphi_i\} \models \varphi_0 \ \forall i \in \{1,2,3\}$

19 Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula. $\exists x(o(x) \wedge \forall y(t(y) \to \exists z\, p(y,z,x)))$ es consecuencia de las fórmulas:

$\varphi_1 = \forall x((t(x) \wedge \neg q(x)) \to \forall y \forall z (o(y) \to p(x,z,y)))$

$\cancel{\varphi_2 = \forall x (q(x) \ldots q(}$

$\varphi_2 = \forall x((t(x) \wedge q(x)) \to \forall y \forall z((o(y) \wedge s(y)) \to p(x,z,y)))$

$\varphi_3 = \exists x (o(x) \wedge r(x)) \wedge \exists y (o(y) \wedge s(y))$

Escribo en forma prenexa y skolem.

$\varphi_1 = \forall x((t(x) \wedge \neg q(x)) \to \forall y \forall z(o(y) \to p(x,z,y)))$

$\varphi_1 \equiv \exists x(\neg t(x) \vee q(x)) \vee \forall y \forall z(\neg o(y) \vee p(t,z,y))$

$\varphi_1 \equiv \exists x \forall y \forall z(\neg t(x) \vee q(x) \vee \neg o(y) \vee p(t,z,y))$

$\boxed{\varphi_1^S = \forall y \forall z(\neg t(a) \vee q(a) \vee \neg o(y) \vee p(t,z,y))}$

$\varphi_2 = \forall x((t(x) \wedge q(x)) \to \forall y \forall z((o(y) \wedge s(y)) \to p(x,z,y))$

$\varphi_2 \equiv \exists x(\neg t(x) \vee q(x)) \vee \exists y \exists z (\neg o(y) \vee s(y)) \vee p(w,z,y)$

$\varphi_2 \equiv \exists x \exists y \exists z(\neg t(x) \vee q(x) \vee \neg o(y) \vee s(y) \vee p(w,z,y)$

$\boxed{\varphi_2^S = (\neg t(a) \vee q(a) \vee \neg o(b) \vee s(b) \vee p(w,c,b)}$

$\varphi_3 = \exists x(o(x) \wedge r(x)) \wedge \exists y(o(y) \wedge s(y))$

$\varphi_3 = \exists x \exists y (o(x) \wedge r(x) \wedge o(y) \wedge s(y))$

$\boxed{\varphi_3^S = (o(a) \wedge r(a) \wedge o(b) \wedge s(b))}$

Negación de la tesis

$\varphi_0 = \neg \exists x (o(x) \wedge \forall y(t(y) \to \exists z\, p(y,z,x)$

$\varphi_0 \equiv \exists x(o(x) \wedge \forall y(t(y)) \vee \exists z\, p(t,z,w)^*$

* Se podría renombrar $(z|x)$ ¿merecería la pena?

$\varphi_0 \equiv \exists z \exists x \forall y(o(x) \wedge t(y)) \vee p(t,z,w)$

$\varphi_0 \equiv \exists z \exists x \forall y(o(x) \vee p(t,z,w)) \wedge (o(x) \vee p(t,z,w))$

$\boxed{\varphi_0^S = \forall y((o(a) \vee p(t,c,w)) \wedge (o(a) \vee p(t,c,w))}$

Conjunto clausular para universo cerrado:

$\sigma_1: \neg t(a) \vee q(a) \vee \neg o(y) \vee p(t,z,y)$

$\sigma_2: \neg t(a) \vee q(a) \vee \neg o(b) \vee s(b) \vee p(w,c,b)$

$\sigma_3: o(a)$ $\quad \sigma_4: r(a)$ $\quad \sigma_5: o(b)$ $\quad \sigma_6: s(b)$

$\sigma_7: o(a) \vee p(t,c,w)$ $\quad \sigma_8: (o(a) \vee p(t,c,w)$

$\boxed{26}$ Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula $\neg \exists x (r(x) \wedge s(x))$ es consecuencia de las fórmulas:

$\gamma_1 \equiv \forall x (r(x) \wedge s(x) \to \exists y (q(y) \wedge p(x,y)))$

$\gamma_2 \equiv \forall x (q(x) \to t(x))$

$\gamma_3 \equiv \forall x (t(x) \to o(x))$

$\gamma_4 \equiv \forall x \forall y (r(x) \wedge o(y) \to \neg p(x,y))$

$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$

$\Gamma \models \varphi \iff \{\Gamma, \neg \varphi\}$ es insatisfacible:

Escrito en forma prenexa y skolem:

$\gamma_1 \equiv \forall x (\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee \exists y (q(y) \wedge p(x,y)))$

