GOBIERNO FEDERAL

SEP

90 años

1921 - 2011

ISBN: 978-607-467-053-0

Serie: Teoría y Práctica Curricular de la Educación Básica

Subsecretaría de Educación Básica

Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares

Casos y perspectivas

Reforma Integral de la Educación Básica

Fomentar la lectura
mejora la educación y la cultura

Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares

Casos y perspectivas

Serie: Teoría y Práctica Curricular de la Educación Básica

Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares

Casos y perspectivas

Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares. Casos y perspectivas fue elaborado por la Dirección General de Desarrollo Curricular, que pertenece a la Subsecretaría de Educación Básica, de la Secretaría de Educación Pública, con la colaboración del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Coordinación general
Leopoldo F. Rodríguez Gutiérrez
Noemí García García

Coordinación académica por la Secretaría de Educación Pública
Ernesto López Orendain
Hugo Balbuena Corro

Coordinación académica por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
Ernesto Sánchez Sánchez

Autores
Carmen Batanero Bernabeu, UNIVERSIDAD DE GRANADA, ESPAÑA
Ángel Gutiérrez Rodríguez, UNIVERSIDAD DE VALENCIA, ESPAÑA
Verónica Hoyos Aguilar, UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL, MÉXICO
Gonzalo López Rueda, ESCUELA NORMAL SUPERIOR, MÉXICO
Salvador Llinares Ciscar, UNIVERSIDAD DE ALICANTE, ESPAÑA
Mariana Sáiz Roldan, UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL, MÉXICO
Ernesto Sánchez Sánchez, CINVESTAV-IPN, MÉXICO

Coordinación editorial
Gisela L. Galicia

Diseño de portada e interiores
Lourdes Salas Alexander

Corrección de estilo y formación
Leticia Dávila Acosta

Primera edición, 2011

ISBN: 978-607-467-053-0

Hecho en México
MATERIAL GRATUITO/PROHIBIDA SU VENTA

Índice

Presentación

La Secretaría de Educación Pública (SEP) edita la serie *Teoría y práctica curricular de la educación básica*, para continuar apoyando la consolidación de la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB). Su propósito es impulsar la comprensión de los enfoques, campos formativos, asignaturas y contenidos del currículo nacional, apoyar la enseñanza en los distintos campos formativos y asignaturas en los tres niveles de la educación básica (preescolar, primaria y secundaria) y, al mismo tiempo, convertirse en una herramienta útil para fortalecer la actualización y formación continua de los y las docentes en los distintos espacios disciplinares de la educación básica.

Con esta serie, la SEP pretende establecer un diálogo entre la producción vanguardista del conocimiento y su aplicación sistemática en las escuelas de educación básica, como una vía más para promover aprendizajes pertinentes que contribuyan al logro del perfil de egreso y al desarrollo de competencias para la vida al final de este trayecto formativo.

Los títulos que conforman la serie han sido cuidadosamente elaborados por especialistas a nivel nacional e internacional en los diferentes campos que integran el currículo de educación básica, a fin de apoyar la comprensión de los procesos de transformación curricular que en el marco de la RIEB experimentan docentes, directivos, personal técnico y de apoyo, así como alumnos en los jardines de niños y en los planteles de educación primaria y secundaria.

Asimismo, se abordan temas relativos a los campos formativos del currículo nacional de la educación básica de las siguientes asignaturas según su distribución en los planes y programas correspondientes: Matemáticas, Ciencias, Formación Cívica y Ética, Historia, Geografía, Artes, y Educación Física. En cada volumen se presenta un panorama actualizado del desarrollo de las didácticas de las asignaturas, así como sus enfoques pedagógicos y las sugerencias para su tratamiento en cada nivel educativo.

La serie *Teoría y práctica curricular de la educación básica* se suma a otras acciones de producción de materiales y desarrollo de actividades de actualización con el compromiso de fortalecer la formación continua de los docentes de educación básica, mediante la promoción del análisis y discusión de temas de apoyo didáctico relacionados con el tratamiento de los contenidos de aprendizaje y sus enfoques, con el fin de contribuir a mejorar la calidad de la educación básica en México.

Secretaría de Educación Pública

Introducción

Estimado profesor, estimada profesora, éste es un material de apoyo para su actividad docente, que le ofrece información sobre investigaciones recientes acerca del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas; los temas de investigación que lo integran forman parte de algunos programas de estudio de los niveles básicos: preescolar, primaria y secundaria. La enorme cantidad de informes publicados en el campo de la didáctica de las matemáticas —imposible de incluir en este volumen— obligaron a los autores a exponer pocos casos, pero han tratado de dar una perspectiva general de cada eje curricular.

En la medida de lo posible, la elección de los temas y las investigaciones resumidas cumplen tres requisitos: 1) claridad de los problemas propuestos y resultados obtenidos en la investigación; 2) aplicabilidad en las sesiones de algún grado de la educación básica; y 3) relevancia didáctica, en el sentido de aportar resultados valiosos, reconocidos por la comunidad, para la comprensión de los problemas que enfrenta la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las aulas.

En el capítulo 1 se identifican los tipos de conocimiento que debe desarrollar un profesor de niveles básicos para tener un desempeño competente en sus tareas docentes. El autor se apoya en un fragmento de un registro de observación que le permite ilustrar cómo se traducen los conocimientos del profesor sobre contenido matemático, aprendizaje de los alumnos y gestión de la clase en la promoción de una cultura matemática dentro del aula.

El capítulo 2 se divide en dos partes: en la primera, se define el sentido numérico y se ejemplifica cómo desarrollarlo, y se exponen los distintos significados que toman las fracciones; en la segunda, se ofrece una breve caracterización del *pensamiento algebraico* y se aborda el tema clásico de *ecuaciones* de primer grado. Para finalizar, se presenta un estudio sobre la *generalización* en álgebra.

El capítulo 3 también se divide en dos partes: la primera trata acerca del aprendizaje de la geometría; se expone el modelo de Van Hiele sobre desarrollo del razonamiento geométrico; y se aborda el tema de la enseñanza y del aprendizaje de la demostración y la visualización en la educación básica. La segunda parte, sobre el aprendizaje de la medición, resume estudios del aprendizaje de la medición de longitudes, áreas y volúmenes. Al final se tratan los errores en el cálculo de áreas, y volúmenes donde se aplica inadecuadamente la proporcionalidad.

El capítulo 4 incluye tres apartados: *a)* Datos, gráficas y medidas de tendencia central, donde se resumen estudios sobre recopilación y organización de datos; *b)* Azar y probabilidad presenta temas (la percepción de la aleatoriedad, por ejemplo), adquisición de nociones (espacio muestral y eventos), así como el aprendizaje y las dificultades de las definiciones de probabilidad; y *c)* Relaciones de proporcionalidad desarrolla un esquema para organizar situaciones de proporcionalidad.

En el capítulo 5 se revisan brevemente diferentes estudios relacionados con el uso de la tecnología para desarrollar en los estudiantes el sentido numérico con ayuda de calculadoras; el pensamiento algebraico con hojas de cálculo; el razonamiento geométrico con *Logo* y software de geometría dinámica; el razonamiento probabilístico con *Probability Explorer* y *TinkerPlots;* y para finalizar el razonamiento proporcional, también apoyándose en *Logo*.

En el capítulo 6 se enuncian y analizan las tareas profesionales del docente, lo que permite definir las competencias que debe adquirir durante su formación y desarrollo profesional. Se describen las características que es necesario considerar para crear oportunidades de aprendizaje profesional y, por último, se formulan tres pautas que deben seguirse para formarse y superarse de forma continua como profesores de matemáticas.

Los autores esperamos que este material proporcione ideas y conocimientos para planear y llevar a la práctica los proyectos de clase, pero también que ofrezca la posibilidad de formarse una perspectiva general de la investigación en educación matemática. Esto permitirá al docente de la asignatura aprovechar las nuevas aportaciones de la investigación y convertirlas en casos prácticos en su aula.

1. Didáctica de las matemáticas y el profesor de los niveles básicos

Ernesto Sánchez Sánchez, Cinvestav, IPN, México
Salvador Llinares Ciscar, Universidad de Alicante, España

Introducción

La didáctica de las matemáticas abarca múltiples ámbitos de reflexión e indagación, tales como el desarrollo de teorías educativas, el currículo, la política educativa, la formación de profesores, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y el aula de matemáticas. Sin embargo, en este capítulo vamos a identificar las tareas profesionales que definen la enseñanza de las matemáticas y nos centraremos en los conocimientos de didáctica de las matemáticas que pueden ser pertinentes para el docente de los niveles básicos en la realización de esas tareas; es decir, expondremos los conocimientos que ayuden al profesor a comprender las situaciones de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en las aulas de educación primaria y secundaria, y que puedan utilizar para la toma de decisiones docentes.

En el proceso de enseñanza y de aprendizaje que ocurre en una clase de matemáticas identificamos tres elementos y sus relaciones, generadas en un contexto sociopolítico determinado: el estudiante, el contenido matemático y el profesor (llamado *triángulo didáctico*, véase figura 1.1). De manera específica, en una situación de enseñanza de las matemáticas, un profesor debe gestionar una parte del contenido matemático con el objetivo de que sus estudiantes desarrollen diferentes dimensiones de lo que podemos considerar competencia matemática. En estos casos, la didáctica de las matemáticas modela y estudia las interacciones entre estos tres elementos y sus relaciones, y proporciona el conocimiento para interpretar, comprender y tomar decisiones en dicha situación (Gutiérrez y Boero, 2006; Lester, 2007).

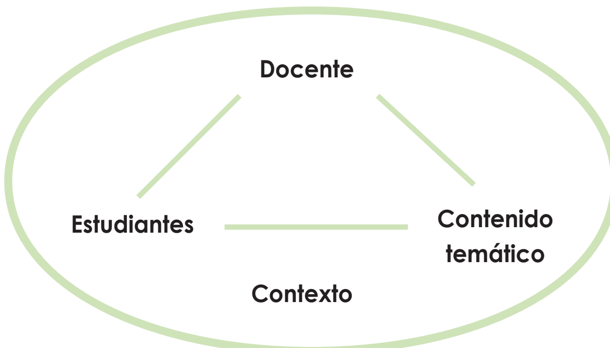


Figura 1.1. Elementos del proceso de enseñanza y de aprendizaje.

El profesor, por medio de los problemas y las actividades que plantea a sus estudiantes, implementará un currículo que refleje lo que la sociedad demanda a la formación matemática de los estudiantes. El programa de matemáticas (SEP, 2006:11) se refiere a la competencia matemática en los siguientes términos:

> Una competencia implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias del impacto de ese hacer (valores y actitudes). En otras palabras, la manifestación de una competencia revela la puesta en juego de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para el logro de propósitos en un contexto dado.
>
> Las competencias movilizan y dirigen todos estos componentes hacia la consecución de objetivos concretos; son más que el saber, el saber hacer o el saber ser [....]. La

movilización de saberes (saber hacer con saber y con conciencia respecto del impacto de ese hacer) se manifiesta tanto en situaciones comunes de la vida diaria como en situaciones complejas, y ayuda a visualizar un problema, a determinar los conocimientos pertinentes para resolverlo, a reorganizarlos en función de la situación, así como a extrapolar o prever lo que falta.

El objetivo de este libro es proporcionar sugerencias para pensar en clases que favorezcan el desarrollo de estudiantes matemáticamente competentes. Por lo cual, la información de éste y los siguientes capítulos se pensó para que los docentes implementen diferentes decisiones con fundamento para lograr el mismo objetivo: que los alumnos aprendan matemáticas a partir de comprenderlas para llegar a ser ciudadanos competentes; es decir, que aprendan cómo funcionan las matemáticas para que las produzcan por ellos mismos y sepan utilizarlas en asuntos de su vida profesional y personal, además de apreciar su rigor y belleza. Para organizar y desarrollar el contenido de este capítulo, nos apoyaremos en un fragmento de registro de observación procedente de una clase de 5º de primaria (alumnos de 10 a 11 años de edad).

Este registro de la clase de la maestra Carmen es una *ventana* mediante la cual podemos identificar aspectos de la enseñanza de las matemáticas que consideramos relevantes para entender lo que sucede en una clase de esta asignatura, e identificar el conocimiento de didáctica que puede ser pertinente para potenciar la competencia matemática de los estudiantes.

Un día en la clase de matemáticas de la maestra Carmen

La maestra Carmen atiende un grupo de 5º de educación primaria. En el segundo bloque del programa de Matemáticas de este grado, en el tema "Significado y uso de las operaciones", y el subtema "Multiplicación y división", se proponen los "conocimientos y las habilidades" siguientes: 2.4 Encontrar las relaciones $D = c \times d + r$ $(r < d)$ y utilizarlas para resolver problemas. Los alumnos ya resuelven de manera eficaz divisiones entre números de varias cifras. Por ejemplo, en el tema de la división entera (la división inexacta) los estudiantes suelen realizar, de manera correcta, los cálculos en ejercicios como los siguientes:

Realiza estas divisiones y haz la prueba:

a) 23451 : 4
b) 48623 : 58
c) 14030 : 46
d) 58788 : 69
e) 17346 : 23
f) 5572 : 37

En este tipo de ejercicios, los alumnos de la maestra Carmen suelen utilizar con precisión el algoritmo de la división y son capaces de realizar la prueba de la división. Sin embargo, se ha dado cuenta de que, al parecer, algunos alumnos tienen dificultades para responder algunas cuestiones. Por ejemplo, anticipar qué tan grande va a ser el cociente de la división; es decir, determinar de cuántas cifras va a estar compuesto el cociente, antes de hacer ningún cálculo y saber justificarlo: *¿cuántas cifras va a tener el cociente del ejercicio* **a** *anterior?, ¿cuántas tendrá el cociente del ejercicio* **f***?*

Cuando realizan el algoritmo de la división, a algunos alumnos se les dificulta identificar las unidades con las que están trabajando en cada momento. Así, al realizar la división del inciso c, cuando escriben lo que aparece en la figura 1.2, tienen dificultades para responder la pregunta: *¿qué tipo de unidad es el 23?,* así como para justificar y argumentar su respuesta.

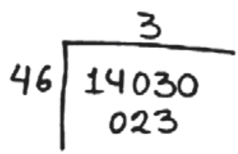


Figura 1.2. División parcial.

Por todo esto, la maestra Carmen decidió centrarse en los significados de la relación aritmética vinculada a la división entera (D = dxc + r). Para el inicio de la clase de hoy, plantea a sus alumnos los siguientes problemas:

Indica los números que faltan en las expresiones:

$$661 = 9 \times [\_] + 4$$
$$837 = [\_] \times 64 + 52$$
$$302 = 7 \times 42 + [\_]$$

La maestra Carmen escribe en el pizarrón las expresiones anteriores y pide a sus alumnos que le digan qué número falta en la primera. Algunos alumnos levantan la mano y empiezan a decir números para la primera expresión (27, 43...). La profesora les pide que justifiquen por qué creen que esos números son los adecuados, y solicita que lo comprueben. Cuando los alumnos realizan las operaciones con el fin de verificar que se cumple la primera igualdad para el número 27, se dan cuenta de que lo que obtienen de multiplicar 9 por 27 y luego sumarle 4 "está muy lejos de 661". La maestra Carmen pide a sus alumnos que trabajen en equipos de dos o tres integrantes y busquen números que cumplan las igualdades. Insiste en que luego explicarán al resto de sus compañeros lo que han pensado hasta obtener los números: lo que obtienen y el procedimiento que siguieron.

Luego de trabajar durante unos minutos, la maestra Carmen propone una discusión grupal para compartir los diferentes procedimientos usados para averiguar los números que faltan. La profesora pide al equipo de Inés que diga cómo lo hicieron.

Inés y Manuel van al pizarrón y explican:

Inés: —Hemos probado diferentes números en la tabla del 9 y a lo que salía le sumamos 4. Pero no daba igual (*se refiere a que la suma no da 661*). Hemos probado con más números, pero todavía no lo hemos encontrado.

Maestra: —¿Alguien puede plantear una forma más rápida de averiguar el número que falta en la primera igualdad? Además, tiene que explicar por qué el procedimiento pensado ayudaría a resolver el problema.

Lucía (*levanta la mano*): —Cuesta mucho la manera en que el equipo de Inés y Manuel está probando, y puede ser que nunca acierten; como 661 son 6 centenas, si multiplicamos 9 por 100, que es una centena, se pasa; se puede probar con 80 (*Lucía va al pizarrón y hace las operaciones* [9 × 80 + 4]). Al obtener 724 se puede probar con 70 (*hace las operaciones* [9 × 70 + 4]) y el resultado es *634*, el que (*señala el número 70*) está más cerca.

Paco (*levanta la mano*): —Se podría probar con 60 (*varios compañeros empiezan a protestar*).

Eduardo: —634 es más pequeño que 661, pero poco. Tenemos que multiplicar por un número un poco mayor que 70 para no pasarnos (*muestra una lista de números que estuvieron probando en su equipo y los resultados que obtuvieron)*. Nosotros nos dimos cuenta, al mirar todos los números, que habíamos probado y lo que nos salió.

Maestra (*pregunta a Paco*): —¿Comprendes lo que está diciendo Eduardo? ¿Los demás están de acuerdo?

Paco: —Es verdad, para que salga un número un poco mayor que 634 debemos multiplicar por un número un poco mayor que 70.

Inés: —Yo probé con el 73 y me salió *(señala en el pizarrón las operaciones que hizo;* véase figura 1.3).

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times\ 9 \\ \hline 657 \\ +\ 4 \\ \hline 661 \end{array}$$

Figura 1.3. Comprobación de la solución a la ecuación 661 = 9 × [_] + 4.

Maestra: —¿Cómo lo obtuviste?

Inés: —Cada vez que multiplicamos 9 por 70, y luego por 71 el resultado aumenta en 9, como de 630 a 661 van un poco más de 30, decidí multiplicar por 3 más (*se refiere a multiplicar por 73*) que aumentaba en 27. Lo probé y salió.

La maestra Carmen resume lo que han hecho durante los últimos minutos. Su objetivo es que se dieran cuenta que ordenar y organizar los diferentes números que probaron y los resultados que obtuvieron, les permitió realizar una búsqueda específica del número que faltaba, y evitar así probar números sin un objetivo claro. Además, resalta el último razonamiento de Inés, quien se apoyó en el cálculo mental y usó la relación entre los números para justificar una decisión.

La profesora intenta que sus alumnos trasladen su atención del resultado al procedimiento usado. Para reforzar esto, a continuación pregunta si algún otro equipo había utilizado otro procedimiento. Susana pide la palabra:

Susana: —Nosotros pensamos que teníamos que buscar un número que al multiplicarlo por 9 le faltaran sólo 4 para llegar a 661. Así que nosotros buscamos un número que multiplicado por 9 diera 657.

Maestra (*se dirige a Susana*): —Ve al pizarrón y explica cómo lo hicieron (*Susana realiza la división que aparece en la figura 1.4*).

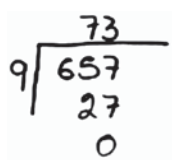


Figura 1.4. División.

Susana: —73 es el número que falta, ya que al multiplicar 73 × 9 sale 657.

Maestra (*se dirige a todo el grupo*): —¿Se entiende el procedimiento realizado por el equipo de Susana? (*los alumnos asienten; ella enfatiza*). Lo relevante en cómo el equipo de Susana resolvió la tarea es el hecho de *ver* la expresión aritmética (661 = 9 x [_] + 4) como un todo, y *ver* que el signo de igual indica la equivalencia entre las dos partes de la igualdad. Ahora busquen el número que falta en la siguiente igualdad: (837= [_] x 64 + 52). Usen cualquiera de los dos procedimientos que revisaron hasta el momento.

Del fragmento del registro de observación de la clase de la maestra Carmen podemos identificar cuatro dimensiones que la articulan (Fennema y Romberg, 1999), las que nos permitirán generar una reflexión sobre el conocimiento de didáctica de las matemáticas pertinente para que el docente promueva el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes en el aula:

- Las características de las tareas matemáticas (problemas, ejercicios, actividades).
- El aprendizaje: la relación entre lo matemático y lo cognitivo en un contexto social.
- El desarrollo de una cultura matemática en la clase: las normas y reglas que rigen el discurso y la comunicación matemática en el aula.
- El papel del profesor en el desarrollo de clases de matemáticas que potencien la generación de la competencia matemática.

Las tareas en la clase de matemáticas

Las tareas constituyen las referencias sobre las que se articula la enseñanza y, por tanto, son un factor fundamental que determinan el aprendizaje. Se entiende por *tareas matemáticas* los ejercicios, los problemas o las actividades de contenido matemático que se realizan en la clase (no a lo que tradicionalmente se llama *la tarea*, que consiste en ejercicios o problemas para resolver en casa). En seguida se resaltarán características de las tareas en su relación con tres aspectos fundamentales que intervienen en la actividad escolar: el contenido, el aprendizaje y la gestión de la clase.

a) Contenido. Las tareas se elaboran o eligen para ofrecer a los estudiantes oportunidades de aprendizaje de los diversos contenidos del *Programa de estudio de Matemáticas* del grado correspondiente; al hacerlo así, se asume que los temas y conceptos que el programa prescribe son ideas matemáticas centrales que los estudiantes requieren aprender.

La tarea que la maestra Carmen sugirió a sus estudiantes cubre parte de los conocimientos y las habilidades prescritos en el segundo bloque del 5º grado del Programa de estudios (SEP, 2009) que indica: *2.4 Encontrar las relaciones* $D = c \times d + r$ $(r < d)$ *y utilizarlas para resolver problemas*. Como se verá más adelante, este tema es fundamental para la comprensión de la división aritmética.

b) Aprendizaje. En la elaboración o elección de las tareas es importante considerar los conocimientos que ya poseen los estudiantes y prever posibles dificultades, errores y falsas concepciones que surjan cuando las tareas se realicen en el salón de clases. Además, es necesario considerar la trayectoria hipotética del aprendizaje que estos pueden desarrollar al resolver las tareas. En relación con esta cuestión, los resultados de las investigaciones sobre didáctica de las matemáticas proporcionan conocimiento acerca de las características del aprendizaje matemático de los estudiantes, se identifican y caracterizan dificultades, errores comunes y concepciones de éstos en cuanto a diversos temas de las matemáticas escolares (véase la siguiente sección y los demás capítulos de este libro), incluso proporcionan información sobre cómo los estudiantes aprenden las matemáticas.

Una característica de la tarea que eligió la maestra Carmen era que representaba un desafío para los alumnos, aunque podía resolverse a partir de sus conocimientos previos, pues sólo requería las operaciones de suma, resta y multiplicación; es decir, temas que ya se vieron en grados anteriores. Sin embargo, la manera en que se presentó permitió desarrollar en los estudiantes procesos matemáticos que potenciaron su comprensión de la división y de la perspectiva estructural de las expresiones aritméticas.

Así, la forma ($c = a \times \square + b$) en que la maestra Carmen presentó las igualdades aritméticas en las tareas dadas a sus estudiantes, colocando las operaciones a la derecha del signo igual, tenía como objetivo intentar superar el significado que muchos alumnos de primaria dan al signo igual: como anunciando el resultado de una operación aritmética que debe realizarse *de izquierda a derecha* (por ejemplo, la expresión 24 + 73 = □ dificulta que la vean indicando una equivalencia entre las dos partes, porque lleva a interpretar el signo **=** como el resultado de alguna operación). La presentación de las actividades en la forma en que la profesora lo hizo intenta crear contextos para que los alumnos empiecen a desarrollar una *interpretación del signo igual para una equivalencia matemática* y no sólo se vea como una visión operativa (tener que hacer cuentas para buscar un resultado). El contexto fue el de las relaciones aritméticas en la división entera (D = dxc + r) mediante un problema que resultó asequible y estimulante para sus alumnos. En otras palabras, la actividad propuesta por la maestra Carmen le permitió enfatizar el significado de las *expresiones aritméticas* (por ejemplo: 837 = □ × 64 + 52) como *objetos* (estructuras) más que como procedimientos de cálculo que deben realizarse. En este sentido, una visión estructural de la igualdad aritmética es lo que permitió al equipo de Susana generar su procedimiento de solución.

c) Gestión de la clase. La elaboración y elección de las tareas también depende de la concepción que el profesor tenga sobre cómo se crean condiciones en el aula para que los estudiantes aprendan y, por tanto, de la flexibilidad y las posibilidades que ofrecen para ser manejadas en clase.

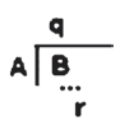
La tarea elegida por la maestra Carmen debe verse, asimismo, desde la perspectiva en que la presentó a sus estudiantes y la manera en que gestionó las respuestas de sus estudiantes. En este sentido, su elección estuvo guiada por la convicción de que los alumnos aprenden resolviendo problemas y creando un ambiente de discusión en clase. En consecuencia, esperaba que los estudiantes se comprometieran con la tarea y se presentaran diferentes procedimientos de solución e, incluso, resultados distintos. Esto permitiría generar la discusión. Con estas ideas, la profesora fue capaz de tomar decisiones con base en las diferentes reacciones de sus estudiantes frente al problema. Si pensara que los alumnos aprenden mediante explicaciones y después ejercicios y práctica, quizá hubiera elegido otro tipo de tareas, y planteado su gestión en el aula de manera diferente; por ejemplo, una batería de ejercicios para resolver después de dar una explicación de cómo hacer un caso general.

El aprendizaje: la relación entre lo matemático y lo cognitivo

Una amplia clase de investigaciones en didáctica de las matemáticas ofrece conocimientos sobre los procesos de aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, muchos referidos a tareas muy precisas. La pregunta fundamental "¿Cómo aprenden los niños contenidos matemáticos?" se multiplica en muchas preguntas en las que se debe precisar el *contenido matemático*. Los estudios de didáctica, en relación con el aprendizaje en general, prevén dificultades y falsas concepciones en los estudiantes respecto a contenidos específicos y, a veces, también indican cómo utilizar esos conocimientos en la clase y su potencial para la evaluación.

La situación de la clase de la maestra Carmen nos sirve de ejemplo y nos permite subrayar aspectos que requieren considerarse al analizar el aprendizaje. Estos aspectos son: *a)* El contenido matemático y las dificultades de comprensión del signo de igualdad; *b)* Las características de la implementación de las tareas; y *c)* La evaluación de la actividad matemática de los alumnos.

a) Contenido matemático y la comprensión de signo de igualdad. En la escuela suele aprenderse el aspecto operacional de la división; esto quiere decir aprender los pasos que deben seguirse para obtener el cociente y el resto de un número que se divide entre otro. En México, este procedimiento suele llamarse el *método de la casita*, cuya representación queda como se muestra:



Por ejemplo, si se divide 428 entre 12, se obtiene como cociente 35 y como resto 8; el procedimiento mediante el cual los estudiantes obtienen esos números queda representado de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} & \;\;35 \\ \cline{2-2} 12 & 428 \\ & \;\;68 \\ & \;\;\;\;8 \end{array} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

En cambio, la formulación estructural del *algoritmo de la división* presenta un aspecto diferente; dicha formulación se conoce desde la época de Euclides (300 a. C.) y es la siguiente (en lenguaje moderno):

Dados dos números enteros positivos **B** y **A**, con **A** > 0,
existen dos enteros **q** > 0 y **r**, con $\mathbf{0 \leq r < A}$, tal que $\mathbf{B = q \times A + r}$

Un ejemplo de esta proposición se obtiene al aplicarla al ejemplo anterior; significa que dados los números 428 y 12 existen los números 35 y 8 (con $8 < 12$) tal que:

$$428 = 35 \times 12 + 8 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

La proposición no nos informa sobre el procedimiento a seguir para encontrar el cociente y el resto, pero establece, de manera precisa, la relación estructural de todos los elementos presentes en la división entera en términos de una igualdad y de las operaciones de multiplicación y suma. La forma de organizar los elementos de la división con residuo recuerda la *técnica de comprobación* de una división.

Es muy importante que los estudiantes asocien la expresión (2) a la representación del procedimiento de la división (1) y viceversa, así como que el procedimiento (1) los lleve a la expresión (2). Una manera de establecer y fortalecer esos vínculos es mediante los problemas que la maestra Carmen propuso a sus estudiantes, en este caso, pidiéndoles encontrar el valor faltante en expresiones similares a la siguiente:

$$428 = \square \times 12 + 8$$

Un aspecto que se resolverá en la proposición del *algoritmo de la división* de Euclides es que la división se formula sólo en términos de las nociones de multiplicación, suma e igualdad. Sin embargo, esta noción de igualdad conlleva dificultades para los estudiantes. Como ya se mencionó, en relación con la tarea que la profesora Carmen sugirió a sus alumnos, hay dos formas de entender el signo **=** : una, como *un operador,* y, dos, como *una relación de equivalencia*. El signo de igualdad se interpreta a manera de *operador* cuando se mira la parte izquierda de la igualdad como *las operaciones que hay que realizar* para obtener el valor de la parte derecha; en cambio, se interpreta como una *relación de equivalencia* cuando se entiende a manera de proposición que es verdadera si las expresiones de ambos lados representan una misma cantidad, y falsa cuando representan cantidades distintas.

En los problemas que administró la maestra Carmen es necesario ver al signo de igualdad como una relación de equivalencia, porque hay que encontrar un número que haga verdadera la igualdad. A muchos niños el problema les puede resultar extraño, incluso sin sentido, ya que pueden estar acostumbrados a encontrar el signo de igualdad como un operador y no haber tenido nunca la oportunidad de enfrentarse a problemas en los que se requiere entenderlo como una relación de equivalencia.

Las dificultades con el significado relacional del signo de igualdad se presentan en estudiantes de diferentes niveles, desde primaria hasta bachillerato, como lo muestran varios informes de estudios de didáctica, como los de Kieran (1981, 2006), y Baroody y Ginsburg (1983). Recientemente, Seo y Ginsburg (2003) llevaron a cabo una investigación con estudiantes de Taiwán de 2º de primaria.

Estos autores analizaron cómo se presenta el signo de igualdad en los problemas y ejercicios en los textos; cómo enseña y utiliza el signo de igualdad una profesora en sus clases de matemáticas; y las concepciones del signo de igualdad de los niños. En seguida resumiremos esta última parte de la investigación, que parte de tres entrevistas.

En la primera entrevista, a los niños se les presentó sólo el signo **=** y se les pidió que dijeran qué era; 14 de 16 niños respondieron que era el "signo de igual". Cuando se les pidió explicar qué quería decir dicho signo, sólo dos sugirieron un significado relacional (es decir, respondieron que "es igual a"); los otros 14 lo interpretaron como un símbolo operador; por ejemplo, tres respuestas de tipo operacional fueron: "el resultado es", "la suma da", "el total es".

En la segunda entrevista, el signo **=** se presentó en enunciados numéricos canónicos de suma o resta de la forma:

$$\mathbf{a + b = c} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{a - b = c}$$

(por ejemplo: 2 + 3 = 5). Los participantes en este caso dieron las mismas respuestas que en la primera entrevista. Los dos niños que interpretaron el signo igual como un símbolo relacional en la primera entrevista volvieron a responder que significaba "lo mismo que" y los 14 niños que lo interpretaron como un operador, lo interpretaron de la misma manera.

En la tercera entrevista, a los alumnos se les presentaron enunciados de la forma:

$$\mathbf{c = a + b} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{c = a - b}$$

(por ejemplo: 5 = 2 + 3) y se les pidió que explicaran qué quería decir la expresión y el signo de igualdad. 13 de los 16 niños respondieron que la expresión no decía nada; algunos dijeron que estaba invertida ("La escribió volteada, maestra", "Debería ponerla al revés, ¿no?", etc.). Sólo tres niños, que interpretaron el signo de igual como un operador en las primeras entrevistas, aceptaron que la expresión $c = a + b$ tenía sentido y argumentaron que ya la habían visto en otro lado. Los dos niños que en la primera y segunda entrevistas vieron el signo de igualdad en su aspecto relacional estuvieron dentro de los 13 que no le encontraron significado a la expresión. Los autores deducen que no es suficiente tener una idea relacional del signo igual, sino que es necesario familiarizarse con problemas y situaciones en que el signo se utilice en su forma relacional.

El conocimiento matemático del algoritmo de la división y del signo de igualdad, muestran la profundidad de la, aparentemente, simple tarea que puso la maestra Carmen a sus estudiantes.

b) *Características de la implementación*. No sólo los conocimientos mencionados fueron puestos en juego por la profesora Carmen en su lección; también la relación entre lo matemático y lo cognitivo, como un aspecto del aprendizaje, queda reflejada por una concepción de cómo adquieren los niños los conocimientos y una posición sobre cómo deben enseñarse los contenidos matemáticos.

No basta con saber los contenidos y las dificultades del tema, ya que la profesora pudo haber dictado en su clase la relación entre el procedimiento de la división y la estructura del *algoritmo de la división* e insistir con los niños para que lo aprendieran; haber explicado los significados del signo de igualdad e ilustrar con ejemplos cómo a veces el significado del signo no es llevar a cabo una operación; preparar una batería de ejercicios con todas las variantes posibles y organizarlos del más simple (operacional) al más complejo (relacional); poco a poco enseñarles los procedimientos para resolverlos y después dejar a los niños resolver, individualmente, todos los ejercicios, procurando ayudarles cuando tuvieran dificultades. Sin embargo, de seguro ella sabe que los conocimientos adquiridos de esta manera no son tan eficaces para desarrollar un pensamiento matemático, como lo es que los estudiantes resolvieran los problemas con sus propios recursos, conocieran procedimientos de otros y discutieran la validez y calidad de los resultados y procedimientos que permitieron alcanzarlos.

c) *Evaluación de la actividad matemática de los alumnos.* Determinar en qué medida los estudiantes aprendieron el contenido de la enseñanza para asignarles una calificación ha sido, durante mucho tiempo, el objetivo de la evaluación. Pero, las nuevas tendencias de la evaluación sugieren que su propósito principal es ser un medio para obtener información y llegar a conocer las dificultades y concepciones de los estudiantes, y hacer un seguimiento de su aprendizaje (Llinares y Sánchez, 1998; Giménez, 1992). Este conocimiento permitiría al docente ajustar su proyecto de enseñanza para optimizar los resultados. Se mencionó que el propósito de la evaluación es conocer los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, pero también las dificultades para aprender los contenidos específicos, así como las concepciones que tienen acerca de ellos, esto facilita la toma de decisiones del profesor, sus estrategias para mejorar la clase y la asignación de calificaciones.

