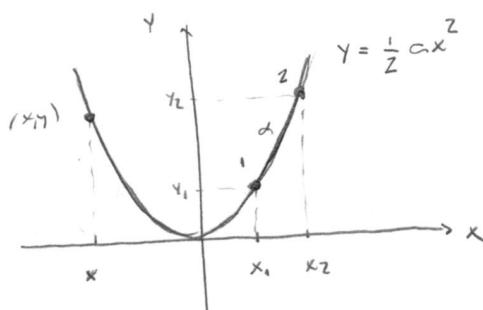


2. Geometria diferencial

2.1 Introdução

Curva no plano

Ao longo da curva: $dy = \alpha x \, dx$

Parametrização: $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$x \mapsto \left(x, \frac{1}{2} \alpha x^2 \right)$$

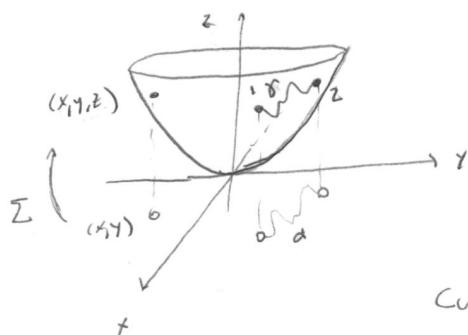
Comprimento da curva γ :

$$L_\gamma = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{dx} dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} \, dx$$

$$= \frac{\alpha x \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} + \alpha \operatorname{arsenh}(\alpha x)}{2\alpha} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ ds^2 &= (1 + \alpha^2 x^2) dx^2 \\ \text{elementos de linha} &\quad \text{metrífica} \quad \text{distância em coordenadas} \\ g(x) & \end{aligned}$$

Superfície no espaço

Parabolóide: $z = \frac{1}{2} (\alpha x^2 + b y^2)$

Parametrização: $\Sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (da superfície)

$$(x, y) \mapsto (x, y, \frac{1}{2} (\alpha x^2 + b y^2))$$

$$\text{Curva: } \begin{cases} \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, & t \mapsto (x(t), y(t), \frac{1}{2} [\alpha x(t)^2 + b y(t)^2]) \\ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, & t \mapsto (x(t), y(t)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{No parabolóide: } dz &= \alpha x \, dx + b y \, dy \Rightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \underbrace{(1 + \alpha^2 x^2)}_{g_{11}} dx^2 + \underbrace{(1 + b^2 y^2)}_{g_{22}} dy^2 + 2 \alpha b x y \, dx \, dy \\ &\quad g_{12} = g_{21} \end{aligned}$$

Escrevendo: $(x, y) = (x^1, x^2) \Rightarrow$

$$\boxed{ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b}$$

elementos de linha métrica distância em coordenadas

g não é diagonal.

Comprimento da curva:

$$L_2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} dt \quad \leftarrow \text{fórmula geral p/ comprimento}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(1+a^2 x^2) \dot{x}^2 + (1+b^2 y^2) \dot{y}^2 + 2abxy \dot{x}\dot{y}} dt$$

- Superfície:
 - (i) Parametrizações $\Sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 - (ii) Métrica: $g_{ab}(x, y)$, um tensor simétrico

No parabolóide: $g = \begin{bmatrix} 1 + a^2 x^2 & abxy \\ abxy & 1 + b^2 y^2 \end{bmatrix}$

- Mudança de parametrização

novas coordenadas: x^1, x^2 ; $x^a = x^a(x^1, x^2)$

$$\Rightarrow dx^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x^a}{\partial x^2} dx^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = g_{ab} \underbrace{\frac{\partial x^a}{\partial x^1} \frac{\partial x^b}{\partial x^1}}_{g_{11}} dx^1 dx^1 + \underbrace{\frac{\partial x^a}{\partial x^2} \frac{\partial x^b}{\partial x^2}}_{g_{22}} dx^2 dx^2 = g_{11} dx^1 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2$$

$\underbrace{g_{11}}$ \leftarrow métrica nas novas coordenadas

Geodésicos



Geodésica: curva de menor comprimento entre A e B.

$$\boxed{\frac{\delta L}{\delta y} = 0}$$

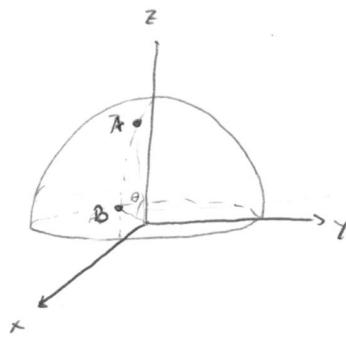
para qualquer variação δy t.q. $\delta y|_A = \delta y|_B = 0$.

