Unidad Cinvestav Tamaulipas

2024

Maestría en Ciencias en Ingeniería y Tecnologías Computacionales

Álgebra Lineal

©Dr. José Torres Jiménez

Mayo 2024

Versión 1.0

Índice

Resumen

El objetivo de este documento es presentar conceptos básicos relacionados con Álgebra Lineal. En particular se revisarán los aspectos relacionados con: vectores y matrices; sistemas de ecuaciones simultáneas, métodos para resolverlos y la descomposición LU.

1. Campos de números

En este apartado se introducirán los campos numéricos de los números naturales, los números enteros, los números racionales, y los números complejos.

El campo de los números naturales se designa por la letra N y contiene a todos los números de la sucesión: $\{1, 2, 3, ..., \infty\}$.

El campo de los números enteros se designa por la letra Z y contiene a todos los números de la sucesión: $\{-\infty, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., \infty\}$.

El campo de los números racionales se designa por la letra Q y contiene todos los elementos expresados por $\frac{a}{b}$ tal que $(a \in Z) \wedge (b \in Z) \wedge (b \neq 0)$ (en este sentido $N \subset Q$).

Los números irracionales se designan por la letra I y son aquellos que no pueden ser expresados como un cociente, de dos números enteros, ejemplos de estos números son: π y $\sqrt{2}$.

El campo de los números reales incluye a los números racionales y a los irracionales, es decir: $R = Q \cup I$.

El campo de los números complejos es designado con $C = R \times R$, es decir es el resultado de hacer el producto cartesiano del campo R con el mismo. Los números complejos son expresados de varias maneras, por ejemplo: a, b o $a{+}bi$ donde $(a \in R) \wedge (b \in R) \wedge i = \sqrt{-1}$.

Usando los diferentes campos de números es posible realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, potenciación, etc.

2. Vectores

Un vector es una colección de n elementos donde cada elemento pertenece a un campo numérico (por ejemplo el campo de los números reales R y el campo de los números complejos C). Por ejemplo en: R^3 se encuentran los vectores: $(5, -3, 4.8)$ y $(a, b, c)|(a \in R) \wedge (b \in R) \wedge (c \in R)$, cuando un vector es escrito en un renglón se designa como vector-renglón, si un vector es escrito en una sola columna se le denomina vector-columna.

Ejemplos de vectores columna:

- $$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} - 3i \\ 0.1 \\ 4i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores son designados usando letras minúsculas como: u, v, l, m

2.1. Suma de vectores

La suma de vectores del mismo tamaño (mismo número de elementos) se realiza construyendo un vector del mismo tamaño y cada elemento resulta de la suma elemento a elemento de los vectores. Ver **Algoritmo** 2.1

Ejemplos:

- Asumiendo que se tienen los vectores u y v tales que $(u \in R^n) \wedge (v \in R^n)$, y $u = (u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$ y $v = (v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$ tenemos que: $u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3, ..., u_n+v_n)$.
- Asumiendo $p = (1, -3, 4)$ y $q = (-1, 3, -4)$ tenemos que $p - q = (2, -6, 8)$

Algoritmo 2.1: SUMVECTORS()

Comentario: E*ntrada* : u *tamaño* n, v *tamaño* n.

Comentario: S*alida* : r *tamaño* n; $r = u{+}v$.

for $i{\leftarrow}1$ **to** n **do** $r_i{\leftarrow}u_i{+}v_i$

2.2. Multiplicación de un vector por un escalar

Un escalar es un elemento que puede pertenecer a R o a C, es por ejemplo : 3, $\sqrt{5}$, $-\frac{4}{\pi}$: Puede ser también una letra que se asuma que es un escalar por ejemplo: $k \in R$. El producto de un escalar por un vector es un vector donde cada componente es multiplicado por el escalar. Ver **Algoritmo** 2.2.

Ejemplo:

- Sea k un escalar y $u = (a, b, c, d)$, el resultado de $ku = (ka, kb, kc, kd)$.
- El resultado de multiplicar $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ por $u = (-1, 0, 4, 3)$ donde $u \in R$ es: $(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0, -\sqrt{3}, \frac{-3\cdot\sqrt{3}}{4})$

Algoritmo 2.2: SCALARVECTOR()

Comentario: E*ntrada* : u *tamaño* n, k *es un escalar*.

Comentario: S*alida* : r *tamaño* n; $r = ku$.

for $i{\leftarrow}1$ **to** n **do** $r_i{\leftarrow}ku_i$

2.3. Producto interno de vectores

El producto interno de dos vectores del mismo tamaño, también denotado como producto punto, se define como el escalar resultante de la suma de los productos de los componentes de los vectores.

El producto punto se especifica gráficamente con un punto central, por ejemplo si u y v son vectores que pertenecen a R^n, $u{\cdot}v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$. Ver **Algoritmo** 2.3.

Ejemplo:

- Asumiendo que $u = (3, -1, 0)$ y $v = (-3, 4, 2)$ donde u y v pertenecen a R^3, entonces $u{\cdot}v = (3)(-3) + (-1)(4) + (0)(2) = -9 - 4 + 0 = -13$.

Algoritmo 2.3: PRODUCTVECTORS()

Comentario: $Entrada : u\ tamaño\ n,\ v\ tamaño\ n.$

Comentario: $Salida : r\ tamaño\ n;\ r = u \cdot v.$

$r \leftarrow 0$; **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do** $r \leftarrow r + u_i v_i$

2.4. Norma de un vector

La norma de un vector $u \in R^n$ se denota por $||u||$ y se define como la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de sus componentes es decir:

$$||u|| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + ... + (u_n)^2}$$

Ver **Algoritmo** 2.4.

Algoritmo 2.4: NORMVECTOR()

Comentario: $Entrada : u\ tamaño\ n.$

Comentario: $Salida : r\ es\ un\ escalar.\ r = ||u||.$

$s \leftarrow 0$; **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do** $s \leftarrow s + (u_i)^2$
$r \leftarrow \sqrt{s}$

2.5. Distancia entre dos vectores

La distancia entre dos vectores u, v que pertenecen a R^n denotada por $d(u, v)$ se calcula como la norma de la diferencia de los dos vectores, es decir,

$d(u, v) = ||u - v|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + ... + (u_n - v_n)^2}$

Ver **Algoritmo** 2.5.

Ejemplo:

- Sean los vectores $u = (1, -2, 3)$ y $v = (2, 4, 5)$ la distancia entre ellos es: $d(u, v) = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{1 + 36 + 4} = \sqrt{41}$

Algoritmo 2.5: DISTANCEVECTORS()

Comentario: $Entrada : u\ tamaño\ n,\ v\ tamaño\ n.$

Comentario: $Salida : r\ es\ un\ escalar,\ r = dist(u, v).$

$s \leftarrow 0$; **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do** $s \leftarrow s + (u_i - v_i)^2$

$r \leftarrow \sqrt{s}$

2.6. Ángulo entre dos vectores

El coseno del ángulo entre dos vectores se calcula como el cociente entre el producto punto de ellos y la multiplicación de sus normas, es decir, $cos\theta = \frac{u \cdot v}{||u|| ||v||}$
Ver **Algoritmo** 2.6.

Ejemplo:

- Sean los vectores $u = (1, -2, 3)$ y $v = (2, 4, 5)$ el coseno del ángulo entre ellos es $cos\theta = \frac{u \cdot v}{||u||||v||}$,
  $u \cdot v = 2 - 8 + 15 = 9$,
  $||u|| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$
  $||v|| = \sqrt{4+16+25} = \sqrt{41}$
  entonces:
  $cos\theta = \frac{u \cdot v}{||u||||v||} = \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{45}}$

Algoritmo 2.6: CosAngVectors()

Comentario: $Entrada : u\ tamaño\ n, v\ tamaño\ n.$

Comentario: $Salida : r = cos\theta = \frac{u \cdot v}{||u||||v||}$

$a \leftarrow 0$; **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do** $a \leftarrow b + u_i v_i$
$b \leftarrow 0$; **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do** $b \leftarrow b + (u_i)^2$; $b \leftarrow \sqrt{b}$
$c \leftarrow 0$; **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do** $c \leftarrow c + (v_i)^2$; $c \leftarrow \sqrt{c}$
$r \leftarrow \frac{a}{bc}$

3. Matrices

En esta sección se trabajará con matrices y ciertas propiedades asociadas a ellas. Una matriz puede ser vista como un arreglo de vectores, o como un arreglo rectangular de escalares sobre un campo de números. Sea una matriz A que consta de n renglones y m columnas, la manera más usual de presentarla es como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

El elemento $a_{i,j}$ es el que se encuentra en el renglón i-ésimo y en la columna j-ésima.

3.1. Suma de Matrices

Sean A y B dos matrices de tamaño $n \times m$, la suma de ellas es una matriz del mismo tamaño donde cada elemento es calculado como la suma de los elementos correspondientes de A y B, entonces la suma es:

$$A{+}B = \begin{bmatrix} a_{1,1}{+}b_{1,1} & a_{1,2}{+}b_{1,2} & ... & a_{1,m}{+}b_{1,m} \\ a_{2,1}{+}b_{2,1} & a_{2,2}{+}b_{2,2} & ... & a_{2,m}{+}b_{2,m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1}{+}b_{n,1} & a_{n,2}{+}b_{n,2} & ... & a_{n,m}{+}b_{n,m} \end{bmatrix}$$

Ver **Algoritmo** 3.1.