$\gamma_1^S \equiv \forall x \; (\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee q(f(x))) \wedge (\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee p(x, f(x)))$

$\gamma_2^S \equiv \forall x (\neg q(x) \vee t(x))$

$\gamma_3^S \equiv \forall x (\neg t(x) \vee o(x))$

$\gamma_4^S \equiv \forall x \forall y (\neg r(x) \vee \neg o(y) \vee \neg p(x,y))$

$\neg \varphi \equiv \exists x (r(x) \wedge s(x))$

$\neg \varphi^S \equiv r(a) \wedge s(a)$

* Aplicando que $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$, escribo en forma clausular las fórmulas anteriores:

$\sigma_0 = r(a) \quad \sigma_0' : s(a)$

$\sigma_1 = q(f(x)) \vee \neg r(x) \vee \neg s(x)$

$\sigma_1' = p(x, f(x)) \vee \neg r(x) \vee \neg s(x)$

$\sigma_2 = t(x) \vee \neg q(x)$

$\sigma_3 = o(x) \vee \neg t(x)$

$\sigma_4 = \neg r(x) \vee \neg o(y) \vee \neg p(x,y)$

Aplico resolución lineal ordenada con raíz. σ_4

$\sigma_4 : \neg r(x) \vee \neg o(x) \vee \neg p(x,y)$

$(x|a)$ $\quad \sigma_0 : r(a)$

$\neg o(a) \vee \neg p(a,y)$

$(x|a)$ $\quad \sigma_3 : o(x) \vee \neg t(x)$

$\neg p(a,y) \vee \neg t(a)$

$(x|a)$, $(y|f(a))$ $\quad \sigma_1' : p(x, f(x)) \vee \neg r(x) \vee \neg s(x)$

$\neg t(a) \vee \neg r(a) \vee \neg s(a)$

$(x|a)$ $\quad \sigma_2 : t(x) \vee \neg q(x)$

$\neg r(a) \vee \neg s(a) \vee \neg q(a)$

$\in$ $\quad \sigma_0 : r(a)$

$\neg s(a) \vee \neg q(a)$

$\sigma_0' : s(a)$

$\neg q(a)$

$f(x)|a$ $\quad \sigma_1 : q(f(x)) \vee \neg r(x) \vee \neg s(x)$

$x|a$

$\neg r(a) \vee \neg s(a)$

$\sigma_0 : r(a)$

$\neg s(a)$

$\sigma_0' : s(a)$

$\square$

LPOR 5

$\boxed{27}$ Demostrar por resolución que la siguiente argumentación es correcta: "El profesor es feliz si a todos sus alumnos les gusta la lógica; luego un profesor es feliz si no tiene estudiantes."

Defino relaciones:

- Sea $s(x,y)$ la relación: "x" es alumno de y
- Sea $g(x)$ la relación a "x" le gusta la lógica
- Sea $f(x)$ "x" es feliz.

Sea "c" el profesor:

- El enunciado:

→ El profesor "c" es feliz si a todos sus alumnos les gusta la lógica.

$\gamma_1 (\forall x\ s(x,c)) \wedge (g(x) \rightarrow f(c))$

→ Un profesor "y" es feliz si no tiene alumnos

$\gamma_2 (\neg \exists x\ s(x,y))$

Para demostrar su validez

$\models \gamma$

$\boxed{26}$ Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula $\varphi = \neg \exists x (r(x) \wedge s(x))$ es consecuencia de las fórmulas:

$\gamma_1 \quad \forall x (r(x) \wedge s(x) \rightarrow \exists y (q(y) \wedge p(x,y)))$

$\gamma_2 \quad \forall x (q(x) \rightarrow t(x))$

$\gamma_3 \quad \forall x (t(x) \rightarrow o(x))$

$\gamma_4 \quad \forall x \forall y (r(x) \wedge o(y) \rightarrow \neg p(x,y))$

$\Gamma = \{\gamma_i\} \forall i \in \{1, \dots, 4\}$ Escribo en forma prenexa y de Skolem.