La tarea que la maestra Carmen eligió para trabajar con sus alumnos le permitió darse cuenta de que los alumnos no asocian la expresión $c = a \times \square + b$ con la división con *resto de c entre a*, a pesar de que poseen los antecedentes para hacerlo. También le ayudó a observar que los estudiantes descubren estrategias propias y las pueden comparar con otras de sus compañeros y evaluarlas. Por otra parte, la puesta en común de los diferentes procedimientos de resolución encontrados por los equipos en clase crea la oportunidad para que los alumnos justifiquen sus propuestas; además, con la petición de la maestra Carmen a sus estudiantes de que argumenten lo que se hace, le permite obtener información sobre la comprensión de sus alumnos de las diferentes ideas matemáticas. Este aspecto es relevante porque, para evaluar la resolución de problemas, la profesora debe ir más allá de recopilar las respuestas escritas de sus alumnos y apoyarse en las explicaciones que los diferentes alumnos realizan en clase.

La cultura en el salón de clases

Se vieron dos aspectos importantes de la didáctica de las matemáticas para la actividad docente del profesor: la naturaleza de las tareas y los elementos para su aprendizaje. Ahora se adoptará un punto de vista más global al centrar la atención en la noción de *cultura matemática en la clase de matemáticas*; ésta incluye un conjunto de significados compartidos acerca de las interacciones entre los profesores, los alumnos y el contenido matemático dentro del salón de clases; tales significados determinan los comportamientos que ahí se producen y su efectividad.

La cultura matemática en la clase está determinada por los siguientes aspectos:

- Dirigir la actividad hacia ideas matemáticas centrales.
- Favorecer unas determinadas características de la interacción:
  a) La interacción de los estudiantes con relación a las matemáticas.
  b) El tipo de actividad cognitiva que desarrollan en relación con el contenido matemático.
- Establecimiento de normas sociomatemáticas.

Actividad con la que el profesor ayuda a crear normas sociomatemáticas (por ejemplo, cómo se determina la verdad matemática en el aula).

Actividad dirigida hacia ideas matemáticas centrales. En las diferentes áreas de las matemáticas hay ideas que son la base para comprender otras muchas nociones matemáticas y que es deseable que todos los estudiantes adquieran y manejen a un nivel más o menos profundo. La mayoría de estas ideas se sugieren en los programas de estudio, aparecen por primera vez en el grado escolar en que se considera que los estudiantes son maduros para comprenderlas, y luego se incluyen reiteradamente en grados subsecuentes, pero de manera más compleja o elaborada. Por ejemplo, las nociones de *número* (entero, racional), de *figura geométrica*, de *variable*, de *probabilidad* y de *datos*, a partir de su aparición en algún grado escolar se vuelven a revisar a lo largo de varios grados. Hay otras ideas, llamadas *transversales* que están, o deberían estar, presentes en cualquier grado, que aun cuando no se refieren a contenidos específicos forman parte integral de la actividad matemática; tales ideas se identifican con las expresiones: *resolución de problemas*, *representación*, *comunicación*, *manejo de técnicas*, *justificación* y *argumentación*. En ocasiones, hay otras ideas que pueden no estar explícitamente en los programas, sin embargo, en la investigación didáctica se revela su importancia. Este es el caso de las nociones de *igualdad* en aritmética y álgebra, *visualización* en geometría, *aleatoriedad* en probabilidad y *variación* en estadística, entre otros. La identificación y selección de las ideas centrales y su posterior tratamiento ayudan a construir la cultura del salón de clases al poner el foco de atención en lo que es relevante para el desarrollo de la competencia matemática.

La maestra Carmen dirige la atención de sus alumnos hacia las ideas matemáticas que considera relevantes en esta situación (organizar información, explicar y evaluar resultados; el significado del signo **=** como una equivalencia). Consigue esto cuando ella solicita a sus alumnos, de manera sistemática, que justifiquen o argumenten sus decisiones (*¿Qué estás pensando para hacer esto? ¿Por qué crees que esto funcionará?*). La petición que hace al grupo, a partir de la primera intervención de Inés y la respuesta dada por el equipo de Lucía, es una manifestación de este hecho. Lucía propone una *explicación matemática* que justifica la decisión que toma cuando se busca el número adecuado que cumpla la primera igualdad. En esta primera parte de la lección, Lucía sabe que debe justificar las decisiones tomadas y se apoya en su conocimiento del valor de posición en el sistema de numeración decimal. Aunque la estrategia propuesta no es totalmente eficaz, pone de manifiesto que el equipo de Lucía y el de Inés pueden empezar a manejar las ideas matemáticas relevantes de esta situación.

Favorecer determinadas características de la interacción. Una parte importante de la cultura del salón de clases está determinada por la manera en que la profesora es capaz de favorecer una interacción específica entre los estudiantes, y entre ellos y el contenido matemático, mediante la *colaboración* y la *discusión*.

De esta manera, las características de la interacción se determinan por la gestión que el docente hace de la lección diseñada, sus decisiones ante eventos imprevistos ocurridos en clase y la actividad que desarrollan los estudiantes. Es decir, la cultura del salón de clases queda determinada por la manera en que se gestiona y realiza la situación de enseñanza y de aprendizaje. En particular, algunas características son las siguientes:

- El profesor debe proporcionar determinado tipo de apoyo para el desarrollo de las tareas que los estudiantes deben realizar.
- Establece tiempo suficiente para que los alumnos mejoren sus propios procedimientos.
- Es conveniente mantener permanentemente la exigencia de que los alumnos proporcionen explicaciones, argumenten, justifiquen y expliquen de manera adecuada los procedimientos seguidos.

En el fragmento de registro de clase ya descrito, la manera en la que la maestra Carmen gestionó la situación de enseñanza como de resolución de problemas, permitió resaltar aspectos de la relación entre los estudiantes, el contenido matemático y ella misma, que ayudan a desarrollar una determinada cultura matemática en el aula. Por ejemplo, dio oportunidades a sus alumnos para *hablar de matemáticas* y que organizaran datos de una determinada manera para que les ayudara a obtener información relevante y resolver la tarea. Además, les permitió y dio tiempo —al plantearles la resolución de la segunda igualdad— para que compararan la eficacia de los procedimientos que utilizaron en la resolución de la primera igualdad. La posibilidad de poner en funcionamiento los dos procedimientos en la resolución de la segunda igualdad crea el contexto para hablar de las ventajas y limitaciones de los procedimientos, introducir la idea de *expresiones equivalentes* y subrayar el potencial de generar y organizar información. Así, la profesora establece relaciones de apoyo y confianza con los estudiantes.

Establecer normas sociomatemáticas. Un aspecto intrínseco a la manera en que se genera la interacción y ayuda a configurar una determinada cultura en el aula de matemáticas son las normas sociomatemáticas, reglas —algunas veces implícitas— que rigen la comunicación en el aula y determinan lo que los estudiantes pueden llegar a concebir como una actividad matemática verdadera y lo que es o no lícito hacer en una clase de matemáticas en relación con las matemáticas que deben aprenderse. Por ejemplo:

- El convencimiento de que el grupo entero debe valorar las ideas expuestas y los métodos usados.
- Los alumnos eligen y comparten diferentes métodos de resolución.
- Los errores al realizar las tareas y de comprensión forman parte del proceso de aprendizaje.
- La argumentación y la explicación matemática es la que fundamenta la corrección del error.

En la clase, la maestra Carmen establece normas de respeto y valoración de las ideas de los demás. De las ideas que cada equipo propone se considera lo que importa y se subraya lo que puede ser genuino de cada aproximación. Por ejemplo, con la propuesta del equipo de Eduardo en la que se resalta el papel que puede tener el organizar la información de manera adecuada para obtener información relevante y resolver la tarea; o en la última respuesta de Inés, donde se resaltan las relaciones numéricas en que se apoyaba su propuesta, así como la estimación y el cálculo mental. Esta forma de actuar de manera sistemática a lo largo del curso permite a los alumnos desarrollar confianza en sí mismos como solucionadores de problemas, lo que se traduce en confianza al formular preguntas y hacer propuestas para la resolución de los problemas.

Conclusión: el papel del profesor en el desarrollo de competencias

Las tareas, el aprendizaje, la gestión y la evaluación constituyen componentes principales de la didáctica de las matemáticas que conciernen directamente a la actividad del profesor y que debe considerar a la hora de hacer su proyecto docente. Tales componentes se traducen en los siguientes deberes del maestro:

- Crear ambientes de aprendizaje en el aula de matemáticas.
- Lograr que los estudiantes reflexionen sobre las matemáticas que están haciendo.
- Propiciar la comunicación de las ideas matemáticas que se producen en el aula.
- Evaluar el nivel de comprensión de los conceptos matemáticos que alcanzan sus estudiantes.

Para desempeñar este papel es fundamental que el docente conozca el contenido matemático que debe ser aprendido por los estudiantes y sepa qué conocimiento didáctico posee en relación con dicho contenido, pues estos le permitirán seleccionar tareas para generar actividades matemáticas, gestionar la comunicación y el discurso matemático en el aula, evaluar el desempeño de sus estudiantes y encontrar formas de mejorar las tareas y su propia gestión de la clase.

En los siguientes capítulos se describirá un conjunto importante de resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas que forman parte del conocimiento didáctico que es fundamental que el docente adquiera, con el fin de que esté mejor preparado para cumplir con las responsabilidades que se enumeraron antes.

En la exposición de tales resultados se encontrarán elementos de diversos tipos que podrán utilizase como base para diseñar actividades de clase, pero cabe destacar que aún requieren de cierta elaboración para ser adaptados y aplicados al entorno específico en que el profesor desarrolla su actividad. Esta tarea de adaptación debe ser realizada por el profesor. El contenido visto en este capítulo puede ser una guía para llevar a cabo dicha tarea.

2. Sentido numérico y pensamiento algebraico

Ernesto Sánchez Sánchez, Cinvestav, IPN
Verónica Hoyos Aguilar, Universidad Pedagógica Nacional, México
Gonzalo López Rueda, Escuela Normal Superior de México

Sentido numérico

La aritmética tiene un lugar privilegiado en las matemáticas de los niveles básicos; los docentes, los elaboradores del currículo, los investigadores y todos los que opinan e influyen en la educación reconocen su importancia fundamental para la vida diaria, la formación y el desempeño profesional, y el cultivo del pensamiento científico.

El aprendizaje y la enseñanza de la aritmética es el área de la didáctica de las matemáticas que más se ha estudiado; las operaciones con un solo dígito, las operaciones con números de dos y más dígitos, la estimación, el sentido numérico, la resolución de problemas, son temas de esta extensa área de la didáctica. Este apartado se dedicará específicamente al sentido numérico.

El *sentido numérico* consiste en los conocimientos, las habilidades y las intuiciones que una persona desarrolla acerca de los números y sus operaciones. Implica la habilidad e inclinación hacia el empleo del conocimiento numérico, de manera flexible, para formular proposiciones matemáticas, desarrollar estrategias útiles para manipular números, realizar operaciones y resolver problemas. Alguien con sentido numérico utiliza los números y métodos cuantitativos como un medio de comunicación, procesamiento e interpretación de información; además, está convencido de que las matemáticas son útiles y aprecia su belleza.

McIntosh, Reys y Reys (1992) proponen un modelo en que se distinguen tres componentes fundamentales del sentido numérico:

a) *El concepto de número.* Consiste en el conocimiento de, y la facilidad con los números. En este componente se incluyen habilidades para identificar, saber y manejar el orden de los números, las diversas representaciones de un mismo número, las magnitudes relativas y absolutas, y un sistema de estrategias para acotar números.
b) *Las operaciones con números*. Es el conocimiento y la facilidad para las operaciones. Incluye la comprensión del efecto de las operaciones en los resultados, el conocimiento de las propiedades de la operaciones (conmutatividad, asociatividad y distribución), su aplicación en la creación de procedimientos de estimación y cálculo mental, y entender las relaciones que hay entre las operaciones.
c) *Las aplicaciones de los números y sus operaciones en la solución de problemas*. Es la aplicación de los conocimientos sobre los números y sus operaciones en situaciones que requieren un manejo cuantitativo. Involucra habilidades como determinar la operación necesaria en relación con el contexto de un problema; ser consciente de que existe más de un camino correcto para encontrar una solución; ser proclive a utilizar métodos o representaciones cada vez más eficientes; y, finalmente, la inclinación para revisar los datos y resultados en función del contexto original.

Aunque el sentido numérico implica habilidades complejas, su desarrollo comienza desde antes de ingresar a la escuela y continúa a lo largo de toda la primaria. Existen descripciones detalladas de cómo los niños progresan en la habilidad de operar con dígitos. Thompson (1999) describe el proceso por el que se pasa para dominar la suma: en el nivel más básico utilizan material concreto, en un segundo nivel, cuentan sin material recitando la serie numérica utilizando estrategias cada vez más simplificadas hasta llegar a la automatización. Durante el aprendizaje de este proceso los niños aplican y desarrollan conocimientos aritméticos informales que el profesor debe saber observar y potenciar.

Un ejemplo lo muestran Baroody y Tiilikainen (2003), quienes mencionan el caso de Alexi (7 años), quien no había comenzado aún su enseñanza formal de las operaciones. Se le pidió que dijera qué número va en la tarjeta blanca de la figura 2.1.

$$6 \quad + \quad 3 \quad = \quad \boxed{}$$

Figura 2.1.

El niño dijo que en la tarjeta debía ir el 8. Se le pidió que realizara la suma; entonces contó los 5 dedos de su mano izquierda y agregó otro dedo de la mano derecha, después agregó otros 3 dedos de la mano derecha y contó; al terminar dijo dudoso *¿Nueve? ¿Nueve? Yo pienso que 5 + 4 son* 9.

En este sencillo episodio, los autores ven un ejemplo del tipo de oportunidades que el profesor puede utilizar para ayudar al niño a enriquecer sus conocimientos aritméticos y sentido numérico; explican que la respuesta 8 pudo haber sido una conjetura del niño basada en su conocimiento de que "el resultado de una suma es más grande que cualquiera de los sumandos"; con base en este supuesto, los autores comentan que Alexi iba en la dirección correcta. Después, el niño realizó el procedimiento de sumar con los dedos, probablemente adquirido antes o inventado en ese momento con base en conocimientos informales previos. Los autores destacan que algo sorprendente es que Alexi, como resultado de ejecutar su procedimiento, se dio cuenta de que la combinación *5 + 4* también produce 9, y entonces asoció las combinaciones 6 + 3 y *5 + 4*; esta relación se incorporó a sus conocimientos acerca de la suma; pero este conocimiento también lleva a la idea más general de que sumas con diferentes combinaciones de números pueden llevar al mismo resultado. Este es un ejemplo del sinnúmero de procesos que ocurren en las actividades aritméticas de los niños, mismos que si son detectados y bien encaminados por el profesor, llevan al desarrollo del sentido numérico de los estudiantes.

En cualquier tema de aritmética pueden encontrarse tareas, y formas de gestionarlas en clase, para desarrollar el sentido numérico. En particular, el estudio de los números decimales es de gran importancia, por su riqueza, sus aplicaciones y su posición estratégica en el desarrollo de las matemáticas. Para mostrar de manera más concreta en qué consiste y cómo se observan algunos aspectos del sentido numérico de los estudiantes con los números decimales, en seguida presentamos parte de una investigación de Reys y Yang (1998), quienes llevaron a cabo un estudio con alumnos de sexto grado de primaria y segundo grado de secundaria en Taiwán. En este país el sistema de educación básica es similar al de México. El problema que se formularon los investigadores consistió en encontrar las relaciones entre el desempeño de los estudiantes en la realización de operaciones por escrito y la posesión o no de un sentido numérico, pues observaron que los maestros privilegian el aprendizaje de algoritmos y relegan el desarrollo del sentido numérico de sus estudiantes.

El estudio consistió en aplicar dos pruebas a 115 alumnos de sexto grado y 119 de segundo grado de secundaria, una para evaluar el desempeño con los algoritmos escritos, la otra para evaluar el sentido numérico. Encontraron un desempeño significativamente superior en la prueba de algoritmos respecto a la que evalúa el sentido numérico. Con base en los resultados de estas pruebas se clasificó a los estudiantes en una de tres categorías de acuerdo con su desempeño en las pruebas: niveles bajo, medio y alto. Después se eligieron nueve alumnos de nivel alto y ocho de nivel medio para entrevistarlos y observar cómo aplicaban su sentido numérico en la solución de algunos problemas.

A continuación veremos ejemplos de los problemas que utilizaron ya que muestran cómo se evalúa el sentido numérico y cómo piensan los estudiantes de los diferentes niveles.

La siguiente pregunta la incluyen para explorar la componente "El concepto de número": *¿Cuántos números decimales hay entre 1.42 y 1.43?* Los alumnos de alto nivel de los dos grados no tuvieron problema en responder que hay un número infinito de decimales, por ejemplo, un estudiante argumentó así:

> Los decimales pueden ser infinitamente extendidos 1.421, 1.4211, 1.42111… Se puede añadir cualquier número después del 2 de 1.42. Esos decimales pueden extenderse a muchos otros decimales diferentes entre 1.42 y 1.43. Por ejemplo 1.421, 1.422,… 1.4211… todos están entre 1.42 y 1.43.

Seis estudiantes de segundo de secundaria, creían que sólo hay nueve números decimales entre 1.42 y 1.43; sostenían que los únicos decimales entre 1.42 y 1.43 son 1.421, 1.422, 1.423… 1.429. Cuando se les sugirió que buscaran otros fueron incapaces de hacerlo. Dos estudiantes de secundaria de nivel medio dijeron que no había ningún número entre 1.42 y 1.43, uno de ellos dijo:

> ¡No! el sucesor de 1.42 es 1.43, por lo tanto no hay decimales entre ellos.

Un problema del mismo tipo pero referido a fracciones fue el siguiente: *¿Cuántas fracciones hay entre $^{2}/_{5}$ y $^{3}/_{5}$?* En esta pregunta nuevamente los estudiantes del nivel alto dijeron que había un número infinito de fracciones entre las fracciones dadas. Una respuesta fue:

> $^{2.1}/_{5} = {}^{21}/_{50}$, $^{2.2}/_{5} = {}^{22}/_{50}$… $^{2.9}/_{5} = {}^{29}/_{50}$ son fracciones entre $^{2}/_{5}$ y $^{3}/_{5}$. Se pueden cambiar los denominadores de las fracciones, por ejemplo: $^{2}/_{5} = {}^{400}/_{1000}$ y $^{3}/_{5} = {}^{600}/_{1000}$, entonces $^{401}/_{1000}$, $^{402}/_{1000}$, $^{403}/_{1000}$… están entre $^{2}/_{5}$ y $^{3}/_{5}$. Por lo tanto, hay un infinito de fracciones entre $^{2}/_{5}$ y $^{3}/_{5}$.

En cambio, ningún estudiante de nivel medio fue capaz de responder correctamente esa pregunta; la mayoría creía que $3/5$ es la fracción que sigue a $2/5$, por ejemplo:

> La diferencia entre 2 y 3 es 1. Entonces la fracción que sigue a $2/5$ es $3/5$. Por lo tanto, no hay fracciones entre $2/5$ y $3/5$.

En relación con la habilidad de contar con un sistema para acotar números, de la tercera componente del modelo visto arriba, se incluyeron preguntas como:

- Sin calcular la respuesta exacta, ¿piensas que el producto 72×0.46 es más que 36 o es menos que 36?
- Sin calcular la respuesta exacta, ¿piensas que $6\,2/5 \div 15/16$ es mayor que $6\,2/5$ o es menor que $6\,2/5$?
- Sin calcular la respuesta exacta, ¿crees que la suma $5/11 + 3/7$ es mayor que $1/2$ o menor que $1/2$?

Seis de nueve estudiantes de alto nivel utilizaron adecuadamente procedimientos para responder, mientras que sólo uno de nivel medio tenía un sistema para hacerlo. Los autores concluyeron que aunque muchos estudiantes se desempeñan más o menos bien en algoritmos escritos, no han desarrollado su sentido numérico.

Se puede concluir este apartado con la recomendación de que el profesor incluya en su proyecto de enseñanza actividades específicas para ofrecer la oportunidad a sus estudiantes de desarrollar un sentido numérico; para este fin, los problemas mostrados en la investigación referida pueden dar una idea de cómo elaborar esas actividades.

Significados de las fracciones. El área de las matemáticas elementales de mayor riqueza y complejidad es el de las fracciones, razones y proporciones. Esta complejidad se refleja en el hecho de que las fracciones se pueden ver con varios significados. Con ayuda de un análisis matemático y didáctico emergen cinco formas en las que se pueden pensar las fracciones: *relación parte-todo*, *cociente*, *medida*, *operador* y *razón*. Cabe mencionar que estas categorías son útiles para comprender la complejidad de las fracciones, pero no se deben pensar como categorías excluyentes, pues en un solo problema una fracción podría presentarse con dos o más de los anteriores significados. En este apartado aclararemos en qué consisten dichos significados.

Las fracciones describen una *relación parte-todo* cuando una unidad o totalidad se descompone en partes iguales y la fracción indica una o varias de estas partes. Este es el significado más elemental de una fracción; los niños aprenden a identificar en una figura —círculo, rectángulo y otras— una parte sombreada correspondiente a una fracción unitaria (un medio, un tercio, un cuarto, etc.), después a reconocer y tomar varias de estas partes. Tal acercamiento, aunque importante, en ocasiones origina algunas ideas erróneas; por ejemplo, en el manejo de la unidad. Mack (1990) informa de un estudio cuyo propósito fue enseñar a sumar y restar fracciones con base en el conocimiento informal de seis estudiantes de 6º grado. Se encontró que aunque los escolares conocían representaciones, procedimientos y símbolos sobre las fracciones, no relacionaban adecuadamente esos conocimientos. Una observación importante fue la dificultad que tenían para identificar la unidad en situaciones representadas de manera concreta y de forma simbólica. Aaron piensa que "como las fracciones son una parte del todo, siempre son menores [que el todo]". Una idea parecida pudo haber influido en que la primera respuesta de Julia al problema de la figura 2.2. fuera $5/8$.

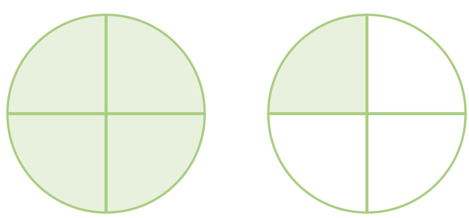


Figura 2.2. Problema: ¿Qué parte está sombreada?

El entrevistador le dice que, en realidad, cada círculo es una pizza, entonces Julia responde que hay $1^1/_4$ de pizza. Ella asumió en principio e inconscientemente que la unidad estaba formada por los dos círculos, pero en el contexto familiar de las pizzas, le resultó natural identificar un círculo como unidad.

El significado de las fracciones como *cociente* ocurre cuando se identifican las relaciones entre una situación de división y una fracción como representación de su cociente; de manera simbólica:

El cociente de la división $a \div b$ es igual a la fracción $^a/_b$
para toda a, b en los enteros y $b \neq 0$

Este significado de las fracciones se asocia a las situaciones de reparto equitativo (por ejemplo, interpretar $^a/_b$ como repartir *a* [galletas] entre *b* [niños]), pero estas situaciones no son suficientes para construir ese significado. En efecto, el significado abarca otras situaciones y otros esquemas, en especial, el de fracción como cociente se asocia a las situaciones de división entre enteros y después a la división entre racionales.

Toluk y Middleton (2001) hicieron un estudio sobre la construcción del significado de las fracciones como cociente por parte de niños de 5º Con base en sus observaciones proponen un esquema (figura 2.3.), donde se representan una progresión y conexiones entre significados y esquemas de las fracciones y divisiones que culmina en la construcción del significado de una fracción como cociente.

La interpretación de una *fracción como relación parte-todo* se vio en el apartado anterior. El esquema *de cociente como número entero* ocurre cuando los niños piensan que el resultado de una división es un entero (posiblemente con resto) y pueden obtenerlo, así como que una división tiene sentido cuando el *dividendo* es más grande que el *divisor*. El esquema de *fracción como un reparto equitativo* se da al dividir unidades en partes alícuotas; aunque los niños son capaces de encontrar soluciones a estas situaciones, cuando se pide que las escriban no las simbolizan en forma de fracción. Al principio, las situaciones que tienen sentido para los niños son aquellas cuyo resultado es menor que la unidad, porque no conciben las situaciones de reparto equitativo como un caso de división, aun cuando sean capaces de encontrar el cociente en términos de fracciones dividiendo una unidad.

El *esquema de cociente fraccional* ocurre cuando los niños escriben en forma de fracción la solución de problemas de división en contextos de reparto.

El *esquema de división como fracción* se presenta cuando se anticipa el cociente de una situación de división sin utilizar ningún procedimiento algorítmico; los niños llegan a hacerlo después de que son capaces de simbolizar la solución de situaciones de reparto con una fracción menor que uno. El esquema se resume en un razonamiento como el siguiente: "si cualquier cantidad *a* se divide en *b* grupos iguales entonces el cociente es a/b".

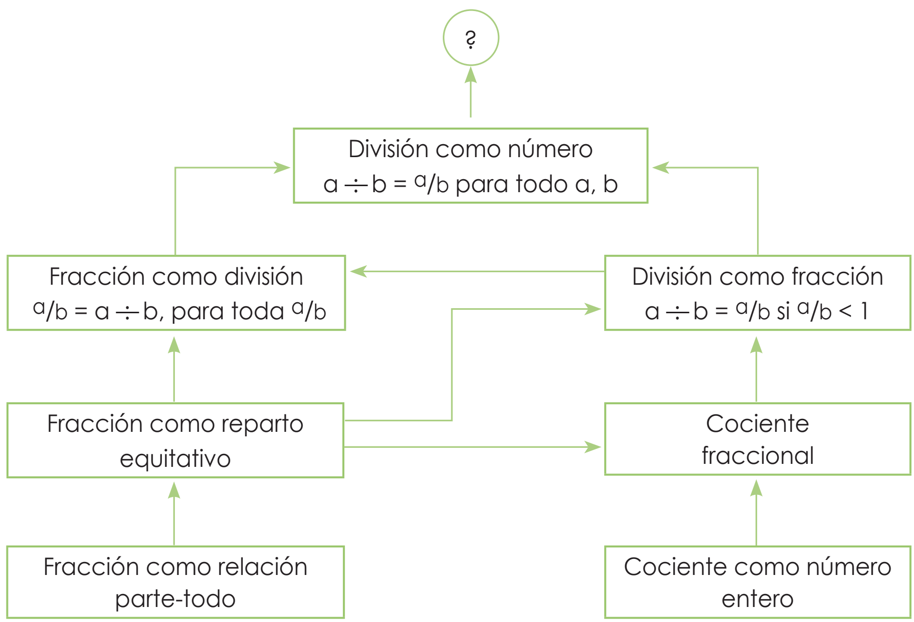


Figura 2.3. Progresión de la construcción del significado de fracción como cociente (Toluk y Middleton, 2001).

Finalmente, el *esquema de división como número* ocurre al concebir una división como fracción y viceversa; esto implica reconocer las divisiones con dividendo mayor que divisor como fracciones (impropias), y fracciones propias a manera de divisiones con dividendo menor que el divisor.

Las fracciones como *medida* se dan cuando se representa el número de unidades y partes de la unidad de una clase (longitud, área, volumen, tiempo, etc.) que cubren o aproximan una cantidad de la misma clase. La coordinación de actividades de medida con el uso de fracciones promueve las conexiones entre dos importantes áreas de las matemáticas. En un estudio cuyo objetivo era promover la comprensión de la noción de medida con niños de 5º grado, Lehrer, Jaslow y Curtis (2003) describen una secuencia prototípica para desarrollar la noción de medida de longitud. En un primer paso, se trató de medir algo caminando; es decir, determinar una longitud a partir de cuántos pies del niño cabían; luego se sustituyó el pie por una tira de papel y se midió; en un tercer paso, se hicieron subdivisiones para lograr una mejor aproximación de la medida del objeto; en este paso entró la fracción como una noción necesaria para continuar el proceso. La actividad siguió de manera que se presentaron operaciones con fracciones; por ejemplo, el producto de fracciones sencillas se presentó cuando se habló de: "la mitad de la mitad de la unidad es un cuarto de la unidad". El contexto de actividades de medida es ideal para la profundización de la noción de fracción.

Las fracciones son vistas como *operador* cuando actúan para modificar un estado o situación. Behr y otros (1993) indican que los problemas que usan las fracciones como operador suelen requerir soluciones de varios pasos; para lo cual ofrecen el siguiente ejemplo:

> Muchas marcas de chicles venden su producto en paquetes de 5 piezas por paquete. Juana tiene 8 paquetes. María tiene $3/4$ partes de lo que tiene Juana. ¿Cuántos paquetes tiene María? ¿Cuántas piezas tiene María?

Lo que tiene María se puede ver como una transformación de lo que tiene Juana, indicada por el número $3/4$; éste opera sobre los ocho paquetes.

Las fracciones juegan el papel de *razón* cuando funcionan para poner en relación dos cantidades. La comparación de cantidades relativas son características de las fracciones como razón; por ejemplo, Lamon (1993) investigó las estrategias que los niños desarrollan para resolver el siguiente problema, aun antes de estudiar el tema de fracciones.

Las niñas se reparten tres pizzas y los niños una, ¿quién come más pizza, una niña o un niño?

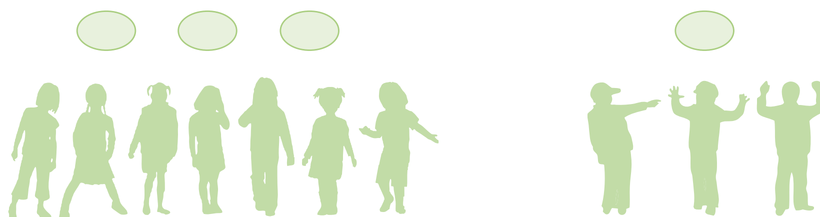


Figura 2.4.

Comenta el caso de Kuri, quien resolvió el problema diciendo que a las niñas les toca más, *porque los niños reparten una pizza entre tres; si las niñas hicieran lo mismo, si ellas repartieran esta pizza entre tres (marca una pizza y cubre a tres niñas) y esta otra entre tres (marca otra pizza y cubre otras tres niñas) entonces la última niña podría comerse una pizza entera; así que a ellas les toca más* (p. 141).

Lamon comenta que el procedimiento espontáneo que Kuri utiliza consiste en tomar una de las razones como unidad y ésta le sirve para reinterpretar la otra fracción; de hecho Kuri responde la pregunta: "¿cuántas 'unidades' de 3:1 caben en 7:3?" Muchos ejemplos interesantes de las fracciones como operador y razón se presentan en situaciones de razonamiento proporcional, pero este tema se verá en otro capítulo.

Pensamiento algebraico

El álgebra es la rama de las matemáticas que trata con la simbolización de las relaciones numéricas generales, las estructuras matemáticas y la forma de operar con éstas. De acuerdo con Christmas y Fey (1999), *los conceptos, principios y métodos del álgebra constituyen poderosas herramientas intelectuales para representar información cuantitativa y razonar acerca de esa información.* En trabajos de investigación recientes se ha sugerido que desde la enseñanza primaria se pueden, y deben, desarrollar rasgos del pensamiento algebraico (Butto y Rojano, 2009). Es lícito decir que la génesis del pensamiento algebraico en la primaria comienza con el desarrollo del sentido numérico, que vimos en la primera parte de este capítulo. Sin embargo, tradicionalmente se considera que en la escuela secundaria es cuando comienza formalmente el aprendizaje del álgebra. Los tres temas que aquí se abordarán, a saber, *pensamiento algebraico*, *ecuaciones* y *generalización*, se ubican en este nivel académico.

¿Qué es el pensamiento algebraico?

Varios expertos en didáctica del álgebra ofrecen características del pensamiento algebraico que nos dan una idea de la complejidad de este tipo de pensamiento. Por ejemplo, Greenes y Findell (1998) sostienen que las grandes ideas del pensamiento algebraico involucran la *representación*, el *razonamiento proporcional*, el *significado de variable*, *patrones* y *funciones*, *razonamiento inductivo* y *razonamiento deductivo*. Por su parte, Kaput (1998) señala que incluye la construcción y representación de patrones y regularidades, generalizaciones deliberadas y, más importante, la exploración activa en la resolución de problemas y la formulación de conjeturas. Asimismo, Kieran y Chalough (1993) resaltan la construcción de significados para los símbolos y operaciones del álgebra en términos de la aritmética.

Kriegler (2000) recoge las expresiones anteriores sobre el pensamiento algebraico, más otras de diferentes autores, y propone un marco para organizarlas, que en seguida se expondrá de forma resumida. Está formado por dos componentes, el primero se refiere a las *Herramientas del pensamiento matemático,* que incluye las habilidades de resolución de problemas, representación y razonamiento; el segundo trata de las *Ideas algebraicas fundamentales,* que consiste en ver el álgebra como aritmética generalizada, un lenguaje y herramienta para la modelación y el estudio de funciones.

Herramientas del pensamiento matemático

Tener *habilidades de resolución de problemas* es saber qué hacer ante un problema cuando no se sabe qué hacer; es decir, significa poseer estrategias para seguir al no tener un método preestablecido para hallar la solución. Por ejemplo, acercarse a la solución por ensayo y error; hacer una lista; suponer que ya se tiene la solución e invertir los pasos; elaborar un modelo de la situación; formular y resolver un problema similar, pero más simple, son estrategias de resolución de problemas.

Poseer *habilidades de representación* significa saber describir las relaciones matemáticas y la información cuantitativa presente en un problema mediante el lenguaje de un sistema (verbal, gráfico o simbólico) y llevar a cabo transformaciones dentro de éste (como, despejar una ecuación) y entre sistemas diferentes (por ejemplo, traducir una relación dada verbalmente a una expresión algebraica o a una gráfica).

Contar con *habilidades de razonamiento matemático* significa saber cómo se conserva la verdad de las proposiciones a través de sus transformaciones, la expresión típica de un razonamiento es "si esto es cierto, también esto es cierto"; por ejemplo, en un proceso de despeje de la incógnita, cuando se elimina el término independiente de la primera parte de la igualdad $3x - 2 = 5$ obteniéndose $3x = 7$ se realiza un razonamiento de la forma:

Si $3x - 2 = 5$ (es verdadera) entonces $3x = 7$ (es verdadera).