Ejemplo:

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} & 5 \\ -1 & -4 & -9 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 3 \\ -7 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$A{+}B = \begin{bmatrix} 18 & \sqrt{2} & 8 \\ -8 & 0 & -1 \\ 6 & 7 & 15 \end{bmatrix}$$

Algoritmo 3.1: sumMatrices()

Comentario: $Entrada : A\ tamaño\ n \times m, B\ tamaño\ n \times m.$

Comentario: $Salida : R\ tamaño\ n \times m,\ R = A{+}B.$

for $i{\leftarrow}1$ **to** n **do**
    for $j{\leftarrow}1$ **to** m **do** $r_{i,j} = a_{i,j}{+}b_{i,j}$

3.2. Multiplicación de una matriz por un escalar

La multiplicación de un escalar por una matriz, es una matriz de las mismas dimensiones donde cada elemento es el resultado de multiplicar el escalar por la matriz original. Ver **Algoritmo** 3.2.

Ejemplo:

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} & 5 \\ -1 & -4 & -9 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$kA = \begin{bmatrix} 3k & k\sqrt{2} & 5k \\ -k & -4k & -9k \\ 0 & 5k & 8k \end{bmatrix}$$

Algoritmo 3.2: SCALARPRODMATRIZ()

Comentario: $Entrada : A \ tamaño \ n \times m, \ k \ es \ un \ escalar.$

Comentario: $Salida : R \ tamaño \ n \times m, \ R = kA$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  for $j \leftarrow 1$ **to** m **do** $r_{i,j} = ka_{i,j}$

3.3. Multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices está definida si y solo si el número de columnas de la primer matriz es idéntico al número de renglones de la segunda matriz, por ejemplo si A es una matriz de tamaño $n \times r$ y B es una matriz de tamaño $r \times m$ es posible realizar la multiplicación. De manera adicional la matriz resultante de multiplicar las dos matrices A y B tendrá el número de renglones de A (la primer matriz) y el número de columnas de B la segunda matriz, esto implica que el resultado tendrá n renglones y m columnas.

En general la multiplicación entre matrices **no es conmutativa**, es decir que en general el resultado de multiplicar una matriz A por una matriz B no es igual a la multiplicación de la matriz B por la matriz B.

La multiplicación **si es asociativa**, quiere decir que $ABC = A(BC) = (AB)C$.

Cada elemento de la matriz resultante será el resultado de realizar la suma de los productos de un renglón de A por una columna de B, de manera sucinta: sea A de tamaño $n \times r$ y B de tamaño $r \times m$, y sea el resultado la matriz C de tamaño $n \times m$, se cumple que:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} b_{k,j}$$

Ver **Algoritmo** 3.3.

Ejemplo:

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 40 & 36 & 3 & 17 \\ 0 & 37 & -34 & 14 \\ 32 & 56 & -23 & 35 \end{bmatrix}$$

Algoritmo 3.3: PRODMATRICES()

Comentario: E*ntrada* : A *tamaño* $n \times r, B$ *tamaño* $r \times m$.

Comentario: S*alida* : R *tamaño* $n \times m,\ R = AB$.

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
$\left\{ \text{for } j \leftarrow 1 \text{ to } m \text{ do} \left\{ r_{i,j} \leftarrow 0; \quad \text{for } k \leftarrow 1 \text{ to } r \text{ do } r_{i,j} \leftarrow r_{i,j} + a_{i,k} b_{k,j} \right. \right.$

3.4. Matriz de permutación

Una matriz cuadrada de permutación es de tamaño $n \times n$ y la designaremos con la letra P, es una matriz que es toda ceros excepto que en cada renglón y en cada columna sólo hay un elemento igual a 1. Por ejemplo,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es una matriz de permutación de tamaño 3×3 y además es una matriz identidad, que quiere decir que al multiplicar $PA = A$ y $AP = A$.

Si ahora,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es una matriz de permutación tal que al realizar PA el resultado es la matriz A permutando los renglones 2 y 3, y al hacer AP el resultado es la matriz A permutando las columnas 2 y 3. Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se cumple que :

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Y al hacer:

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5. Transpuesta de una matriz

La transpuesta de una matriz A de dimensiones $n \times m$ es una matriz B en la que los renglones de A son las columnas de B, y las columnas de A son ahora los renglones de B, es decir B es de dimensiones $m \times n$ y cada elemento es calculado por $b_{i,j} = a_{j,i}$. La transpuesta de una matriz se designa con el nombre de la matriz y como superíndice T, es decir $B = A^T$. Ver **Algoritmo** 3.4.

Ejemplo:

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

  y $B = A^T$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Algoritmo 3.4: TRANSPOSEMATRIX()

Comentario: Entrada : A *tamaño* $n \times m$.

Comentario: Salida : B *tamaño* $m \times n,\ B = A^T$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    for $j \leftarrow 1$ **to** m **do** $b_{j,i} \leftarrow a_{i,j}$

3.6. Matrices cuadradas

Una matriz cuadrada es aquella en la que el número de renglones es idéntico al número de columnas.

Ejemplo:

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Las dimensiones de A son 4×4, por lo que A es una matriz cuadrada.

3.7. Matrices simétricas

Una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ es simétrica sii se cumple que $a_{i,j} = a_{j,i}$. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, A es simétrica. Una matriz simétrica tiene la característica de que su transpuesta es idéntica a la matriz original, es decir, $A = A^T$.

3.8. Diagonal de una matriz

La diagonal de una matriz (también conocida como diagonal principal) está formada por todos los elementos donde el índice del renglón tiene el mismo valor que el índice de la columna, si A es una matriz de dimensiones 4×4, los elementos: $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, a_{4,4}$ forman la diagonal principal (son los elementos descritos por $a_{i,i}$).

Ejemplo:

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

  La diagonal principal es indicada en color verde:

$$A = \begin{bmatrix} \color{green}{4} & -7 & 6 & 3 \\ 0 & \color{green}{4} & 2 & -2 \\ 3 & 8 & \color{green}{7} & 4 \\ 1 & 2 & -3 & \color{green}{0} \end{bmatrix}$$

3.9. Matriz identidad y matriz escalar

Una matriz identidad es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ en la que todos los elementos de su diagonal tienen el valor de 1 y el resto de los elementos tienen valor 0 y es designada por la letra I, una matriz escalar es una matriz identidad multiplicada por un escalar diferente de 1. La característica de una matriz identidad es que al ser multiplicada por otra matriz resulta la misma matriz, es decir, $AI = IA = A$, en el caso de una matriz escalar el resultado de multiplicar una matriz escalar por otra matriz A es equivalente a multiplicar la matriz A por el escalar definido en la matriz escalar.

Ejemplos:

- Una matriz identidad de tamaño 4×4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Una matriz escalar

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3.10. Matriz diagonal

Una matriz diagonal A es aquella en la que todos los elementos que no están en la diagonal principal son cero, es decir debe satisfacer que $A_{i,j} = 0$ para $i \neq j$.

Ejemplo:

- $$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.11. Matriz triangular superior y matriz triangular inferior

Una matriz A es una matriz triangular superior si todos los elementos abajo de la diagonal principal son cero ($a_{i,j} = 0, i > j$). Una matriz triangular inferior cumple que todos los elementos arriba de la diagonal principal son cero ($a_{i,j} = 0, i < j$).

Ejemplos:

- $$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  A es una matriz triangular superior.

- $$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

  B es una matriz triangular inferior.

3.12. Definición de matriz inversa

La matriz inversa de una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ se designa por $A^{-1} = \frac{1}{A}$ y tiene la propiedad que: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, es decir al multiplicar una matriz por su inversa (y viceversa) da la matriz identidad (matriz con unos en la diagonal principal y ceros en los demás elementos). Más adelante se verán varios métodos para el cálculo de la matriz inversa, pero es importante resaltar la propiedad de que:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Dado que:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

y:

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-}1IB = B^{-1}B = I$$

De la misma manera se puede generalizar que la inversa del producto de varias matrices es el producto de las inversas de las matrices en el orden inverso al que se multiplicaron, es decir:

$$(ABCDE)^{-1} = E^{-1}D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

Otra propiedad importante es que la inversa de una matriz de permutación es la transpuesta de la matriz de permutación. Sea P una matriz de permutación de tamaño $n \times n$ entonces:

$$P^{-1} = P^T$$

y

$$(P^T)^{-1} = P$$

Estas propiedades serán usadas cuando se vea use el método de descomposición LU para el cálculo de la matriz inversa.

3.13. Definición de determinante

El determinante de una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ se designa por $det(A)$ ó $|A|$ y es un escalar que resulta de manipular aritméticamente todos los valores de los elementos de la matriz. En particular para una matriz A de tamaño 1×1, $det(A) = |A| = a_{1,1}$. Más adelante se verán diversas alternativas para el cálculo de un determinante.

3.14. Definición de menor y cofactor de un elemento de una matriz

Sea una matriz A, el menor del elemento $a_{i,j}$ se designa por $M_{i,j}$ y es la matriz resultante de eliminar el renglón i-ésimo y la columna j-ésima de la matriz A. El cofactor de un elemento $a_{i,j}$ se obtiene por $(-1)^{i+j}|M_{i,j}|$.

Los cofactores pueden ser usados para obtener el valor de un determinante de una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$, para esto se hace la sumatoria del producto de los elementos de un renglón/columna por sus respectivos cofactores, esto es:

$$\begin{gathered}\text{Para renglón } i\ : \\ det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}|M_{i,j}| \\ \text{Para columna } j\ : \\ det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}|M_{i,j}|\end{gathered}$$

Puede verse que con esta definición se puede calcular de manera recursiva el determinante de una matriz de tamaño $n \times n$ usando determinantes de matrices de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, el determinante de matrices de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ usando determinantes de matrices de tamaño $(n-2) \times (n-2)$ y así hasta obtener matrices de tamaño 1×1 que ya se sabe que es el elemento de dicha matriz.