$\gamma_1 = \forall x \exists y (\neg r(x) \vee \neg s(x)) \vee (q(y) \wedge p(x,y)))$

$\gamma_1^{S'} = \forall x ((\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee q(f(x)) \wedge$
$\wedge (\neg r(x) \vee \neg s(x) \vee p(x, f(x)))$

$\gamma_2^{S'} = \forall x (\neg q(x) \vee t(x))$

$\gamma_3^{S'} = \forall x (\neg t(x) \vee o(x))$

$\gamma_4^{S'} = \forall x \forall y (\neg r(x) \vee \neg o(y) \vee \neg p(x,y))$

Idem para $\neg \varphi$

$\neg \varphi^{S'} = r(a) \wedge s(a)$

Las cláusulas resultantes son:

$\sigma_0 = r(a)$

$\sigma_1 = s(a)$

$\sigma_2 = \neg r(x) \vee \neg s(x) \vee q(f(x))$

$\sigma_3 = \neg r(x) \vee \neg s(x) \vee p(x, f(x))$

$\sigma_4 = \neg q(x) \vee t(x)$

$\sigma_5 = \neg t(x) \vee o(x)$

$\sigma_6 = \neg r(x) \vee \neg o(y) \vee \neg p(x,y)$

Reordenándolas ~~las cláusulas~~ el orden ~~las~~ conjunciones:

$\sigma_0 = r(a)$

$\sigma_1 = s(a)$

$\sigma_2 = q(f(x)) \vee \neg r(x) \vee \neg s(x)$

$\sigma_3 : p(x, f(x)) \vee \neg r(x) \vee \neg s(x)$

$\sigma_4 : t(x) \vee \neg q(x)$

$\sigma_6 : \neg r(x), \neg o(y) \vee \neg p(x,y)$

$\sigma_5 : o(x) \vee \neg t(x)$

Obsérvese que es conjunto de cláusulas de Horn, por tanto tendrá una solución lineal comenzando por una cláusula objeto: σ_6:

$\neg r(x) \vee \neg o(x) \vee \neg p(x,y)$

$(x|a) \quad r(a) \quad : \sigma_0$

$\neg o(a) \vee \neg p(a,y)$

$(x|a) \quad o(x) \vee \neg t(x) \; \sigma_5$

$\neg p(a,y) \vee \neg t(a)$

$(x|a)$
$(y|f(a))$
$\quad p(x, f(x)) \vee \neg r(x) \vee \neg s(x) \; : \sigma_3$

$\neg t(a) \vee \neg r(a) \vee \neg s(a)$

$(x|a) \quad t(x) \vee \neg q(x) \quad : \sigma_4$

$\neg r(a) \vee \neg s(a) \vee \neg q(a)$

$\quad r(a) \quad : \sigma_0$

$\neg s(a) \vee \neg q(a)$

$\quad s(a) \; : \sigma_1$

$\neg q(a)$

$\neg q(a)$

$(x | f^{-1}(a)) \quad q(f(x)) \vee \neg r(x)$

$\neg r(f^{-1}(a))$

$\boxed{24}$ Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula $\varphi = \neg\forall x\ o(x)$ es consecuencia de las fórmulas:

γ_1 $\forall x\,(q(x) \wedge \neg t(x) \rightarrow s(x))$

γ_2 $\forall x\,(q(x) \wedge t(x) \rightarrow r(x) \vee p(x))$

γ_3 $\forall x\,((s(x) \vee r(x) \vee p(x)) \rightarrow \neg o(x)$

γ_4 $\exists x\ q(x)$

Escribo $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ en forma prenexa y de Skolem

$\gamma_1^S \equiv \forall x\,(\neg q(x) \vee t(x) \vee s(x))$.

$\gamma_2^S \equiv \forall x\,(\neg q(x) \vee \neg t(x) \vee r(x) \vee p(x))$.

$\gamma_3 \equiv \exists x\,(\neg s(x) \wedge \neg r(x) \wedge \neg p(x)) \vee \neg o(x)$

$\equiv \exists y\,((\neg s(y) \wedge \neg r(y) \wedge \neg p(y)) \vee \neg o(x))$

$\gamma_3^S = (\neg s(a) \vee \neg o(x)) \wedge (\neg r(a) \vee \neg o(x)) \wedge (\neg p(a) \vee \neg o(x))$

$\gamma_4^S = q(b)$

Idem para $\neg\varphi$:

$\neg\varphi^{NS} = \forall x\ o(x)$

Clausulas resultantes:

$\sigma_0 = o(x)$

$\sigma_1 = \neg q(x) \vee t(x) \vee s(x)$

$\sigma_2 = \neg q(x) \vee \neg t(x) \vee r(x) \vee p(x)$

$\sigma_3 = \neg s(a) \wedge \neg o(x)$

$\sigma_4 = \neg r(a) \vee \neg o(x)$

$\sigma_5 = \neg p(a) \vee \neg o(x)$

$\sigma_6 = q(b)$

Renombro y reorganizo las claúsulas:

$s(x) = \neg m(x)$ $r(x) = \neg m(x)$ ...