- ∃ curvas de comprimento máximo (geometria Riemanniana)

- Em \mathbb{R}^3 , geodésicos são linhas retas (\Leftrightarrow movimento inercial).

Exemplo Superfície esférica

simetria



Tome coordenadas tg:

$$y_A = y_B = 0$$

• Elementos de linha (métrica)

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow dz = -\frac{x}{z(x,y)} dx - \frac{y}{z(x,y)} dy$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2 - y^2}\right) dx^2 + \underbrace{\left(1 + \frac{y^2}{r^2 - x^2 - y^2}\right) dy^2}_{g_{11}} + Z \underbrace{\frac{xy}{r^2 - x^2 - y^2} dx dy}_{g_{12} = g_{21}}$$

$$\Rightarrow L_\gamma = \int_A^B \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2 - y^2}\right) \dot{x}^2 + \left(1 + \frac{y^2}{r^2 - x^2 - y^2}\right) \dot{y}^2 + Z \frac{xy}{r^2 - x^2 - y^2} \dot{x} \dot{y}} dt$$

$$\bullet \text{ Meridianos } \gamma: \quad \alpha(t) = (t, 0) \Rightarrow \begin{cases} x = t & , \quad \dot{x} = 1 \\ y = 0 & , \quad \dot{y} = 0 \end{cases}$$

$$L_\gamma = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - t^2}} dt = r \arcsen\left(\frac{t}{r}\right) \Big|_{t_A}^{t_B} = r \Delta\theta$$

• Variação do comprimento para: $\gamma + \delta\gamma$ ($t + \delta t$)

$$\begin{cases} x = t + \delta x(t) & , \quad \dot{x} = 1 + \delta \dot{x}(t) \\ y = \delta y(t) & , \quad \dot{y} = \delta \dot{y}(t) \end{cases}$$

$$L_\gamma + \delta L = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - t^2 - 2t\delta x}} (1 + 2\delta \dot{x}) dt \approx L_\gamma + \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - t^2}} \left(\frac{t \delta x}{r^2 - t^2} + \delta \dot{x} \right) dt$$

$$\delta L_\gamma = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - t^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{(-2t)}{r^2 - t^2} \delta x + \frac{t}{r^2 - t^2} \delta \dot{x} \right) dt = 0$$

$$\boxed{\frac{\delta L}{\delta \gamma} = 0}$$

↑ integração por partes

- Geodésicos são arcos de grandes círculos
- Distância geodésica: $d = r\Delta\theta$

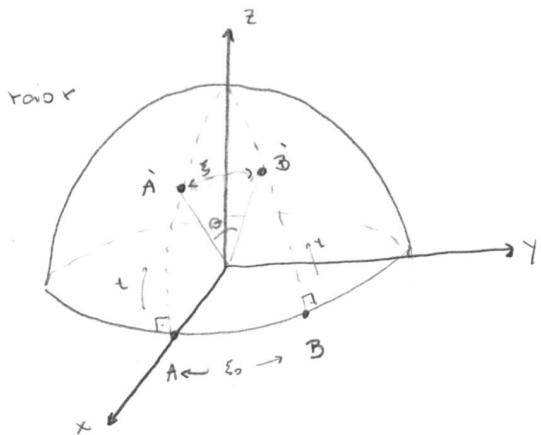
• Em geral: $L_g = \int \underbrace{\sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b}}_v dt$

$$\delta L_g = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial v}{\partial \dot{x}^a} = 0 \quad \text{Eq. Euler-Lagrange}$$

$$\text{Eq. geodésica: } \ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0$$

~ símbolo de Christoffel

Curvatura e desvio geodésico



Distância geodésica: $\xi(t)$

Determinaremos a aceleração relativa:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = ? \quad (\text{em } t=0)$$

Considere geodésicos próximos: $\xi_0 \ll r$.