3.15. Adjunta de una matriz $adj(A)$

Dada una matriz A de dimensiones $n \times n$ su matriz de cofactores denominada C se construye haciendo que $c_{i,j}$ tenga el resultado del determinante del cofactor del elemento $a_{i,j}$. Y la adjunta se calcula como la matriz transpuesta de la matriz de cofactores, es decir: $adj(A) = C^T$. Ver ejemplo enseguida:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Entonces los términos de la matriz de cofactores C son

$$c_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad c_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad c_{1,3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$c_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad c_{2,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad c_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$c_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \quad c_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} \quad c_{3,3} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

y finalmente

$$adj(A) = C^T$$

4. Solución de un sistema de ecuaciones simultáneas por el método de Gauss-Jordan

En esta sección definiremos lo que es un sistema de ecuaciones simultáneas y como puede ser resuelto usando el método de Gauss-Jordan: que involucra dos pasos: 1) construcción de una matriz triangular superior; 2) sustitución hacia atrás.

4.1. Sistema de ecuaciones simultáneas

Un sistema de ecuaciones simultáneas está compuesto de n ecuaciones donde existen n incógnitas, se expresa usualmente como $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ denominada matriz de coeficientes; x es el vector columna con n elementos denominado vector de incógnitas; y b es un vector columna, con n elementos, denominado vector de términos independientes.

Ejemplos:

- $$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

  $Ax = b$ es:

  $$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

  Esto es:

  $$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

- Un sistema de ecuaciones simultáneas con $n = 3$ y $m = 3$ es:

  $$\begin{aligned} 3x + 4y + 7z &= 4 \\ 2x - 8y - z &= 8 \\ -x + 3y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

  Esto indica que

  $$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & -8 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \; x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4.2. Operaciones elementales de un sistema de ecuaciones simultáneas

Las operaciones elementales de un sistema de ecuaciones simultáneas permiten generar otro sistema de ecuaciones simultáneas equivalente al original. Estas operaciones elementales son tres: a) intercambiar dos ecuaciones; b) multiplicar una ecuación por un escalar; y c) reemplazar una ecuación por su suma con otra(s) ecuación(es) multiplicada(s) por un escalar.

Ejemplos:

- Sea el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} 3x+4y+7z &= 4 \\ 2x-8y-z &= 8 \\ -x+3y+4z &= 7 \end{aligned}$$

- Multiplicando la segunda ecuación por -4 se tiene un sistema equivalente:

$$\begin{aligned} 3x+4y+7z &= 4 \\ -8x+32y+4z &= 8 \\ -x+3y+4z &= 7 \end{aligned}$$

- Intercambiando las ecuaciones primera y tercera, tenemos:

$$\begin{aligned} -x+3y+4z &= 7 \\ 2x-8y-z &= 8 \\ 3x+4y+7z &= 4 \end{aligned}$$

- Reemplazando la segunda ecuación por su suma con la primer ecuación multiplicada por -1, tenemos:

$$\begin{aligned} 3x+4y+7z &= 4 \\ -x-12y-8z &= 4 \\ -x+3y+4z &= 7 \end{aligned}$$

4.3. Método de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas

El método de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas automatiza la aplicación de las operaciones elementales definidas. El algoritmo de Gauss-Jordan consta de dos partes, en la primer parte se obtiene una matriz triangular superior, y en la segunda etapa se realiza una sustitución hacia atrás de los valores de las incógnitas.

4.3.1. Parte 1 del método de Gauss-Jordan

Sea el sistema de ecuaciones simultáneas: $Ax = b$, donde A es la matriz de coeficientes (de tamaño $n \times n$), x es el vector columna de las incógnitas, y b es el vector columna de términos independientes, el método de Gauss-Jordan sólo usa la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes, y por conveniencia definiremos un algoritmo que usa una única matriz A de tamaño $n \times (n+1)$ donde la última columna es el vector columna de términos independientes. Al final de los dos pasos del método de Gauss-Jordan se tiene una matriz A de tamaño $n \times (n+1)$ donde los elementos $a_{i,i}$ son uno y en la última columna se tiene el valor de las incógnitas.

Para la primera parte del algoritmo de Gauss-Jordan se construye una matriz triangular superior, para la construcción se usa el concepto de elemento *pivote*, este elemento pivote es un elemento $a_{i,i}$ que sea diferente de cero, en caso de no ser así, se debe intercambiar la ecuación i con otra que tenga en la columna i un elemento diferente de cero (sino se encuentra la ecuación con pivote diferente de cero, no existe solución única). Una vez que se tiene un elemento pivote en $A_{i,i}$ que sea diferente de cero, para cada $j > i$ se calcula un multiplicador μ del renglón i relacionado con el renglón j, de manera que se cumpla que: $\mu a_{i,i}+a_{j,i} = 0$ de donde tenemos:

$$\mu = -\frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$$

Una vez, hecho esto se hace para cada $j > i$ y cada $k \geq i$

$$a_{j,k} = a_{j,k}+\mu a_{i,k}$$

esta operación equivale a reemplazar la ecuación $j-$ésima por su suma con la ecuación $i-$ésima multiplicada por μ, que son operaciones elementales en un sistema de ecuaciones simultáneas, y se hace el elemento $a_{j,i} = 0$.

El proceso anterior es repetido $n-1$ veces (claro si no es encontrado un elemento pivote diferente de cero el algoritmo termina), después de lo cual tendremos una matriz triangular superior. Ver **Algoritmo** 4.1

Ejemplos:

-
$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 6 \\ 2x-2y+z &= 1 \\ 3+y-2z &= 2 \end{aligned} \implies A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{matrix}$$

- Tomando como elemento pivote $a_{1,1}$, el elemento multiplicador del renglón 1 relacionado con el renglón 2 es $\mu = -\frac{2}{1}$, y el multiplicador del renglón 1 relacionado con el renglón 3 es $\mu = -\frac{1}{3}$ se obtiene:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -5 & -11 \\ 0 & -5 & -11 & -16 \end{matrix}$$

- Tomando como elemento pivote $a_{2,2}$ (que tiene valor -6), el elemento multiplicador del renglón 2 relacionado con el renglón 3 es $\mu = -\frac{-5}{-6} = -\frac{5}{6}$ se obtiene:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{41}{6} & -\frac{41}{6} \end{matrix}$$

Ejercicios: Construya las matrices triangulares superiores para las matrices:
a)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{matrix}$$

b)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & -13 & 7 \end{array}$$

Algoritmo 4.1: GAUSS-JORDANPART1()

Comentario: E*ntrada* : *A tamaño* $n \times (n{+}1)$.

Comentario: S*alida* : *triangular*$A, a_{\_,n+1}$ *términos independientes.*

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } n-1 \textbf{ do} \\
\quad \left\{ \begin{array}{l}
\textbf{if } (a_{i,i} = 0) \\
\left\{ \begin{array}{l}
j \leftarrow i{+}1; \ \textbf{while } (j \leq n) \textbf{ and } (a_{j,i} = 0) \textbf{ do } j \leftarrow j{+}1 \\
\textbf{if } (j = n{+}1) \textbf{ then return } (\textit{pivot=0}) \\
\quad \textbf{else for } k \leftarrow i \textbf{ to } n \textbf{ do } a_{i,k} \leftrightarrow a_{j,k}
\end{array} \right. \\
\textbf{for } j \leftarrow (i{+}1) \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad \left\{ \begin{array}{l}
\mu \leftarrow -\frac{a_{j,i}}{a_{i,i}} \\
\textbf{for } k \leftarrow (i{+}1) \textbf{ to } (n{+}1) \textbf{ do } a_{j,k} \leftarrow a_{j,k} + \mu a_{i,k} \\
a_{j,i} \leftarrow 0
\end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array}
$$

4.3.2. Parte 2 del método de Gauss-Jordan

La segunda parte del método de Gauss-Jordan realiza la sustitución hacia atrás de los valores de las incógnitas dejando una matriz identidad de tamaño $n \times n$ y en la columna $(n{+}1)-$ésima quedan los valores de las incógnitas. En este contexto se toma como elemento pivote $a_{i,i}$ para $i = n$ y se hace $a_{i,i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{a_{i,i}}$ y $a_{i,i} = 1$, luego para todo $j < i$ se hace $a_{j,i+1} = a_{j,i+1} - a_{i,i+1}a_{j,i}$ y $a_{j,i} = 0$ (esto equivale a sustituir el valor de $a_{i,i}$ en las ecuaciones anteriores) esto se repite hasta hacer todos los pivotes 1. Finalmente el valor de las incógnitas se lee en la columna $n+1$. Ver **Algoritmo** 4.2.