Conviene distinguir los razonamientos de tipo inductivo a los de tipo deductivo, en los primeros se generalizan relaciones presentes en casos particulares, de manera que la verdad de las proposiciones así obtenidas es sólo probable. Por ejemplo, a la pregunta: ¿cuál es el término siguiente de la secuencia 3, 5, 7…?, podría responderse con 9, asumiendo que la secuencia es la de los números impares, pero también se podría proponer que el siguiente es 11, pues puede pensarse que la secuencia es la de los números primos mayores que dos. En cambio, en los razonamientos deductivos, la verdad de una proposición se obtiene de otra, u otras, basada en propiedades generales, así su verdad se hereda de la verdad de las premisas. El ejemplo del despeje de una ecuación como la que vimos antes es de este tipo, porque se basa en las propiedades generales de los números y del signo de igualdad.

Las ideas algebraicas fundamentales

Aritmética generalizada (o abstracta). La idea del álgebra como aritmética generalizada surge al centrar la atención en las expresiones algebraicas como generalizaciones de pautas o patrones aritméticos y, en las identidades como propiedades generales de las operaciones aritméticas. Por ejemplo, las relaciones y propiedades expresadas en las siguientes identidades aritméticas:

$$1 \times 2 = 1 + 1; \quad 2 \times 3 = 4 + 2; \quad 3 \times 4 = 9 + 3; \quad 4 \times 5 = 16 + 4\ldots$$

se generalizan mediante la expresión:

$$n \times (n+1) = n^2 + n$$

Esta identidad expresa la propiedad que exhiben las expresiones aritméticas anteriores y, a su vez, representa una aplicación de la propiedad distributiva de los números. En esta concepción del álgebra, el concepto de *variable* es fundamental, pues precisamente esta noción es la que permite expresar las propiedades aritméticas de manera sintética. La *n* en la expresión anterior es una variable que varía sobre todos los números naturales.

Lenguaje. El álgebra se considera el lenguaje de las matemáticas. En el estudio del lenguaje natural se elaboraron nociones como *semántica* y *sintaxis*; el estudio de los aspectos análogos de *semántica* y *sintaxis* del álgebra ha ayudado a entender el funcionamiento del álgebra como lenguaje. Expresado de manera breve, la semántica se refiere a los mecanismos de producción y comunicación de los significados matemáticos, mientras que la sintaxis se refiere a las reglas de formación y transformación de enunciados y expresiones algebraicas. Por ejemplo, la comprensión y el uso del concepto de variable y de expresiones algebraicas en diferentes contextos, forma parte de la semántica, mientras que las reglas de combinación y manipulación de las variables e incógnitas lo son de la sintaxis.

Herramienta. El álgebra también es una (caja de) herramienta(s) para la modelación matemática y el estudio de las funciones. La búsqueda y generalización de patrones y reglas de situaciones en contextos matemáticos y del mundo real, así como sus representaciones en fórmulas, ecuaciones, tablas y gráficas, son poderosas herramientas para comprender el mundo y resolver problemas.

El uso del álgebra en las ciencias en general muestra su potencia en la modelación; un ejemplo sencillo, extraído de la física, es la ley de la caída libre de los cuerpos debida a Galileo. Está dada por la función:

$$d = {}^{1}/_{2}\, g \times t^{2}$$

donde $g = 9.8$ m/seg^2, es la aceleración y se conoce como la constante de gravitación; d = distancia; t = tiempo.

Esta forma tan sintetizada de expresar una ley natural compleja, muestra la potencia del álgebra en la modelación de situaciones de la realidad.

La resolución de ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones lineales son un tema importante de los cursos de matemáticas de la secundaria; al desarrollarlo comienza a experimentarse la potencia del uso de literales en lugar de números; sin embargo, se encontró que los estudiantes pasan por grandes dificultades antes de dominarlo. La importancia del tema y las dificultades de su aprendizaje han dado lugar a la realización de una gran cantidad de estudios didácticos que buscan entender y mejorar su aprendizaje.

Las investigaciones sobre la resolución de ecuaciones algebraicas publicadas por Filloy y Rojano (1989), Filloy (1999), Filloy, Puig y Rojano (2008) constituyen aportaciones significativas de autores mexicanos en esta área de la investigación. En particular, en el trabajo de Filloy y otros (2008) se exponen las construcciones teóricas para explicar procesos generales de aprendizaje pertenecientes a la didáctica del álgebra. A continuación, se expondrá una de las estrategias de enseñanza mencionadas por estos autores (Filloy y otros, 2008: 169-175), en la cual se utilizan representaciones geométricas de las ecuaciones para darle significado a las transformaciones algebraicas (semántica) que llevan a la solución, y propone que una vez entendidas se formulen y aprendan las reglas sintácticas (sintaxis) mediante ejercicio y práctica.

De acuerdo con los autores, el primer tipo de ecuaciones algebraicas a las que se enfrentará al estudiante son las del tipo $Ax + B = Cx$, donde A, B, C son enteros positivos dados y $C>A$. Nótese que la incógnita aparece en los dos lados de la igualdad, cuestión que diferencia las ecuaciones algebraicas de las aritméticas. Las ecuaciones del tipo $Ax = B$, a pesar de contener la incógnita x, se consideran aritméticas, porque cualquier estudiante sin preparación en álgebra podría resolverlas sólo echando mano de sus conocimientos aritméticos. En cambio, en las ecuaciones algebraicas es necesario manipular y operar la incógnita, lo cual es netamente algebraico.

A continuación se describirá un método de resolución de la ecuación $Ax + B = Cx$, que se basa en una representación geométrica de la ecuación.

Paso A. Traducción de la ecuación Ax + B = Cx al modelo geométrico:

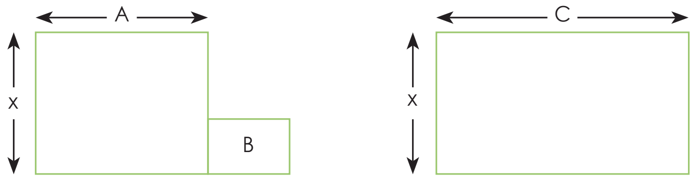


Figura 2.5. Situación de comparación entre Ax + B y Cx en el Modelo Geométrico.

Paso B. Comparación de áreas:

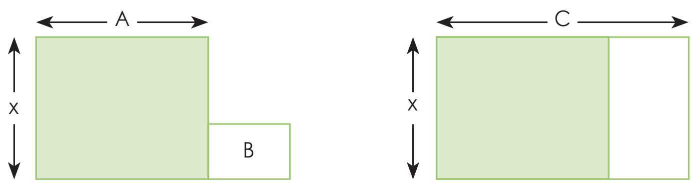


Figura 2.6. Como C>A, se puede ver que el área Ax podría estar contenida en el área Cx.

Paso C. Realización de acciones concretas; lo que en el caso del modelo geométrico equivale a suprimir las áreas que son equivalentes, como se ve en seguida:

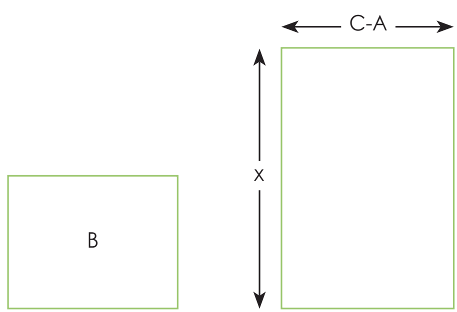


Figura 2.7. Al suprimir las áreas que son equivalentes (véase las áreas sombreadas) se obtiene que el área B es equivalente al área (C-A)x.

Paso D. Traducción del modelo geométrico a una nueva ecuación: (C-A)x = B Obsérvese que esta última ecuación ya es una ecuación aritmética que tiene menor nivel de dificultad. Finalmente, es posible que surja una situación problemática intermedia, que consiste en que ahora el estudiante quiera interpretar la ecuación aritmética en el contexto geométrico que ha estado operando. Esto se traduce, por ejemplo, en el caso de la ecuación 3x = 3, a la siguiente situación:

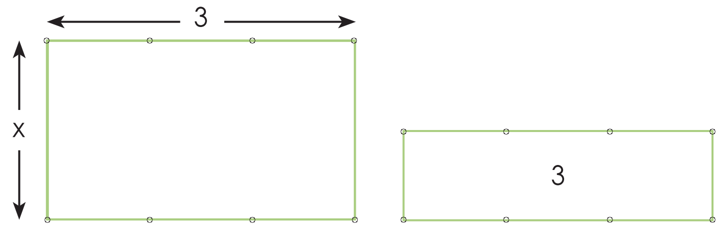


Figura 2.8. Situación intermedia, de traducción de una ecuación aritmética ahora al modelo geométrico; por ejemplo, la ecuación 3x = 3.

En seguida aparece la estrategia de enseñanza (y/o de aprendizaje) de la *repetición y la práctica*, con más casos a resolver, pero con números cada vez más y más grandes en la ecuación Ax + B = Cx , C>A.

Hasta aquí se ha creado un *artefacto didáctico* para resolver sólo las ecuaciones del tipo Ax + B = Cx , C>A.

Paso E. Puede surgir la pregunta, ¿qué ocurrirá si al alumno se le presenta una ecuación de primer grado de tipo diferente?, por ejemplo, 8x + 5 = 3x + 15?

Entonces será necesario realizar un nuevo proceso de aprendizaje, por descubrimiento, con la misma estrategia de enseñanza que se muestra en los pasos A al D.

Finalmente, se hace notar que se podrá observar que ocurre con los estudiantes, al echar a andar el proceso de resolución que aquí se describe que aparece una serie de tendencias cognitivas, como la de "abreviación". Ésta consiste en que los pasos A al D, ahora (después de utilizar el artefacto didáctico y la estrategia de repetición y práctica) se realizan en menos tiempo, pues es seguro que los estudiantes habrán encontrado formas personalizadas y niveles sintácticos de proceder.

Los autores señalan que las reglas sintácticas que los alumnos produzcan a lo largo de la secuencia de enseñanza luego se aplicarán a la resolución de las nuevas situaciones. Por ejemplo, la ecuación $8x - 3 = 5x + 6$, hará que el profesor regrese nuevamente al punto E, donde se enfrentaron nuevas situaciones problemáticas, para volver a desencadenar los pasos A al D, tratando de obtener una ecuación reducida de tipo aritmético. Por último, desde el punto de vista de los autores, con la estrategia de la repetición y la práctica, se logrará rebasar la utilización de un modelo concreto de resolución para llegar a utilizar un nuevo lenguaje más abstracto, cada vez más sintáctico y más cercano a los procedimientos conocidos de resolución algebraica.

Sobre la generalización en álgebra

Un tema actual y novedoso del álgebra es el de la generalización. Radford (2006) aborda el tema de su aprendizaje mediante el descubrimiento de patrones por parte de los estudiantes de 13 y 14 años de edad. Algunas preguntas a las que trata de responder esta investigación son:

- ¿Cómo comprenden los estudiantes lo que es común a un patrón?
- ¿Cuáles son los mecanismos (lingüísticos o de otro tipo) por medio de los cuales los estudiantes generalizan lo que observaron que es común a todos los términos de una secuencia?
- ¿Cómo expresan los estudiantes la generalidad?

Para responder se considera la siguiente situación. Teniendo en cuenta las imágenes que aparecen en la figura 2.9, se pide a los estudiantes (que están agrupados en equipos de 2 a 4 miembros) que encuentren el número de círculos que deben aparecer en las figura 10 y 100 de la secuencia:

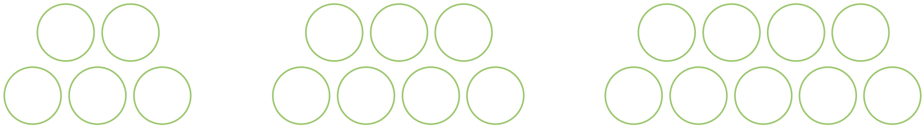


Figura 2.9.

El autor reporta que las estrategias de los estudiantes para resolver la tarea planteada se pueden clasificar en dos categorías: en la primera, la heurística de descubrimiento del estudiante se basa en el ensayo y error. Esto es, el estudiante propone reglas simples, como "2 veces más 1", "2 veces más 2", o "2 veces más 3", y verifica su validez para algunos (pocos) casos; por otro lado, el autor hace notar que la simbolización de la regla puede variar y presenta una de las provistas por uno de los equipos en la clase: "n×2(+3)". Cuando se solicitó a los estudiantes de este equipo explicar cómo habían encontrado esta regla, respondieron: "La encontramos por accidente".

Las estrategias que entran en la segunda categoría son aquellas en que los estudiantes buscan algo en común en las figuras dadas; por ejemplo, un estudiante, Mel, escribió: "La hilera de arriba siempre tiene un círculo más que el número de la figura, y la hilera de abajo siempre tiene dos círculos más que el número de la figura", su fórmula fue: "(n+1) + (n+2)=".

En su análisis, Radford indica que aunque las estrategias de ambas categorías conducen al uso de simbolismo, las heurísticas son inconmensurablemente diferentes. La última descansa en *notar* ciertos elementos comunes en las figuras dadas y en generalizarlos a las figuras que siguen en la secuencia. En contraste, la primera descansa sobre una regla formada adivinando. Las reglas formadas de esta manera, de hecho son *hipótesis*. Tal forma de razonamiento funciona sobre la base de un razonamiento probable, cuya conclusión va más allá de lo que está contenido en sus premisas. En términos más precisos, es un tipo de inducción *simple* (pues se puede distinguir de otros tipos más sofisticados). La comparación de las dos estrategias mencionadas resalta una importante distinción entre inducción y generalización, y sugiere uno de los rasgos que pueden constituir el núcleo de la generalización de un patrón: la capacidad de notar algo general en lo particular.

Finalmente, Radford señala que este rasgo por sí solo no es suficiente para caracterizar la generalización *algebraica* de patrones y argumenta que, adicionalmente a ver lo general en lo particular, "uno debe ser capaz de expresarlo algebraicamente".

Hasta aquí la primera parte del análisis de Radford (2006) acerca de los procesos de generalización de los estudiantes. Sin embargo, para terminar la reseña de este trabajo, es necesario expresar, al menos, de manera sintética, que el autor extiende su análisis de las producciones de los estudiantes para incluir las palabras que emiten, sus gestos y el ritmo en que expresan ambos componentes. En este sentido, añade que la generalidad algebraica está hecha de diferentes estratos, algunos más profundos que otros. Además, la meta de generalidad que se puede alcanzar dentro de un cierto estrato está estrechamente relacionada con la *forma material* que se usa para *razonar* y *expresar* lo general. El autor plantea entonces, la siguiente definición:

> Generalizar un patrón algebraicamente descansa sobre la capacidad de comprender lo que de común se ha notado en algunos elementos de una secuencia S, estando consciente de que lo común se aplica a todos los términos de S y siendo capaz de usarlo para proveer una expresión directa de cualquier término de S (en particular, de los que están más allá del campo perceptual).

A continuación se da un ejemplo de este último tipo de análisis, que se denota como *semiótico*. El autor utiliza el patrón de figuras antes mostrado para señalar que existen varias maneras de observar lo que se puede calificar como lo mismo y lo diferente en las figuras dadas. Da el siguiente ejemplo: hablando con sus dos compañeros de equipo, Doug (un estudiante de 14 años) dijo: "Entonces, sólo añadimos otra cosa como ésta"; al momento en que pronuncia la palabra "otra", comienza a hacer una secuencia de seis gestos con un ritmo paralelo. Naturalmente, todas las figuras que se están considerando tienen la misma forma, pero, al mismo tiempo, son diferentes: lo que las hace diferentes, nos está sugiriendo Doug, son los dos últimos círculos dispuestos diagonalmente al final de cada figura (véase la imagen 2.10.):

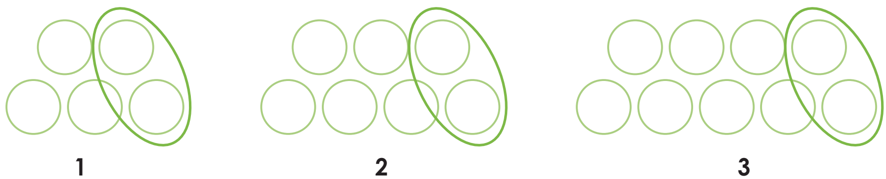


Figura 2.10. Doug resalta los dos últimos círculos en un intento de notar algo común en los términos de la secuencia.

Radford hace ver que la comprensión de Doug de lo que es común es diferente de la de Mel (véase líneas arriba); también es diferente lo que Doug expresa al respecto. Así, mientras que Mel vio las figuras como hechas de dos líneas horizontales y expresó la generalidad en forma verbal, Doug vio las figuras construidas de manera recursiva por la adición de dos círculos diagonales arreglados y expresados dinámicamente, mediante gestos y palabras. En este ejemplo, Doug comenzó a hacer aparente una estructura matemática general y a objetivarla. Para lograrlo, utilizó dos medios semióticos de objetivación: las palabras y los gestos. En conclusión, lo que se observó en el salón de clases desde el primer día fue que el acto perceptual de notar algo se desdobla en un proceso mediado por una actividad multisemiótica (palabras habladas, gestos, dibujos, fórmulas, etc.), en el curso de la cual el objeto que será visto emerge progresivamente. A este proceso de notar el autor le llamó *proceso de objetivación*.

La objetivación del conocimiento es un constructo teórico para dar cuenta de la manera en que los estudiantes se involucran en algo que notan y a lo que dan sentido; desde esta perspectiva, los salones de clases son más bien vistos como zonas interactivas de actividades mediadas que transmiten valores científicos, éticos, estéticos y otros, cultural e históricamente formados, que los estudiantes objetivan por medio de la participación reflexiva y activa.

3. Forma, espacio y medida

Ángel Gutiérrez Rodríguez, Universidad de Valencia, España
Mariana Sáiz Roldán, Universidad Pedagógica Nacional, México

La enseñanza de la geometría en los niveles no universitarios tradicionalmente ha sido escasa y centrada en unos pocos polígonos y cuerpos espaciales, de los que se enseñan las características físicas destacadas, los principales elementos y algunas propiedades básicas. Algo similar se puede decir de la enseñanza de las medidas de longitud, área y volumen, centrada en lograr que los estudiantes memoricen el Sistema Métrico Decimal y las fórmulas de cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de las principales figuras geométricas planas y espaciales.

Los nuevos programas oficiales mexicanos de educación básica (SEP, 2004, 2006, 2008) tratan de corregir esta carencia a partir de aumentar el énfasis y la cantidad de contenidos de geometría y medida que los estudiantes deben aprender. Para ayudar a los profesores a poner en práctica dicho cambio. En este capítulo presentamos información sobre los principales resultados de la Investigación Internacional en Educación Matemática referentes a los procesos de aprendizaje de los conceptos y las propiedades de geometría y medida para los niveles de preescolar, primaria y secundaria. La información ofrecida dará lugar a sugerencias didácticas que sirvan de apoyo a los profesores.

El capítulo se divide en dos secciones dedicadas a la geometría y a la medida de magnitudes. La primera sección tiene cuatro partes, en las que se abordan los problemas del desarrollo del razonamiento matemático, de la enseñanza de conceptos geométricos, del aprendizaje de la demostración y del papel de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. La segunda sección también incluye cuatro partes, la primera se enfoca a analizar los problemas comunes a las medidas de longitud, superficie y volumen, y las siguientes tres partes se dedican a analizar los problemas particulares de cada magnitud geométrica.

Aprendizaje de la geometría durante la educación básica

La geometría está formada por varios bloques de contenidos entre los que hay una multitud de relaciones. Por ello, su enseñanza y su aprendizaje se basarán en descubrir y explorar esas relaciones. La misión del profesor es organizar la actividad en clase para dar a los estudiantes oportunidades de aplicar los contenidos geométricos que estudian en situaciones diversas. En esta sección analizamos varios aspectos comunes a todos los contenidos de geometría, tanto en el plano como en el espacio.

El desarrollo del razonamiento matemático

La investigación didáctica muestra claramente que los *niveles de razonamiento matemático de Van Hiele* son un exitoso modelo de organización de la enseñanza y del aprendizaje de la geometría (Battista, 2007).

Los cinco niveles de razonamiento identificados por el modelo de Van Hiele ofrecen una descripción de las características de las diferentes formas de razonamiento matemático de los estudiantes, que se suceden desde que están en preescolar hasta que alcanzan el máximo desarrollo de su capacidad matemática, incluso como matemáticos profesionales. Sólo podemos hacer una breve descripción de los niveles 1 a 4, que son los relacionados con la educación básica.

Hay descripciones y análisis más detallados en Burger y Shaughnessy (1986), Jaime (1993), Jaime y Gutiérrez (1990) y Van Hiele (1986).

El razonamiento de *nivel 1* se caracteriza porque los estudiantes perciben las figuras geométricas globalmente y como objetos individuales; sólo razonan sobre propiedades llamativas relacionadas con los elementos físicos de las figuras; dan importancia a propiedades como posiciones, formas o tamaños, y no son capaces de generalizar. Un estudiante de nivel 1 puede decir que un rombo se diferencia de un rectángulo en que "el rectángulo es más largo" o que "el rombo es más picudo" (Jaime y Gutiérrez, 1990:307).

Los estudiantes que razonan en el *nivel 2* ya identifican y usan partes y propiedades matemáticas de las figuras, pero no son capaces de relacionar unas propiedades con otras; por ejemplo, en un rectángulo, no asocian la perpendicularidad con el paralelismo de los lados. El razonamiento de nivel 2 se basa en la observación de ejemplos para identificar regularidades, que se convierten en propiedades generales, y los propios ejemplos son la demostración o explicación de la veracidad de la propiedad descubierta. Así, por ejemplo, después de observar o manipular varios rombos, descubren que las diagonales de un rombo son perpendiculares y, desde ese momento, admiten que las diagonales de cualquier otro rombo también son perpendiculares sin necesidad de más comprobaciones (Jaime y Gutiérrez, 1990:309).

La principal característica del *nivel 3* de Van Hiele es que los estudiantes aprenden a realizar razonamiento deductivo abstracto, si bien todavía no pueden leer ni entender demostraciones complejas ni presentadas en lenguaje formal. Por ejemplo, entienden la demostración deductiva usual de que los ángulos de un triángulo suman 180º (figura 3.1), pero no sienten la necesidad de justificar las congruencias de ángulos, porque éstas son visualmente evidentes (Jaime y Gutiérrez, 1990:314). Por otra parte, los estudiantes pueden comprender cualquier definición dada en los libros de texto y realizar todo tipo de clasificación entre familias de figuras geométricas.

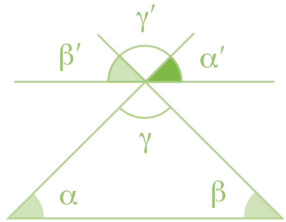


Figura 3.1.

Los estudiantes que razonan en el *nivel 4* son capaces de hacer y entender demostraciones matemáticas formales, así como entender las características de un sistema axiomático y aspectos más operativos, como la posibilidad de que un concepto tenga varias definiciones formales diferentes, pero equivalentes. Por ejemplo, un estudiante del nivel 4 admite que se defina un rectángulo como "el cuadrilátero que tiene dos ejes de simetría que pasan por los puntos medios de sus lados" y es capaz de demostrar formalmente que esta definición es equivalente a la usual.

Los niveles de Van Hiele permiten evaluar el progreso de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes a medida que avanzan a lo largo del sistema educativo. Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), Jaime (1993) y Gutiérrez y Jaime (1998) ofrecen ejemplos de cómo realizar estas evaluaciones y de resultados de evaluaciones ya hechos.

El conocimiento de los niveles de Van Hiele también puede ayudar a los profesores a diseñar tareas apropiadas para cada nivel y a establecer las condiciones para ayudar a sus alumnos a transitar al nivel inmediato superior. Van Hiele sostenía que el progreso por niveles depende en gran medida de la experiencia matemática que los estudiantes adquieren gracias a la enseñanza, por esto también propuso directrices para el diseño de actividades. En particular, sugiere que las actividades de aprendizaje estén organizadas siguiendo cinco fases: información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración.

En seguida se ofrece un ejemplo en el que se describe una actividad que tiene las fases propuestas por Van Hiele y que sigue las "orientaciones didácticas" del objetivo de segundo grado de primaria que propone "identificar caras de objetos a partir de sus representaciones planas y viceversa" (SEP, *Programa de estudio. Segundo grado. Educación básica. Primaria*: 60). Muchos de los niños de este grado están en el nivel 2 de Van Hiele: "Identifican y usan partes y propiedades matemáticas de las figuras, pero no son capaces de relacionar unas propiedades con otras". La actividad siguiente reconoce este hecho, pero tiene el propósito de establecer condiciones para que los niños superen el razonamiento de dicho nivel destacando las relaciones entre figuras planas y las caras de los cuerpos geométricos.

Información. Se les presentan figuras planas, como cuadrados, triángulos, rectángulos, círculos. Se les pregunta el nombre de cada figura; se les da el nombre de una figura y se les pide que la señalen. También se les presentan varios cuerpos sólidos: cubos, pirámides, prismas y cilindros. Se les pregunta por el nombre de cada cuerpo; si no los conocen se les enseña y se les pide que los repitan. Se les da el nombre de un cuerpo y se les pide que lo localicen; de esta manera el docente se asegura que aprendan el nombre de cada cuerpo.

Orientación dirigida. Se les pide a los alumnos que utilicen los cuerpos gométricos a manera de sellos para estampar figuras en papel o tela. Se les pide que identifiquen qué figuras planas se obtienen estampando sellos con los diferentes cuerpos; que elijan el cuerpo apropiado si se quiere estampar determinada figura (cuadrado, círculo, triángulo, rectángulo) y que lo comprueben. Imprimirán todas las caras de un solo cuerpo y observarán algunas de sus relaciones.

Explicación. Se les pide a los alumnos hablen de lo que han observado, que expresen las relaciones entre caras y cuerpos: "Una pirámide tiene caras que son triángulos", "el cilindro es el único que sirve para estampar círculos" o enunciados similares, y entre las caras de un solo cuerpo: "Todas sus caras son iguales", "sólo tiene cuatro caras", etcétera. El profesor tendrá que formular preguntas para propiciar que los niños formulen enunciados, pero sin inhibir su libertad de pensamiento y expresión.

Orientación libre. Se deja que los niños hagan estampados propios en los que combinen libremente las figuras. Después se les presentan configuraciones estampadas en las que no se aprecian directamente las figuras básicas (triángulo, cuadrado, rectángulo, círculo) sino que se ven figuras compuestas (paralelogramos, rombos, "casitas", etc.) y se les pide que las reproduzcan utilizando los cuerpos disponibles.

Integración. Los niños repasan y resumen lo que han aprendido acerca de los cuerpos y sus caras. El profesor les ayuda en esta tarea señalando aspectos que considere importantes de la actividad, pero sin añadir conocimientos que no correspondan a experiencias realizadas. El profesor puede, por ejemplo, proporcionar a los niños tarjetas en las que están escritos nombres de polígonos o cuerpos, y otras tarjetas en las que están escritas propiedades, como número de lados, de caras, de vértices, etcétera. Los niños deben colocar las tarjetas en su mesa ordenadas y unir mediante líneas las que tengan relación (por ejemplo, la tarjeta con el nombre de un sólido unida a las tarjetas con los nombres de los polígonos de sus caras y a las tarjetas con los números de caras o de vértices).

La enseñanza de nuevos conceptos geométricos

Las matemáticas no son algo que existe independiente de los seres sino un producto social creado para resolver determinados problemas prácticos (De Villiers, 1993; Harel y Sowder, 1998; Clements y Battista, 1992). Esta idea da lugar a que existan "diferentes matemáticas" en distintos contextos. Tal diversidad también existe, a menor escala, en el contexto escolar. Un caso importante son las diferentes definiciones que se encuentran en los libros de texto de educación básica de algunas familias de triángulos y cuadriláteros: para Santillana (2006) (figura 3.2) los cuadrados son rectángulos y rombos, y estas tres familias son parte de los romboides; pero para SM Ediciones (2007) (figura 3.3) los cuadrados no son rectángulos[1] ni rombos, y ninguna de las tres familias es parte de los romboides.

[1] Para los autores de los libros de texto españoles, la frase "iguales 2 a 2" quiere decir que el polígono tiene dos pares de lados (ángulos) congruentes pero siendo cada par no congruente con el otro.

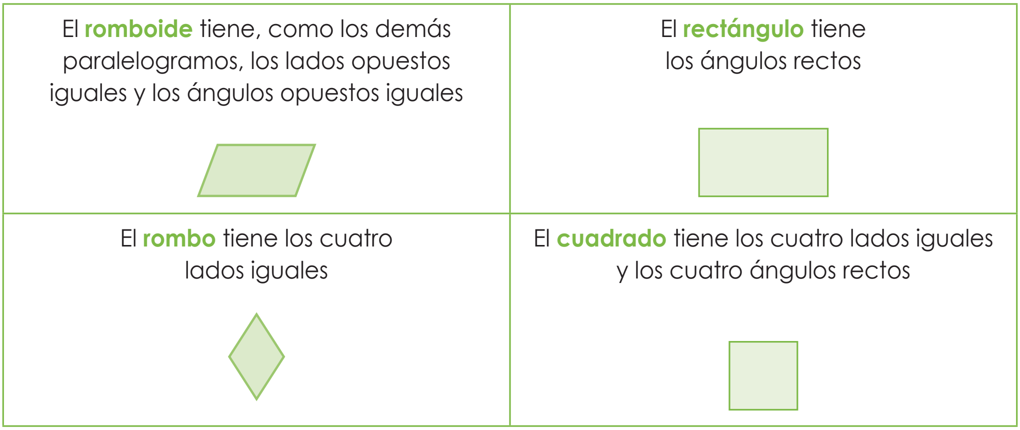


Figura 3.2.

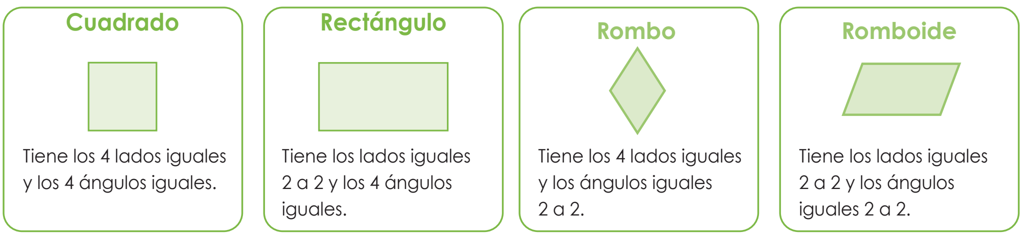


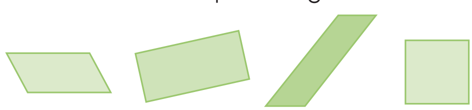
Figura 3.3.

La diversidad de definiciones lleva a un problema en el contexto de la educación básica que han analizado los investigadores (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992) y que se relaciona con el nivel de razonamiento de los estudiantes (Jaime y Gutiérrez, 1990): los estudiantes que razonan en el nivel 1 sólo son capaces de manejar clasificaciones exclusivas, ya que nada más basan su razonamiento en atributos visuales diferenciadores de las figuras, que son los más llamativos; así, piensan que los cuadrados no son rectángulos, porque visualmente tienen formas diferentes; los estudiantes que razonan en el nivel 2 pueden realizar algunas clasificaciones inclusivas, pero no otras, dependiendo de la complejidad lógica de las relaciones; por ejemplo, admiten que cuadrados, rectángulos y rombos son paralelogramos, pero no que los cuadrados sean rectángulos ni rombos (Corberán y Gutiérrez, 1994).

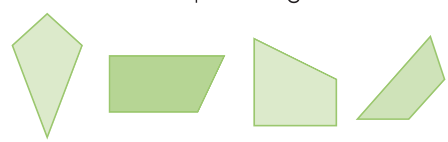
Un ejemplo de actividades que intentan que los estudiantes caractericen las figuras por sus propiedades geométricas (lados iguales, lados paralelos, ángulos rectos, etc.) y no sólo por su forma visual consiste en las que se les pide que discriminen una propiedad a partir de casos particulares. Por ejemplo, para nivel secundaria, Sánchez, Hoyos, Guzmán y Sáiz (2008) sugieren el siguiente problema para que los niños traten de dar una definición de paralelogramo, en lugar de tomarla del texto o que el profesor se las dicte:

a) Observa y responde la pregunta:

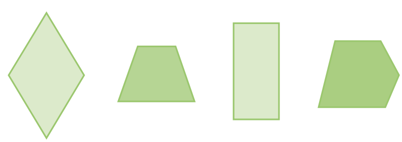
Estos son paralelogramos



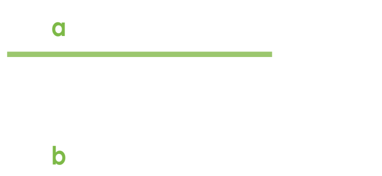
Estos no son paralelogramos



¿Cuáles de las siguientes figuras son paralelogramos?



b) Con los dos segmentos siguientes dibuja un paralelogramo:



c) Define con tus palabras lo que debe entenderse por paralelogramo.

Puede observarse que el problema anterior es apropiado para realizar una actividad del nivel 2, donde intervengan los elementos propuestos por las fases de Van Hiele: información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración. Asimismo, se pueden diseñar problemas similares para ayudar a caracterizar otras figuras.

Aprender a demostrar en matemáticas

Las demostraciones formales se consideran la principal seña de identidad de las matemáticas. Su aprendizaje es un objetivo de los últimos cursos de bachillerato, pero se trata de una actividad compleja, por lo que no puede pretenderse que los estudiantes aprendan a demostrar antes de terminar el bachillerato si no empiezan mucho antes, incluso desde los primeros cursos de primaria. Los profesores deben pedir a sus alumnos que justifiquen sus afirmaciones, que expliquen cómo resolvieron los problemas o por qué es cierto el resultado que obtuvieron; estas justificaciones serán diferentes de las demostraciones formales, pero su objetivo es crear en los estudiantes el hábito de dar y pedir razones para asegurar la veracidad de las afirmaciones que hagan (Gutiérrez, 2007). La investigación didáctica indica que hay varios componentes que configuran la actividad de demostrar y es necesario tenerlos en cuenta al planificar su aprendizaje. Aquí mencionamos sólo los más importantes, pero Mariotti (2006) y Harel y Sowder (2007) ofrecen información sobre los resultados de la investigación en este tema.