• $\vec{\gamma}_A(t) = (r \cos(t/r), 0, r \sin(t/r))$

$$\vec{\gamma}_B(t) = (r \cos(t/r) \cos(\xi_0/r), r \cos(t/r) \sin(\xi_0/r), r \sin(t/r))$$

$$\vec{\gamma}_A \cdot \vec{\gamma}_B = r^2 \cos^2\left(\frac{t}{r}\right) \cos\left(\frac{\xi_0}{r}\right) + r^2 \sin^2\left(\frac{t}{r}\right) \quad [\xi_0 \ll 1]$$

$$\approx r^2 \left[\cos^2\left(\frac{t}{r}\right) \left(1 - \frac{\xi_0^2}{2r^2} \right) + \sin^2\left(\frac{t}{r}\right) \right] = r^2 \left[1 - \cos^2\left(\frac{t}{r}\right) \frac{\xi_0^2}{2r^2} \right] = I$$

$$\vec{\gamma}_A \cdot \vec{\gamma}_B = r^2 \cos^2\left(\frac{t}{r}\right) = r^2 \left(1 - \frac{\xi^2}{2r^2} \right) \quad - II$$

Expondo em t e comparando termos:

$$\xi^2 = \xi_0^2 \cos^2\left(\frac{t}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \xi_0^2 + 2\xi_0 \xi \frac{d\xi}{dt} t + \xi_0 \xi^2 t^2 \approx \xi_0^2 \left(1 - \frac{t^2}{r^2} \right) \Rightarrow \xi_0 = -\xi_0 \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1 - \frac{x^2}{2} \\ \xi(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{I}''|_{t=0} = \frac{\xi_0^2}{r^2}$$

$$\boxed{\frac{d\xi}{dt}(0) = -\frac{\xi_0}{r^2}}$$

$$\text{II}'|_{t=0} = -\xi_0 \frac{d\xi}{dt}(0)$$

• Curvatura Gaussiana é: $K = \lim_{r \rightarrow 0} r^3 \left(\frac{2\pi d - C(r)}{\pi d^3} \right) \xrightarrow{\text{referir}} K = \frac{1}{r^2}$

$$(2) \Rightarrow K = -\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\xi_0} \frac{d\xi}{dt}$$

Onde:
 - os geodésicos são inicialmente paralelos
 - t é o comprimento ao longo dos geodésicos



Tres possibilidades:



esfera



plano
(Euclidiano)



hiperbolóide

Observações

1. K é uma noção intrínseca de curvatura

$g \rightarrow$ comprimento, geodésicos \rightarrow curvatura

Pode ser medido sobre a superfície

2. \exists outras noções de curvatura, extrínseca, que depende do mergulho.

Ex:



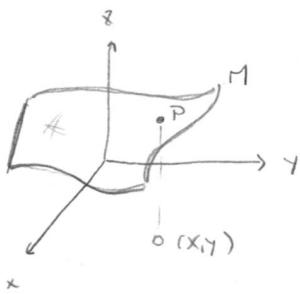
$z(t)$ é constante $\Rightarrow K=0$

\therefore plano, intrinsecamente

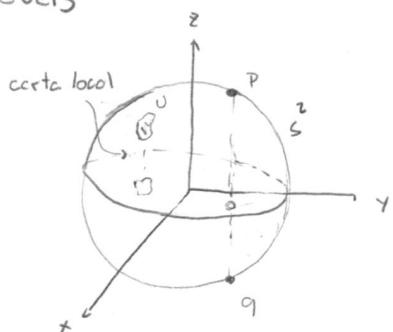


Medidas locais não sentem a curvatura.

2.2) Variedades diferenciáveis



Superfície parametrizada por $(x, y) \in \mathbb{R}^2$



Em geral, não existe parametrizações globais.