Ejemplo de construcción de matriz triangular superior y obtención de solución:

- Parte 1 Método de Gauss Jordan:

$$\begin{matrix} x+2y+3z=6 \\ 2x-2y+z=1 \\ 3+y-2z=2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{41}{6} & -\frac{41}{6} \end{matrix}$$

- Parte 2 Método de Gauss Jordan

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{41}{6} & -\frac{41}{6} \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Ergo la solución es: $x = 1, y = 1, z = 1$

Algoritmo 4.2: GAUSS-JORDANPART2()

Comentario: *Entrada : Triangular A tamaño $n \times (n+1)$.*

Comentario: *Salida : Identity $A, a_{\_,n+1}$ solución del sistema.*

for $i \leftarrow n$ **downto** 1 **do**

$$\begin{cases} a_{i,n+1} \leftarrow \frac{a_{i,n+1}}{a_{i,i}} \\ a_{i,i} \leftarrow 1 \\ \textbf{for } j \leftarrow (i-1) \textbf{ downto } 1 \textbf{ do } \begin{cases} a_{j,n+1} \leftarrow a_{j,n+1} - (a_{j,i}a_{i,n+1}) \\ a_{j,i} \leftarrow 0 \end{cases} \end{cases}$$

5. Determinante de una matriz cuadrada

Cada matriz cuadrada A se puede transformar a un sólo escalar llamado determinante y denotado por $det(A)$, el determinante se expresa también como $|A|$ (es decir no usa ni "( )", ni “[ ]"para denotarlo sino sólo líneas verticales. Por ejemplo para:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

Su determinante se expresa como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{vmatrix}$$

Sea una matriz A de tamaño $n \times n$, el menor del elemento $a_{i,j}$ es la matriz que resulta de eliminar el renglón i y la columna j, y se designa como $M_{i,j}$, y el cofactor del elemento $a_{i,j}$ se calcula como: $(-1)^{i+j}|M_{i,j}|$. Para la matriz A anterior el cofactor de $a_{2,2}$ es:

$$(-1)^{2+2}a_{2,2}|M_{2,2}| = 3 * \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}$$

5.1. Determinante de una matriz de tamaño 1×1

El determinante de una matriz A de tamaño 1×1 es $det(A) = a_{1,1}$

5.2. Determinante de una matriz de tamaño 2×2

El determinante de una matriz A de tamaño 2×2 se calcula de manera explicita como:

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

Una manera de recordar fácilmente esta fórmula es multiplicar los elementos siguiendo la flecha azul y restar la multiplicación de los elementos siguiendo la flecha roja, como se ve en la siguiente matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \quad det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

Ejemplos:

- $$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad det(A) = 3 * 6 - 4 * 5 = 18 - 20 = -2$$

- $$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \quad det(A) = -2 * (-3) - (-5 * 3) = 6{+}15 = 21$$

Una manera alterna de obtener el determinante de una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ es sumar la contribución de los elementos de un renglón fijo (columna fija), y la contribución del elemento $a_{i,j}$ es simplemente: $a_{i,j}(-1)^{i+j}|M_{i,j}|$ como se ve en las siguientes expresiones:

$$\text{Para renglón } i \ :$$
$$det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}|M_{i,j}|$$
$$\text{Para columna } j :$$
$$det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}|M_{i,j}|$$

De este modo, el cálculo de un determinante de una matriz A de tamaño 2×2 es (usando el primer renglón): $det(A) = (-1)^{1+1}a_{1,1}|M_{1,1}|{+}(-1)^{1,2}a_{1,2}|M_{1,2}|$ $= a_{1,1}|a_{2,2}| - a_{1,2}|a_{2,1}| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$. Esta expresión es igual a la expresión dada anteriormente.

5.3. Determinante de una matriz de tamaño 3×3

El determinante de una matriz A se puede calcular por:

$$det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}-a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$$

Una manera de recordar fácilmente esta fórmula es multiplicar los elementos siguiendo las flechas azules y restar la multiplicación de los elementos siguiendo las flechas rojas, como se ve en la siguiente matriz A, en la que se han agregado sus dos primeras columnas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

$det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}-a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$

El cálculo de un determinante usando cofactores y el primer renglón sería:

$det(A) = (-1)^{1+1}a_{1,1}|M_{1,1}|+(-1)^{1+2}a_{1,2}|M_{1,2}|+(-1)^{1+3}a_{1,3}|M_{1+3}|$

$$= a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Y calculando los determinantes los tres menores $M_{1,1}$,$M_{1,2}$ y $M_{1,3}$ se obtiene la expresion:

$$det(M_{1,1}) = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2})$$
$$det(M_{1,2}) = a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1})$$
$$det(M_{1,3}) = a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1})$$

Entonces:

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1})+a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \end{aligned}$$

Esta expresión es idéntica a la dada anteriormente. Se puede concluir que el $det(A)$ resulta de la suma de los cofactores de un renglón/columna.

Una observación importante es que cada término de las fórmulas dadas para el cálculo del determinante, es el producto de n elementos de la matriz A y los índices de renglón de estos elementos son siempre $1, 2, ..., n$ y las columnas de estos elementos son una permutación de las columnas $\{1, 2, ..., n\}$. Dado esto y que el número total de permutaciones de $\{1, 2, ...n\}$ es $n!$, entonces el número de términos cuando se usan cofactores para calcular el determinante es exactamente $n!$. Por ejemplo con $n = 2$ el número de términos es 2 que es exactamente $2! = 2$, con $n = 3$ el número de términos es 6 que es exactamente $3! = 6$, con $n = 4$ el número de términos sería $4! = 24$

De este modo es posible determinar el valor de un determinante usando las $n!$ permutaciones. Sea P el conjunto que contiene las $n!$ permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$ y sea σ una de estas permutaciones, entonces $\sigma(i)$ indica el elemento i-ésimo de la permutación σ. La parte que hace falta para tener los ingredientes para definir de manera completa el valor del determinante es el signo de la permutación que será designado por $sgn(\sigma)$, el signo para una permutación se calcula por $(-1)^{\iota}$ donde ι es el número de inversiones de la permutación. Una inversión entre dos elementos de una permutación ocurre cuando el primer elemento es mayor que el segundo. Por ejemplo sea $n = 4$ y $\sigma = \{4, 1, 3, 2\}$, el número de inversiones respecto a $\sigma(1)$ son 3, el número de inversiones respecto a $\sigma(2)$ son 0, el número de inversiones respecto a $\sigma(3)$ son 1, y el número de inversiones respecto a $\sigma(4)$ son cero, de este modo el total de inversiones son: $\iota = 3+0+1+0 = 4$ y entonces $sgn(\sigma) = (-1)^4 = 1$.

Entonces puede expresarse el cálculo del determinante de una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ como:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in P} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Ejemplos:

- $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

  $$det(A) = 2{*}5{*}4{+}1{*}(-2){*}1{+}1{*}0{*}(-3){-}1{*}5{*}1{-}2{*}(-2){*}(-3){-}1{*}0{*}4 =$$

  $$= 40 - 2{+}0 - 5 - 12 - 0 = 21$$

- Usando cofactores tendríamos:

  $$det(A) = 2(20-6) - 1(0{+}2){+}1(0-5) = 28 - 2 - 5 = 21$$

El método de usar cofactores para calcular el determinante de una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ es general y es recomendable usarlo cuando n es pequeña($n \leq 4$), dado que el número de operaciones requeridas es de orden exponencial (del orden $n!$).

Para calcular el determinante de matrices grandes se puede utilizar: un algoritmo similar a la primera parte del método de Gauss-Jordan (que permite calcular una matriz triangular superior), ver **Algoritmo** 5.1; y el algoritmo de descomposición LU que permite generar una matriz triangular inferior (L=Lower) y una matriz triangular superior (U=Upper).

5.4. Operaciones elementales en determinantes

Las operaciones elementales para calcular determinantes son:

- Reemplazar una columna/renglón sumándole la suma de múltiplo de otras columnas/renglones, esta operación no afecta el valor final del determinante
- Intercambiar dos columnas/renglones dan como resultado que el determinante de la matriz original sea multiplicado por -1.
- Transponer una matriz no cambia el valor del determinante, esto es: $det(A) = det(A^T)$.

- Calcular el determinante de una matriz triangular superior/inferior se hace multiplicando los elementos en la diagonal principal. Si A es una matriz triangular de tamaño $n \times n$ el determinante de A, $|A| = det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
- Calcular el determinante de una matriz escalar es el resultado de multiplicar los elementos en la diagonal principal.
- Multiplicar un renglón o una columna por una constante k en una matriz A da como resultado que el determinante se multiplique por k, i.e. $kdet(A)$.

5.5. Cálculo de determinante usando una modificación de la primera parte de Gauss-Jordan

Recordando que el método de Gauss-Jordan en su parte 1 (hacer ceros hacia abajo) calcula un multiplicador μ para relacionar la operación de multiplicación por el renglón i y sumar el resultado al renglón j:

$$\mu = -\frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$$

(ver **Algoritmo** 4.1) y luego se hace para cada $j > i$:

$$a_{j,k} = a_{j,k} + \mu a_{i,k}$$

Este enfoque se ve en el **Algoritmo** 5.1.

De manera adicional y dado que el resultado de intercambiar dos renglones afecta el valor del determinante multiplicándolo por -1 es necesario llevar el conteo del número de renglones que fueron intercambiados para garantizar que $a_{i,i} \neq 0$. Este conteo se hace en la variable ι (ver **Algoritmo** 5.1). Finalmente el valor del determinante será obtenido por el producto de los elementos pivote multiplicado por el valor de $(-1)^{\iota}$, en fórmula:

$$detA = (-1)^{\iota} \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Algoritmo 5.1: DETERMINANT()

Comentario: $Entrada : A\ tamaño\ n \times n$

Comentario: $Salida : \Delta\ es\ el\ valor\ del\ determinante.$

$\iota \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$$\begin{cases} \textbf{if } (a_{i,i} = 0) \\ \quad \begin{cases} j \leftarrow i+1 \textbf{ while } (j \leq n) \textbf{ and } (a_{j,i} = 0) \textbf{ do } j \leftarrow j+1 \\ \textbf{if } (j = n+1) \textbf{ then return } (determinant{=}0) \\ \quad \textbf{else for } k \leftarrow i \textbf{ to } n \textbf{ do } a_{i,k} \leftrightarrow a_{j,k}; \iota \leftarrow \iota+1 \end{cases} \\ \textbf{for } j \leftarrow (i+1) \textbf{ to } n \textbf{ do} \\ \quad \begin{cases} \mu \leftarrow -\frac{a_{j,i}}{a_{i,i}} \\ \textbf{for } k \leftarrow (i+1) \textbf{ to } (n+1) \textbf{ do } \ a_{j,k} \leftarrow a_{j,k} + \mu a_{i,k} \\ a_{j,i} \leftarrow 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\delta \leftarrow 1$; **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do** $\delta \leftarrow \delta a_{i,i}$

$\delta \leftarrow (-1)^{\iota}\delta$

Ejemplos:

- $$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & \frac{-17}{7} \end{vmatrix}$$
$$\sim \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-31}{12} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-31}{12} \end{vmatrix}$$

  $det(A) = |A| = (-1)^0 3 \frac{7}{3} \frac{24}{7} \frac{-31}{12} = -62$

5.6. Solución de un sistema de ecuaciones simultáneas usando determinantes (regla de Cramer)

Sea el sistema de ecuaciones simultáneas: $Ax = b$ donde A es la matriz de coeficientes y es de tamaño $n \times n$, x es un vector columna de las variables y es de tamaño n, y b es un vector columna de los términos independientes.