El primer objetivo es lograr que los estudiantes entiendan la necesidad de demostrar siguiendo unas reglas previamente aceptadas por la comunidad del salón de clases (Mariotti, 2006). De Villiers (1993) propone la conveniencia de que los estudiantes experimenten diversas funciones de las demostraciones matemáticas, que corresponden a diferentes necesidades de demostrar.

La parte más difícil del proceso de aprender a demostrar es el salto del razonamiento inductivo al deductivo; es decir, pasar de considerar los ejemplos específicos como elementos de convicción a tomarlos como ayudas para elaborar las demostraciones deductivas, pero sin ser parte de ellas.

Una actividad previa a la demostración sugerida para secundaria (o incluso en quinto o sexto de primaria si se modifica adecuadamente) fue realizada por Monaghan (2000) a 24 estudiantes (de 11 a 16 años). Se les pidió responder algunas preguntas como las siguientes:

1. ¿Cuál es la diferencia entre un cuadrado y un rectángulo?
2. ¿Cuál es la diferencia entre un rectángulo y un paralelogramo?

A la primera pregunta cuatro niños respondieron señalando las similitudes y no las diferencias de las dos figuras, como los dos siguientes:

> La diferencia es que el cuadrado tiene cuatro ángulos rectos y en un rectángulo todos los lados opuestos son iguales (Matthew).
>
> Ambos son cuadriláteros y tienen cuatro lados (Chris).

En estos casos el maestro debe hacerles notar que aunque lo que dicen es correcto, mencionan lo que tienen en común las figuras y no las diferencias. Puede entonces pedirles una segunda respuesta o invitarlos a que en equipos las analicen con sus compañeros. Posiblemente, después de la discusión en equipos surjan afirmaciones propias del nivel 1 de Van Hiele, que se enfoquen en la comparación de longitudes de un lado del rectángulo (más larga) y del cuadrado (más corta) o en la cualidad de horizontalidad que adquiere el rectángulo si se coloca sobre uno de sus lados mayores, como sucedió con otros 16 de los niños de la investigación. Por ejemplo:

> La longitud de un cuadrado es más corta que la del rectángulo (Celina).
>
> Un rectángulo tiene los lados opuestos que son iguales. Los de arriba y los de abajo son iguales, y el cuadrado tiene todos los lados y ángulos iguales (Ghalib).

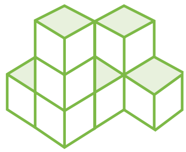
Ante respuestas como la de Celina, la maestra (o el maestro) puede dibujar en el pizarrón un rectángulo pequeño y un cuadrado grande y preguntar: "Con estas figuras, ¿ocurre que la longitud del cuadrado es más corta que la del rectángulo? Como este lado es más corto (señala la base del rectángulo), ¿es este polígono es un cuadrado?". El mismo niño –u otro– puede decir algo como: "No, porque también el rectángulo tiene lados cortos" y así, el docente puede de nuevo intervenir para pedir que alguien responda como lo hizo Celina, la niña del ejemplo: "¿Estás de acuerdo?"

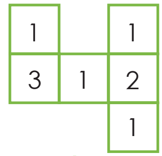
El profesor debe buscar siempre que los alumnos den justificaciones más exactas y usen términos más precisos (fase de explicación), lo que permitirá que en el futuro lleguen a justificar con más precisión sus ideas y sus razonamientos empiecen a ser del nivel superior.

La visualización en el aprendizaje de la geometría

Entendemos por visualización (o imaginación espacial) la actividad mental intelectual que tiene que ver con la creación, el análisis y la transformación de representaciones mentales de conceptos, propiedades o relaciones matemáticos (Gutiérrez, 1996). Krutetskii (1976) y Presmeg (1986) alertan a los profesores acerca de la existencia de tres tipos de individuos según sus preferencias, de uso de la visualización para resolver problemas de matemáticas: *a)* los visualizadores, que prefieren el uso de representaciones visuales; *b)* los analíticos, que prefieren el uso de representaciones simbólicas textuales, y *c)* los armónicos, que usan unas u otras según sea el caso. Las dificultades en el aprendizaje de la geometría de muchos estudiantes están relacionan con formas de enseñanza que inhiben sus preferencias de visualización.

Profesores y libros de texto continuamente usan dibujos, figuras o diagramas en las lecciones de geometría para ayudar a sus alumnos a comprender los conceptos y las propiedades que deben aprender. Sin embargo, con frecuencia los docentes no tienen en cuenta que estos dibujos, estas figuras, etc., que representan objetos geométricos —en particular, si son representaciones planas de cuerpos espaciales— incluyen *codificaciones* que los estudiantes deben aprender a “leer”.


a



b

Figura 3.4

Parzysz (1988) nos recuerda que cualquier representación plana que hagamos de un objeto, o conjunto de objetos espaciales, pierde una parte de la información contenida en los objetos; por ejemplo, al dibujar un sólido opaco, una parte del cuerpo queda oculta. Así, la actividad de introducción a la medida del volumen típica de los textos de primaria, en la que se pregunta a los estudiantes cuántos cubos tiene el sólido de la figura 3.4a, puede tener una o varias soluciones dependiendo del código implícito que usen los estudiantes para saber cuántos cubos están ocultos. Generalmente profesores y libros de texto asumen que la parte oculta no tiene huecos ni protuberancias, y concluyen que el sólido de la figura 3.4a está formado por ocho cubos. Sin embargo, el diagrama de la figura 3.4b, que es una vista superior del mismo sólido con la cantidad de cubos en cada columna, indica que realmente tiene nueve cubos, pues hay un cubo oculto. Estos convenios y formas de representación son parte de lo que los estudiantes deben aprender. Gutiérrez (1998) describe de forma detallada el problema del aprendizaje y uso de diferentes formas de representación plana de objetos 3-dimensionales.

Es un buen ejercicio utilizar este tipo de representaciones de los sólidos en la clase. Primero, a los alumnos se les pueden dar cubos de madera o plástico y un diagrama como el que aparece en la figura 3.4b y pedirles que construyan la estructura señalada en el diagrama. Posteriormente, se les indica que dibujen la estructura que han obtenido con los cubos, vista desde diferentes puntos, para obtener diagramas como el de la figura 3.4a. Después se les sugiere que hagan el proceso inverso; es decir, que construyan una estructura con cubos y dibujen un diagrama como el de la figura 3.4b para que otros compañeros la reconstruyan.

Aprendizaje de la medida de magnitudes durante la educación básica

Desde una perspectiva didáctica, algunos aspectos de las diferentes magnitudes geométricas pueden tratarse de forma conjunta, pues son elementos comunes a todas éstas. Los principales son la conservación de la magnitud por transformaciones, la transitividad de la medida y la concepción de unidad de medida. Es de esperar que estas ideas, una vez tratadas en una magnitud, sirvan de base en el estudio de otras magnitudes (Osborne, 1976), aunque los profesores no deben esperar que sus alumnos hagan estas transferencias fácilmente. Muchos de estos aspectos los estudiaron Piaget, Inhelder y Szeminska (1970) y después otros investigadores que corroboraron los resultados de los primeros. Un resumen de los resultados de Piaget, en torno a las edades en que los niños consiguen la conservación de diferentes magnitudes, lo ofrecen Chamorro y Belmonte (1991:23):

> [...] parece ser que la longitud, capacidad y masa pueden ser comprendidas por niños del intervalo comprendido entre los 6 y 8 años; la noción de superficie y tiempo, hacia los 7 u 8 años, mientras que las de volumen y amplitud angular no podrán ser comprendidas sino hasta los 10 a 12 años.

Aprendizaje de la medida de longitudes

Una de las magnitudes que más se puede trabajar en preescolar, y los primeros años de primaria, es la longitud. Para lo cual se recomienda hacer comparaciones y ordenamientos (en lugar de mediciones) con cualquier tipo de unidades, tanto de objetos de los propios niños como de partes de sus cuerpos. Esto puede resultar interesante y divertido en primero y segundo grados de educación primaria.

Aunque la recomendación de usar unidades e instrumentos no convencionales para el estudio de la longitud se prolonga hasta tercero y cuarto grados, esta determinación no debe ser inflexible. Clements (1999) afirma que, al comparar el de la regla con el uso de un cordel en niños de tercer grado, los resultados fueron casi dos veces mejores cuando usaron la regla.

Nunes, Light y Mason (1993) cuestionan si el uso de los instrumentos de medición convencionales debe relegarse hasta el final de la secuencia tradicional de enseñanza. Para ello se basaron en una investigación que consistió en poner a niños de 6 a 8 años de edad a comunicarse acerca de situaciones de medición "hablando" por teléfono. Cada uno tenía un papel con un segmento de recta dibujado. Ellos jugaban un "juego" cooperativo en el que el objetivo era medir con un objeto, para descubrir si el segmento de recta en sus hojas era más grande, más corto o igual que el de su compañero en el otro lado del teléfono. Había tres situaciones, cada una de las cuales tenía un objeto diferente para medir. En cada caso, los compañeros sabían que tenían objetos idénticos; por ejemplo, si el objeto era un cordón, cada uno contaba con un cordón de la misma longitud que su compañero. A lo largo de las tareas, los segmentos podían ser de la misma longitud que el cordón, el doble, etc. Los compañeros podían usar el cordón y discutir la tarea, tanto como quisieran, hasta determinar si las rectas en sus hojas eran de la misma longitud. En la segunda situación, los niños tenían reglas marcadas en centímetros para determinar hasta dónde podrían usar una regla sin entendimiento. En la tercera situación un niño, en cada pareja, tenía una regla rota que empezaba en el centímetro 4, mientras que el otro tenía una regla normal.

Este último experimento puede llevarse al aula como una actividad relacionada con la medición en tercero y cuarto grados, así el docente puede comparar los resultados con los de los investigadores, mismos que se resumen a continuación.

Como resultado de la investigación se encontró que la regla tradicional respaldó el razonamiento de los niños de manera más eficiente que el cordón, pues su desempeño de los niños fue casi dos veces mejor con la regla. Sus estrategias y el lenguaje ("es tan larga como", "la línea pequeña, después del tres") indicaron que los niños dan "respuestas correctas basadas en procedimientos rigurosos, beneficiándose claramente de la representación numérica en la regla" (Nunes, Light y Mason, 1993: 46). Incluso con la regla *rota* se desempeñaron mejor que con el cordón, mostrando que no sólo estaban "leyendo números". La situación poco común sólo confundió a los niños alrededor de 20% de las veces. Los investigadores concluyeron que las unidades convencionales ya dadas en la regla no hacen más difícil la medición. De hecho, los niños se beneficiaron de la representación numérica aun con la regla rota.

En el caso de alumnos de secundaria, medir, comparar y usar la medición de longitudes con unidades e instrumentos convencionales y no convencionales no representa mayor problema. Los problemas en este nivel surgen con la introducción de otros conceptos, como perímetro y área, pues los estudiantes los confunden con frecuencia (Corberán, 1996; Furinghetti y Paola, 1999). Se ha reportado que alumnos de 7°. grado (primero de secundaria en México) creen que existe una relación directa entre área y perímetro; esta creencia parece más resistente al cambio que la confusión misma entre área y perímetro (Moreira y Contente, 1997). Un ejercicio para superar este tipo de confusión que puede realizarse con los alumnos es construir rectángulos diferentes que tengan como perímetro, por ejemplo, 12 cm. Después se les solicita que calculen las áreas de todos los cuadriláteros que construyeron y que comparen y discutan los resultados. Algunos niños puede haber construido un rectángulo de 5 por 1 cm, otros uno de 4 por 2 cm, algunos más pueden haber dibujado un cuadrado de 3 cm de lado. Las áreas de todos estos rectángulos son distintas. Al hacer los cálculos y comparar muchos niños y niñas pensarán incluso que han equivocado los cálculos, porque para ellos una vez determinado el perímetro el área también queda fija.

Aprendizaje de la medida de áreas

El estudio del concepto de área inicia en México desde el tercer grado y, al igual que en la mayor parte del mundo, no se plantea en grados anteriores. En consecuencia, no hay muchas investigaciones qué reportar sobre este concepto en estos niveles; sin embargo, Outhred y Mitchelmore (2000) llevaron a cabo un estudio con 115 niños de 1° a 4° grados de primaria en Australia. Su objetivo era conocer sus ideas intuitivas sobre este concepto, ya que en ese país su estudio comienza hasta 4° grado. El estudio consistió en entrevistar a estos niños proponiéndoles algunas tareas de medición. La primera consistió en entregar a cada niño una unidad movible: un mosaico cuadrado de 2 cm de lado y una hoja en la que aparecía dibujado un cuadrado de 8 cm de lado y se les pidió que respondieran cuántos mosaicos unidad se requerían para cubrir el cuadrado en el dibujo. En la tabla 1 se muestran los resultados obtenidos por los niños al usar diferentes estrategias.

Tabla 1. Resultados de la primera tarea.

Alumnos que obtienen respuesta →	Correcta	Incorrecta
Estrategias ↓	%	%
Mueven el mosaico y cuentan, pero no sistemáticamente y no logran cubrir el cuadrado.	0	27
Hacen un recubrimiento visual de la superficie a medir.	1	6
Mueven el mosaico sistemáticamente y cuentan hasta cubrir el cuadrado.	32	14
Usan la regla para medir el mosaico unidad, con la medida hacen marcas en el cuadrado grande y multiplican los resultados obtenidos.	18	2

En la segunda tarea se dio a los niños una hoja en la que aparecía dibujado un mosaico cuadrado de 1 cm de lado como unidad y un rectángulo de 6 cm por 5 cm, se pidió a los niños decir cuántos mosaicos se requerían para cubrir el rectángulo. La diferencia fundamental con la tarea anterior fue que ahora el mosaico unidad no se podía mover. Los resultados obtenidos y las estrategias utilizadas en esta tarea se muestran en la tabla 2. Ambas tareas pueden aplicarse en el aula con niños de 3° y 4° grados.

Tabla 2. Resultados de la segunda tarea.

Alumnos que obtienen respuesta →	Correcta	Incorrecta
Estrategias ↓	%	%
Hacen un recubrimiento del rectángulo dibujando las unidades pero de forma incompleta.	0	11
Hacen un arreglo de cuadritos completo pero las unidades no son del mismo tamaño ni hay la misma cantidad de unidades por renglón.	0	9
Hacen un arreglo de cuadritos pero no lo relacionan con la unidad.	2	29
Miden en una dimensión y de la otra hacen una estimación, después cuentan por renglón.	1	17
Miden en dos dimensiones y hacen una suma repetida o una multiplicación.	27	4

Aprendizaje de la medida de volúmenes

En México, el estudio del volumen se inicia en 5° y 6° de primaria, y así es también en la mayoría de países, por lo que no existen estudios centrados en este concepto con niños de grados anteriores. En cambio, se puede constatar que la noción de capacidad en algunos países se estudia antes que la de volumen. No deben confundirse estos conceptos, aun cuando estén relacionados. Piénsese que cualquier objeto es susceptible de ser medido en relación con su volumen, pero no en cuanto a su capacidad, magnitud reservada a los recipientes, cajas, etcétera.

Potari y Spiliotopoulou (1996) llevaron a cabo un estudio con 38 niños de 5° de primaria en Grecia. Encontraron que algunas características físicas de los objetos, tales como estar cerrado o abierto, ser sólido o hueco, estar lleno o vacío afectan las concepciones de los alumnos acerca del concepto de volumen. Este estudio pone en evidencia que la noción de volumen es rica en significados y asociaciones y apunta hacia las dificultades de su conceptualización. Parte de la investigación de los autores consistió en mostrar a los niños el dibujo de una copa de cristal vacía y preguntarles: "¿Qué es el volumen de la copa?". Luego se les mostraba otro dibujo de la misma copa, pero llena de agua y de nuevo se les preguntaba sobre el volumen.

Tabla 3. Respuestas a ¿qué es el volumen de la copa?

Respuesta	Copa vacía	Copa llena	
Espacio ocupado	12	Agua	6
		Cristal	4
		Cristal y agua	2
Capacidad	9	Capacidad	6
		Cristal	3
Cristal	4	Agua (capacidad)	3
		Cristal y agua	1
Otras	13	No clasificadas	

La tabla 3 muestra la frecuencia de las respuestas. En el caso de la copa vacía hubo 4 tipos de respuestas. Cuando se pregunta por la copa llena, algunos niños cambian de opinión respecto a lo que es el volumen de la copa; por ejemplo, de los 12 que responden (con relación a la copa vacía) que el volumen es el espacio ocupado por la copa, 6 piensan que el volumen de la copa llena es el agua que contiene, 4 que el cristal y 2 que el cristal con el agua.

El que el material, el peso o el hecho de estar cerrado, abierto, ser sólido o hueco influyan en las concepciones de los alumnos sobre el concepto de volumen, llevó a los autores a sugerir que algunos conceptos matemáticos, como el volumen, deben enseñarse junto con la materia de Ciencias. Queda claro que el volumen es difícil de conceptualizar y debe trabajarse continuamente desde la primaria hasta el bachillerato.

En la primaria es preferible que los alumnos se enfrenten sólo a problemas en los que no sea necesario cuantificar, pero en que el volumen se presente en contextos diferentes que los lleven a observar que es una magnitud que tiene muchas interpretaciones. Por ejemplo, un problema que se puede plantear a los niños es uno en que se requiera calcular el volumen de una misma taza en tres casos distintos: *a)* para saber cuánto barro necesita un alfarero para hacerla; *b)* para conocer cuál es su capacidad; y *c)* para entender si es posible acomodar, por decir algo, cuatro de estas tazas en una repisa o un mueble.

Cálculo de medidas y razonamiento proporcional

Un problema común en el aprendizaje de áreas y volúmenes es el error de aplicar la proporcionalidad directa para calcular el área o el volumen conociendo las proporciones de las magnitudes lineales; por ejemplo, si alguien con este problema sabe que el área de un cuadrado de lado 2 es 4, entonces cree erróneamente que el área del cuadrado de lado 4 es 8. De Bock, Van Dooren, Verschaffel y Janssens (2001) propusieron a estudiantes de secundaria el siguiente problema:

> Un pintor de publicidad necesita 5 ml de pintura para hacer un dibujo de Santa Claus de 40 cm de alto en el aparador de una tienda. ¿Cuánta pintura requerirá para hacer un Santa Claus de la misma forma, pero que mida 120 cm de alto?

Este problema se aplicó a los estudiantes en tres fases sucesivas. En la primera se les pidió que lo resolvieran. En la segunda se les mostraron respuestas correctas e incorrectas de supuestos compañeros con variadas explicaciones para que las analizaran y respondieran nuevamente al problema, ratificando su respuesta anterior o rectificándola. En la tercera fase se les explicó el razonamiento correcto que había llevado a sus supuestos compañeros a elegir la respuesta correcta (sin decirles que esa era la respuesta correcta).

La cantidad de alumnos que dieron la respuesta correcta en cada fase de acuerdo con el grupo de edad se muestran en la tabla 4.

Tabla 4. Resultados en las tres fases.

Grupo de edad	Núm.	Fase 1	Fase 2	Fase 3
12-13 años	18	0	0	3
15-16 años	23	0	1	7

Como se ve, del primer grupo de edad sólo la sexta parte cambió su respuesta y lo hizo sólo hasta la tercera fase. Del segundo grupo sólo uno de 23 estudiantes cambió en la segunda fase y en la tercera alrededor de 30%. La creencia errónea de que el volumen y el área tienen una relación de proporcionalidad directa con sus dimensiones lineales (largo, ancho, alto) se presenta incluso en adultos. Por lo tanto, debe trabajarse a todos niveles de la educación básica y de preferencia con apoyo de material concreto para que los estudiantes perciban y tengan una representación realista de las relaciones involucradas.

El problema que se ha mostrado como ejemplo puede ser utilizado por los maestros tal y como se presenta aquí. El problema también puede modificarse usando otra figura, como una pintura o una imagen trazada en papel.

Para el volumen se pueden realizar paralelepípedos con cartulina y después duplicar todas sus dimensiones lineales. Construir el nuevo paralelepípedo es una tarea que muestra de manera tangible que el volumen aumenta ocho veces, y no dos o cuatro como muchos alumnos piensan inicialmente.

4. Manejo de la información

Ernesto Sánchez, Cinvestav, México
Carmen Batanero, Universidad de Granada, España

Este capítulo se divide en tres apartados, a saber: *a)* Datos, gráficas y medidas de tendencia central; *b)* Azar y probabilidad; y *c)* Relaciones de proporcionalidad. En los programas de secundaria estos tres grandes temas configuran el eje Manejo de la Información.

Datos, gráficas y medidas de tendencia central

La estadística ha jugado un papel primordial en el desarrollo de la sociedad moderna al proporcionar herramientas metodológicas generales para recopilar y organizar todo tipo de datos; describir y analizar su variabilidad, determinar relaciones entre variables; diseñar en forma óptima estudios y experimentos, y mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Es por esto que en muchos países, incluyendo México, se incorpora la estadística en los currículos de los diferentes niveles escolares, desde el básico hasta el universitario. Además de su utilidad, se reconoce la necesidad de un razonamiento estadístico en una sociedad caracterizada por la disponibilidad de información y de toma de decisiones en ambientes de incertidumbre.

Problemática de la didáctica de la estadística. Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos (1994) resumieron los principales errores y dificultades que los estudiantes encuentran en las ideas estadísticas elementales, y hacen la observación de que tales dificultades no se presentan de un modo aleatorio o imprevisible, sino que es posible encontrar regularidades y asociaciones con variables de las tareas propuestas. Ben-Zvi y Garfield (2004) explican algunas de estas dificultades con base en el desconocimiento que los estudiantes tienen de las matemáticas que subyacen tras los conceptos y procedimientos estadísticos (fracciones, decimales, proporcionalidad y porcentajes, fórmulas algebraicas). Además, no están acostumbrados a trabajar con datos de situaciones reales que, con frecuencia, requieren interpretaciones y razonamientos de alto nivel. La aleatoriedad de las situaciones conlleva que los resultados no sean únicos, presentándose una mayor variabilidad que en otras áreas de las matemáticas. Por otro lado, la enseñanza de la estadística no ha tenido en cuenta la especificidad de la materia y se reduce a la exposición de algunas definiciones y a la reproducción de procedimientos algorítmicos, lo que con frecuencia crea en los estudiantes una fobia hacia la materia, pues les resulta irrelevante y aburrida. Como consecuencia, los conocimientos y la cultura estadística de la población, son insuficientes para enfrentar los requerimientos de, y desenvolverse adecuadamente en, la actual sociedad de la información (Gal, 2002).

Los investigadores en educación estadística han estudiado estos problemas y ofrecen explicaciones y posibles soluciones a algunos de ellos (por ejemplo: Shaughnessy, 1992, 2007; Shaughnessy, Garfield y Greer, 2006; Jones, Langrall y Mooney, 2007). Para evitar el aprendizaje fragmentado de los conceptos estadísticos se propone llevar a cabo en las aulas proyectos estadísticos (Li y Shen, 1992; Batanero y Díaz, 2004) con los que se espera que los estudiantes: *a)* identifiquen un tema de estudio y formulen una(s) pregunta(s); *b)* coleccionen un conjunto de datos relevantes para el tema en estudio; *c)* analicen los datos e interpreten los resultados en función de la pregunta planteada; y *d)* escriban un informe del proyecto. Una idea importante en esta propuesta es que, como veremos a lo largo del capítulo, se pueden diseñar proyectos estadísticos para trabajar en clase desde el preescolar, a diferencia de lo que ocurría en el pasado que sólo se concebía para niveles superiores; otra, es que los proyectos pueden ubicarse en contextos y situaciones propias de otras materias del currículo (biología, ciencias sociales, educación física o para la salud, etcétera).

Los investigadores también se han preocupado por entender cómo razonan los estudiantes, y cómo pueden mejorar sus razonamientos, acerca de, y con, conceptos específicos de la estadística. Las investigaciones revelan que detrás de nociones —algunas veces de apariencia sencilla— se esconde una gran complejidad que surge cuando las nociones deben manejarse de manera pertinente en diversos problemas y contextos. Es necesario que los profesores conozcan y manejen tal complejidad para que puedan mejorar su enseñanza. En las siguientes secciones presentaremos algunos ejemplos que muestran conocimientos sobre cómo se razona con ideas estadísticas y para la enseñanza.

Recopilación de datos y elaboración de gráficas

Preescolar. La enseñanza de la recopilación de datos y la lectura y construcción de gráficas sencillas debe iniciarse desde muy temprano, pues es una parte importante de la competencia estadística (Gal, 2002). Esta aspiración es consistente con el hecho de que los niños pequeños tienen mucho interés en la información sobre diversos aspectos de su ambiente. Una vez que saben hablar y dibujar, también son capaces de llevar a cabo proyectos sencillos, que requieren coleccionar y registrar datos, procesarlos y resumirlos. Schwartz y Whitin (2006) mostraron estas capacidades en los niños del kinder (4 años), quienes, con ayuda de la maestra, inventaron sus propias preguntas e hicieron una encuesta a sus compañeros de grupo.

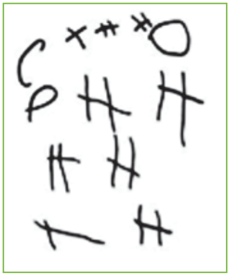
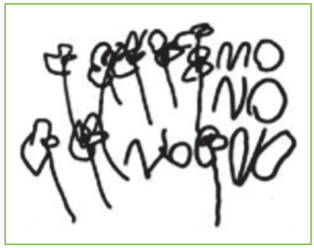




Figura 4.1. Representaciones de datos realizadas por niños de kinder (Schwartz y Whitin, 2006).

Los autores informan que los niños trabajaron en proyectos sencillos relacionados con sus experiencias o las lecciones vistas en la clase, formulando preguntas como: ¿Te sabes anudar las agujetas de los zapatos?, ¿Has sembrado flores en un jardín? Además, inventaron formas de llevar los registros de las respuestas de sus compañeros, generalmente con dibujos; se muestran tres ejemplos en la figura 4.1. Una vez terminada la encuesta y registrados los datos, los niños fueron capaces de responder las preguntas de la profesora acerca de los resultados obtenidos, leyéndolos en sus propias representaciones.

Primaria. En este nivel comienza el trabajo con gráficos estándar (pictogramas, gráficas de barras, etc.); por ejemplo, Taylor (1997) describe una experiencia con niños de 2º grado de primaria, que trabajan un proyecto de la clase de ciencias. Los alumnos clasificaron distintas piedras (o pedazos de roca) que les proporcionó el profesor, de acuerdo con ciertos atributos: color, textura (rugosa o suave, rayada o no), etc., y pesaron las piedras con ayuda de una báscula y unidades de peso dadas por el profesor (ganchitos de ropa). La tarea consistió en anotar la información sobre cada piedra en un registro, como el de la figura 4.2, de modo que al leer los datos de cada piedra se pudiera identificar exactamente. Cada niño debía llenar una fila de la tabla indicando los valores de los atributos de las piedras que estudió.

Nombre del alumno	Color de la piedra	¿Tiene rayas?	¿Tiene brillantitos?
¿Es suave?	**¿Es rugosa?**	**¿Cambia de color con el agua?**	**¿Cuánto pesa?**

Figura 4.2. Tabla para registrar la información sobre un conjunto de piedras.

El profesor también les proporcionó una tira con figuras estampadas de ganchitos de ropa para que los niños recortaran tantas figuras como unidades pesaba la piedra para formar un pictograma y luego pasar a la gráfica de barras que indicaba los pesos de las rocas.

Curcio (1987) estudió, con alumnos de 4° grado de primaria a 1° de secundaria, el efecto que, sobre la comprensión de las relaciones en los gráficos, tienen los siguientes factores: *a)* conocimiento previo del tema al que se refiere el gráfico; *b)* conocimiento previo del contenido matemático del gráfico, esto es, los conceptos numéricos, las relaciones y operaciones contenidas en el mismo; y *c)* conocimiento previo del tipo de gráfico empleado (gráfico de barras, pictograma, etcétera).

Secundaria. Bright y Friel (1998) realizaron un estudio para explorar la forma en que una muestra de estudiantes de 6° grado de primaria y 1° y 2° de secundaria interpretan las gráficas 1 y 2, además, de cómo establecen relaciones entre ellas. Las ideas de este estudio pueden utilizarse para elaborar un proyecto cuyo objetivo sea investigar el tamaño de las familias de los alumnos en clase. En esta gráfica, los datos aparecen desagrupados, conservando el nombre de cada alumno, junto con el número de hijos en su familia; por ejemplo, se observa que hay dos estudiantes (Karina y Susy) que en su familia, hay sólo un hijo o una hija, mientras que en la de Guillermo hay ocho hijos (hombres y mujeres).

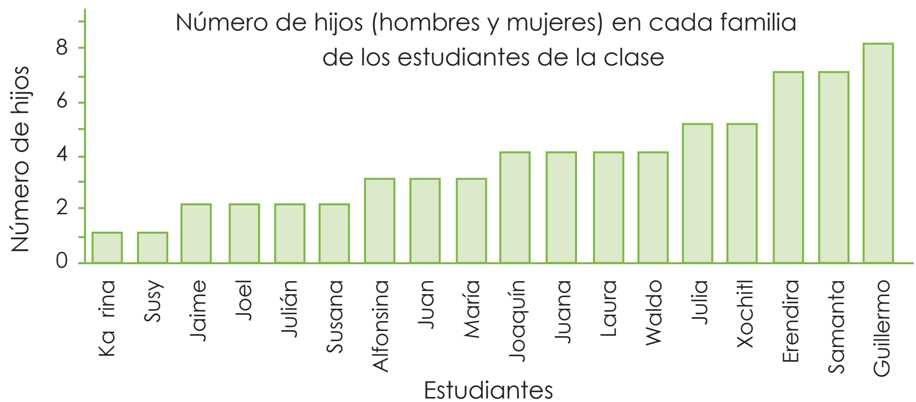


Figura 4.3. Gráfica de estudiantes vs. número de hijos en la familia.

Agrupando los datos y omitiendo el nombre de los estudiantes se obtiene una gráfica de frecuencias (figura 4.4) donde el eje horizontal representa el número de hijos en la familia y el vertical el de familias (frecuencia) que tienen ese número de hijos.

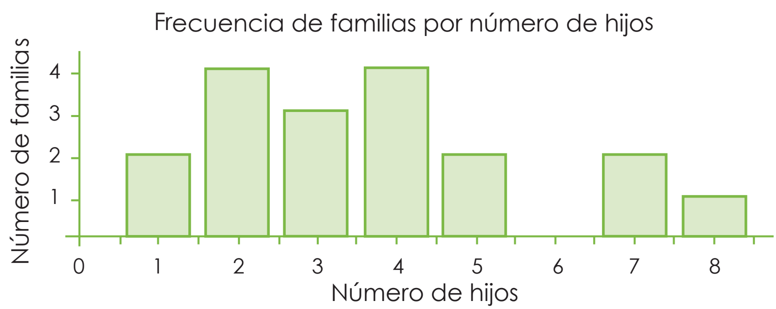


Figura 4.4. Gráfica de número de hijos vs. número de familias.

Los autores presentan fragmentos de entrevistas realizadas a cuatro estudiantes de 2º de secundaria, antes y después de sesiones de enseñanza. Durante las entrevistas aprendieron a pasar de gráficas no agrupadas a gráficas agrupadas. Las siguientes preguntas, 1, 2 y 3, referidas a la gráfica de datos agrupados (Figura 4.4) les resultaron difíciles a los estudiantes:

1. ¿Qué representan la primera y la segunda barra en la gráfica de la figura 4.4?
2. ¿Cuántos estudiantes había en el grupo?
3. ¿Cuántos hijos (mujeres y hombres) hay en total en las familias de los estudiantes del grupo?

Los autores concluyeron que, aunque los estudiantes conocen las gráficas, les resulta muy difícil obtener de ellas la información pertinente para responder preguntas que requieren un conocimiento más profundo.

Para interpretar los resultados de exploraciones sobre lectura y elaboración de gráficas, es importante notar que la competencia exigida a los estudiantes no es siempre la misma, pues es posible plantear preguntas sobre los gráficos de diferente nivel de dificultad; esta observación ha llevado a definir niveles de comprensión de las gráficas; Friel, Curcio y Bright (2001) proponen los siguientes:

- *Leer los datos.* Consiste simplemente en poner en relación un elemento de un eje con el de otro eje, por ejemplo, responder a la pregunta: "¿Cuántas familias tienen un hijo?", en la gráfica de la figura 4.4.
- *Leer entre los datos.* Cuando se es capaz de percibir en el gráfico una relación entre dos subconjuntos de datos; por ejemplo, determinar visualmente la moda de una distribución en un diagrama de barras. Las preguntas 2 y 3 en la investigación de Bright y Friel corresponden a este nivel, pues una vez leídos los datos de las barras los estudiantes tienen que operar con ellos.

- *Leer más allá de los datos.* Comparando tendencias o agrupamientos y efectuando predicciones; por ejemplo, comparar el número más frecuente de hijos en las familias de los niños y en las de las niñas, o conjeturar acerca del número de miembros en la familia de un nuevo estudiante que se incorporará al grupo.

Además de las competencias de lectura de los gráficos, es importante considerar el desarrollo de éstas en la construcción de gráficos y los errores más frecuentes que cometen los alumnos. Monroy (2008) enumeró una serie de errores frecuentes de los estudiantes cuando grafican, que son un conjunto de datos que se pueden clasificar en tres categorías: *a)* no considerar ni representar las frecuencias de los datos; *b)* inversión de los ejes; y *c)* problemas de escala. Un ejemplo de la primera categoría ocurre cuando los estudiantes representan cada valor con una barra proporcional a su magnitud en un tipo de gráfica no-agrupada. La inversión de los ejes se presenta tanto en gráficas con poca elaboración como en aquellos que identifican varias de sus características y los problemas de escala también son diversos. Los problemas de escala son muy diversos, por ejemplo, Li y Shen (1992) reportan los siguientes: *a)* elegir una escala inadecuada para el objetivo pretendido (por ejemplo no se cubre todo el campo de variación de la variable representada); *b)* omitir las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos; *c)* no especificar el origen de coordenadas; y *d)* no proporcionar suficientes divisiones en las escalas de los ejes.