$\sigma_0 : o(x)$

$\sigma_1 = t(x) \vee \neg q(x) \vee \neg m(x)$

$\sigma_2 = p(x) \vee \neg q(x) \vee \neg t(x) \vee \neg m(x)$

$\sigma_3 = m(x) \vee \neg o(x)$

$\sigma_4 = m(x) \vee \neg o(x$

$\sigma_5 = \neg p(a) \vee \neg o(x)$

$\sigma_6 = q(b)$

Por tratarse de un conjunto de claúsulas de Horn se sabe que comenzando por la clausula objeto existe una solución lineal ordenada: σ

"El profesor es feliz si a todos sus estudiantes les gusta la lógica; luego un profesor es feliz si no tiene estudiantes"

Sean los siguientes enunciados hipotéticos:

i) El profesor es feliz si a todos sus alumnos les gusta la lógica

Se pretende establecer el enunciado:

ii) "Un profesor es feliz si no tiene estudiantes".

A tal efecto introducimos las siguientes abreviaturas

- $f(y)$ por "y es feliz"
- $s(x,y)$ por "x es estudiante de y
- $g(x)$ por "a x le gusta la lógica

La traducción de los enunciados hipotéticos:

i) $\forall y\left(\forall x\left(s(x,y) \rightarrow g(x)\right) \rightarrow f(y)\right) \equiv \exists x \neg(\neg s(x,y) \vee g(x)) \vee f(y))$ $((s(x,y) \vee f(y)) \wedge (\neg g(x) \vee f(y)))$

$\equiv \exists x\,(s(x,y) \wedge \neg g(x)) \vee f(y) \equiv \forall y \exists x((s(x,y) \vee f(y)) \wedge (\neg g(x) \vee f(y)))$

Tesis:

ii) $(\neg \exists x\; s(x,y)) \rightarrow f(y)$

Negación de la tesis:

$\neg((\neg \exists x\; s(x,y)) \rightarrow f(y)) \equiv \neg(\exists x\; s(x,y) \vee f(y)) \equiv \forall x(\neg s(x,y) \wedge \neg f(y))$

Pasando a cláusulas

$\sigma_0)$ $\neg s(x,y)$

$\sigma_1)$ $\neg f(y)$

$\sigma_2)$ $s(a,y) \vee f(y)$

$\sigma_3)$ $\neg g(a) \vee f(y)$

por resolución con raíz σ_2

$\sigma_2)$ $\underline{s(a,y)} \vee f(y)$

$(x|a)$ $(y_1|y)$ $\sigma_0)$ $\neg \underline{s(x, y_1)}$

$f(y)$

$(y_1|y)$ $\sigma_1)$ $\neg f(y_1)$

$\square$

Por lo tanto el conjunto de cláusulas es insatisfacible y nuestra tesis es cierta.

$\alpha = 1$

s	g	f		$\alpha \; \beta$	$(\alpha \rightarrow \beta)$	$\rightarrow \delta$	$\alpha \wedge \beta \rightarrow \delta$
				0 0	0	1	1
0	0	1	1	0 1	1	1	1
0	1	1	1	1 0	0	1	1
1	0	1	0	1 1	1	1	1
1	1	1	1				1

	α	β	γ	Salida
1-2	0	0	0	1
1-2	1	0	0	1
2	0	1	0	1
1-2	1	1	0	0
1-2	0	0	1	1
1-2	1	0		
1-2	0	1	1	1
1-2	1	1	1	1

α = ser alumno
β: gustar lógica
γ: profesor feliz

		(1)	(2)
α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \wedge \beta$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1
1	0	0	0

$\alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 0$

$$\underbrace{\underbrace{\alpha \to \beta}_{1} \to \gamma}_{0}$$

falso, pero la salida operada es 1.

en cambio con

$$\underbrace{\underbrace{\alpha \wedge \beta}_{0} \to \gamma}_{0}$$

Esto es cierto, por tanto nuestro operador $\boxed{\text{es } \wedge}$

tenemos $\alpha ? \beta$ donde ? es un operador desconocido.

pero sabemos que en el caso $\alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 0$ es cierta la fórmula

$$\overbrace{(\alpha ? \beta)}^{\varphi} \to \gamma$$

para el operador $\to \gamma$

φ	γ	$\varphi \to \gamma$
0	0	1
1	0	0

por tanto $v(\varphi) = 0$

$\varphi = \alpha ? \beta$

por otro lado tenemos

α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$
0	1	1	0	1

Por tanto solo cumple que $v(\varphi) = 0$ el caso $\alpha \wedge \beta$