Existe una solución única para este sistema si y solo sí $det(A) \neq 0$. Para obtener la solución para la variable x_i definamos que A^{x_i} es la matriz A reemplazando la columna i-ésima por el vector de términos independientes. De este modo la solución para la variable x_i se obtiene por

$$x_i = \frac{|A^{x_i}|}{|A|} = \frac{det(A^{x_i})}{det(A)}$$

Ejemplo:

- Sea el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$3x - 2y = 4$$
$$2x + y = 5$$

Entonces:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3+4 = 7$$

$$det(A^x) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4+10 = 14$$

$$det(A^y) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

$$x = \frac{det(A^x)}{det(A)} = \frac{14}{7} = 2$$
$$y = \frac{det(A^y)}{det(A)} = \frac{7}{7} = 1$$

Ejemplo:

- Sea el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$x+2y+3z=1$$
$$x+3y+6z=3$$
$$2x+6y+13z=5$$

Entonces:

$$det(A)=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&6\\2&6&13\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}1&2&3&1&2\\1&3&6&1&3\\2&6&13&2&6\end{vmatrix}$$

$= \ 1*3*13+2*6*2+3*1*6-3*3*2-1*6*6-2*1*13$
$=39+24+18-18-36-26=1$

$$det(A^x)=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&3&6\\5&6&13\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}1&2&3&1&2\\3&3&6&3&3\\5&6&13&5&6\end{vmatrix}$$

$= \ 1*3*13+2*6*5+3*3*6-3*3*5-1*6*6-2*3*13$
$=39+60+54-45-36-78=-6$

$$det(A^y)=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&3&6\\2&5&13\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}1&1&3&1&1\\1&3&6&1&3\\2&5&13&2&5\end{vmatrix}$$

$= \ 1*3*13+1*6*2+3*1*5-3*3*2-1*6*5-1*1*13$
$=39+12+15-18-30-13=5$

$$det(A^z)=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&3\\2&6&5\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}1&2&1&1&2\\1&3&3&1&3\\2&6&5&2&6\end{vmatrix}$$

$= \ 1*3*5+2*3*2+1*1*6-1*3*2-1*3*6-2*1*5$
$=15+12+6-6-18-10=-1$

- $$x = \frac{det(A^x)}{det(A)} = \frac{-6}{1} = -6$$
  $$y = \frac{det(A^y)}{det(A)} = \frac{5}{1} = 5$$
  $$z = \frac{det(A^z)}{det(A)} = \frac{-1}{1} = -1$$

6. Inversa de una matriz

Para el cálculo de la inversa de una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ se puede hacer con una adaptación del método de Gauss-Jordan, usando el resultado de la descomposición LU (que se verá en la siguiente sección) y también usando la fórmula: $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$

Si se tiene una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$, la adaptación del método de Gauss-Jordan consiste en el uso de una matriz extendida que tendrá $2n$ columnas y n renglones. Las segundas n columnas al inicio son una matriz identidad de tamaño $n \times n$, al final del algoritmo en las primeras n columnas aparecerá una matriz identidad y en las segundas n columnas aparecerá la matriz inversa. Y en general debe cumplirse que: $AA^{-1} = I$. El algoritmo opera dividiendo el renglón i entre $a_{i,i}$ y esto da como resultado que $a_{i,i} = 1$, después de esto se barren los renglones j que sean diferentes de i calculando un multiplicador del renglón i relacionado con el renglón j como: $\mu = -\frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$, luego se hace para $k = i+1$ hasta n:

$$a_{j,k} = a_{j,k} + \mu a_{i,k}$$

esto equivale a multiplicar el renglón i por μ y sumárselo al renglón j, y se hace $a_{j,i} = 0$. Este proceso se repite n veces. Ver **Algoritmo** 6.1.

Algoritmo 6.1: INVERSEWITHGAUSSJORDAN()

Comentario: E$ntrada$: A $tamaño$ $n \times 2n$.

Comentario: S$alida$: A^{-1} $tamaño$ $n \times 2n$.

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
- **if** $(a_{i,i} = 0)$
  - $j \leftarrow i+1$; **while** $(j \leq n)$ **and** $(a_{j,i} = 0)$ **do** $j \leftarrow j+1$
  - **if** $(j = n+1)$ **then return** $(pivot{=}0)$
  - **else for** $k \leftarrow i$ **to** $2n$ **do** $a_{i,k} \leftrightarrow a_{j,k}$
- **for** $k \leftarrow (i+1)$ **to** $2n$ **do** $a_{i,k} \leftarrow \frac{a_{i,k}}{a_{i,i}}$
- $a_{i,i} \leftarrow 1$
- **for** $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
  - **if** $(j \neq i)$ **then**
    - $\mu = -\frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$
    - **for** $k \leftarrow (i+1)$ **to** $2n$ **do** $a_{j,k} \leftarrow a_{j,k} + \mu a_{i,k}$
    - $a_{j,i} \leftarrow 0$

Ejemplo:

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

  Y dado que el determinante no es cero, por lo tanto existe la matriz inversa.

- La matriz aumentada de tamaño $n \times 2n$ es:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Se encuentra el pivote $a_{1,1}$ en la columna número 1 dividiendo la fila número 1 entre 3:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Se hacen ceros en columna 1 (excepto $a_{1,1}$), los multiplicadores serían respectivamente: $\mu = -4, -4, -4$, y se tiene:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} & -3 & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Se encuentra el pivote $a_{2,2}$ dividiendo la fila número 2 entre $\frac{7}{3}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} & -3 & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Se hacen ceros en la columna 2, excepto $a_{2,2}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & -\frac{17}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Se encuentra el pivote $a_{3,3}$ dividiendo la fila número 3 entre $\frac{24}{7}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{-1}{7} & \frac{9}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{-3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{24} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{24} & \frac{7}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & -\frac{17}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Se hacen ceros en la columna 3 (excepto $a_{3,3}$):

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{24} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{24} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{24} & -\frac{5}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{24} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{24} & \frac{7}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{12} & -\frac{13}{12} & 1 \end{array}\right]$$

- Se encuentra el pivote en la columna 4 dividiendo la fila entre $\frac{-31}{12}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{24} & \frac{2}{3} & \frac{-7}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-11}{24} & \frac{-1}{3} & \frac{11}{24} & \frac{-5}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{24} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{24} & \frac{7}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{31} & \frac{5}{31} & \frac{13}{31} & \frac{-12}{31} \end{array}\right]$$

- Se hacen ceros en la columna 4 (excepto $a_{4,4}$):

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-14}{31} & \frac{33}{62} & \frac{-1}{62} & \frac{-11}{62} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-10}{31} & \frac{-3}{62} & \frac{17}{62} & \frac{1}{62} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{31} & \frac{5}{31} & \frac{13}{31} & \frac{-12}{31} \end{array}\right]$$

- A^{-1} aparece en la parte derecha de la matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-14}{31} & \frac{33}{62} & \frac{-1}{62} & \frac{-11}{62} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-10}{31} & \frac{-3}{62} & \frac{17}{62} & \frac{1}{62} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{31} & \frac{5}{31} & \frac{13}{31} & \frac{-12}{31} \end{array}\right]$$

- $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-14}{31} & \frac{33}{62} & \frac{-1}{62} & \frac{-11}{62} \\ \frac{-10}{31} & \frac{-3}{62} & \frac{17}{62} & \frac{1}{62} \\ \frac{-8}{31} & \frac{5}{31} & \frac{13}{31} & \frac{-12}{31} \end{bmatrix}$$

- Puede comprobarse que: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-14}{31} & \frac{33}{62} & \frac{-1}{62} & \frac{-11}{62} \\ \frac{-10}{31} & \frac{-3}{62} & \frac{17}{62} & \frac{1}{62} \\ \frac{-8}{31} & \frac{5}{31} & \frac{13}{31} & \frac{-12}{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sea el sistema $Ax = b$ donde A es la matriz inicial del ejemplo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 16 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Usando el método de Gauss Jordan y el método de uso de determinantes, resuelva el sistema $Ax = b$ y compruebe que tiene como solución:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una manera alterna de resolverlo es multiplicar A^{-1} por el vector de términos independientes b, es decir $x = A^{-1}b$ (esto surge del hecho que al despejar $Ax = b$ resulta $x = \frac{b}{A} = A^{-1}b$). Dado que tenemos A^{-1} compruebe que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-14}{31} & \frac{33}{62} & \frac{-1}{62} & \frac{-11}{62} \\ \frac{-10}{31} & \frac{-3}{62} & \frac{17}{62} & \frac{1}{62} \\ \frac{-8}{31} & \frac{5}{31} & \frac{13}{31} & \frac{-12}{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 16 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Sea el sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-23}{48} & \frac{7}{48} & \frac{2}{3} \\ \frac{31}{48} & \frac{1}{48} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{16} & \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