El tema de datos y gráficas es muy importante en el currículo de primaria y secundaria y tiene una alta complejidad. Para una buena enseñanza del tema conviene que el profesor promueva proyectos estadísticos con sus estudiantes.

Medidas de tendencia central y dispersión

Primaria y secundaria. Strauss y Bichler (1988) exploran la comprensión, por parte de alumnos de primaria y secundaria (8 a 14 años), de siete propiedades de la media aritmética. Todos los alumnos del estudio sabían calcular la media aritmética y, en la fase de instrucción, se les entrenó en la solución de problemas que requerían calcularla, pero sin implicar las propiedades. La tarea 1 se refiere a la propiedad "La media aritmética se localiza entre sus extremos".

> **Tarea 1.** Los niños en una clase decidieron dar una fiesta en la playa. Todos llevaron papas para poner al fuego y comer durante la fiesta. Yael llevó 3 papas, y aportó la mayor cantidad. Cuando estuvieron listos para comer, decidieron reunir las papas que todos llevaron y repartirlas equitativamente. Una vez que se repartieron cada niño recibió 4 papas. ¿Piensas que esto pudo haber ocurrido? ¿Por qué piensas que sí pudo (o no pudo) haber ocurrido? (Strauss y Bichler:69).

La tarea 2 se refiere a la propiedad "La media aritmética es representativa del conjunto promediado".

> **Tarea 2.** Para una fiesta del grupo, Ruth llevó 5 dulces, Yael 10, Nadav 30 y Ami 25. ¿Podrías decir con un solo número cuántos dulces llevó cada uno?

Del análisis de las respuestas concluyeron que hay un progreso significativo conforme aumenta el grado que cursan los estudiantes. En general, tienen mejor desempeño en las propiedades: A: "La media aritmética se localiza entre sus extremos"; C: "La media aritmética de un conjunto se modifica cuando otro valor distinto de la media se añade al conjunto", y D: "La media aritmética no necesariamente es igual a alguno de los valores promediados". En cambio, su desempeño fue bajo en las tareas que evalúan las propiedades: B: "La suma de las desviaciones de cada valor respecto a la media es igual a cero"; F: "Un dato igual a cero debe tenerse en cuenta al calcular la media aritmética", y G: "La media aritmética es representativa del conjunto promediado". La propiedad E: "La media aritmética puede ser una fracción sin contraparte en la realidad física" no pudo evaluarse con claridad. Estos resultados pueden considerarse en el diseño de la enseñanza, buscando que cada propiedad se aborde en clase de acuerdo con su dificultad.

Por otro lado, Pollatsek, Lima y Well (1981) exploraron cómo razonan estudiantes universitarios frente a problemas de medias ponderadas, al proponerles el siguiente:

> Hay 10 personas en un elevador, 4 mujeres y 6 hombres. El peso promedio de las mujeres es de 50 kg y el de los hombres de 70 kg. ¿Cuál es el peso promedio de las 10 personas del elevador? (Pollatsek *et al*., 1981:195).

Constataron que muchos estudiantes universitarios fallan en dar la respuesta correcta, porque más de 60% fueron incapaces de calcular correctamente la media aritmética para este problema. Concluyeron que la dificultad se presenta porque el conocimiento de la media aritmética se reduce sólo al cálculo de "sumar cantidades y dividirlas entre el número de éstas", sin un conocimiento funcional; es decir, sin una comprensión significativa de la media aritmética.

Watson y Moritz (2000) estudian la forma en que los niños de diferentes edades comprenden el concepto de "promedio" y su uso en situaciones de la vida diaria. Realizaron entrevistas a alumnos de 3° y 6° grados de primaria y de 3° de secundaria en las que plantean preguntas como: "¿Habías escuchado antes la palabra "promedio"? ¿Qué significa para ti?"; "En promedio, las familias australianas tienen 2.3 niños. Explica qué significa para ti esta frase"; "Supongamos que 10 familias tienen, en promedio, 2.3 niños; de ellas, la familia Grant tienen 4 y la familia Cooper 1, ¿cuántos hijos podrían tener las restantes 8 familias?". Con base en las respuestas recibidas, identificaron seis niveles de comprensión de los promedios:

- *Nivel pre-promedio*. Los niños no usan ningún término de promedio y sólo imaginan historias con cierta relación sobre el contexto de la pregunta.
- *Uso coloquial de un promedio*. Utilizan términos como *es normal* o *es okey*. Imaginan ideas relacionadas con el contexto para apoyar sus respuestas; por ejemplo, a partir de la pregunta responden historias como: *"Que tienen dos niños grandes y*

otro que no ha crecido todavía", "el .2 es un niño que tiene 2 años ahora y cuando cumpla 10, contará como 1 y entonces el número promedio de niños será 3".

- *Estructura múltiple del promedio*. Manejan dos o más ideas como *el más común, el de en medio y, en ocasiones, el algoritmo* al describir un promedio.
- *Representación con promedio*. Se refiere directamente al algoritmo de la media en relación con las situaciones. Además, son conscientes de que la forma decimal de una media es consecuencia del algoritmo y expresan alguna idea sobre la naturaleza de la media como representante de un conjunto.
- Los estudiantes también son capaces de aplicar su conocimiento de la media a situaciones complejas, como completar un conjunto de valores para obtener una media dada o calcular una ponderada, pero no ambas.
- Hacen todo lo anterior incluyendo las dos últimas tareas mencionadas.

Varias de las dificultades que se observan en los estudios con niños pequeños se vuelven a encontrar de manera ligeramente distinta con estudiantes de bachillerato e incluso universitarios. Por ejemplo, Mayén (2009) hizo un estudio con alumnos de secundaria y bachillerato en México retomando preguntas de investigaciones anteriores. Sólo 52% de los estudiantes de secundaria y 80% de los de bachillerato respondió correctamente a la pregunta: "Un periódico dice que 2.2 es el número medio de hijos por familia en México. Explica qué significa para ti esta frase". Al pedirles un ejemplo concreto de distribución de 10 familias para obtener un número medio de 2.2 hijos, el número de respuestas correctas dadas por los estudiantes de bachillerato bajó a 56%. Otra gran dificultad fue estimar la media (mediana) a partir de una gráfica (véase figura 4.5), pues sólo hubo 56 aciertos de secundaria (27%) y 66 en bachillerato (34%).

Ítem 9. Observa el siguiente diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos, de la empresa Bocatta, durante los últimos seis meses del año pasado.
Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.
Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vende al mes.

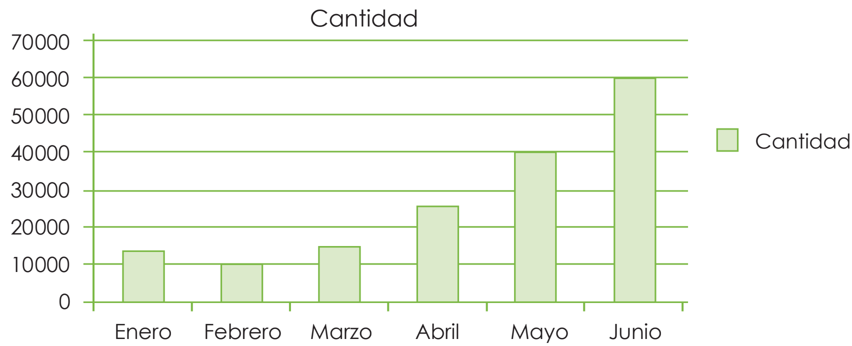


Figura 4.5. Pregunta sobre media y mediana en Mayén y otros (2008).

Respecto a la comprensión de la mediana, los alumnos entienden que ésta es el centro de "algo", pero no siempre comprenden a qué se refiere ese "algo". Cobo y Batanero (2000) aplicaron la siguiente tarea a estudiantes de 14 y 15 años de edad:

> El peso en kilogramos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano? ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 kg?

Para resolverla, se ordenan los datos y se toma el elemento central aplicando directamente la definición de mediana: se obtiene 19; al agregar el dato 43 también se obtiene 19. Pero algunos niños dieron como mediana el valor 16 en la primera parte y 21 en la segunda, tomando como mediana el valor central de la serie sin ordenar los datos. Otros alumnos dieron como mediana el valor central del rango; es decir $\frac{15 + 26}{2}$, para el primer apartado y $\frac{15 + 43}{2} = 29$ para el segundo.

Muchos profesores suelen creer que la enseñanza de las medidas de tendencia central consiste en promover el aprendizaje de sus definiciones y de los procedimientos para obtenerlas, descuidando sus propiedades y significados. Es probable que esa sea la razón del bajo desempeño que tienen los estudiantes en problemas como los antes mencionados. Para lograr mejores resultados en la enseñanza del tema, al igual que en el caso de las gráficas, es conveniente diseñar la enseñanza del tema de medidas de tendencia central, mediante la organización de proyectos estadísticos en los que la obtención y el uso de estas medidas le resulte significativo a los estudiantes.

Dispersión y *variabilidad* son conceptos poco explorados en los niveles básicos, aunque Shaughnessy (2007) resalta la necesidad de trabajar con la idea de variabilidad desde edades tempranas a fin de que los alumnos adquirieran una formación conveniente en estadística, aunque en realidad es poco lo que se hace con ese concepto durante toda la educación básica.

En el programa de estudio de secundaria de 2º grado (SEP, 2006:61) aparece el subtema "Medidas de tendencia central y de dispersión"; sin embargo, los apartados de "conocimiento y habilidades" y "orientaciones didácticas" no contienen ningún comentario explícito sobre la dispersión. No obstante, el contexto del clima en que se ubica la situación de la orientación didáctica resulta favorable para el tratamiento de la variabilidad. Esto se muestra en un trabajo de Watson (2006), quien trabajó con estudiantes de 3º, 6º y 9º grados, formulándoles la siguiente pregunta:[2]

> Algunos estudiantes observaron el registro de las temperaturas diarias durante un año en la ciudad de Toluca y encontraron que la máxima promedio anual es de 18.5ºC. ¿Qué nos dice esta información acerca de las temperaturas en Toluca?

La autora describe cuatro niveles de comprensión de la variabilidad en las respuestas de los estudiantes. En el nivel más elemental (0), los estudiantes comprenden algo el significado de promedio, pero no en su sentido de representante de un conjunto de datos que varían; por ejemplo: "que no es tan probable que el clima sea muy caliente", "es algo fresco". En el nivel intermedio (1) comparan la temperatura con la de otros lugares; por ejemplo: "No es tan caliente como en Colima (32ºC) ni tan frío como en la punta del Nevado de Toluca" o "Es razonablemente

[2] Adaptada al contexto mexicano.

fresco —no tanto como en otros países donde nieva, ni tampoco muy caluroso como en Tabasco". En el nivel más alto, las respuestas que dan consideran la variabilidad de las temperaturas: "La temperatura normalmente oscila alrededor de los 18.5ºC", "No es muy caluroso; muchas veces la temperatura alcanza los 18.5ºC".

Watson muestra el tipo de respuestas que se presentan a fin de considerar la variabilidad de manera correcta al interpretar un promedio como resultado de valores que fluctúan alrededor de él, idea que es muy importante en estadística y conviene trabajarla en la clase.

Azar y probabilidad

Cuando se le pregunta a un profesor cómo cree que deben trabajarse en el aula los temas de probabilidad sugeridos en los programas, es muy probable que responda que con la ayuda de juegos de azar, como monedas, dados, ruletas y urnas. Sin embargo, como muestra Salinas (2007), a veces no saben qué hacer exactamente con los juegos de azar de manera que emerjan los conceptos que marca el programa (SEP, 2006) ni cómo los estudiantes llegan a aprenderlos. La investigación relacionada con este tema es muy amplia, como se muestra en el libro recientemente editado por Jones (2005), pero por razones de espacio sólo describimos algunos ejemplos, remitiendo a Batanero y Sánchez (2005) para la descripción de las dificultades específicas de los estudiantes de secundaria en el tema.

Al iniciar el estudio de la probabilidad se debe insistir en que los niños sean capaces de distinguir las situaciones aleatorias y las deterministas. Piaget e Inhelder (1951) defendieron que los niños concebirían el azar como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas que, actuando independientemente, producirían un resultado inesperado. En consecuencia, pensaron que hasta que el niño no comprende la idea de causa, no tiene un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios. Un experimento piagetiano clásico utiliza una bandeja con compartimentos en los extremos (figura 4.6); en uno de los lados se ponen ocho bolas blancas y en el otro ocho negras, de modo que al bascular la bandeja se produce la mezcla progresiva de las dos clases de bolas. Antes de mover la bandeja, Piaget pide a los niños que hagan una predicción sobre la posición final de las bolas. El niño de preescolar (*preoperacional*) piensa que —después de mover varias veces la bandeja— las bolas vuelven a su lugar original, o bien que el conjunto completo de blancas acabará en el lugar ocupado originalmente por las negras, y viceversa. Piaget interpreta esta reacción típica antes de los 7 años de edad, indicando que el niño no comprende la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria por tener un pensamiento reversible. Además, a esa edad el niño no comprende bien la relación entre causa y efecto, ni tiene razonamiento combinatorio completo; en consecuencia Piaget concluye que no hay una intuición del azar innata en el niño, como no existía tampoco en el hombre primitivo, que atribuía los sucesos aleatorios a causas ocultas o a la "voluntad de los dioses".

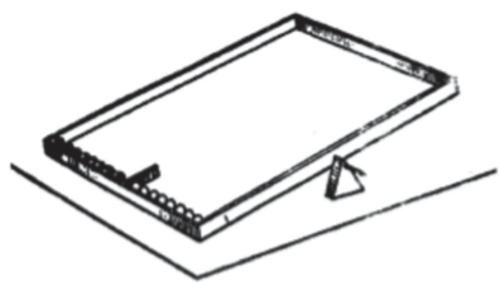


Figura 4.6. El experimento de la bandeja: al mover la bandeja, las bolas, que al principio están ordenadas, se mezclan progresivamente.

En el periodo de las *operaciones concretas* (a partir de 7 años de edad), con la adquisición de esquemas operacionales lógico-matemáticos, el niño alcanza la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, aunque esta comprensión no es completa, porque el pensamiento todavía está muy ligado al nivel concreto. En los fenómenos aleatorios los resultados aislados son impredecibles, pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve predecible. Cuando se comprende esto aparece la idea de probabilidad expresada por el cociente de las posibilidades de un caso particular entre el conjunto total de posibilidades. Por tanto, la idea de azar, para Piaget, lo mismo que la de probabilidad, no puede ser totalmente adquirida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio; esto es, en la etapa de las *operaciones formales*, alrededor de la edad en que se inicia la educación secundaria. Fischbein (1975) rechazó esta opinión de Piaget porque para él la intuición primaria del azar, esto es, la distinción entre fenómenos aleatorios y deterministas, aparece incluso antes de los 7 años de edad. Además, se basa en la conducta de los niños al practicar juegos de azar, ya que en juegos sencillos, son capaces de elegir la opción de mayor probabilidad: también opina que la instrucción es necesaria para que se desarrolle de una forma completa.

El espacio muestral es una de las ideas fundamentales descritas por Heitele (1975) para el razonamiento probabilístico; implica reconocer que en las experiencias de azar hay diferentes posibilidades de obtener un resultado, generar todas la posibilidades de manera sistemática y exhaustiva, así como observar la relación entre el espacio muestral y la distribución de los resultados. Benson y Jones (1999) exploraron la simulación como un recurso para que los niños desarrollaran esta noción. Los instrumentos o generadores aleatorios que utilizaron son: volar una moneda, lanzar un dado, extraer una bola de una urna con diferentes proporciones de bolas de color, etc. En seguida se muestran dos problemas que usaron estos autores en los que invitan a los niños a buscar una forma de simularlo (sustituir el experimento real por un dispositivo aleatorio que genere los mismos resultados):

> Seis niños —Juan, Ken, Luis, Susana, Catarina y Beatriz—, meten un papel doblado con su nombre en una caja para sortear un premio. Sólo hay uno. ¿Cómo podrías simular la situación para determinar quién gana el juego?

> Te van a obsequiar un helado en la cafetería de la escuela. Tienen tres sabores: vainilla, chocolate y fresa, y dos presentaciones: en cono o vaso. Enlista todas las posibles maneras en que podrían darte el helado. Si el despachador no te pide tu preferencia, ¿cómo podrías simular qué helado te dará si lo elige al azar?

En un estudio con seis niños de 3º y 4º grados, los autores encontraron que mediante algunas lecciones de enseñanza (que ayudan a familiarizarse con el concepto de simulación), los niños fueron capaces de seleccionar correctamente un generador aleatorio con un espacio muestral equivalente al de la situación en contexto, por ejemplo, en el problema del sorteo de un premio entre seis niños, se podría elegir un dado y asignar una cara a cada uno para sustituir el sorteo de papeles en la caja. Un enfoque basado en la simulación, como lo proponen Benson y Jones, permite una mejor evaluación de la comprensión de los conceptos de experiencia aleatoria y de espacio muestral.

La *probabilidad clásica (teórica)* se aplica a las experiencias aleatorias que tienen un espacio muestral finito, cuyos resultados se pueden suponer equiprobables. Es posible obtener esta suposición de un análisis de cada situación concreta; por ejemplo, los dados se construyen con material homogéneo para que sean lo más cercano a un cubo perfecto; es razonable pensar que al arrojar un dado con esas características cada cara tenga tantas posibilidades de caer como cualquier otra cara del mismo dado. Si una urna contiene dos bolas, una de un color y otra de otro, pero idénticas en forma, tamaño y peso, y se extrae de la urna una mediante un mecanismo "ciego", es razonable suponer que obtener la bola de un color tiene las mismas posibilidades que obtener la del otro color. En cambio, en un experimento en el que se observa a un jugador de basquetbol cuando va a realizar un tiro libre, hay dos posibles resultados: que enceste o no. En este caso no se puede suponer que cada resultado tiene las mismas posibilidades de ocurrir que de no ocurrir, pues para un jugador bien entrenado es más fácil que acierte a que falle, pero no es imposible que falle; entonces el espacio muestral no es equiprobable. Cuando el espacio muestral de una experiencia aleatoria es equiprobable y está formado de **n** resultados, la probabilidad de ocurrencia de cada resultado es $^1/_n$. Si se considera un evento no singular (formado por más de un elemento del espacio muestral) su probabilidad es el cociente de los casos que favorecen al evento entre el total de posibles casos de la experiencia (el tamaño del espacio muestral).

Piaget e Inhelder (1975) pensaron que el niño de preescolar es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios, y se basaron en que a esta edad el niño no posee la habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible, tampoco el concepto de proporción ni los procedimientos combinatorios. Fischbein (1975) indicó que, a pesar de ello, sí puede hacer juicios probabilísticos en situaciones sencillas. Una de estas situaciones, usada también por Piaget en sus experimentos, es pedir al niño que elija, entre dos urnas o cajas con diferente número de bolas blancas y negras, aquella que ofrezca más posibilidades de obtener una bola blanca (se le proporcionan cajas transparentes con fichas de dos colores o bien un dibujo de éstas):

> En la caja **A** se metieron tres fichas negras y una ficha blanca. En la caja **B** se pusieron dos fichas negras y una ficha blanca. Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál elegirías?

En el periodo de las operaciones concretas (hasta 7 años de edad), los niños pueden resolver problemas que impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso **A** en dos experimentos diferentes, sólo en situaciones donde, el número de casos favorables o de casos desfavorables a **A** son iguales en ambos experimentos (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias). Luego pasan a resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción. Los adolescentes progresan rápidamente en el cálculo de probabilidades, incluso cuando las fracciones que se comparan tienen diferente denominador. Esto se observa con niños a partir de 12-13 años, e incluso desde 10 años de edad, con la ayuda de la instrucción. Otros autores también han analizado las estrategias que siguen los niños al comparar probabilidades. Reproducimos la tabla 1 en que Cañizares (1997) hace una síntesis de ellas:

Tabla 1. Estrategias de los niños para comparar probabilidades.

Estrategia	Descripción y edad
Comparación del número de casos posibles.	Consiste en elegir la caja que contenga mayor número de bolas. Es propia de niños muy pequeños.
Comparación del número de casos favorables.	Consiste en elegir la caja que contenga más bolas del color favorable. Corresponde al nivel preoperacional, en que el alumno no posee aún la capacidad para establecer relaciones entre el todo y sus partes. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos desfavorables es igual en las dos cajas.
Comparación del número de casos desfavorables.	Se elige la caja con menor número de bolas del color desfavorable. Los niños en el nivel preoperacional utilizan esta estrategia cuando existe igualdad de casos favorables y centran su atención, entonces, sobre el número de casos desfavorables. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos favorables es igual en las dos cajas.
Estrategias aditivas.	Se elige la caja donde la diferencia entre casos favorables y desfavorables sea mayor. Se tienen en cuenta todos los datos, pero no se usan proporciones. Es característico del periodo de operaciones concretas (8-11 años)
Estrategia de correspondencia.	Se establece la proporción entre el número de casos favorables y desfavorables en una de las cajas y se compara con la composición de la otra, eligiendo la caja que dé mayor proporción. Aparece durante el periodo de operaciones concretas, se desarrolla en el periodo de operaciones formales (a partir de 12-13 años de edad), para ir trasformándose en una estrategia puramente multiplicativa. Resuelve el problema correctamente cuando hay una proporción sencilla (por ejemplo, 2 a 1) de casos favorables y desfavorables en una de las cajas, pero no en la otra.

Estrategias multiplicativas.	Consiste en la aplicación de la regla de Laplace. Es la más elaborada y requiere el dominio del cálculo con fracciones. Es necesario establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después comparar las fracciones así obtenidas. Es propia del periodo de operaciones formales (a partir de 12-13 años de edad).
Otros tipos.	Hacer referencia a la suerte; elegir el color favorito, etcétera.

Se ha constatado que la noción de probabilidad clásica es simple sólo en apariencia, pues frecuentemente los niños tienen ideas propias acerca de las situaciones de azar que no corresponden a las de la teoría, aun cuando ésta se les haya enseñado. Por un lado, hay estudiantes que no creen en la equiprobabilidad de juegos en los que se suele suponer esta propiedad; otros aceptan la legalidad de algunos juegos, pero la relativizan pensando que hay eventos favorables a ciertas personas en virtud de su suerte. Green (1983) hizo la siguiente pregunta a casi 3000 niños de entre 11 y 16 años:

> Cuando se arroja un dado ordinario de seis caras, ¿qué número es más difícil de ocurrir? o ¿todas las caras tienen las mismas probabilidades de ocurrir?

Green informa que 17%* de los estudiantes de secundaria encuestados pensaban que el 6 ocurriría con menor frecuencia. Amir y Williams (1999), en entrevistas con niños de 11 a 12 años, informan de comentarios como el siguiente cuando se referían al juego de dados:

> No se puede predecir lo que vas a obtener. Algunas veces obtengo 6 a la primera, pero otras veces tengo que esperar mucho para que salga.
> Mi hermana tiene mucha suerte, ella obtiene el 6 ocho veces seguidas...

Refiriéndose al lanzamiento de dos dados:

> Hay más probabilidad de obtener números diferentes que el mismo número en ambos dados, pero mi mamá es muy buena para obtener el mismo número en ambos dados.

Amir y Williams comentan que, para responder, los niños consideran ideas de tres fuentes: el conocimiento formal escolar, sus creencias y sus experiencias personales. Por otro lado, en contraste con la renuencia a creer que ciertos juegos son equiprobables, una concepción que está en el otro extremo es el *sesgo de la equiprobabilidad, que* consiste en asignar la misma probabilidad a los resultados de experiencias incluso en situaciones en que los resultados no tienen la misma probabilidad. Cañizares (1997) encontró que 25% y 18% de los estudiantes encuestados (394) de 10 y 14 años de edad, respectivamente, respondieron a dos reactivos de Green de acuerdo con el sesgo de la equiprobabilidad. Los estudios anteriores nos muestran la complejidad de la definición clásica de la probabilidad, pues su correcta aplicación se ve afectada por las características de la situación, las creencias de los niños respecto al azar y la suerte, y sus experiencias personales.

La *probabilidad frecuencial* (o estimación experimental de la probabilidad teórica) de un evento es una estimación de su probabilidad. Su valor teórico sería el límite que se obtiene a partir de realizar efectivamente la experiencia un número infinito de veces en la mismas condiciones. Es decir, se hace el experimento un número determinado de veces y se calcula el cociente del número de veces que ocurre el evento entre el total de veces que se repite el experimento; esto se sigue haciendo mientras se aumenta el número de repeticiones de la experiencia; así se produce una secuencia de frecuencias relativas; si se repitiera la experiencia un número infinito de veces, la secuencia converge a un número, que es la probabilidad teórica del evento. El número es teórico en virtud de la suposición de que el experimento se repite indefinidamente. En la práctica —puesto que no se puede realizar el experimento un número infinito de veces— sólo se obtiene una *estimación* de la probabilidad teórica, a partir de la frecuencia relativa en un número grande de ensayos. Cuando se estiman las probabilidades así se adopta un *enfoque frecuencial* de la probabilidad. Un aspecto importante en este enfoque es entender, por un lado, la diferencia entre probabilidad (valor teórico constante que nunca alcanzamos) y frecuencia relativa (estimación experimental de la probabilidad, que puede cambiar de una estimación a otra). También es necesario comprender que los resultados individuales de una experiencia son *impredecibles*, mientras que el comportamiento general de un gran número de resultados sí se puede *predecir*.

El uso de *software* educativo para estadística y probabilidad ha ampliado mucho las posibilidades didácticas del enfoque frecuencial, pues en la computadora se pueden repetir experiencias simuladas un número suficiente de veces, de tal manera que se puede observar las tendencias (véase capítulo 6 de este libro). Por ejemplo, Tarr, Lee y Rider (2006) exploran la noción de probabilidad frecuencial, pero en conexión con las nociones de probabilidad clásica y de inferencia estadística (informal). La actividad llamada Schoolopoly plantea el problema de descubrir entre dados virtuales, cuáles son legales y cuáles no, argumentando la decisión. Con el *software*, las parejas de niños podían repetir el experimento de lanzar los dados las veces que quisieran, pues el interés se centra en las estrategias de los estudiantes. Una pareja afirmó que un dado era legal con sólo 36 repeticiones de los dados, en la que obtuvieron la distribución que se presenta en la tabla 2; consideraron que la variación de los resultados en relación con la distribución uniforme no era demasiado grande. En cambio, otra pareja repitió la experiencia 1000 veces con ese mismo dado y encontró la distribución que se ilustra en la tabla 3, donde decidieron que el dado no era legal. Se le pidió a 24 estudiantes que votaran por la solución más convincente y 23 se inclinaron por la solución correcta de que el dado no era legal, obtenida a partir de 1000 repeticiones. Esta actividad, concluyen los autores, permite comprometer a los estudiantes en discusiones valiosas sobre aspectos importantes de la probabilidad, como la influencia del tamaño de la muestra (número de repeticiones) en la precisión de las probabilidades estimadas.

Tabla 2. Distribución de la pareja que sólo hizo 36 lanzamientos del dado.

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$

Tabla 3. Distribución de la pareja que hizo 1000 lanzamientos del dado.

1	2	3	4	5	6
13%	18.4%	17.8%	20.8%	18%	12%

Las anteriores investigaciones muestran tareas que pueden ser adaptadas para trabajar en el aula desde 3er grado de primaria hasta la secundaria, así como las dificultades que se presentan para el aprendizaje de los conceptos que están en juego. Si el profesor cuenta con una gama amplia de tareas para desarrollar los conceptos probabilísticos y conoce las dificultades que suelen tener los niños con esos conceptos, estará en mejores condiciones de ofrecer a sus alumnos buenas oportunidades de aprendizaje de esta materia.

Relaciones de proporcionalidad

Las fracciones, las razones y las proporciones son conceptos numéricos de un nivel inmediatamente superior a los de los números naturales y sus operaciones, pues tienen algunas propiedades significativamente diferentes, por ejemplo, en los números naturales el producto de dos enteros es mayor que cualquiera de sus factores, mientras que esta proposición no es cierta para el producto de fracciones. En lo que sigue se pueden apreciar algunas características del razonamiento proporcional, el cual se distingue en muchos asspectos del razonamiento con los números naturales y enteros.

¿Qué es el razonamiento proporcional?

En general se entiende como *razonamiento proporcional* la habilidad para establecer ciertas relaciones estructurales en problemas de *comparación de razones* y de *valor faltante*, es por esto que también se le nombra *razones y proporciones.* En los problemas de razones se dan cuatro cantidades **a**, **b**, **c** y **d**, y se tiene que determinar si $\frac{a}{b}$ es mayor, menor o igual que $\frac{c}{d}$; por ejemplo, Karplus (1983) formuló el siguiente problema:

> Juan hace un concentrado para preparar limonada con tres cucharadas de azúcar y 12 de jugo de limón. María hace un concentrado con cinco cucharadas de azúcar y 20 de jugo de limón. ¿Cuál de los dos concentrados tiene un sabor más dulce, el de Juan o el de María? o ¿ambos tienen un sabor igual de dulce?

En los problemas de valor faltante se proporcionan tres de los cuatro valores de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y el objetivo es encontrar el cuarto valor. Un problema de este tipo es el siguiente:

> Juan hace un concentrado para preparar limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 de jugo de limón. ¿Cuántas cucharadas de jugo de limón necesita María para combinar con 5 de azúcar a fin de que el sabor del concentrado que haga sea igual al de Juan? (Karplues, 1983).

El pensamiento proporcional no sólo significa dominar la operatividad presente en los problemas de razones y proporciones, sino que también implica reconocer las situaciones en que la proporcionalidad es pertinente. Por ejemplo, en un estudio con alumnos de docencia, Cramer, Post y Currier (1993) propusieron el siguiente problema:

> Susana y Julia corren a la misma velocidad en una pista circular. Susana comenzó a correr antes que Julia. Cuando Susana había corrido 9 vueltas al cir-

cuito Julia sólo había dado 3. Siguieron corriendo y después de un tiempo, Julia había corrido 15 vueltas, ¿cuántas vueltas llevaba recorridas Susana?

Fue sorprendente que 32 de 33 estudiantes resolvieron el problema como si fuera de razonamiento proporcional; por ejemplo: 9:3::x:15 (nueve es a tres como **x** es a 15), con ello obtuvieron que Susana llevaba recorridas 45 vueltas; sin embargo, ésta no es la solución, pues como corren a la misma velocidad, durante todo el tiempo que permanecen corriendo ambas recorren las mismas vueltas; entonces el modelo sería: Si Susana lleva **x** vueltas, Julia lleva **x** – 6 vueltas. Susana aventaja a Julia con seis vueltas, de donde Susana llevaba 21 vueltas recorridas cuando Julia llevaba 15. Los estudiantes también resolvieron otro problema cuya solución se alcanzaba mediante métodos proporcionales, obteniendo en este caso las respuestas correctas.

De lo anterior se concluye que el razonamiento proporcional no se reduce a conocer y a ejecutar las operaciones involucradas en las situaciones de proporcionalidad, también es necesario aprender a distinguir en las situaciones cuándo intervienen relaciones proporcionales y cuándo no.

Lamon (2007) sugiere refinar la definición anterior de razonamiento proporcional agregando que es necesario, aparte de reconocer las relaciones entre las cuatro cantidades (**a**, **b**, **c**, **d**), observar dos aspectos: *a)* la covariación de las cantidades en el contexto del problema: *si* **a** *aumenta y* **b** *y* **d** *se mantienen constantes, entonces* **c** *aumenta; si* **a** *aumenta y* **b** *y* **c** *se mantienen constantes, entonces* **d** *disminuye*, etc.; y *b*) la invariancia de las razones o los productos, en el sentido de tener la habilidad de discernir la relación multiplicativa entre dos cantidades, así como la de extender la misma relación a otras dos cantidades: *Si tengo que multiplicar* **a** *por* **r** *para obtener* **b**, *entonces tengo que multiplicar* **c** *por* **r** *para obtener* **d**, etc. La complejidad de las relaciones proporcionales se muestran con mayor claridad examinando el análisis de los esquemas de proporcionalidad de Vergnaud.

Esquemas de proporcionalidad

En el análisis de Vergnaud (1983) de las estructuras multiplicativas se identifican tres tipos de situaciones: *a)* isomorfismo de medidas; *b)* producto de medidas, y *c)* proporciones múltiples diferentes del producto.

Vergnaud (1983) sugiere pensar una proporción como una relación multiplicativa entre las cantidades de dos espacios de medida, representándola en un esquema como el de la figura 4.7.

M_1 y M_2 representan cualesquiera dos espacios de medida; *a, b, c* son las cantidades de la proporción, y x es el valor faltante.

M_1	M_2
a	b
c	x

Figura 4.7. Esquema de proporcionalidad.

Ejemplo: Un auto que recorre 100 km consume 8 litros de gasolina. Si en un viaje se van a recorrer 6580 km, ¿qué cantidad de gasolina será necesaria?

Una medida es la distancia (cantidad de kilómetros) y la otra es el consumo (cantidad de combustible en litros), entonces se forma el esquema:

Km	Litros
100	8
6580	x

Figura 4.8 Esquema de proporcionalidad del ejemplo.

Freudenthal (1983) señaló que en una proporción se pueden identificar dos tipos de razones: *internas y externas*. Las razones *internas* son las que se establecen dentro del mismo espacio de medida, así a/c, b/x son razones internas. En una proporción, las mencionadas razones son iguales:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$$

En cambio, las razones *externas* son las que se establecen entre dos cantidades, cada una perteneciente a un espacio de medida diferente; así, por ejemplo: a/b y c/x son razones externas. En una proporción las razones externas son iguales:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Una razón interna es un número; por ejemplo, la razón 100 km/6580 km es el número 0. 0152 (redondeado a 4 cifras). Una razón externa es una magnitud, por ejemplo: 100 km/8 lt resulta en 12.5 kl/lt, se lee: "12.5 kilómetros por litro".

Levin (2002) informa sobre los diferentes tipos de solución que ofrecen estudiantes de 6° de primaria y de 1° y 2° de secundaria al siguiente problema:

> En un mapa, la escala indica que 5 cm representa la distancia real de 9 km. La distancia en el mapa entre dos ciudades es de 2 cm. Explica cómo puedes obtener la distancia real entre esas dos ciudades.