- El cálculo de x se obtiene de la siguiente forma:

$$x = A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-23}{48} & \frac{7}{48} & \frac{2}{3} \\ \frac{31}{48} & \frac{1}{48} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{16} & \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-23}{48}(10) + \frac{7}{48}(-6) + \frac{2}{3}(13) \\ \frac{31}{48}(10) + \frac{1}{48}(-6) + \frac{-1}{3}(13) \\ \frac{-1}{16}(10) + \frac{1}{16}(-6) + 0(13) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Sea el sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-41}{52} & \frac{81}{104} & \frac{1}{26} & \frac{-7}{26} \\ \frac{-2}{13} & \frac{3}{26} & \frac{2}{13} & \frac{-1}{13} \\ \frac{-7}{26} & \frac{-9}{52} & \frac{-3}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 14 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- El cálculo de x se obtiene de la siguiente forma:

$$x = A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-41}{52} & \frac{81}{104} & \frac{1}{26} & \frac{-7}{26} \\ \frac{-2}{13} & \frac{3}{26} & \frac{2}{13} & \frac{-1}{13} \\ \frac{-7}{26} & \frac{-9}{52} & \frac{-3}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 14 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-41}{52}(9) + \frac{81}{104}(14) + \frac{1}{26}(-7) + \frac{-7}{26}(2) \\ \frac{-2}{13}(9) + \frac{3}{26}(14) + \frac{2}{13}(-7) + \frac{-1}{13}(2) \\ \frac{-7}{26}(9) + \frac{-9}{52}(14) + \frac{-3}{13}(-7) + \frac{8}{13}(2) \\ \frac{1}{2}(9) + \frac{-1}{4}(14) + 0(-7) + 0(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Descomposición LU de una matriz cuadrada

La descomposición LU consiste en descomponer una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ en dos matrices triangulares L ("lower ", inferior en inglés) y U ("upper", superior en inglés) del mismo tamaño y se satisface que:

$$A = LU$$

La definición anterior puede generalizarse al permitir la inclusión de una matriz de permutación P, que registra los intercambios de que se realizan en la construcción de las matrices L y U, de manera adicional se registra el número de intercambios en la variable ι Así, la descomposición LU puede expresarse de la siguiente manera:

$$PA = LU$$

y

$$A = P^T LU$$

Y la variable ι es usada para el cálculo del determinante de A, de acuerdo a la fórmula:

$$det(A) = (-1)^{\iota} det(LU) = (-1)^{\iota} del(L) det(U) = (-1)^{\iota} \prod_{i=1}^{n} L_{i,i} U_{i,i}$$

El procedimiento consiste en tomar una matriz A y generar una matriz triangular superior U, donde todos los elementos debajo de la diagonal se hacen cero, es decir, $a_{i,j} = 0$ para $i \in \{1, ..., n-1\}$ y $j \in \{i+1, ..., n\}$. Para esto, se introduce un multiplicador $\mu = -\frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$, que es el escalar por el cual se debe multiplicar el renglón i antes de sumarlo al renglón j de la matriz U, y se hace $l_{j,i} = -\mu$ (al final se hace $l_{i,i} = 1$).

En el **Algoritmo** 7.1 se muestra el algoritmo que hace la descomposición LU, como ya se mencionó se calcula la matriz de permutación P y la variable ι del número de intercambios realizados.

Algoritmo 7.1: DESCOMPOSITIONLU()

Comentario: E*ntrada* : A *tamaño* $n \times n$.

Comentario: S*alida* : P *tamaño* $n \times n$, L *tamaño* $n \times n$,

Comentario: S*alida* : U *tamaño* $n \times n$, ι *número de intercambios*.

$P \leftarrow I$

$U \leftarrow A$

$L \leftarrow 0$

$\iota \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**

$$\left\{\begin{array}{l}
\textbf{if } (a_{i,i} = 0) \\
\quad \left\{\begin{array}{l}
j \leftarrow i+1;\ \textbf{while } (j \leq n) \textbf{ and } (a_{j,i} = 0) \textbf{ do } j \leftarrow j+1 \\
\textbf{if } (j = n+1) \textbf{ then return } (\textit{pivot=0}) \\
\quad \textbf{else } \left\{\begin{array}{l}
\textbf{for } k \leftarrow i \textbf{ to } n \textbf{ do } \ u_{i,k} \leftrightarrow u_{j,k} \\
\textbf{for } k \leftarrow 1 \textbf{ to } i \textbf{ do } \ l_{i,k} \leftrightarrow l_{j,k} \\
\textbf{for } k \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do } \ p_{i,k} \leftrightarrow p_{j,k} \\
\iota \leftarrow \iota+1
\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
\textbf{for } j \leftarrow i+1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad \left\{\begin{array}{l}
\mu \leftarrow -\frac{a_{j,i}}{a_{i,i}} \\
\textbf{for } k \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do } \ u_{j,k} \leftarrow u_{j,k} + \mu u_{i,k} \\
l_{j,i} \leftarrow -\mu
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do** $l_{i,i} \leftarrow 1$

Ejemplo de una matriz de tamaño 3×3:

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

- Se define: $P = I$, $L = 0$, $U = A$, y $\iota = 0$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \iota = 0$$

- Dado que el elemento $u_{1,1} \neq 0$, se usan los multiplicadores: del renglón 1 relacionado con el renglón 2 $\mu = -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} = -\frac{1}{1} = -1$ (y se hace $l_{1,2} = -\mu = 1$); del renglón 1 relacionado con el renglón 3 $\mu = -\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} = -\frac{2}{1} = -2$ (y se hace $l_{3,1} = -\mu = 2$). Tenemos entonces:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \iota = 0$$

- Dado que $u_{2,2} = 0$ se intercambian los renglones 2 y 3 de las matrices P, L, y U, adicionalmente se incrementa ι en 1. Tenemos entonces:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \iota = 1$$

- Como los elementos abajo del elemento $u_{2,2}$ ya son cero, ya no es necesario hacer otro paso. Sólo resta hacer $l_{i,i} = 1$, teniendo el resultado final:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \iota = 1$$

- Para comprobar el resultado, hagamos la multiplicación de L con u:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

  Y haciendo: $P^T LU$ tenemos:

$$P^T LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

- De manera adicional, $|A| = (-1)^{\iota}|L||U|$

$$det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 13 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

  $= (1)(2)(-5) + (2)(13)(2) + (-3)(1)(1) - (-3)(2)(2) - (1)(13)(1) - (2)(1)(-5) = -10 + 52 - 3 + 12 - 13 + 10 = 48$

  y:
  $(-1)^{\iota} det(L) det(U) = (-1)^{1}(1)(1)(1)(1)(-3)(16) = 48$

Ejemplo de una matriz 4×4:

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

- $P = I$, $U = A$, $L = 0$, $\iota = 0$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \iota = 0$$

- Dado que $u_{1,1} \neq 0$ se calculan los multiplicadores: del renglón 1 relacionado con el renglón 2, $\mu = -\frac{u_{2,1}}{u_{1,1}} = -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$ y se hace $l_{2,1} = -\mu = \frac{4}{3}$; del renglón 1 relacionado con el renglón 3, $\mu = -\frac{u_{3,1}}{u_{1,1}} = -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$ y se hace $l_{3,1} = -\mu = \frac{4}{3}$; y del renglón 1 relacionado con el renglón 4, $\mu = -\frac{u_{4,1}}{u_{1,1}} = -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$ y se hace $l_{4,1} = -\mu = \frac{4}{3}$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \iota = 0$$

- Dado que $u_{2,2} \neq 0$ se calculan los multiplicadores: del renglón 2 relacionado con el renglón 3, $\mu = -\frac{u_{3,2}}{u_{2,2}} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = -\frac{1}{7}$ y se hace $l_{3,2} = -\mu = \frac{1}{7}$; y del renglón 2 relacionado con el renglón 4, $\mu = -\frac{u_{4,2}}{u_{2,2}} = -\frac{\frac{4}{3}}{\frac{7}{3}} = -\frac{4}{7}$ y se hace $l_{4,2} = -\mu = \frac{4}{7}$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & -\frac{17}{7} \end{bmatrix} \; L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{7} & 0 & 0 \end{bmatrix} \; \iota = 0$$

- Dado que $u_{3,3} \neq 0$ se calculan el multiplicador: del renglón 3 relacionado con el renglón 4, $\mu = -\frac{u_{4,3}}{u_{3,3}} = -\frac{\frac{26}{7}}{\frac{24}{7}} = -\frac{26}{24} = -\frac{13}{12}$ y se hace $l_{4,3} = -\mu = \frac{13}{12}$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{12} \end{bmatrix} \; L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{7} & \frac{13}{12} & 0 \end{bmatrix}, \; \iota = 0$$

- Finalmente se hace $l_{i,i} = 1$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{12} \end{bmatrix} \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{7} & \frac{13}{12} & 1 \end{bmatrix} \; \iota = 0$$

- Compruebe que $A = P^T LU$, y que $det(A) = (-1)^{\iota} det(L)(U)$ (considere que $det(A) = -62$).

- $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- Se hace $P = I$, $U = A$, $L = 0$, $\iota = 0$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \iota = 0$$

- Dado que $u_{1,1} \neq 0$ se calculan los multiplicadores: del renglón 1 relacionado con el renglón 2, $\mu = -\frac{u_{2,1}}{u_{1,1}} = -\frac{4}{2} = -2$ y se hace $l_{2,1} = -\mu = 2$; como el elemento $a_{3,1} = 0$ no se necesita hacer nada con el renglón 3; del renglón 1 relacionado con el renglón 4, $\mu = -\frac{u_{4,1}}{u_{1,1}} = -\frac{2}{2} = -1$ y se hace $l_{4,1} = -\mu = 1$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \iota = 0$$

- Como $u_{2,2} = 0$ se intercambia el renglón 2 con el renglón 3 en las matrices P,L y U, y se hace $\iota = 1$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \iota = 1$$

- Ahora $u_{2,2} = 0$ y como $u_{3,2} = 0$ sólo necesitamos calcular el multiplicador del renglón 2 relacionado con el renglón 4: $\mu = -\frac{u_{2,2}}{u_{4,2}} = -\frac{3}{8}$ y se hace $l_{4,2} = -\mu = \frac{3}{8}$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{9}{8} \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \iota = 1$$

- Como $u_{3,3} = 0$ se intercambia el renglón 3 con el 4 en las matrices P, L, y U, y adicionalmente se hace $\iota = 2$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\ L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ \iota = 2$$

- Como los elementos abajo del pivote $u_{3,3} = 0$, sólo resta hacer $l_{i,i} = 1$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{8} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ \iota = 2$$

Finaliza el algoritmo para obtener la descomposición LU.