Esta pregunta se aplicó a 387 estudiantes (128 de 6° grado de primaria, 144 de 1° de secundaria y 115 de 2°) y a todos se les enseñó algo de proporcionalidad. Sólo 90 estudiantes (23%) respondieron correctamente el problema (14 de 6° de primaria; 39 y 37 de 1° y 2° de secundaria, respectivamente).

Razones externas (determinando la unidad). Esta estrategia consiste en encontrar la razón de km por minuto y se puede representar mediante una secuencia de dos esquemas:

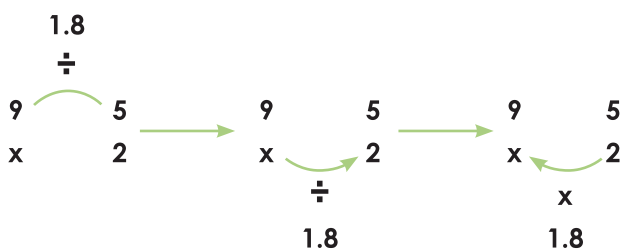
$$\begin{array}{c|c} \textbf{Km} & \textbf{Cm} \\ 9 & 5 \\ r & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c} \textbf{Km} & \textbf{Cm} \\ r & 1 \\ x & 2 \end{array}$$

43 estudiantes resolvieron el problema siguiendo un procedimiento similar a esta estrategia; se ilustran dos respuestas que se consideraron en esta categoría:

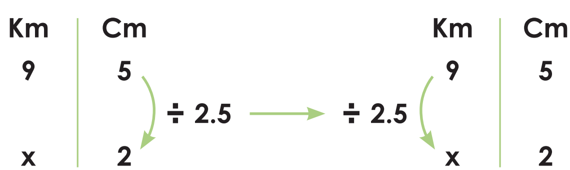
Divido 9 por 5 y obtengo 1.8; así, cada centímetro equivale a 1.8 km. Entonces dos centímetros es igual a 3.6 km (1° de secundaria).

9 ÷ 5 = 1.8, esto es sólo la mitad de la distancia, entonces sumando 1.8 + 1.8 obtenemos 3.6 que es la respuesta correcta (6° grado).

Una forma de ver el procedimiento realizado por estos estudiantes es la siguiente:



Razones internas (fracciones equivalentes). Ocho estudiantes utilizaron un procedimiento en el que utilizaron razones internas. Esta estrategia, en opinión de Lavin, es similar al procedimiento que se realiza para determinar fracciones equivalentes. Se puede representar mediante el siguiente esquema:



- Divido 5 entre 2 y me da 2.5, entonces divido 9 entre 2.5. Esto me lleva a que la nueva escala es 2 cm = 3.6 km (1° de secundaria).

Su relación con las fracciones equivalentes consiste en pensar que $\frac{9}{x}$ debe ser equivalente a $\frac{5}{2}$; de donde 2.5 = $\frac{9}{x}$ y entonces x = $\frac{9}{2.5}$.

Productos cruzados. Esta regla es la más general, pero no se representa directamente en un diagrama. A partir de igualar las razones $\frac{5}{2} = \frac{9}{x}$ se deriva que $5 \times x = 9 \times 2$; ésta es la regla de los productos cruzados y de aquí se obtiene la solución: $x = \frac{(9 \times 2)}{5}$.

En la investigación de Lavin, 27 estudiantes utilizaron un procedimiento que refleja la regla del producto cruzado: se pueden ver en las dos explicaciones siguientes:

- 5 es a 9 como 2 es a ? 5/9 = 2/n, 3.6 millas.
- Usaré el producto cruzado. Pongo 5 cm arriba (numerador) y 9 millas abajo (denominador). Luego pongo 2 cm abajo (denominador) de la segunda fracción y multiplico 9 millas por 2 cm, y divido por 5 (2º de secundaria).

Entre las respuestas que no son correctas, Lavin encontró dos tipos de errores. Uno consiste en pretender resolver el problema haciendo sólo una operación con dos de los tres números involucrados; 77 estudiantes cometieron este tipo de error. Por ejemplo: "Se toman los 2 cm y se dividen entre 5" (1° de secundaria); "Se suman 9 km por cada 5 cm" (1° de secundaria); "Yo restaría 5 de 9" (2º de secundaria); "Dos veces 9 es igual a 18" (1° de secundaria). Este tipo de soluciones reflejan una ausencia de razonamiento proporcional, pues los estudiantes desconocen la función del tercer número.

Un segundo tipo de error se presenta en las respuestas en que se utilizan los tres valores dados en el problema, pero se operan en un orden diferente al de la solución correcta; por ejemplo: "Se dividen los 5 cm entre 2 y el resultado se multiplica por 9" (2º de secundaria); "Primero dividiría 5 entre 9 y obtengo una respuesta que multiplico por 2". Estas respuestas muestran que los estudiantes que las propusieron reconocen que hay una relación que afecta los tres números; sin embargo, no tienen un método para saber cómo organizar los tres números de manera conveniente y realizar las operaciones respectivas.

Lavin concluye que es importante que los profesores no sólo se conformen con que los estudiantes encuentren la respuesta a los problemas de proporcionalidad sino que reflexionen acerca de lo que hacen matemáticamente y por qué. Se les debe enseñar que hay muchas estrategias válidas para resolver problemas de proporcionalidad, no sólo el método de *productos cruzados*; pero cualquier método que lleve a la solución no debe aprenderse mecánicamente, sino sustentarse con un razonamiento de cómo y por qué funciona.

5. La tecnología para el aprendizaje de las matemáticas

Verónica Hoyos Aguilar, Universidad Pedagógica Nacional
Ernesto Sánchez Sánchez, Cinvestav, IPN

A finales de los años 80 y durante la década de 1990 se popularizó el uso de la computadora en los medios académicos. En particular, muchos actores relacionados con la educación matemática expresaron un gran optimismo en cuanto al potencial de la nueva tecnología para transformar la forma de enseñar las matemáticas y cómo las aprenden los estudiantes (Olive y otros, 2010). En particular, Papert (1997) ve en el trabajo que realizan los profesores con las computadoras en las escuelas, las semillas a partir de las cuales se dará el cambio.

Sin embargo, las grandes expectativas sobre las posibilidades de la computadora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no se han visto cumplidas tan pronto como se esperaba. Los profesores que utilizan la computadora hacen lo mismo de siempre sin modificar sus hábitos previamente adquiridos, mientras que otros se resisten a usarla. En opinión de algunos diseñadores de *software* revolucionarios (como Papert, el creador de LOGO), y en contraposición a sus más caras ambiciones en cuanto al uso de lo que crearon, "las computadoras sólo se han usado [en educación] para transferir el currículo tradicional de los impresos a la pantalla de la computadora" (Kaput, 1992).

Paralelamente a los procesos de incorporación de la tecnología en las escuelas, se ha investigado cómo lograr un aprendizaje matemático significativo en los estudiantes con el apoyo de actividades con calculadoras y software didáctico y sobre los tipos de aprendizaje que se pueden adquirir con tales actividades. El resultado de estas investigaciones puede ayudar a los docentes a integrar de forma productiva la tecnología en el aula, sin caer en el error de querer continuar con una enseñanza tradicional pero ahora con ayuda de computadoras.

Antes de continuar es conveniente mencionar que en México ya se han realizado esfuerzos desde la Secretaría de Educación Pública para incorporar la tecnología en el aula, y en particular, relacionados con la enseñanza de las matemáticas. Uno de ellos está relacionado con el proyecto de Enciclomedia y el otro con EMAT (Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología). En el marco de ambos proyectos se produjeron materiales de estudio y se realizaron acciones de preparación de maestros y de prácticas con alumnos. Para mayor información al respecto, el lector puede remitirse a las siguientes direcciones electrónicas:
http://efit-emat.dgme.sep.gob.mx/, y http://www.inegi.gob.mx/inegi/_contenidos/espanol/ciberhabitat/escuela/enciclomedia/

Sentido numérico

La calculadora electrónica es el instrumento más elemental que originó a acaloradas discusiones sobre el papel de la tecnología moderna en la enseñanza de las matemáticas. En la década de 1970 había una creencia entre la mayoría de los profesores de que la calculadora frenaba el aprendizaje matemático de los estudiantes al facilitarles los resultados de las operaciones sin exigirles un esfuerzo en su realización y, por tanto, en la comprensión de su significado; en consecuencia, no recomendaban su uso en la enseñanza. En ese contexto se explica la formulación del problema de la tecnología que hizo Freudenthal (1981) en uno de sus problemas mayores (o principales) de la Educación Matemática; el autor lo expresa de forma concisa en la pregunta: *¿Cómo se pueden usar las calculadoras y computadoras para despertar el entendimiento matemático?* Se sustituía así la falsa disyuntiva de si es correcto o no usar la tecnología en clase por la pregunta más adecuada de cómo hacerlo.

Freudenthal observa claramente que el problema era encontrar actividades con calculadora que propiciaran el razonamiento matemático; en el texto citado menciona como ejemplo de la siguiente actividad:

> Juan y María están jugando con sus calculadoras. Juan comienza en 0 y María en 100. Alternativamente, Juan suma 2 mientras María resta 3, ¿en dónde se encontrarán? Otro, Juan comienza en 0 y María en 100, alternativamente Juan suma 3 mientras María suma 2 ¿Dónde la alcanzará Juan? Uno más podría ser: A Juan y a María se les pide compartir 100 (digamos canicas) en la razón 2:3, Ellos lo harán por sustracciones alternadas de 2 y 3 o múltiplos de ellos, utilizando la calculadora (Freudenthal, 1981).

Otros autores defienden una posición sobre la calculadora que continúan la recomendación de Freudenthal y sostienen que las calculadoras sí deben utilizarse en la enseñanza, pero después de que los estudiantes hayan aprendido los algoritmos con lápiz y papel, o más específicamente, una vez que aprendan matemáticas relevantes sin la calculadora (Ballheim, 1999). Daremos un ejemplo en torno a la divisibilidad basado en un problema en que la calculadora juega un papel importante para promover el sentido numérico de los estudiantes.

La divisibilidad. En el programa de Matemáticas de 6° grado de primaria (SEP, 2009) se sugiere introducir los "conocimientos y las habilidades" siguientes: *5.1 Resolver problemas que involucren la búsqueda de divisores o múltiplos comunes a varios números* (p. 82). Una actividad reportada por Guzmán, Kieran y Squalli (2003) sirve para desarrollar el tema de divisibilidad. que aun cuando la llevaron a cabo con estudiantes de los tres grados de secundaria, se pueden aplicar o adaptar para el 6° de primaria (más adelante se volverá a este punto). La actividad es la siguiente:

> Toma cualquier número entero de 1 a 999 y trata de llevarlo a cero en cinco pasos o menos; usa sólo los números del 1 al 9 y las cuatro operaciones básicas +, –, ×, / para hacer transformaciones. Puedes usar el mismo número más de una vez (Guzmán *et al.*, 2003).

Se puede observar que el alumno necesita poner en juego conceptos relacionados con los enteros positivos, como múltiplos, factores, números primos, números divisibles entre 2, 3,… 9 para desarrollar estrategias eficaces que lleven al éxito. Por ejemplo, para llevar el número 417 a cero, puede comenzar sumándole 6 (para lograr que el resultado sea divisible entre 9), con el que se obtiene 423, que es divisible entre 9; el segundo paso es dividir 423 entre 9, dando por resultado 47, y el tercero es restar 2, con el que se obtiene 45; el cuarto es dividir otra vez entre 9, para obtener 5, y el quinto y último es restar 5, con lo que el resultado es 0, logrando así el objetivo.

El diseño y la ejecución de la actividad tuvieron como marco a la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau por que se consideraron las etapas de *iniciación, acción, formulación* y *validación*. Guzmán *et al.* (2003) propusieron una etapa previa de iniciación; ésta consiste simplemente en poner en claro las condiciones de la actividad, mediante la explicación del problema por parte del maestro y la verificación de que los estudiantes lo entendieron. En la fase de formulación se divide el grupo en equipos de 10 alumnos y los equipos compiten; los investigadores les proponen trabajar con los números 430, 729, 864, 498, 181 y 359. La competencia entre los equipos permite que surjan y se formulen estrategias ganadoras. En la fase de validación se incluía la justificación de las estrategias con base en los conceptos de divisibilidad, múltiplo de un número y número primo. La actividad termina con una reflexión en la que se habla de los números que es difícil, o incluso imposible, llevar a cero en sólo cinco pasos.

Floris (2005) esta misma actividad adaptó para trabajar con niños de quinto y sexto grados de primaria, mediante la reducción del rango en el cual se elige el número a llevar a cero y del número de pasos que se permiten para hacerlo. En su estudio propone y analiza la actividad *Tres pasos a cero*. El lector puede realizar esta actividad preguntándose si es factible que todos los números del 1 a 99 lleven a cero en tres pasos; cuáles es posible llevar sólo en dos; cuál sería una estrategia óptima, etc. Después, los lectores que atienden grupos de quinto o sexto grados, pueden proponer la actividad a sus alumnos y observar qué estrategias emplean y cómo la actividad les ayuda a producir o reforzar nociones de divisibilidad.

Para finalizar con el tema de las calculadoras, es conveniente mencionar que la evolución de las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de aritmética con calculadora llevó a algunos investigadores a tener una posición más radical acerca del papel de este instrumento en la clase de matemáticas. Ya se mencionó arriba que hay amplia aceptación en introducir la calculadora en el aula, siempre que sea precedida por actividades de lápiz y papel y para resolver tareas desafiantes. Ruthven (2009) presenta un proyecto donde va más allá; en *Currículo sobre números "conscientes de la calculadora"* (*'Calculator-aware' number curriculum*) se establece el siguiente como uno de cinco principios: *los métodos tradicionales de cálculo a lápiz y papel no deben ser enseñados; los niños deben utilizar su calculadora para los cálculos que ellos no puedan llevar a cabo mentalmente* (p. 3). Los participantes en este proyecto exploran la manera de trabajar con los niños con actividades prácticas y de exploración, poniendo atención en el desarrollo del lenguaje, animando a los estudiantes a investigar cómo "trabajan" los números, centrándose en el cálculo mental y siempre con una calculadora a la mano, pero sin enseñar los algoritmos tradicionales a lápiz y papel. Aunque fascinantes no es posible, por falta de espacio, exponer los pormenores del proyecto y los resultados que se obtuvieron siguiendo esos principios, baste mencionar que sus niños adquirieron buenas competencias matemáticas no menores a las de niños educados primero con técnicas a lápiz y papel.

Pensamiento algebraico

La realización de procesos de generalización simbólica representa para los estudiantes uno de los principales desafíos para que logren transitar de la aritmética al álgebra. Con el advenimiento de las computadoras se volcó la atención de muchos investigadores en el potencial de las herramientas tecnológicas para apoyar a los estudiantes en dicha transición. Hershkowitz (2002) sugiere que la tecnología en la enseñanza del álgebra debe apoyar al alumno en el desarrollo de procesos de *generalización*, *matematización* y *comunicación*. Se ha encontrado que los software llamados "hojas de cálculo" pueden influir positivamente en el desarrollo temprano de esos procesos; por ejemplo, se han realizado diversas investigaciones y explorado situaciones-problema para trabajar con el programa Excel, sobre temas del álgebra, como *fórmulas y sus inversas*, *composición de fórmulas* (Sutherland, 1993), *problemas algebraicos verbales* (Sutherland y Rojano, 1993), *los conceptos de variable y función* (Dettori, Garuti y Lemut, 2001), entre otros.

Las hojas de cálculo, como Excel, ofrecen posibilidades para que los estudiantes manipulen, observen y generen una gran cantidad de ejemplos numéricos; con esto se les facilita el tránsito de trabajar y pensar con números a hacerlo con símbolos. La posibilidad de elaborar secuencias numéricas por medio de fórmulas, promueve los procesos de generalización, permitiendo un acercamiento funcional al álgebra. Además, contar con varias representaciones de las relaciones funcionales ayuda al desarrollo del simbolismo y la comunicación.

Tabach, Arcavi y Hershkowitz (2008) llevaron a cabo un estudio durante un año con estudiantes de 1° de secundaria, en el que se enfocaron en los procesos de simbolización y generalización que alcanzaron. Sus preguntas de investigación fueron:

1. ¿Qué clases de generalizaciones simbólicas usan los estudiantes al comienzo de un curso de álgebra usando hojas de cálculo?
2. ¿Cambian las generalizaciones simbólicas a lo largo del curso de un año de duración? Si ese es el caso, ¿de qué maneras?

3. ¿Los estudiantes pueden dejar, por iniciativa propia, la utilización de las hojas de cálculo hacia el final del año escolar? En otras palabras, ¿pueden ser completamente funcionales en un medio ambiente de papel y lápiz, con expresiones simbólicas explícitas?

Para responder estas preguntas se apoyaron en varias tareas con las que trabajaron durante todo el curso. Aquí sólo se mencionará el siguiente problema, relacionado con la compra de un radiotransmisor.

> Los planes de ahorro de cada estudiante se pueden dar mediante una expresión que diga la cantidad de dinero en pesos de que disponen (o que se debe) más la cantidad que invertirán (o extraerán) por semana; así, los planes de ahorro de diferentes niños se presentan en la siguiente tabla, donde x es el número de semanas transcurridas a partir de una fecha dada:

Dina	7x	Yoni	300
Karin	10x	Rubin	60 + 3x
Moshon	30+5x	Eliran	–20 + 4x
Danny	300 – 5x	Moti	– 70 + 7x

> Quieren comprar un Walkie-Talkie; es decir, un radiocomunicador que cuesta $400.00 pesos. Deciden que una pareja lo compre; es decir, reunir los ahorros de dos de los 8 niños y, en cuanto completen la cantidad, comprar el aparato. El problema es, ¿qué pareja sería la primera en juntar los 400 pesos para comprar el Walkie-Talkie? (Tabach, Arcavi y Hershkowitz, 2008)

Para buscar la solución, los estudiantes eligen parejas e introducen en la hoja de cálculo la expresión de la suma de sus planes de ahorro. Por ejemplo, de Dina y Karin se podría introducir la fórmula: "=7*A3+10*A3" (donde A3 genera la sucesión de los números naturales). En la figura 5.1 se puede observar el despliegue de los planes de ahorro de cuatro parejas. Como la totalidad de posibles parejas es 28, sería muy laborioso introducir todos los respectivos planes de ahorro, por lo que los estudiantes elaboran procedimientos o criterios para simplificar la tarea.

Está investigación se hizo a lo largo de un curso de álgebra donde los estudiantes aprendieron a utilizar intensivamente el programa Excel y disponían en todo momento de esta herramienta; sin embargo, al formularles el problema anterior, y otros problemas, el profesor los dejaba en libertad de elegir el método y los instrumentos que creyeran conveniente para resolverlo, sin sugerirles que utilizaran Excel.

Libro3

	A	B	C	D	E
1					
2	Semana	Dina y Karin	Moshon y Danny	Moshon y Rubin	Karin y Yoni
3	1	17	330	98	310
4	2	34	330	106	320
5	3	51	330	114	330
⋮					⋮
11	9	153	330	162	390
12	10	170	330	170	400
13	11	187	330	178	410
⋮					⋮
24	22	374	330	266	520
25	23	391	330	274	530
26	24	408	330	282	540

Figura 5.1. Despliegue de los “planes de ahorro” de cuatro parejas.

Por otro lado, también es importante mencionar que cuando se les pidió resolverlo, los estudiantes aún no habían aprendido a sumar expresiones simbólicas ni tampoco a resolver ecuaciones lineales. Esta metodología permitió observar dos aspectos importantes: la adquisición y el uso de nociones algebraicas con ayuda del programa Excel y la transferencia o traducción de ciertos procedimientos al lápiz y papel. Los autores informan que la mayoría de los equipos (alrededor de

73%) usó hojas de cálculo para resolver el problema al comienzo del año y hacia el final sólo un cuarto de los equipos (23%) usó hojas de cálculo en un problema matemático similar. Entonces, alrededor de la mitad de los estudiantes prefirieron utilizar métodos escritos (lápiz y papel) en lugar del software, aun cuando la computadora estuvo completamente a su disposición.

Forma, espacio y medida

La noción de *micromundos computacionales* es muy importante en la investigación que explora cómo utilizar la tecnología en el aula. Un micromundo es un ambiente computacional que se crea con ayuda de un programa para que el usuario explore y construya ideas. En un micromundo se cuenta con un conjunto de objetos (virtuales) y uno de herramientas (comandos) con los que se pueden construir y estructurar nuevos objetos. Es conveniente destacar la naturaleza exploratoria de los micromundos lo que quiere decir que están concebidos para que el usuario dirija sus actividades libremente hacia la elaboración de nuevos objetos que con frecuencia son formas "concretas" de conceptos abstractos.

Un micromundo fértil debe: *a)* apoyar exploraciones centradas en problemas; *b)* tener en cuenta los resultados de las investigaciones sobre los aprendizajes matemáticos de los alumnos; *c)* promover modelos mentales de ideas abstractas y, *d)* inducir a la reflexión y la abstracción. Para una discusión más amplia sobre la naturaleza de los micromundos, se sugiere consultar Sacristán (2003).

La geometría de la tortuga: Logo. El primer ejemplo de micromundo y uno de los más populares es Logo, un lenguaje computacional desarrollado en los años 70 por Seymour Papert. El usuario puede mover un objeto llamado "tortuga" en la pantalla, usando instrucciones simples (comandos) como AV (avanza), GD (gira a la derecha), GI (gira a la izquierda) y otros similares; además, tiene otros comandos más complejos como REPITE, etc. En los movimientos que realiza, la tortuga dibuja una línea y así se obtienen figuras. Este software tiene la ventaja de ser libre; para bajar una versión en español y también obtener una copia del manual de Logo para el alumno.

Por ejemplo, para trazar un triángulo equilátero se tiene que determinar la longitud de los segmentos y ángulos, y saber cómo traducir esas ideas matemáticas al lenguaje de programación. En la figura 5.2 se presenta un triángulo y a la derecha una ventana con el programa que lo generó.

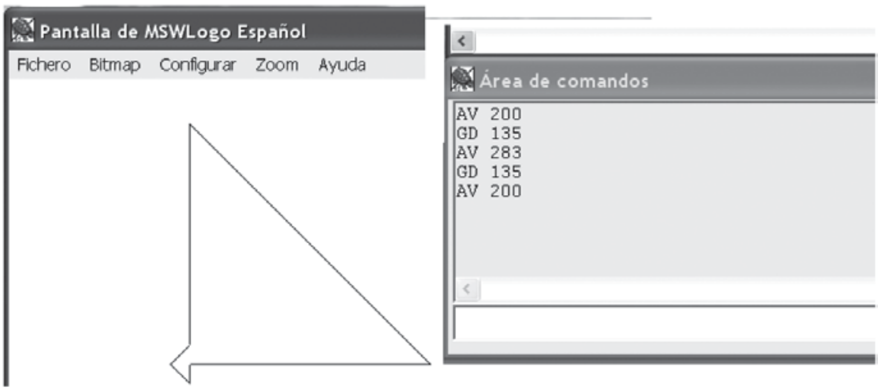


Figura 5.2.

La posición inicial de la tortuga siempre está donde se encuentra la punta de la flecha, pero dirigida hacia arriba. Se le pidió a la tortuga que avanzara 200 pasos hacia arriba, luego que girara a la derecha un ángulo de 135, después que avanzara 283 pasos, en seguida que volviera a girar a la derecha un ángulo de 135; para finalizar se le pidió que avanzara 200 pasos. Para obtener la construcción del triángulo fue necesario poner en juego dos conocimientos matemáticos importantes: *a)* sobre los ángulos para determinar el giro de 135° y *b)* el teorema de Pitágoras, para determinar el avance de 283 pasos, con el que se trazó la hipotenusa. Al sugerir la actividad, el profesor no proporciona esos conocimientos, deja a los estudiantes que resuelvan el problema como puedan; es decir, les permite explorar con sus propios recursos. Habrá quien proponga que el primer giro debe ser de 45°, pero al hacerlo se dará cuenta que no funciona, entonces en su esfuerzo por resolver la tarea descubrirá o recordará relaciones apropiadas entre los ángulos. Lo mismo sucederá para la determinación de la longitud de la hipotenusa; algunos estudiantes comienzan proponiendo 400, pero al darse cuenta que en la figura de la pantalla no ocurre lo que esperaban, reflexionan y a veces producen preguntas e ideas matemáticas.

Como se ve en el ejemplo, desde que se comienza a utilizar Logo el profesor puede sugerir a sus estudiantes actividades que entiendan bien y dan origen a verdaderos problemas, pues tienen la virtud de motivar el interés de los niños. Esto ha propiciado que se lleven a cabo profundas investigaciones para mostrar la posibilidad de vías alternativas de enseñanza de la geometría y la aritmética, y para entender los mecanismos de aprendizaje de los niños que se activan con tales actividades. Una de estas investigaciones es la de Clements, Battista y Sarama (2001), de la cual sólo veremos un problema.

En este trabajo los autores junto con un equipo de profesores, elaboraron e implementaron un "currículo de geometría" apoyándose con el programa Logo con estudiantes de 4°, 5° y 6° grados de primaria. Observaron el avance logrado por un grupo (experimental) de niños sobre diversas nociones geométricas utilizando Logo, y lo compararon con el avance de niños de otro grupo (control) que no trabajaron con este programa. Para medir el desempeño de ambos grupos aplicaron pre y postest. Uno de los problemas aplicados en estas pruebas fue el siguiente:

> Un barco que navega en un lago se dirige hacia su destino. Avanza 60 metros, después gira hacia la derecha 80 grados y avanza en esta dirección 152 metros; entonces gira 160 grados y continúa 173 metros. Después de los anteriores desplazamientos el barco queda atrás de la posición en la que comenzó a navegar, ¿qué ángulo tiene que girar para dirigirse nuevamente hacia su destino? (Clemens, Battista y Samara, 2001: 59).

Para encontrar la respuesta correcta (120°) se requiere un cuidadoso modelo de la situación, del conocimiento de relaciones entre ángulos, como las de ángulos complementarios, suplementarios e internos de un triángulo, y de reconocer y saber trazar ángulos obtusos. El programa ayuda en la elaboración de dicho modelo, como se observa en la figura 5.3, donde se tradujo el enunciado del problema al lenguaje de Logo.

Clementes y otros (2001) informan que de los estudiantes del grupo control, quienes no conocían Logo, sólo algunos de 6° grado lograron avanzar algo en las soluciones correctas en el postest en relación con el pretest; es decir, nada más los de 6° grado fueron capaces de avanzar un poco en su aprendizaje de los conocimientos necesarios para resolver el problema, mientras que los de 4° y 5° no obtuvieron ningún avance.

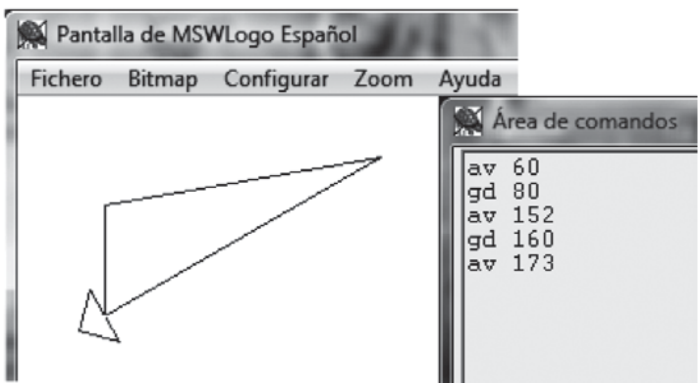


Figura 5.3. Representación del problema del barco en Logo.

Tampoco hubo diferencia significativa en el avance de los estudiantes de 4° grado de ambos grupos (experimental y de control); es decir, que para los niños del grupo experimental de 4° grado la presencia de Logo no fue un elemento que les ayudara a avanzar más que a los niños del otro grupo. En cambio, los grupos de 5° y 6° grados del grupo experimental tuvieron un avance significativo en relación con los del grupo control.

En un análisis detallado de las respuestas, los autores encontraron que el error más común es creer que la solución es 240°, la suma de 80° y 120°; los de 4° grado de ambos grupos y los de 5° grado del grupo control fueron más propensos a cometer este error después de la instrucción. Hubo una disminución del número de errores cometidos por los niños del grupo que llevó Logo y un aumento del error de los niños que no tuvieron experiencias con este programa.

En conclusión, el programa Logo ofrece al profesor la oportunidad de crear actividades para el aprendizaje de los estudiantes de diversos conocimientos geométricos y, en general, matemáticos; tales actividades son verdaderos desafíos para ellos, no obstante que se comprometen en su solución. Se ha evidenciado que hay actividades con Logo que efectivamente permiten a los estudiantes un progreso significativo en relación con aquellos que no tienen la oportunidad de explorarlo; además, es de acceso libre. Por lo tanto, se recomienda a los profesores busquen incluirlo en sus proyectos de clase.

La geometría dinámica. Por otro lado, se han creado otros programas de geometría dinámica (Cabri-Géomètre, Geometry Sketchpad, Geogebra y otros), que constituyen otro tipo de micromundos cuyo uso, por parte de los estudiantes, también ha mostrado poseer una fuerte influencia en su aprendizaje.

Los programas de geometría dinámica parecieran tener el objetivo de permitir elaborar figuras geométricas precisas en la pantalla de una computadora con ayuda del ratón. Pero, en opinión de Laborde (1998) y refiriéndose a Cabri-Géomètre, *es mucho más que un simple editor, ya que el usuario puede tomar con el ratón un elemento de un diagrama y arrastrarlo y transformarlo dejando intactas las propiedades geométricas que han sido definidas en su construcción, así como observar las propiedades geométricas que se implican de aquéllas* (p. 114).

En este software hay un conjunto de *primitivos* como punto, segmento, recta, círculo, etc., que pueden ser trazados en la pantalla y, a partir de estos, trazar otros con relaciones geométricas determinadas; por ejemplo: puntos en una recta, rectas por dos puntos, una recta perpendicular a otra o un círculo a través de dos puntos, etc. En la figura 5.4 se presenta una secuencia de tres momentos de una actividad: en la primera pantalla se traza un punto y una recta libremente; en la segunda se elige el comando "recta perpendicular", la cual requiere un punto y una recta para ser trazada, y en la tercera aparece la recta perpendicular pedida.

Los primeros dos elementos (el punto y la recta de la primera pantalla de la figura 5.4) se pueden mover libremente con el ratón, pero la tercera recta mantendrá sus propiedades que la definen: pasar por el punto inicial y ser perpendicular a la primera recta.

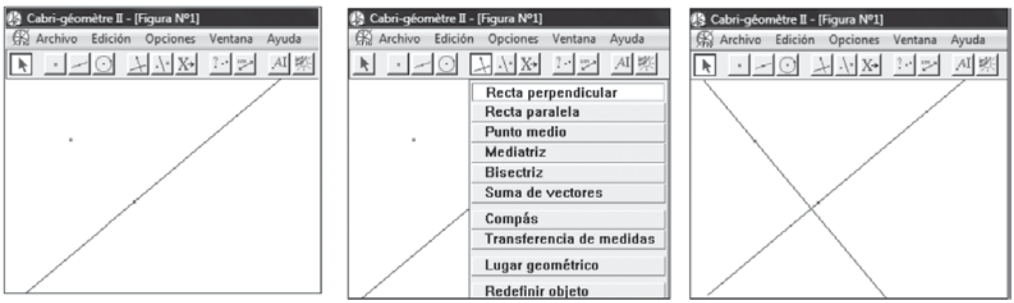


Figura 5.4. Tres momentos en la actividad de trazar una recta perpendicular.

La posibilidad de arrastre de un objeto primitivo y con éste la transformación del diagrama del que forma parte, el cual conserva su propiedades, es una fuente de problemas muy significativos en Cabri y permite ligar los aspectos teóricos con los visuales. Laborde (1998) sugiere tres tipos de problemas para desarrollar esta relación entre la geometría teórica y la visualización:

- Producir diagramas que conserven propiedades espaciales dadas; por ejemplo, trazar un cuadrado cuya medida del lado sea constante.
- Producir diagramas que se transformen siguiendo trayectorias dadas; por ejemplo, trazar un triángulo equilátero que al mover cualquiera de sus vértices gire en torno de su punto de gravedad.

- Descubrir las propiedades geométricas de un diagrama dado y reproducirlo; por ejemplo, dar un rombo inscrito en un triángulo y que el estudiante lo reproduzca de manera que las transformaciones que se realicen en ambos sean iguales.

En conclusión, los programas de geometría dinámica, aunque no todos son iguales, proporcionan recursos que están abriendo nuevos horizontes para la enseñanza de la geometría. Es altamente recomendable que los profesores se apropien y exploten estos recursos para desarrollar una nueva cultura geométrica en sus estudiantes. Para este fin, puede serle útil saber que en la actualidad la red ofrece un programa de geometría dinámica de acceso libre llamado Geogebra (http://geogebra.softonic.com/).

Azar y probabilidad

Los dos paquetes educacionales que se muestran enseguida tienen un diseño basado en la investigación sobre el razonamiento probabilístico de los alumnos y en la idea de micromundo computacional. El objetivo del diseño de *Probability Explorer* fue crear un ambiente relativamente abierto que los alumnos pudieran utilizar con facilidad para simular fenómenos aleatorios, explorar situaciones de azar que les interesaran y representar los resultados de diferentes formas. En el micromundo, las situaciones de azar deben definirse por el usuario y pueden provenir de actividades de enseñanza guiada o ser resultado de juegos que inventen los alumnos. Estos tienen a la mano diferentes opciones para crear experimentos que reproducen situaciones de probabilidad comunes en los libros de texto (por ejemplo, lanzamiento de monedas, juegos de dados, extracción de canicas de una bolsa), fenómenos del mundo real (como situaciones del clima o de deportes) o pueden diseñar experimentos de su propia invención.

Las representaciones dinámicas disponibles se muestran en la figura 5.5, donde se ha utilizado el ejemplo de lanzar un dado 100 veces. Aparte de los resultados que aparecen al azar en la pantalla, el alumno tiene la posibilidad de acceder a tres representaciones más: *a)* una gráfica de sectores que muestra la frecuencia relativa de cada resultado; *b)* una gráfica de barras que muestra la distribución de las frecuencias absolutas, y *c)* una tabla que muestra los resultados de los experimentos en cuatro formas diferentes: frecuencia absoluta (números enteros) y frecuencias relativas (fracciones, decimales y porcentajes).