7.1. Matriz inversa usando la descomposición LU

Para obtener la inversa de una matriz A, y dado que $PA = LU$ y $A = \frac{LU}{P} = P^{-1}LU = P^TLU$ se puede calcular por:

$$A^{-1} = (P^TLU)^{-1} = (U^{-1}L^{-1})(P^T)^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$$

Por lo tanto, la inversa de A se expresa como el producto de las inversas de U y L, multiplicadas por P.

Para calcular las inversas de L y U, podemos utilizar una extensión del **Algoritmo 6.1** de la **Sección 6**, donde a la matriz A de tamaño $n \times n$ se le agrega una matriz identidad a la derecha.

En el **Algoritmo** 7.2, se construye primero la inversa de U y después la inversa de U, aprovechando la característica de que las dos son matrices triangulares. El resultado final es: L^{-1} y U^{-1}, y la matriz P fue calculada en la descomposición LU **Algoritmo 7.1**, de este modo si se quiere calcular A^{-1} usando L^{-1} y U^{-1} se hace:

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$$

Algoritmo 7.2: INVERSEOFLU()

Comentario: E*ntrada* : L *tamaño* $n \times 2n, U$ *tamaño* $n \times 2n$.

Comentario: S*alida* : L^{-1} *y* U^{-1} *de las columnas n+1 a 2n.*

for $i \leftarrow n$ **downto** 1 **do**
- **for** $k \leftarrow (i+1)$ **to** $2n$ **do** $u_{i,k} \leftarrow \frac{u_{i,k}}{u_{i,i}}$
- $u_{i,i} \leftarrow 1$
- **for** $j \leftarrow (i-1)$ **downto** 1 **do**
  - $\mu = -\frac{u_{j,i}}{u_{i,i}}$; **for** $k \leftarrow (i+1)$ **to** $2n$ **do** $u_{j,k} \leftarrow u_{j,k} + \mu u_{i,k}$
  - $u_{j,i} \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
- **for** $k \leftarrow (i+1)$ **to** $2n$ **do** $l_{i,k} \leftarrow \frac{l_{i,k}}{l_{i,i}}$
- $l_{i,i} \leftarrow 1$
- **for** $j \leftarrow (i+1)$ **to** n **do**
  - $\mu = -\frac{l_{j,i}}{l_{i,i}}$; **for** $k \leftarrow (i+1)$ **to** $2n$ **do** $l_{j,k} \leftarrow l_{j,k} + \mu l_{i,k}$
  - $l_{j,i} \leftarrow 0$

Sea la descomposición LU de A como se muestra:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \iota = 1$$

- El primer paso es aumentar las matrices L y U con una matriz de identidad.

$$U = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- El segundo paso consiste en hacer 1 el pivote del primer renglón. Para este caso, no se aplica ya que ambas matrices tienen 1s.

- El tercer paso se hace ceros la columna 1 excepto en el primer renglón.

$$U = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- El cuarto paso se hace 1 el elemento pivote del renglón 2.

$$U = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el quinto paso la columna 2 se hace ceros excepto en el renglón 2.

$$U = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-7}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],\ L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el sexto paso se hace 1 el pivote del renglón 3.

$$U = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-7}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{array}\right],\ L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el séptimo paso se hace ceros la columna 3 excepto el renglón 3.

$$U = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{48} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{48} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{array}\right],\ L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Las matrices inversas L y U son:

$$U' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{48} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{48} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix},\ L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para obtener la matriz inversa A^{-1} se hace la operación $A^{-1} = (U^{-1}L^{-1})P$

$$U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{48} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{48} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-23}{48} & \frac{2}{3} & \frac{7}{48} \\ \frac{31}{48} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{48} \\ \frac{-1}{16} & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = (U^{-1}L^{-1})P = \begin{bmatrix} \frac{-23}{48} & \frac{2}{3} & \frac{7}{48} \\ \frac{31}{48} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{48} \\ \frac{-1}{16} & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-23}{48} & \frac{7}{48} & \frac{2}{3} \\ \frac{31}{48} & \frac{1}{48} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{16} & \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix}$$

La descomposición de LU de la matriz A es:

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1&3\\4&5&3&3\\4&3&5&4\\4&4&6&1\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$U=\begin{bmatrix}3&2&1&3\\0&\frac{7}{3}&\frac{5}{3}&-1\\0&0&\frac{24}{7}&\frac{1}{7}\\0&0&0&-\frac{31}{12}\end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{4}{3}&1&0&0\\\frac{4}{3}&\frac{1}{7}&1&0\\\frac{4}{3}&\frac{4}{7}&\frac{13}{12}&1\end{bmatrix},\ \iota=0$$

- En el primer paso consiste en aumentar las matrices L y U agregando una matriz de identidad:

$$U=\left[\begin{array}{cccc|cccc}3&2&1&3&1&0&0&0\\0&\frac{7}{3}&\frac{5}{3}&-1&0&1&0&0\\0&0&\frac{24}{7}&\frac{1}{7}&0&0&1&0\\0&0&0&-\frac{31}{12}&0&0&0&1\end{array}\right]L=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\\frac{4}{3}&1&0&0&0&1&0&0\\\frac{4}{3}&\frac{1}{7}&1&0&0&0&1&0\\\frac{4}{3}&\frac{4}{7}&\frac{13}{12}&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

- En el segundo paso se hace 1 el pivote en el primer renglón.

$$U=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&\frac{1}{3}&0&0&0\\0&\frac{7}{3}&\frac{5}{3}&-1&0&1&0&0\\0&0&\frac{24}{7}&\frac{1}{7}&0&0&1&0\\0&0&0&\frac{-31}{12}&0&0&0&1\end{array}\right]L=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\\frac{4}{3}&1&0&0&0&1&0&0\\\frac{4}{3}&\frac{1}{7}&1&0&0&0&1&0\\\frac{4}{3}&\frac{4}{7}&\frac{13}{12}&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

- En el tercer paso en la columna 1 se hace ceros excepto el elemento pivote.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-31}{12} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 1 & 0 & \frac{-4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{7} & \frac{13}{12} & 1 & \frac{-4}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el cuarto paso en el segundo renglón se hace el elemento pivote igual a 1.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{-3}{7} & 0 & \frac{3}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-31}{12} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 1 & 0 & \frac{-4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{7} & \frac{13}{12} & 1 & \frac{-4}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el quinto paso la segunda columna se hace ceros excepto el elemento pivote.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{-1}{7} & \frac{9}{7} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{-3}{7} & 0 & \frac{3}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-31}{12} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{7} & \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{12} & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{-4}{7} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el sexto paso el elemento pivote del tercer renglón se hace 1.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{-1}{7} & \frac{9}{7} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{-3}{7} & 0 & \frac{3}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & \frac{7}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-31}{12} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{7} & \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{12} & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{-4}{7} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el séptimo paso se hace ceros la tercera columna excepto en el elemento pivote.

$$U=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{24} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-11}{24} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{-5}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & \frac{7}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-31}{12} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{7} & \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-5}{12} & \frac{-13}{12} & 1 \end{array}\right]$$

- En el octavo paso se hace 1 el elemento pivote del cuarto renglón.

$$U=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{24} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-11}{24} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{-5}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & \frac{7}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12}{31} \end{array}\right] L=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{7} & \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-5}{12} & \frac{-13}{12} & 1 \end{array}\right]$$

- En el noveno paso la cuarta columna se hace ceros excepto el elemento pivote.

$$U=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{24} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{-5}{24} & \frac{-11}{62} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{24} & \frac{1}{62} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12}{31} \end{array}\right] L=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{7} & \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-5}{12} & \frac{-13}{12} & 1 \end{array}\right]$$

- Las matrices inversas de L y U son:

$$U^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{24} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{-5}{24} & \frac{-11}{62} \\ 0 & 0 & \frac{7}{24} & \frac{1}{62} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-12}{31} \end{bmatrix} L^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-8}{7} & \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-5}{12} & \frac{-13}{12} & 1 \end{bmatrix}$$

- Para obtener la matriz inversa A^{-1} se hace la operación $A^{-1} = (U^{-1}L^{-1})P$.

$$U^{-1}L^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{24} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{-5}{24} & \frac{-11}{62} \\ 0 & 0 & \frac{7}{24} & \frac{1}{62} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-12}{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-8}{7} & \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-5}{12} & \frac{-13}{12} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-14}{31} & \frac{33}{62} & \frac{-1}{62} & \frac{-11}{62} \\ \frac{-10}{31} & \frac{-3}{62} & \frac{17}{62} & \frac{1}{62} \\ \frac{-8}{31} & \frac{5}{31} & \frac{13}{31} & \frac{-12}{31} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = (U^{-1}L^{-1})P =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-14}{31} & \frac{33}{62} & \frac{-1}{62} & \frac{-11}{62} \\ \frac{-10}{31} & \frac{-3}{62} & \frac{17}{62} & \frac{1}{62} \\ \frac{-8}{31} & \frac{5}{31} & \frac{13}{31} & \frac{-12}{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-14}{31} & \frac{33}{62} & \frac{-1}{62} & \frac{-11}{62} \\ \frac{-10}{31} & \frac{-3}{62} & \frac{17}{62} & \frac{1}{62} \\ \frac{-8}{31} & \frac{5}{31} & \frac{13}{31} & \frac{-12}{31} \end{bmatrix}$$

Otro ejemplo de una matriz 4×4:

- La descomposición LU de A es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{8} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \iota = 2$$

- En el primer paso se aumentan las matrices L y U con matrices de identidad, como se muestra:

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{9}{8} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{8} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el segundo paso se hace 1 el elemento pivote del primer renglón.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{-9}{8} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{8} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el tercer paso la columna 1 se hace 0 excepto en el elemento pivote.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{-9}{8} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \ L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- El cuarto paso produce 1 en el elemento pivote del segundo renglón.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{-9}{8} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \ L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el quinto paso se hace ceros la segunda columna excepto el elemento pivote.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{16} & \frac{45}{16} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{-9}{8} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \ L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{-3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el sexto paso se hace 1 el elemento pivote del tercer renglón.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{16} & \frac{45}{16} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-9}{13} & 0 & 0 & \frac{8}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \ L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{-3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el séptimo paso la tercera columna se hace ceros excepto el elemento pivote.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{81}{26} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{16} & \frac{-7}{26} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{13} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{-1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-9}{13} & 0 & 0 & \frac{8}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \ L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{-3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el octavo paso el elemento pivote del cuarto renglón se hace 1.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{81}{26} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{16} & \frac{-7}{26} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{13} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{-1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-9}{13} & 0 & 0 & \frac{8}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} \end{array}\right], \ L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{-3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- En el noveno paso se produce la cuarta columna en ceros excepto el elemento pivote.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{16} & \frac{-7}{26} & \frac{81}{104} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{-1}{13} & \frac{3}{26} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{13} & \frac{-9}{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} \end{array}\right], \ L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{-3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Las matrices inversas son:

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{16} & \frac{-7}{26} & \frac{81}{104} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{-1}{13} & \frac{3}{26} \\ 0 & 0 & \frac{8}{13} & \frac{-9}{52} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}, \ L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{-3}{8} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para obtener la matriz inversa A^{-1} se obtiene de la siguiente forma:

$$U^{-1}L^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{16} & \frac{-7}{26} & \frac{81}{104} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{-1}{13} & \frac{3}{26} \\ 0 & 0 & \frac{8}{13} & \frac{-9}{52} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{-3}{8} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-41}{52} & \frac{1}{26} & \frac{-7}{26} & \frac{81}{104} \\ \frac{-2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{-1}{13} & \frac{3}{26} \\ \frac{-7}{26} & \frac{-3}{13} & \frac{8}{13} & \frac{-9}{52} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

$$(U^{-1}L^{-1})P =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-41}{52} & \frac{1}{26} & \frac{-7}{26} & \frac{81}{104} \\ \frac{-2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{-1}{13} & \frac{3}{26} \\ \frac{-7}{26} & \frac{-3}{13} & \frac{8}{13} & \frac{-9}{52} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-41}{52} & \frac{81}{104} & \frac{1}{26} & \frac{-7}{26} \\ \frac{-2}{13} & \frac{3}{26} & \frac{2}{13} & \frac{-1}{13} \\ \frac{-7}{26} & \frac{-9}{52} & \frac{-3}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2. Cálculo del determinante de una matriz usando descomposición LU

El cálculo del determinante de una matriz A puede calcularse usando las matrices L, U y el número de intercambios ι. Esto se obtiene usando la expresión:

$$det(A) = (-1)^{\iota} \prod_{i=1}^{n} l_{i,i} u_{i,i}$$

A continuación, se presentan los determinantes de los ejemplos anteriores usando las matrices L y U.

- El primer ejemplo de una matriz 3×3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \iota = 1$$

- El determinante de A es:

$$det(A) = (-1)^1[(1)(1)(1)(-3)(1)(16)] = -1(-48)$$
$$det(A) = 18$$

- El segundo ejemplo de una matriz 4×4.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{12} \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{7} & \frac{13}{12} & 1 \end{bmatrix}, \; \iota = 0$$

- El determinante de A es:

$$det(A) = (-1)^0 \left[(1)(3)(1)\left(\frac{7}{3}\right)(1)\left(\frac{24}{7}\right)(1)\left(-\frac{31}{12}\right)\right]$$
$$det(A) = 1(-62) = -62$$

- El tercer ejemplo de una matriz 4×4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{8} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \iota = 2$$

- El determinante de A es:

$$det(A) = (-1)^2 \left[(1)(2)(1)(8)(1)\left(\tfrac{13}{8}\right)(1)(-4)\right]$$
$$det(A) = 1(-104) = -104$$

7.3. Solución de un sistema de ecuaciones simultáneas mediante descomposición LU

La solución de un sistema de ecuaciones simultáneas se expresa de la siguiente forma:

$$Ax = b$$

De donde se tiene que:

$$x = A^{-1}b$$

Y dado que $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$ tenemos:

$$x = U^{-1}L^{-1}Pb$$

En la siguiente subsección se verá la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas usando directamente las matrices L y U.

Sea el sistema $Ax = b$ y dado que $A = P^T LU$ entonces $P^T LUx = b$ de donde $LUx = b/P^T = Pb$ quedando como: $LUx = Pb$ y haciendo $Ux = y$ (es decir calcularemos el vector solución y) tenemos $Ly = Pb$ y después de resolver este sistema se hace: $Ux = y$ y al resolverlo tenemos el valor final de x este es el enfoque del algoritmo **Algoritmo** 7.3. Como se muestra, en el primer ciclo, se calcula $LU = Pb$ denominado como la sustitución hacia adelante. En segundo ciclo, se resuelve la parte de $Ux = y$ y se obtiene el valor de x.

Algoritmo 7.3: SOLUTIONWITHLU()

Comentario: E*ntrada* : P *tamaño* $n \times n$, L *tamaño* $n \times n$.

Comentario: E*ntrada* : U *tamaño* $n \times n$, b *tamaño* $n \times 1$.

Comentario: S*alida* : b *tamaño* $n \times 1$.

$b \leftarrow Pb$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$$\begin{cases} b_i = \frac{b_i}{l_{i,i}}; \quad l_{i,i} = 1 \\ \textbf{for } j \leftarrow i+1 \textbf{ to } n \textbf{ do } \begin{cases} b_j \leftarrow b_j - (l_{j,i} b_i) \\ l_{j,i} \leftarrow 0 \end{cases} \end{cases}$$

for $i \leftarrow n$ **downto** 1 **do**

$$\begin{cases} b_i = \frac{b_i}{u_{i,i}}; \quad u_{i,i} = 1 \\ \textbf{for } j \leftarrow (i-1) \textbf{ to } 1 \textbf{ do } \begin{cases} b_j \leftarrow b_j - (u_{j,i} b_i) \\ u_{j,i} \leftarrow 0 \end{cases} \end{cases}$$

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

- Paso 1. Obtener Pb.

$$Pb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- Paso 2. Encontrar y dado $Ly = Pb$ usando la sustitución hacia adelante.

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{13}{1} = 13 \\ y_2 &= \tfrac{16-(2(13))}{1} = -10 \\ y_3 &= \tfrac{-3-(1(13)+0(-10))}{1} = -16 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 13 \\ -10 \\ -16 \end{bmatrix}$$

- Paso 3. Encontrar x dado $Ux = y$ a través de la sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned} x_3 &= -\tfrac{16}{16} = -1 \\ x_2 &= \tfrac{-10-(1(-1))}{-3} = 3 \\ x_1 &= \tfrac{13-(2(3)+-3(-1))}{1} = 4 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{7} & \frac{13}{12} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-31}{12} \end{bmatrix}$$

- Paso 1. Obtener Pb.

$$Pb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \\ 20 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- Paso 2. Encontrar y dado $Ly = Pb$ usando la sustitución hacia adelante.

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{3}{1} = 3 \\ y_2 &= \tfrac{13-(\frac{4}{3}(3))}{1} = 9 \\ y_3 &= \tfrac{-2-(\frac{4}{3}(3)+\frac{1}{7}(9))}{1} = -\tfrac{51}{7} \\ y_4 &= \tfrac{9-(\frac{4}{3}(3)+\frac{4}{7}(9)+\frac{13}{12}(-\frac{51}{7}))}{1} = \tfrac{31}{4} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -\frac{51}{7} \\ \frac{31}{4} \end{bmatrix}$$

- Paso 3. Encontrar x dado $Ux = y$ a través de la sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned} x_4 &= \tfrac{\frac{31}{4}}{-\frac{31}{12}} = -3 \\ x_3 &= \tfrac{-\frac{51}{7}-(\frac{1}{7}(-3))}{\frac{24}{7}} = -2 \\ x_2 &= \tfrac{9-(\frac{5}{3}(-2)+-1(-3))}{\frac{7}{3}} = 4 \\ x_1 &= \tfrac{3-(2(4)+1(-2)+3(-3))}{3} = 2 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{8} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{-9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- Paso 1. Obtener Pb.

$$Pb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Paso 2. Encontrar y dado $Ly = Pb$ usando la sustitución hacia adelante.

$$\begin{aligned} y_1 &= -\tfrac{6}{1} = -6 \\ y_2 &= \tfrac{2-(0(-6))}{1} = 2 \\ y_3 &= \tfrac{8-(1(-6)+\frac{3}{8}(2))}{1} = \tfrac{53}{4} \\ y_4 &= \tfrac{12-(2(-6)+0(2)+0(\frac{53}{4}))}{1} = 24 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ \frac{53}{4} \\ 24 \end{bmatrix}$$

- Paso 3. Encontrar x dado $Ux = y$ a través de la sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned} x_4 &= -\tfrac{24}{4} = -6 \\ x_3 &= \tfrac{\frac{53}{4}-(-\frac{9}{8}(-6))}{\frac{13}{8}} = 4 \\ x_2 &= \tfrac{2-(1(4)+3(-6))}{8} = 2 \\ x_1 &= \tfrac{-6-(1(2)+1(4)+6(-6))}{2} = 12 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$