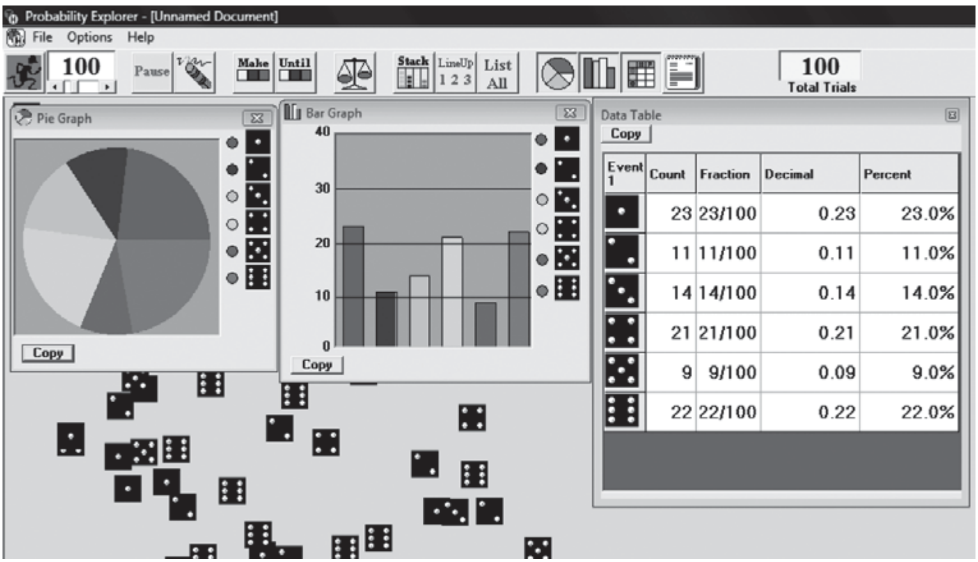


Figura 5.5. Diferentes formas de graficar los resultados de lanzar un dado 100 veces.

Los alumnos observarán cómo van cambiando las representaciones conforme un experimento se repite muchas veces; por ejemplo, Drier (2000) informa sobre una experiencia con alumnos de 8 y 9 años de edad, quienes jugaron a lanzar una moneda 500 veces. Al comienzo del experimento, al completar 50 lanzamientos, Dino (9 años) expresó: “¡Hey, mira lo que pasa!”, cuando veía en la pantalla la forma en que cambiaba el diagrama de sectores, pues mostraba sucesivamente diferentes porcentajes como: (25-75%), (60-40%), (30-70%). Conforme las pruebas aumentaban a 500, el porcentaje de "soles" y "águilas" empezaron a estabilizarse en (50-50%), mostrando sólo leves cambios. Después cuando se le pidió a los alumnos que describieran el proceso de las monedas que habían experimentado, Dino lo hizo imitando el vuelo de un pájaro que al despegar mueve mucho las alas para luego planear moviéndolas apenas, con lo cual reflejaba la alta variabilidad que se presenta al comienzo y la estabilidad posterior. Él se formó una idea intuitiva de la ley de los grandes números.

Drier (2000) también muestra cómo el software ayuda a los niños a describir espacios muestrales de experiencias aleatorias compuestas sirviéndoles de andamio para formular y superar problemas combinatorios elementales. Por último, ofrece evidencia de cómo la posibilidad de definir y jugar con juegos en los que su espacio muestral no es equiprobable enriquece las experiencias de azar de los alumnos evitando, o ayudándoles, a superar el sesgo de la equiprobabilidad.

TinkerPlots. Este software se desarrolló para ayudar a los alumnos a realizar investigaciones con conjuntos de datos y conceptos estadísticos (Konold y Miller, 2005). Los alumnos pueden utilizar el software sin necesidad de tener conocimientos previos sobre gráficas y sin pensar en términos de variables o ejes. En la realización de actividades de organización de datos, los alumnos tienen la posibilidad de observar patrones y tendencias así como a responder preguntas formuladas por el docente, o ellos mismos, acerca de la información que los datos proporcionan.

En la figura 5.6 se presenta una pantalla del software *TinkerPlots*, que contiene una base de datos de la temperatura y del ritmo cardiaco de 130 personas de un hospital (Konold y Miller, 2005). En la parte superior izquierda hay una ficha con datos de una persona; usando las flechitas de arriba a la derecha de cada ficha se puede transitar por cada una de las 130 que conforman la base de datos. A partir de la información se ha obtenido un histograma, además se incluyen otras informaciones en la pantalla.

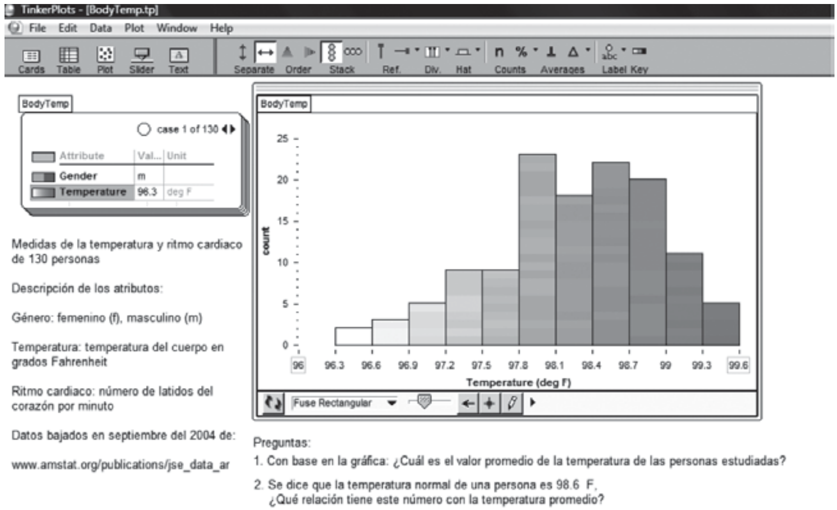


Figura 5.6. Histograma de datos sobre temperatura del cuerpo de 130 personas.

Relaciones de proporcionalidad

Como se dijo en el capítulo anterior, la proporcionalidad es uno de los temas más importantes de las matemáticas elementales y, también, de los más difíciles de aprender. Algunos investigadores en educación matemática han explorado cómo aprovechar la tecnología de las calculadoras y las computadoras para ofrecer oportunidades a los estudiantes a fin de que desarrollen esquemas de proporcionalidad y aprendan a razonar con razones y proporciones.

En el primer grado de secundaria se proponen temas de proporcionalidad; por ejemplo: *1.6 Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, utilizando de manera flexible diversos procedimientos* (SEP, 2006: 30) o *2.7 Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, utilizando operadores fraccionarios y decimales* (*Ibidem*, p. 38). Estos contenidos se abordan de manera sencilla y original, en trabajos que incluyen actividades con tecnología.

Por ejemplo, una investigación en la que Noss y Hoyles (1996) exploran el tipo de significados que los niños crean al realizar tareas matemáticas y la influencia de la computadora para construir esos significados matemáticos, tuvo como contenido matemático central las nociones de razón y proporción. Estos autores trabajaron con siete niños de 13 años de edad, quienes habían aprendido a utilizar Logo, y a los cuáles se les sugirió llevar a cabo actividades que les llevaran a percibir relaciones de proporcionalidad. Mencionan una secuencia de tres actividades: la primera consistió en dibujar (con Logo) tres letras N con las patas verticales de longitud 150, 350 y 100 unidades, respectivamente, y con un ángulo entre las patas verticales y la diagonal de 45º; la segunda fue similar a la primera, pero ahora con un ángulo de 30º; en la tercera tarea elaboraban un programa general para dibujar letras N de cualquier tamaño con ángulo de 30º, cuya entrada sólo era la longitud de las patas verticales.

El problema de dibujar una N con las características que se indican utilizando regla, transportador, lápiz y papel no representa gran dificultad para los niños; sin embargo, en un ambiente Logo, donde se trata de dar instrucciones a la tortuga para que lo haga, la tarea se vuelve un problema matemático desafiante. En efecto, aparte del problema de la instrucción para que la tortuga gire el ángulo conveniente, la dificultad estriba en determinar la longitud de la diagonal para poder ordenar a la tortuga que avance la distancia precisa para que la N quede bien dibujada; el profesor controla que la N dibujada esté dentro de ciertos límites de precisión. Una vez que logra dibujar las letras N de las dos primeras actividades, el problema es utilizar lo realizado para dibujar las N de la tercera actividad, así como hacer el programa.

Para dibujar la primera N, los estudiantes suelen proceder por tanteo, teniendo como referencia el 150; por ejemplo, en la secuencia de intentos de la figura 5.7 se probaron 180 como longitud de la diagonal, después 200 y, finalmente, 210, con este valor ya resulta aceptable.

Una vez que se encuentran las dimensiones convenientes para dibujar una N, el siguiente problema es cómo utilizar el resultado obtenido para aplicarlo en las instrucciones a fin de elaborar la N con la pata de longitud 100, luego la de la pata de longitud 350 y, en general, para las instrucciones generales de un programa.

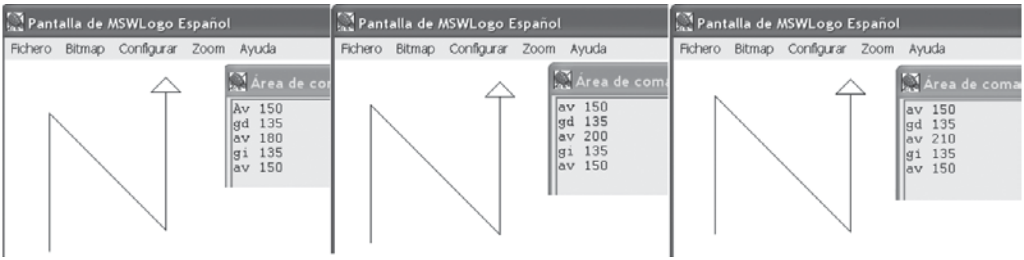


Figura 5.7. Tres programas para trazar la N probando con diferentes valores de la diagonal.

Los estudiantes se plantean el problema y desarrollan diferentes estrategias. Noss y Hoyles (1996) observaron que los estudiantes tienden a elaborar estrategias multiplicativas; es decir, estrategias en las que entienden que deben aumentar cierta cantidad a la longitud de la diagonal; por ejemplo, un procedimiento sugerido por un estudiante es: *Para una N con ángulo de 45°, por cada 50 unidades [en la pata vertical] agregar 25 unidades [en la diagonal]*. Una más sofisticada se formula así: *Hay que agregar una sexta parte del tamaño de la pata vertical*; es decir, *si AB es la pata y BC la diagonal entonces: BC = AB + (1/6)AB*. Aunque tales estrategias no son correctas porque no aciertan en encontrar la constante de proporcionalidad precisa, representan respuestas avanzadas.

En efecto, basados en otros estudios sobre proporcionalidad con lápiz y papel, Noss y Hoyles previeron que los estudiantes implementarían estrategias aditivas, pues éstas son muy frecuentes en problemas similares. En cambio, como lo puntualizan Olive y Lobato (2008), los resultados que obtuvieron Noss y Hoyles señalaron que el uso de Logo afecta positivamente el desarrollo de estrategias multiplicativas y proporcionales para el dibujo de la letra N. De los siete estudiantes que participaron a lo largo de esta experiencia, seis desarrollaron claras estrategias proporcionales al reconocer que la diagonal de la N era más grande y en una cantidad proporcional al tamaño de sus patas.

6. Pautas para la formación continua de los profesores de matemáticas

Salvador Llinares, Universidad de Alicante, España

Desde hace un tiempo se subraya la importancia del profesor de matemáticas para la enseñanza y la mejora del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. Una hipótesis que subyace a esta idea es que cuanto más competente sea el profesor hay más posibilidades de que sus alumnos lleguen a desarrollar adecuadas competencias matemáticas como ciudadanos. Por otra parte, las recomendaciones didácticas emanadas de las administraciones públicas, con el objetivo de mejorar la enseñanza de las matemáticas, son interpretadas por los profesores mediante sus concepciones de lo que significa aprender matemáticas, o el papel del docente en el desarrollo de ciudadanos matemáticamente competentes. Es por esto que la competencia docente, necesaria para manejar estas nuevas situaciones de enseñanza, puede implicar una re-conceptualización de lo que significa aprender matemáticas, enseñar matemáticas y qué son las matemáticas escolares. Desde esta perspectiva, la mejora en el aprendizaje matemático de los estudiantes pasa por el desarrollo de oportunidades de aprendizaje profesional del profesor (Ball, Hill y Bass, 2005).

Sin embargo, también empieza a reconocerse que el aprendizaje del profesor y el cambio en su práctica se realizan con base en lo que él conoce y hace en su presente; es decir, no es posible romper drásticamente en la práctica. Reconocer este hecho genera la necesidad de que las oportunidades de aprendizaje del profesor se construyan vinculadas con su propia práctica. Se trataría de propiciar la reconceptualización de las matemáticas escolares, los significados dados a la enseñanza y al aprendizaje, entre los que destaca la idea de que todos los alumnos pueden aprender matemáticas (Hiebert, Morris, Berk y Jamsen, 2007). De esta manera, el desarrollo profesional del docente (como una consecuencia de su aprendizaje) viene determinado por cambios en su conocimiento, sus creencias y en su práctica (Ávila, 2004; 2006; Penalva, Escudero y Barba, 2006).

Tareas profesionales del docente

De manera esquemática, se pueden considerar tres sistemas de actividad que constituyen las tareas profesionales del profesor y configuran una situación de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas:

1. Seleccionar y diseñar tareas matemáticas adecuadas.
2. Interpretar y analizar las producciones matemáticas de los alumnos.
3. Gestionar las interacciones matemáticas en el aula e iniciar y guiar el discurso matemático que implica.

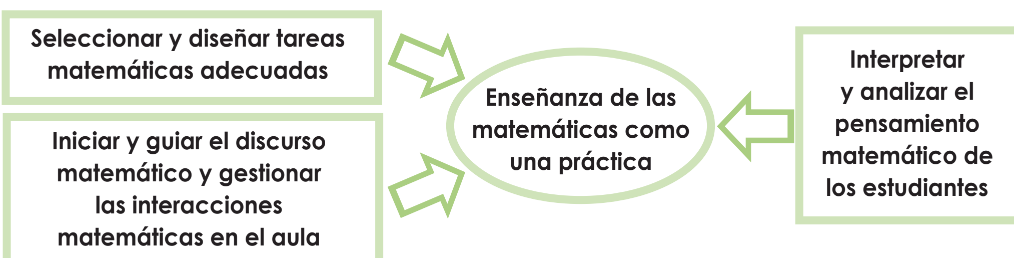


Figura 6.1. Sistemas de actividad que articulan la enseñanza de las matemáticas (Llinares, 2009).

1. *Seleccionar y diseñar tareas matemáticas adecuadas.* Implica conocer y organizar el contenido matemático para enseñarlo. Es un requisito para el do-

cente conocer los contenidos matemáticos como objetos de enseñanza y de aprendizaje; utilizar la información de esos contenidos para diseñar, seleccionar y analizar problemas, actividades y ejercicios como instrumentos de aprendizaje matemático del alumno (por ejemplo, estableciendo niveles de demandas cognitivas en las diferentes actividades), o para modificar secuencias de enseñanza previamente establecidas.

2. *Interpretar y analizar las producciones matemáticas de los alumnos*, escritas o verbales, constituye una tarea relevante del docente, pues sitúa el aprendizaje de sus estudiantes en el primer plano de sus decisiones. Para realizar esta tarea es necesario tener el conocimiento de la didáctica de las matemáticas sobre teorías del aprendizaje y de la construcción del conocimiento matemático, así como conocer las características del aprendizaje de los conceptos y procedimientos matemáticos. En la tarea de dotar de sentido el aprendizaje de los estudiantes, el docente debe utilizar el conocimiento anterior para observar las producciones de los alumnos (orales, escritas, en problemas puntuales o en proyectos, entre otros) y usar los conocimientos de didáctica de las matemáticas sobre el aprendizaje para diagnosticar —asignar un significado a las producciones de los alumnos, identificando posibles causas que las justifiquen— y proponer justificaciones y procesos de intervención.
3. *Gestionar las interacciones matemáticas en el aula e iniciar y guiar el discurso matemático que implica.* Gestionar la comunicación y el discurso matemático en el aula implica conocer e identificar las fases y los tipos de lecciones de matemáticas; las características que puede adoptar la interacción en el salón de clases en relación con el aprendizaje matemático (por ejemplo, las diferentes normas sociomatemáticas, el contrato didáctico, etc.); las características del discurso matemático en el aula y su relación con el aprendizaje matemático y las características de la gestión de los debates como instrumentos de aprendizaje —formular preguntas que permitan vincular concepciones previas con lo nuevo y saber subrayar las diferentes aportaciones apoyando el desarrollo de la metacognición en los alum-

nos, además de proponer tareas matemáticamente desafiantes, para apoyar su progreso durante la resolución de los problemas matemáticos.

Competencias docentes

Por *competencia docente* se entienden los conocimientos, las habilidades y las actitudes necesarias para llevar a cabo las tareas profesionales que constituyen los sistemas de actividad en la enseñanza de las matemáticas (figura 6.1). Se pueden identificar tres dominios de conocimiento del profesor: el dominio de las matemáticas, el del aprendizaje y el de la enseñanza. Los conocimientos de estos tres dominios deben integrarse para apoyar la realización de las tareas de enseñanza. Una manera de lograrlo es analizar sus vínculos, de la siguiente forma: 1) conocimiento de matemáticas y la enseñanza; 2) conocimiento de matemáticas y el aprendizaje de los estudiantes, y 3) competencia docente y contextos.

Conocimiento de matemáticas y la enseñanza

La manera en que el profesor plantea las actividades a sus alumnos y gestiona su interacción en todo el grupo, y en pequeños equipos, muestra su conocimiento sobre las matemáticas. Este conocimiento le permite reconocer las potencialidades y limitaciones de las diferentes representaciones y recursos para enseñar determinadas ideas matemáticas, además de cómo deben secuenciarse los diferentes contenidos en la lección para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. El conocimiento de las matemáticas y su enseñanza se pone de manifiesto cuando el profesor decide modificar una secuencia de tareas previamente diseñadas a partir de las respuestas que dan los estudiantes.

Los conocimientos de los profesores sobre las matemáticas también se manifiestan durante la gestión de la enseñanza y la orquestación de situaciones en las que se potencia el desarrollo del discurso matemático, cuando decide cuestiones metodológicas como, por ejemplo, desarrollar discusiones de todo el grupo o realizar previamente sesiones de resolución de problemas en equipos. En las situaciones de enseñanza, la comunicación matemática es una importante herramienta que favorece el aprendizaje al permitir a los estudiantes explicar su pensamiento matemático. Además, las características de las interacciones en el aula determinan el tipo de aprendizaje que puede generase en los alumnos, ya que permite realizar las conexiones entre las ideas favoreciendo la reorganización del conocimiento.

Finalmente, un tercer contexto donde se manifiesta este conocimiento es en el análisis posterior a la lección que el profesor realiza para determinar qué ha funcionado o qué cosas es necesario modificar modificar.

Conocimiento de matemáticas y los estudiantes

Un segundo ámbito es la relación entre el conocimiento de las matemáticas y el aprendizaje, que genera un conocimiento acerca del aprendizaje de los conceptos matemáticos específicos, junto con un conocimiento de principios generales sobre el aprendizaje de las matemáticas.

El conocimiento del profesor de las dificultades de los estudiantes en relación con los conceptos específicos y lo que puede ser fácil o difícil, sobre cómo pueden presentarse estas ideas y cómo determinar los progresos de sus estudiantes (la evaluación) resulta clave en el desarrollo de la lección. De esta manera, el conocimiento del profesor de las ideas que presentan dificultades a los estudiantes y de cómo ayudarles a superarlas junto con principios generales acerca de el aprendizaje de las matemáticas se convierte en un conocimiento fundamental para la enseñanza (en la planificación, para la interacción en el aula y la evaluación de lo sucedido). Este conocimiento permite al profesor predecir cómo los alumnos se aproximarán al aprendizaje de un tópico matemático particular, anticipar sus errores y cómo interpretar las ideas incompletas. El profesor usa este conocimiento cuando planifica y cuando determina qué hacer en un momento determinado en el aula en función de las respuestas dadas por los alumnos a una tarea particular (gestión del contenido matemático en el aula).

Hay dos fuentes para obtener este conocimiento: 1) los resultados de la investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes (ejemplos de dicho conocimiento se revisan a lo largo de este libro); 2) la propia práctica del profesor. Para adquirir el conocimiento desde la práctica, no es suficiente que sólo esté atento a las respuestas de sus estudiantes, se requiere, que lleve a cabo acciones específicas para elaborar sus observaciones y transformarlas en conocimiento. Los programas de formación y actualización de profesores deben proporcionar oportunidades para que estos aprendan a aprender de sus estudiantes de manera sistemática. Puede serle útil saber el tipo de preocupaciones que plantean los programas de formación; más adelante se expondrán algunas discusiones al respecto.

Competencias docentes y contextos

Ser profesor implica poseer una serie de competencias docentes que están vinculadas a la actividad de "enseñar matemáticas" y, por tanto, con usar, de manera flexible, el conocimiento específico sobre las matemáticas, el aprendizaje y la gestión del discurso matemático, y la interacción en el aula. La competencia docente del profesor es un requisito para que los estudiantes aprendan con comprensión. Las diferentes competencias docentes con relación a la enseñanza de las matemáticas identificadas a partir de una situación específica de aula deben complementarse con las competencias transversales que permitan, al profesor de matemáticas, manejar los aspectos particulares. Algunas de estas competencias docentes transversales tienen que ver con el papel del profesor en contextos con recursos tecnológicos y multiculturales.

Globalmente considerada, esta manera de entender la práctica de enseñar matemáticas y la competencia docente necesaria tiene implicaciones sobre la manera en la que se diseñan las oportunidades de aprendizaje del profesor. Estos diseños pueden ser útiles al profesor para que oriente sus esfuerzos, ya sea involucrado en programas de actualización, ya sea en sus esfuerzos de superación cotidiana.

Oportunidades de aprendizaje profesional para el docente

El enfoque de los diferentes programas de desarrollo profesional pueden variar: centrarse en las matemáticas que se movilizan al resolver los problema que organizan una lección; en las estrategias que los estudiantes desarrollan en situaciones específicas, o en la propia planificación de la lección. Sea cual sea el foco inicial, se comparte la idea de que la reflexión compartida de los profesores sobre las matemáticas, el aprendizaje y la enseñanza puede llevar a desarrollar su competencia docente y, por consiguiente, la mejora del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. La idea de la reflexión compartida se apoya en el hecho de que a veces es necesario que los docentes cuestionen sus propias creencias acerca de lo que son las matemáticas escolares, cómo se produce el aprendizaje y su papel en la enseñanza. Asumiendo que esas creencias están enraizadas en prácticas sociales que han realizado durante mucho tiempo, su cuestionamiento sólo es posible también durante el desarrollo de determinadas prácticas sociales. Algunos ejemplos de este tipo de oportunidades de aprendizaje profesional se describen a continuación.

Un foco sobre las matemáticas de los problemas

Koellner y cols. (2007) describen un modelo de desarrollo profesional dirigido a aumentar el conocimiento de los profesores de las matemáticas para la enseñanza y a mejorar su práctica docente. El modelo consta de un ciclo de tres talleres en los que se crean oportunidades para que analicen un problema de matemáticas desde la perspectiva de su potencial para el aprendizaje matemático de sus alumnos. El trabajo en pequeños grupos o equipos permite aportar los medios para construir una comunidad de práctica que anima a la reflexión sobre la práctica y al aprendizaje de matemáticas. En este modelo, el análisis de un problema de matemáticas desde la perspectiva de la enseñanza y del aprendizaje potencial en los alumnos permite que los profesores vinculen cuestiones matemáticas, cuestiones sobre la gestión de la enseñanza del problema en el aula, y cuestiones sobre el aprendizaje matemático pretendido en los estudiantes.

Durante el primer taller, los profesores investigan el potencial de los problemas de matemáticas viéndolos como instrumentos de aprendizaje; por ejemplo, en el contexto de un programa de actualización de profesores en servicio, Gómez y Sánchez (2008) informan de un taller de estadística que dirigieron durante 3 años, tiempo que duró el programa. El propósito del taller era doble, por un lado, que los docentes comprendieran y asimilaran los elementos de un pensamiento estadístico, en especial, *el ciclo investigativo* (Ciclo PPDAC = "Problema-Plan-Datos-Análisis-Conclusiones") y *dos tipos de pensamiento*: necesidad de los datos y transnumeración (véase Wild y Pfannkuch, 1999); por el otro, que aprendieran a crear condiciones en su salón de clases a fin de que los alumnos adquieran esos elementos como parte del desarrollo de su pensamiento estadístico. Así desde una nota periodística que informa acerca de un problema de salud frecuente en los niños de primaria causado por el excesivo peso que cargan en sus mochilas, se derivo el problema de *determinar si en el salón de clases había estudiantes que cargaran en sus mochilas más de 10% de su peso corporal.*

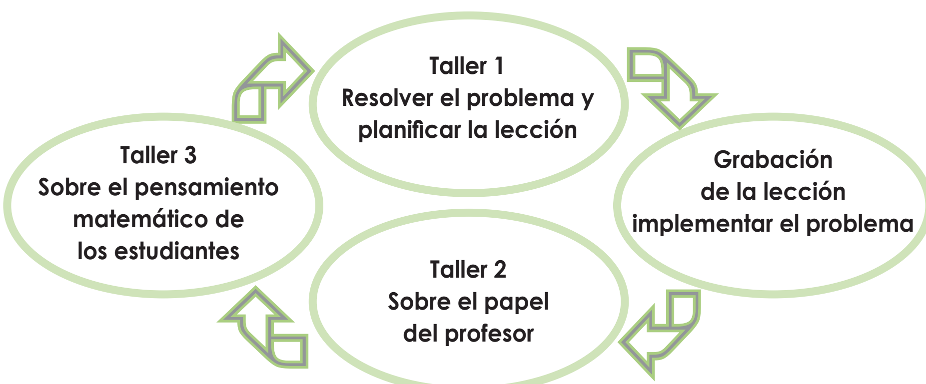


Figura 6.2. Ciclo de talleres.

El análisis del problema permite generar oportunidades para explorar las posibilidades matemáticas, identificar posibles objetivos a conseguir con su resolución, e intentar prever posibles estrategias de los estudiantes. Después del taller 1, los profesores enseñan el problema y graban en video las sesiones, recogen el material escrito por los alumnos y toman notas de lo sucedido. Segmentos de estas grabaciones se convierten en material para desarrollar otros dos talleres, uno centrado en el papel del profesor (taller 2) y centrado en el pensamiento matemático que manifestaron los estudiantes durante la implementación del problema. La tercera fase (taller 3) se centra en el pensamiento matemático de los estudiantes, según se manifiestó durante la lección. Para ello, el taller usa como material de trabajo videoclips seleccionados de las grabaciones de la lección y trabajos de los alumnos, y se plantean algunas "cuestiones claves" desde el pensamiento matemático de los estudiantes que permiten organizar la discusión.

El modelo de intervención basado en el ciclo de resolución de problema repetido de manera reiterativa, permite a los profesores desarrollar competencias docentes específicas que generan un "conocimiento en uso" en situaciones vinculadas a la práctica, al mismo tiempo que pueden llegar a valorar la pertinencia del conocimiento reunido por las investigaciones en matemática educativa usado para identificar lo relevante de las situaciones de enseñanza de esta disciplina.

Un foco sobre cómo los estudiantes aprenden matemáticas

Algunos programas de desarrollo profesional han puesto su foco en la comprensión de los profesores de cómo los estudiantes aprenden matemáticas y cómo usar este conocimiento para guiar a sus alumnos en su aprendizaje. Cuando los docentes discuten con otros las estrategias y los procedimientos usados por sus estudiantes, o los de otros profesores, conjeturando el conocimiento matemático que puede estar justificando esta manera de proceder, les permite reinterpretar su propia comprensión matemática. Para que estas iniciativas tengan sus frutos, el tipo de tareas a examinar deben ser desafiantes y mostrar un rango amplio de respuestas de los estudiantes. Estas iniciativas de desarrollo profesional pueden consistir en la aplicación reiterada de ciclos de talleres, cada uno centrado en las matemáticas de los problemas, la comprensión de las matemáticas de los estudiantes y, finalmente, la implementación de la lección. Por ejemplo, los profesores pueden observar conjuntamente videoclips en los que se muestren diferentes respuestas a un mismo problema, indicando diferentes rangos de sofisticación (Llinares y Sánchez, 2005); también podría ser que los docentes de secundaria discutan acerca de la comprensión matemática que se infiere de las siguientes respuestas y justificaciones dadas a un problema sobre divisibilidad por alumnos de educación secundaria (Bodí, 2006).

> Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta:
>
> El número $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ es:
>
> *a)* Divisible por 5.
> *b)* Divisible por 2 y por 4.
> *c)* Divisible por 3.
> *d)* Divisible por 6.
> *e)* Divisible por 15.
>
> La respuesta y justificación de Marisa (12 años)
>
> Profesor: —¿El número $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ es divisible por 5?
> Marisa: —Entre 5, mmm..., sí..., creo que sí.
> Profesor: —Usted contestó en el cuestionario que no.
> Marisa: —Mmm... pues yo creo que sí, porque aparece un 5.
> Profesor: —Compruébelo, por favor.
> Marisa (*realiza el cálculo de K y divide por 5*): —No, porque K no acaba en 0 o en 5.

Profesor: —Antes dijo que sí.

Marisa: —No es.

Profesor: —¿K sería múltiplo de 2?

Marisa: —No, no acaba en número par.

Profesor: —Diga si K es divisible por 3.

Marisa: —Creo que sí, porque... Sí es porque la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Profesor: —Diga si K es divisible por 6.

Marisa: —No, porque por 2 no era, entonces tampoco es por 6.

Profesor: —¿K es divisible por 15?

Marisa: —Mmm... ¿por 15?, sí, no lo sé, tengo que operar.

Profesor: —¿Era divisible por 5?

Marisa: —No, entonces no podría ser divisible por 15.

Profesor: —¿Tiene claro que hay dos sumandos.

Marisa: —Sí.

Profesor: —Sin realizar operaciones, ¿podría indicarme si K es divisible por 5?

Marisa: —No sabría decirle, no, tendría que saber por lo menos el número.

La respuesta y justificación de Ángel (12 años)

E: —¿$K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ es divisible por 5?

Ángel (*realiza operaciones*): —Es 663, no es porque acaba en 3.

E: —¿K es múltiplo de 2?

Ángel: —No, porque 3 no es múltiplo de 2.

E: —¿K es múltiplo de 4?

Ángel: —Mmm... no, porque 63 no es múltiplo de 4.

E: —¿K es múltiplo de 3?

Ángel: —Sí, porque la suma de sus cifras es 15.

E: —¿K es múltiplo de 6?

Ángel (*divide*): —No.

E: —¿K es múltiplo de 15?

Ángel: —Mmm... tampoco porque 15 sólo tiene dos divisores que son 5 y 3, es múltiplo de 5.

E: —¿Tiene claro que hay dos sumandos?

Ángel: —Sí.

E: —¿Sabría contestar sin buscar el valor de K?

Ángel: —Mmm, no.

La discusión de los profesores acerca de las matemáticas que hay detrás de este problema y de las respuestas de los estudiantes permite centrar su atención sobre diferentes focos a lo largo de distintos ciclos de talleres. Algunos de estos focos pueden ser *a)* el dominio de validez matemática de las respuestas; *b)* las cuestiones que el profesor plantea a partir de las respuestas para ayudar a los alumnos a desarrollar una mejor comprensión de estos tópicos matemáticos; *c)* el tipo de problemas que sería posible plantear desde lo que se puede aprender sobre el pensamiento de los estudiantes en relación con estas respuestas, y *d)* el potencial matemático de los problemas propuestos para el aprendizaje de los estudiantes.

El uso de casos para apoyar el aprendizaje y la práctica reflexiva del profesor

Los casos son descripciones de aspectos de la realidad de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas que se usan para apoyar las discusiones en pequeño y gran grupo de profesores, guiados por un formador que ayuda a determinar el foco, el progreso y los resultados de la discusión. Los casos suelen ser viñetas de situaciones de enseñanza en forma de texto escrito, videoclips o, recientemente, en formato multimedia que describen incidentes críticos en la enseñanza. Sea cual sea el formato que adopta el caso, este tiene una naturaleza descriptiva al capturar las acciones del profesor y se sitúa en contextos particulares, con estudiantes específicos y unas matemáticas localizadas en el currículo, lo que facilita la presentación de dilemas de la enseñanza como foco de discusión. La discusión de los casos proporciona oportunidades para desarrollar análisis críticos sobre la enseñanza y el aprendizaje, reflexionar acerca de su propia práctica e intercambiar perspectivas con los compañeros, permitiendo ampliar su competencia docente haciéndoles ser más reflexivos en relación con su propia práctica (Planas, Fortuny e Iranzo, 2009). El cuadro 1 presenta un ejemplo de un caso que puede dar lugar a un debate entre los docentes para interpretar lo que sucede, la pertinencia de la secuencia de las tareas matemáticas propuestas, así como el posible curso de actuación a partir de ese momento.

Cuadro 1. El caso de Javi (6-7 años) y la relación entre el desarrollo de estrategias efectivas y el tipo de problemas aritméticos elementales.

Javi tiene 6 años y está al final del primer trimestre de 1º de primaria. Durante el primer trimestre ha resuelto "cuentas" de sumar dos números de un dígito (por ejemplo: 5 + 8), y cuentas de sumar números de dos dígitos, pero sin llevar en las unidades (en algunos casos se llevaba en las decenas), lo que no plantea ningún problema a Javi (por ejemplo: 77 + 51). También realizó restas de dos números de un dígito (por ejemplo: 9 - 5).

Otras de las actividades que hace es contar de 1 en 1, o de 2 en 2 hacia delante empezando desde un número diferente del uno. Asimismo, cuenta hacia atrás de 1 en 1 desde números como el 17. Sin embargo, tiene algunas dificultades en contar hacia atrás de 2 en 2 a partir de números como el 17. Además, hizo ejercicios de ordenar de menor a mayor una lista de números (hasta el 20) y está usando dibujos del ábaco para representar números de dos dígitos. Finalmente, resolvió problemas aritméticos de estructura "cambio-añadir, incógnita cantidad final", y "cambio-quitar, incógnita cantidad final", con números pequeños. En estos momentos, su profesor le pone un “problema de comparación-cuántos más” con los números 5 y 8.

Pepa tiene 5 naranjas, y Alba tiene 8 naranjas.
¿Quién tiene más?
¿Cuántas más?

Primero le pregunta quién tiene más y Javi responde que Alba, y luego el profesor pregunta "¿Cuántas más?".

Javi ante esta nueva pregunta empieza a pronunciar “seis, siete, ocho…”, levantando cada vez un dedo, hasta que tiene levantados ocho dedos, y escribe 13 en el folio.

Se supone que Javi ha ido pronunciando las palabras número hasta llegar a 13, levantando cada vez un dedo. Se ha detenido al tener 8 dedos levantados —y haber pronunciado “trece” aunque sea mentalmente (es posible que haya subutilizado la cantidad de 8 ante los 8 dedos levantados—; es decir reconoce de golpe que una mano abierta y tres dedos son 8).

A continuación escribe 13 en el folio.

La estrategia utilizada es contar hacia delante desde **n** (primer número que aparece, en este caso el 5) tantas unidades como indica el segundo sumando (en este caso 8), llevando pistas de los que va contando levantando un dedo cada vez, y deteniéndose cuando el número de dedos levantados coincide con el segundo sumando (8). Sin embargo, el profesor al ver la dificultad de Javi con el problema de comparación (relación entre la estructura semántica del problema planteado y la estrategia usada por el alumno), cambia el tipo de problema y le presenta uno de “cambio-quitar, la incógnita la cantidad final”.

Javi tiene 5 naranjas y se come 3, ¿cuántas le quedan?

Javi escribe los números y hace una resta dando como respuesta 2.

Luego el docente le pregunta otro problema, con la misma estructura, pero cambiando los números. Ahora con 5 y 8

Javi tiene 8 naranjas y se come 5, ¿cuántas le quedan?

La estrategia que Javi utiliza en este problema es la de representar con los dedos la cantidad 8 (levanta 8 dedos) y va quitando de uno en uno hasta una cantidad de 5 dedos —se supone que va pronunciando la secuencia numérica en voz baja desde 1. Al quedarse con 3 dedos levantados, da como respuesta 3. La estrategia utilizada puede considerarse de "modelar las cantidades y la acción". Luego escribe una resta (8-5) en vertical y escribe el resultado de 3.

Cuando el profesor comprueba que Javi es capaz de representarse mentalmente las situaciones de "cambio-quitar incógnita la cantidad final", al interpretar la estrategias de resolución que reflejan dicha situación, le vuelve a plantear un problema de "comparación-cuántos más", con los mismos números del problema anterior (5, 8).

Tu madre tiene 8 naranjas. Tu padre 5 naranjas.
¿Quién tiene más?
¿Cuántas más?

Javi dice que su madre es la que más tiene, por lo que Javi representa bien las cantidades del problema, y la relación entre sus magnitudes. Sin embargo para responder a la segunda cuestión, la estrategia que Javi utiliza consiste en levantar 8 dedos de golpe (dice "ocho"), y empieza a añadir dedos (se supone que mientras va levantado cada dedo va pronunciado, mentalmente, la sucesión numérica, desde 9 hacia delante. Se para cuando tiene 5 dedos levantados —y se supone que ha dicho la palabra "trece". Javi escribe en su cuaderno "13".

Algunas veces el soporte del caso son videoclips, lo que permite ilustrar distintos estilos de enseñanza para analizar las diferencias y cómo se relacionan con los logros de los estudiantes. Los videos no tienen por qué mostrar ejemplos "excelentes" de enseñanza, sino sólo ser vistos como oportunidades para que los profesores estudien formas de enseñanza mientras discuten el caso y con la posibilidad de generalizar ideas al comparar lo visto en diferentes casos, aprendiendo a conceptualizar la enseñanza desarrollando un lenguaje más preciso de la práctica.

Trabajando juntos para mejorar la práctica de enseñar matemáticas

Una de las características de las oportunidades de aprendizaje de los profesores se da cuando trabajan juntos para mejorar su práctica. En seguida se describe una situación que permite identificar los focos de relevancia para la mejora de la práctica desde la relación con otros docentes, constituyéndose en contextos de formación continua (Llinares, 2003: 190-191). En la descripción de la situación se pone de manifiesto cómo los intentos por mejorar el aprendizaje de los estudiantes relaciona las diferentes tareas profesionales del docente (diseñar la enseñanza, interpretar las producciones de los alumnos y gestionar el discurso matemático en el aula), creando oportunidades para el desarrollo de los diversos dominios de conocimiento (sobre las matemáticas, el aprendizaje, la enseñanza) y, por tanto, convirtiéndose en contexto de aprendizaje del profesor.

Sesión de trabajo sobre el significado de la multiplicación de fracciones de un grupo de maestros

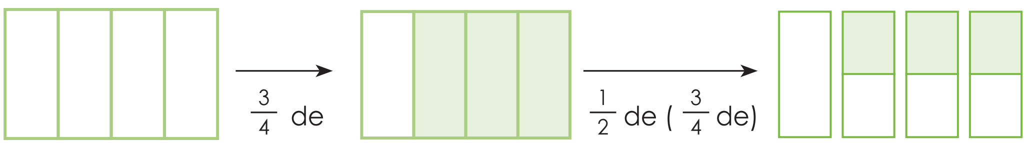
Los profesores de una escuela decidieron realizar reuniones mensuales para coordinar la enseñanza de las matemáticas en su escuela; piensan que la reflexión conjunta les ayudará a mejorar su práctica. Este año se centrarán en las fracciones, números decimales y razón, un contenido matemático que, aunque se revisa principalmente en 5º y 6º grados , se empieza a estudiar desde 3º y 4º; incluso algunas ideas iniciales sobre la noción de fracción como una relación entre una parte y el todo en contextos de repartir y medir se introduce en los primeros cursos de educación primaria.

Antonio, el profesor de 6º comenta a sus compañeros que él suele introducir la multiplicación de fracciones y que los alumnos no tienen dificultades en memorizar la regla que dice: para multiplicar fracciones se multiplican los numeradores por los numeradores y los denominadores por los denominadores; sin embargo, está preocupado por el significado de esa operación de multiplicar y las dificultades que tienen sus alumnos en identificar correctamente las situaciones en que es adecuado utilizar la multiplicación de fracciones. María, que da clase en 2º grado dice que para que los alumnos comprendan el significado de la suma y resta con números naturales les propone problemas, y discute con sus alumnos los diferentes procedimientos de resolución que sus alumnos plantean. Ella sugiere hacer lo mismo con los alumnos de sexto para la operación de multiplicar fracciones, por lo que plantea a sus compañeros encontrar un problema que pueda resolverse con la operación $\frac{4}{3} \times \frac{1}{5}$.

María propone que al resolver el problema utilicen dibujos o diagramas para explicar el significado del algoritmo de la multiplicación. Los docentes empezaron a revisar los libros de texto y materiales que tenían en la escuela para buscar situaciones que pudieran utilizar como problemas para discutir con sus alumnos los significados que se vinculan al algoritmo de la multiplicación de fracciones. Antonio comenta que en las fracciones propuestas por María hay una fracción ($\frac{4}{3}$) mayor que 1 y que eso puede plantear algunas dificultades para encontrar un problema; encontró uno en un libro de texto, pero con las dos fracciones menores que la unidad:

> *Pedro compró tres cuartos de una pizza y se comió la mitad, ¿qué fracción de la pizza entera se ha comido?*

María señala que este problema puede ayudar a presentar la expresión $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$, pero habría que subrayar que las dos fracciones en esta expresión no significan lo mismo y la unidad a la que se refieren tampoco es la misma. Mientras $\frac{3}{4}$ es una fracción que representa una cantidad (siendo la unidad la pizza entera), la fracción $\frac{1}{2}$ representa una acción (un operador) que al aplicarlo sobre la cantidad "$\frac{3}{4}$ de pizza", produce un resultado que es una fracción de la pizza entera (es decir, el resultado es una fracción que considera como unidad la pizza entera). Los dibujos que realizan para explicar este proceso, son una pizza rectangular por la facilidad de hacer las partes congruentes:



María y Antonio coinciden en que hay situaciones en que se puede aplicar la multiplicación de fracciones, idóneas para relacionar dos significados de las fracciones (una relación de una parte con un todo, y como un operador), además de subrayar la noción de unidad que muchas veces está implícita en el propio manejo de símbolos y que no se insiste lo suficiente. También se dan cuenta que cambiando las fracciones en la situación anterior, y comparando los procedimientos, las acciones y las simbolizaciones utilizadas y analizándolas con sus alumnos, es posible lograr un buen contexto para introducir algunos significados para la multiplicación de fracciones. Por ejemplo:

Pedro compró $\frac{3}{4}$ de una pizza y se comió la mitad de lo que ha comprado, ¿qué fracción de la pizza entera se ha comido?
Pedro compró $\frac{4}{3}$ de pizza y se comió $\frac{1}{5}$ de lo que ha comprado, ¿qué fracción de la pizza entera se ha comido?

Antonio sugiere que el mismo análisis debería realizarse si la operación fuera la multiplicación de números decimales, ya que es importante fijarse en el significado de los números y en el de la operación. María propone ver que saldría si piensan en la operación 0'3 x 0'25:

- ¿Qué significados podrían tener los números 0'3, y 0'25?
- ¿Qué significados debería tener la operación de multiplicar? (simbolizada por "x".)
- ¿Qué situaciones se podrían plantear coherentes con dichos significados?
- ¿Cómo se podría representar esta multiplicación?

Este tipo de situaciones pone de manifiesto una manera de vincular la reflexión sobre la práctica de los profesores con sus intentos de mejorar el aprendizaje de los estudiantes y que se convierten en sí mismas en oportunidades de aprendizaje profesional y, por tanto, en contextos de formación continua.

Tres pautas para la formación continua de los profesores de matemáticas

Es conveniente subrayar tres ideas desde las reflexiones y descripciones realizadas. Estas ideas intentan acentuar el principio de que los profesores necesitan llegar a ser aprendices de su práctica más que aprendices de estrategias y actividades. Para poder conseguir este principio, los profesores deben desarrollar:

- Una visión compartida para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- Una solida comprensión de los contenidos matemáticos que se enseñan.
- Una fuerte comprensión de cómo los estudiantes aprenden las matemáticas.
- Una comprensión de los diferentes contextos culturales.

- Un sentido de sí mismo como profesores de matemáticas (dimensión profesional, la enseñanza de las matemáticas como una profesión).

Para conseguir estos objetivos, las oportunidades de aprendizaje de los profesores, tanto las construidas *ad hoc* desde las instituciones, como las generadas de manera autónoma desde grupos de profesores, deberían tener en cuenta:

Idea 1: La importancia de crear oportunidades para que los profesores trabajen juntos para mejorar su práctica.
Idea 2: Situar estas oportunidades de aprendizaje considerando la reflexión sobre la práctica diaria de enseñar matemáticas.
Idea 3: La necesidad de fomentar la participación activa de los profesores en su propio proceso de aprendizaje profesional.

Es conveniente subrayar que la coherencia entre los objetivos de las oportunidades de aprendizaje del profesor (desarrollo profesional) y sus objetivos junto con su participación colectiva, son factores que se relacionan con mejoras en la competencia docente. En este tipo de situaciones, el conocimiento procedente de la didáctica de las matemáticas como ámbito científico es el elemento integrador en el desarrollo de iniciativas para la formación continua de los profesores de matemáticas.

Bibliografía

1. Didáctica de las matemáticas y el profesor de los niveles básicos

Baroody, A. J. y H. P. Ginsburg (1983), "The effects of instruction on children's understanding of the "equal" sign", en *The Elementary School Journal*, 84, pp. 199-212.

Fennema, E. y T. Romberg (1999), *Mathematics Classrooms that promote understanding,* Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Giménez, J. (1992), *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas*, Madrid, Editorial Síntesis.

Gutiérrez, A. y P. Boero (eds.) (2006), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*, Rotterdam/Taipei, Sense Publishers.

Kieran, C. (1981), "Concepts associated with the equality symbol", en *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 317-326.

— (2006), "Research on the Learning and Teaching of Algebra", en A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future,* Rotterdam/Taipei, Sense Publishers, pp. 11-50.

Lester, F. K. Jr. (ed.) (2007), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, NC-Reston, VA: IAP-NCTM.

Llinares, S. (2003), "Matemáticas escolares y competencia matemática", en M. C. Chamorro (coord.), *Didáctica de las Matemáticas,* Madrid, Pearson Prentice Hall, pp. 3-29.

Linares, S. y V. Sánchez (1998), "Evaluación en el área de matemáticas", en A. Medina, J. Cardona, S. Castillo y M. Domínguez (eds.), *Evaluación de los procesos y resultados del aprendizaje de los estudiantes,* Madrid, UNED, pp. 661-689.

Seo, K. H. y H. P. Ginsburg (2003), "'You've got to carefully read the math sentence...': Classroom context and children's interpretations of the equal sign", en A. J. Baroody y A. Dowker (eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise,* Mahwah, NJ, Erlbaum, pp. 161-187.

SEP (2006), *Educación Básica. Secundaria. Plan de estudios 2006,* México.

— (2009), *Programas de Estudio 2009 y Guías de Actividades. Quinto Grado,* México.

2. Sentido numérico y pensamiento algebraico

Baroody, A. J. y S. H. Tiilikainen (2003), "Two Perspective on Addition Development", en A. J. Baroody, A. Dowker (eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise (75-125)*, Mahwah, Nueva Jersey, EUA, Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M. J., G. Harel, T. Post y R. Lesh (1993), "Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct", en T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research,* Hilldsdale, NJ, Erlbaum, pp. 13-47.

Butto, C. y T. Rojano (2009), "Pensamiento algebraico temprano", en *X Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Veracruz, México.

Christmas, P. T. y J. T. Fey (1999), "Communicating the importance of algebra to students", en B. Moses (ed.), *Algebraic Thinking, grades K-12,* Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. *14-21*.

Filloy, E. (1999), *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 111-116.

Filloy, E. y T. Rojano (1989), "Solving equations: The transition from arithmetic to algebra", en *For the Learning of Mathematics,* 9(2), pp. 19-25.

Filloy, E., T. Rojano y L. Puig (2008), *Educational Algebra. A theoretical and Empirical Approach,* USA, Springer Science, pp. 169-175.

Greenes y Findell (1998), *Algebra Puzzles and Problems (Grade 7)*, Mountain View, CA, Creative Publications.

Kaput, J. (1998), "Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by 'algebrafying' the k-12 curriculum", en the National Council of Teachers of Mathematics & the Mathematics Sciences Education Board (eds.), *The nature and role of algebra in the k-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* Washington, National Research Council, National Academy Press, *p. 25-26.*

Kieran, C. y L. Chaluh (1993), "Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra", en B. Moses (ed.), *Algebraic Thinking*, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics.

Kriegler, S, (s/f), "Just what is algebraic thinking?", en *Mathematics in the Middle School* (en prensa). Disponible en: http://www.math.ucla.edu/~kriegler/pub/algebrat (consultado 29/02/10).

Lamon, S. J. (1993), "Ratio and Proportion: Children's cognitive and metacognitive processes, en T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research,* Hilldsdale, NJ, Erlbaum, pp. 131-156.

Lehrer, R., L. Jaslow y C. Curtis (2003), "Developing understanding of measurement in the elementary grades", en D. H. Clements y G. Bright (eds.), *Learning and Teaching Measurement*. *2003 Yearbook* Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 100-121.

Mack, N. K. (1990), "Learning fractions with understanding: building informal knowledge, en *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 1, pp. 16-32.

McIntosh, A., B. J. Reys y R. E. Reys (1992), "A proposed framework for examining basic number sense", en *For the Learning of Mathematics, 12*(3), pp. 2-8.

Radford, L. (2006), "Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective", en S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Mendez (eds.), *Proceedings of the XXVIII PME-NA*, Mérida, UPN.

Reys, R. E. y D. Ch. Yang (1998), "Relationship Between Computational Preformance and Number Sense Among Sixth and Eighth Grade Students in Taiwan", en *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (2), 225-237.

SEP (2009a), *Programas de Estudio 2009 y Guías de Actividades. Primer Grado,* México.

— (2009b), *Programas de Estudio 2009 y Guías de Actividades. Sexto Grado,* México.

Toluk, Z. y J. A. Middleton (2001), "The development of children's understanding of the quotient: A teaching experiment", en M. Van Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th Annual Meeting of the International Group of Psychology of Mathematics Education,* Utrecht, The Netherlands.

Thompson, I. (1999), "Getting you Head Around Mental Calculation", en I. Thompson (ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools*, Buckingham, Reino Unido, Open University Press, pp. 145-156.

3. Forma, espacio y medida

Battista, M. T. (2007), "The development of geometric and spatial thinking", en F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* Reston, VA, NCTM, pp. 843-908.

Burger, W. F. y J. M. Shaughnessy (1986), "Characterizing the van Hiele levels of development in geometry", en *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, pp. 31-48.

Chamorro, C. y J. M. Belmonte (1991), *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*, Madrid, Síntesis.

Clements, D. H. (1999), "Teaching length measurement: Research challenges", en *School Science and Mathematics,* 99(1), pp. 5-12.

Clements, D. H. y M. T. Battista (1992), "Geometry and spatial reasoning", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* New York, MacMillan, pp. 420-464.

Corberán, R. M. (1996), *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*, Valencia, Universidad de Valencia (tesis de doctorado).

Corberán, R. M. y A. Gutiérrez (1994), *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele,* Madrid, CIDE, MEC.

De Bock, D., W. Van Dooren, L. Verschaffel y D. Janssens (2001), "Secondary school pupils' improper proportional Reasoning: an in-depth study of the nature and Persistence of pupils' errors", en *Proceedings of the 25th PME Conference, 2*, pp. 313-320.

De Villiers, M. (1993), "El papel y la función de la demostración en matemáticas", en *Epsilon, 26,* pp. 15-29.

Furinghetti, F. y D. Paola (1999), Exploring students' images and definitions of area", en *Proceedings of the 23rd PME Conference, 2*, pp. 345-352.

Gutiérrez, A. (1996), "Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework", en *Proceedings of the 20th PME Conference*, 1, pp. 3-19. Disponible en: http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/textos.html (consultado el 27/7/2009).

Gutiérrez, A. (1998), "Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial", en *Revista EMA, 3* (3), pp. 193-220. Disponible en: http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/textos.html (consultado el 27/7/2009).

— (2007), "Geometría, demostración y ordenadores", en *Actas de las XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM),* vol. 3, Granada, Universidad de Granada. Disponible en: http://uv.es/Angel.Gutierrez/textos.html (consultado el 27/7/2009).

Gutiérrez, A. y A. Jaime (1998), "On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning", en *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20* (2/3), pp. 27-46.

Gutiérrez, A., A. Jaime y J. M. Fortuny (1991), "An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels", en *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (3), pp. 237-251.

Harel, G. y L. Sowder (1998), "Students' proof schemes: Results from exploratory studies", en A. H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (eds.), *Research in collegiate mathematics education*, *vol. III,* Providence, American Mathematical Society, *pp. 234-283*.

— (2007), “Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof”, en F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* Reston, VA, NCTM, *pp. 805-842*.

Jaime, A. (1993), *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento,* Valencia, Universidad de Valencia. Disponible en: http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/textos.html (consultado el 27/7/2009) (tesis de doctorado).

Jaime, A. y A. Gutiérrez (1990), “Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en S. Llinares y M. V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática,* Sevilla, Alfar, *pp. 295-384*. Disponible en: http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/textos.html (consultado el 27/7/2009).

Jaime, A., F. Chapa y A. Gutiérrez (1992), “Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B.”, en *Epsilon, 23,* pp. 49-62.

Krutetskii, V. A. (1976), *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, Chicago, The University of Chicago Press.

Mariotti, M. A. (2006), “Proof and proving in mathematics education”, en A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future*, Holanda, Sense Publishers, pp. 173-204.

Monaghan, F. (2000), “What Difference Does it Make? Children’s Views of the Differences Between Some Quadrilaterals”, *Educational Studies in Mathematics*, 42, 179-196.

Moreira, C. Q. y M. do R. Contente (1997), “The role of writing to foster pupils’ learning about area”, en *Proceedings of the 21st PME Conference*, 3, pp. 256-263.

Nunes, T., P. Light y J. Mason (1993), “Children’s understanding of measurement”, en *Proceedings of the 15th PME Conference, 3,* pp. 102-108.

Osborne, A. (1976), “Mathematical distinctions in the teaching of measure”, en D. Nelson y R. Reys (eds.), *Measurement in school mathematics. 1976, Yearbook*, Virginia, NCTM, pp. 11-34.

Outhred, L. y M. Mitchelmore (2000), “Young children’s intuitive understanding of rectangular area measurement”, en *Journal for Research in Mathematics Education, 31* (2), pp. 144-167.

Parzysz, B. (1988), "'Knowing' vs 'seeing'. Problems of the plane representation of space geometry figures", en *Educational Studies in Mathematics, 19*, pp. 79-92.

Piaget, J., B. Inhelder y A. Szeminska (1970), *The child's conception of geometry*. Londres, Routledge and Kegan Paul.

Potari, D, y V. Spiliotopoulou (1996), "Children´s approaches to the concept of volume", en *Science Education, 80* (3), pp. 341-360.

Presmeg, N. C. (1986), "Visualization in high school mathematics", en *For the Learning of Mathematics* 6.3, pp. 42-46.

Sánchez, E., Hoyos, V., Guzmán, J., Sáiz, M. (2008), *Matemáticas 1. Primero de secundaria*, México, Patria.

Presmeg, N. (2006), "Research on visualization in learning and teaching mathematics", en A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future*, Holanda, Sense Publishers, *pp. 205-235*.

Santillana (ed.) (2006), *Matemáticas, 5°. curso de Educación Primaria,* Madrid.

SEP (2004), *Programa de Educación Preescolar,* México.

— (2006), *Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006,* México.

— (2008), *Educación Básica. Primaria. Plan de estudios 2009. Etapa de prueba,* México.

— (2009), *Programas de estudio 2009. Segundo grado. Educación básica. Primaria,* México.

SM Ediciones (ed.) (2007), *Matemáticas, 4°. curso de Educación Primaria,* Madrid.

Van Hiele, P. M. (1986), *Structure and insight,* Nueva York, Academic Press.

4. Manejo de la información

Amir, G. S. y J. S. Williams (1999), "Cultural influences on children's probabilistic thinking", en *Journal of Mathematical Behavior, 18 (1)*, pp. 85-107.

Batanero, C. y C. Díaz (2004), "El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística", en J. Patricio Royo (ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas,* Zaragoza, ICE, pp. 125-164.

Batanero, C. y E. Sánchez (2005), "What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability?", en G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning,* Nueva York, Springer, pp. 241-266.

Batanero, C., J. Godino, D. Green, P. Holmes y A. Vallecillos (1994), "Errors and difficulties in understanding statistical concepts", en *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), pp. 527-547.

Ben-Zvi, D. y J. Garfield (2004), "Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges", en D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking,* The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 3-15.

Benson C. T. y G. A. Jones (1999), "Assessing students' thinking in modeling probability contexts", en *The Mathematics Educator, 4*(2), pp. 1-21.

Bright, G. W. y S. N. Friel (1998), "Graphical representations: Helping students interpret data", en S. P. Lajoie (ed.), *Reflections on Statistics. Learning, teaching and assessment in grades k-12,* Londres, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 63-88.

Cañizares, M. J. (1997), *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias,* Granada, Universidad de Granada (tesis de doctorado).

Cobo, B. y C. Batanero (2000), "La mediana, ¿un concepto sencillo en la enseñanza secundaria?", en UNO, 23, pp. 85-96.

Cramer, K., T. Post y S. Currier (1993), "Learning and Teaching Ratio and Proportion: Research Implications", en D. T. Owens (ed.), *Research Ideas for the Classroom,* Nueva York, McMillan, pp. 159-178.

Curcio, F. R. (1987), "Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs", en *Journal for Research in Mathematics Education,* 18 (5), pp. 382-393.

Fischbein, E. (1975), *The intuitive sources of probabilistic reasoning in children,* Dordrech, Reidel.

Friel, S., F. Curcio y G. Bright (2001), "Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications", en *Journal for Research in mathematics Education,* 32(2), pp. 124-158.

Gal, I. (2002), "Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities", en *International Statistical Review,* 70(1), pp. 1-25.

Godino, J., C. Batanero y M. J. Cañizares (1987), *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*, Madrid, Síntesis.

Green, D. R. (1983), "A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years", en D. R. Gray, P. Holmes, V. Barnett, y G. M. Constable (eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, Londres, Teaching Statistics Trust, vol. 2, pp. 766-783.

Heitele, D. (1975), "An epistemological view on fundamental stochastic ideas", en *Educational Studies in Mathematics* 6, pp. 187-205.

Jones, G. A. (ed.) (2005), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. Nueva York, Springer.

Jones, G., C. Langrall y E. Mooney (2007), "Research in probability. Responding to classroom realities", en F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Greenwich, Information Age Publishing, NCTM, pp. 958-1009.

Karplus, R., S. Pulos y E. K. Stage (1983), "Proportional reasoning of early adolescents", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Adquisition of Mathematics Concepts and Processes,* Florida, Academic Press, pp. 45-90.

Lamon, S. J. (1993), "Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes", en T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research,* Nueva York, Erlbaum, pp. 131-156.

Lamon, S. J. (2007), "Rational numbers and proportional reasoning", en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Charlotte, EU, Information Age Publishing.

Lavin, S. W. (2002), "Proportional reasoning: One problem, many solutions", en B. Litwiller y G. Bright (eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions,* Reston, EU, pp. 138-144.

Li, D. Y. y S. M. Shen (1992), "Students' weaknesses in statistical projects", en *Teaching Statistics,* 14(1), pp. 2-8.

Mayén, S. (2009), *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato, Granada,* Universidad de Granada (tesis de doctorado).

Piaget, J. y B. Inhelder (1951), "*La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*", París, Presses Universitaires de France.

Pollatsek, A., S. Lima y D. Well (1981), "Concept or computation: students' understanding of the mean", en *Educational Studies in Mathematics,* 12, pp. 191-204.

Salinas, O. (2007), *Niveles de pensamiento de los maestros de primaria acerca de la probabilidad y su vínculo con los propósitos y contenidos de los materiales oficiales,* México, UPN (tesis doctoral no publicada).

Schwartz, S. L. y D. J. Whitin (2006), "Graphing with Four-Year-Olds. Exploring the Possibilities through Staff Development", en G. F. Burril y P. C. Elliot (eds.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance,* Sixty Eight Yearbook, EU, National Council of Teacher of Mathematics, pp. 5-16.

SEP (2006), *Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Plan de Estudios 2006*, México.

Shaughnessy, J. M. (1992), "Research in probability and statistics: Reflections and directions, en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* Nueva York, Macmillan, pp. 465-494.

— (2007), "Research on statistics learning and reasoning", en F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* EU, Information Age Publishing, pp. 958-1009.

Shaughnessy, J. M., J. Garfield y B. Greer (1996), "Data handling", en A. Bishop *et al*. (eds.), *International handbook of mathematics education*, Dordrecht, Netherland, Kluwer, vol. 1, pp. 205-237.

Strauss, S. y E. Bichler (1988), The development of children's concepts of the arithmetic average", *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1).

Tarr, J. E., H. S. Lee y R. I. Rider (2006), "When data and chance collide: Drawing inferences from empirical data", en G. F. Burril y P. C. Elliot (eds.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance* Sixty eight Yearbook, EU, National council of Teacher of Mathematics, *pp. 139-149.*

Taylor, J. (1997), "Young children deal with data", en *Teaching Children Mathematics, 4*, pp. 146-149.

Watson, J. M. (2005), The probabilistic reasoning of middle school students", en G. A. Jones (ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning,* Springer, pp. *145-169*.

Watson, J. M. (2006), *Statistical Literacy at School. Growth and Goals*, EU, Erlbaum.

Watson, J. M. y J. B. Moritz (2000), "The longitudinal development of understanding of average", *Mathematical Thinking and Learning,* 2(1 y 2), 11-50.

5. La tecnología para el aprendizaje de las matemáticas

Ballheim, C. (1999), "How our readers feel about calculators", en *Dialogues.*

Clements, D., M. Battista y J. Sarama (2001), "LOGO and Geometry", en *Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education*, 10.

Dettori, G., R. Garuti y E. Lemut (2001), "From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet", en R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (eds.), *Perspectives on school algebra*, Netherlands, Kluwer Academic, pp. 191-208.

Drier, H. L. (2000), "The Probability Explorer: A research-based microworld to enhance children's intuitive understandings of chance and data", en *Focus on Learning Problems in Mathematics, 22(3-4),* pp. 165-178.

Floris, R. (2005), "À l'ecole obligatoire la calculatrice peut-elle contribuer à l'apprentisage des mathématiques?", en *Math-École,* 215, pp. 19-27.

Freudenthal, H. (1981), "Major problems in Mathematics Education", *Educational Studies in Mathematics*, *12* (2), pp. 133-150.

Guzmán, J., C. Kieran y H. Squalli (2003), "La calculadora con pantalla multilínea y el surgimiento de estrategias numéricas en alumnos de primero, segundo y tercer año de secundaria", en *Educación Matemática*, 15 (2), pp. 105-127.

Kaput, J. J. (1992), Technology and mathematics education", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* Nueva York, Macmillan, pp. 515-556.

Konold, C. y C. D. Miller (2005), *TinkerPlots: Dynamic data exploration, EU,* Key Curriculum Press. Disponible en: http://www.keypress.com/tinkerplots.

Laborde, C. (1998), "Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer-based environments", en C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study*, Netherlands, Kluwer Academic Press, pp. 113-121.

Noss, R. y C. Hoyles (1996), *Windows on Mathematical Meanings, Netherlands,* Kluwer Academic Press.

Olive, J. y J. Lobato (2008), "The learning of rational number concepts using technology, en M. K. Heid y G. W. Blume (eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, vol. 1. Research Syntheses*, EU, Information Age Publishing, pp. 55-108.

Olive, J., K. Makar, V. Hoyos, O. Kosheleva, L. Kor y R. Ströber (2009), "Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies", en C. Hoyles y J. B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology. Rethinking the Terrain (17th ICMI Study Book)*, Nueva York, London, Springer.

Papert, S. (1997), "Why School Reform is Impossible", en *The Journal of the Learning Sciences,* 6 (4), pp. 417-427.

Ruthven, K. (2009), "Towards a calculator-aware number curriculum", en *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* 8 (1).

Sacristán, A. I. (2003), " La importancia de los micromundos computacionales como entornos *didácticos* estructurados para fomentar e investigar el aprendizaje matemático, 3*er. Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC)*, Costa Rica, Instituto Tecnológico de Costa Rica. Disponible en: www.matedu.cinvestav.mx/~asacristan/Sacristan_Ciemac.pdf].

Tabach, M., A. Arcavi y R. Hershkowitz (2008), "Transitions among different symbolic generalizations by algebra beginners in a computer intensive environment", en *Educational Studies in Mathematics,* vol. 69, Netherlands, Springer, pp. 53-71.

SEP (2006), *Educación Básica. Secundaria. Programas de Estudio 2006,* México.

— (2009), *Educación Básica. Primaria. Sexto grado. Programas de Estudio 2006,* México.

Sutherland, R. (1993), "Thinking Algebraically: Pupils Models Developed in Logo and a Spreadsheet Environment", en Lemut, du Boulay, Dettori (eds.), *Cognitive Models and Intelligent Environments far Learning Programming,* Springer-Verlag, NATO ASI serie F, pp. 270-283.

Sutherland, R. y T. Rojano (1993), "A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems", *en Journal of Mathematical Behaviour 12*(4), pp. 353-383.

6. Pautas para la formación continua de los profesores de matemáticas

Ávila, A. (2006), *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*, México, Paidós Educador.

Ávila, A. (coord.) (2004), *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*, México, SEP.

Ball, D. L., H. C. Hill, y H. Bass, (2005), "Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?", en *American Educator*, 29, pp. 14-46.

Bodí, S. (2006), *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales,* Departamento de Innovación y Formación Didáctica-Universidad de Alicante, España (tesis de doctorado).

Gómez, A. L. y E. Sánchez (2008), "El pensamiento estadístico en la planificación de lecciones de estadística por profesores de secundaria" en R. Luengo González, B. Gómez Alfonso, M. Camacho Machín y L. J. Blanco Nieto (eds.), *Investigación en Educación Matemática XII*, España, Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper", pp. 359-368.

Hiebert, J., A. K Morris, D. Berk, y A. Jamsen (2007), "Preparing Teachers to Learn from Teaching, en *Journal of Teacher Education*, 58(1), pp. 47-61.

Koellner, K., J. Jacobs, H. Borko, C. Schneider, M. Pittman, E. Eiteljorg, K. Bunning, y Frykholm (2007), "The Problem-solving Cycle: A Model to Support the Development of Teachers' Professional knowledge", en *Mathematical Thinking and Learning,* 9(3), pp. 273-303.

Llinares, S. (2008), "Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional", en M.C. Chamorro (ed.), *Didáctica de las Matemáticas.* (pp.187-220). Madrid: Pearson-Prentice hall.

— (2009), "Competencias docentes del maestro en la docencia de las matemáticas y el diseño de programas de formación", en *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas,* núm. 51, pp. 92-102.

Llinares, S. y K. Krainer (2006), "Mathematics (student) teachers and teachers educators as learners", en A. Gutierrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future,* Rotterdam/Taipei, Sense-Publishers, pp. 429-459.

Llinares, S. y V. Sánchez (2005), *Elementos del conocimiento base para la enseñanza de las matemáticas. Vol. 1: La comprensión del significado del número. Vol. 2: Procesos de resolución de problemas aritméticos elementales y fracciones,* Sevilla, Secretariado de Recursos audiovisuales-Universidad de Sevilla: DVD.

Penalva, M. C., I. Escudero y D. Barba (eds.) (2006), *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de matemáticas*, Granada, Grupo Proyecto Sur.

Planas, N., J. M. Fortuny y N. Iranzo (2009), "Análisis de casos por un equipo de investigación-acción: ejemplos para la formación" en *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas,* núm. 51, pp. 103-115.