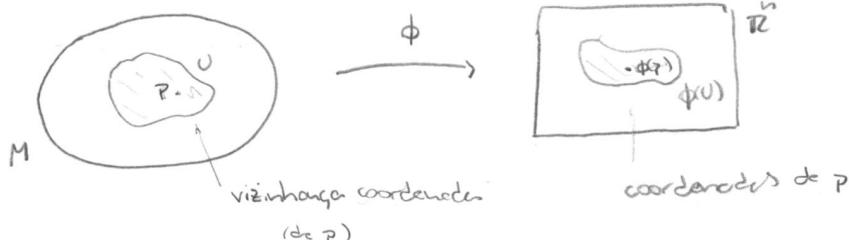
- Espaço localmente Euclidiano

- Vizinhanças euclidianas coladas de maneira:

(i) contínua \rightarrow var. topológicas (C^0)

(ii) diferenciável \rightarrow var. diferenciáveis (C^k, C^∞) \uparrow campos tensoriais

- Sistema de coordenados em carta local: \langle aberto $U \subset M$, $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ injetiva \rangle

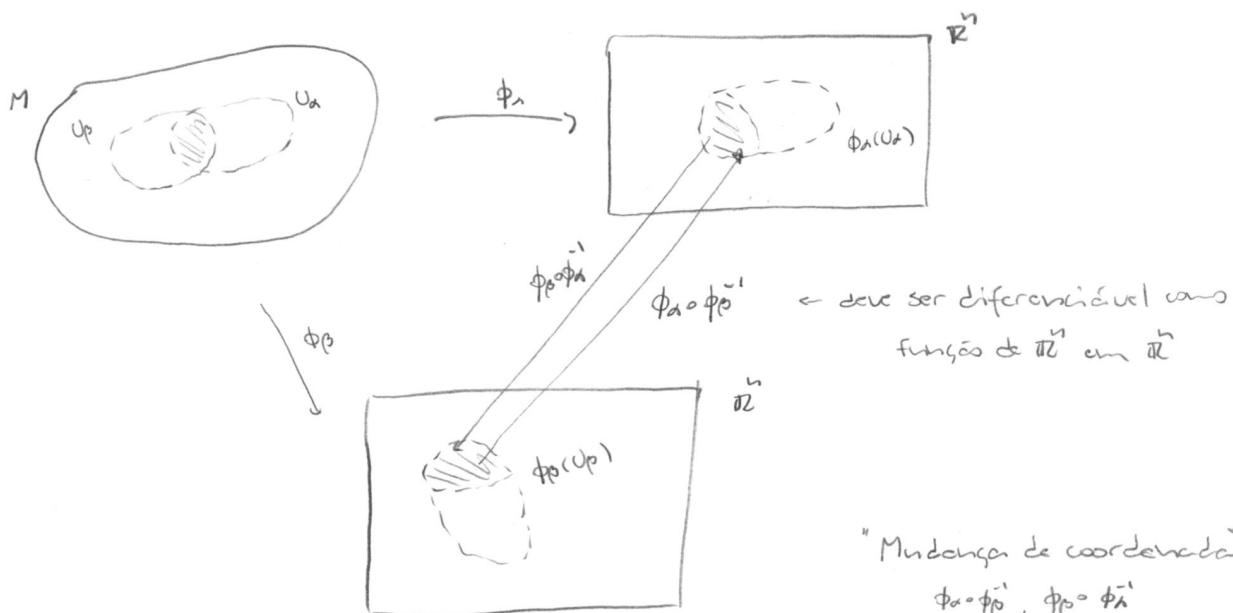


coordenadas diferentes são atribuídas a pontos distintos

- Atmos C^∞ : $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, uma coleção de cartas locais $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que

(i) $\bigcup U_\alpha = M$, a união dos domínios das mapas U_α cobre todo o espaço.

(ii) As cartas locais são coladas de maneira diferenciável: se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}: \text{Im}(\phi_\beta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^\infty$.



- Variedade diferenciável (C^∞) de dimensão n (n -variedade): $\langle M, \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\} \rangle$, um conjunto M equipado com um atlas máximo $\{(U_\alpha, \phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n)\}$, ou seja, que contém todos coordenados locais compatíveis.

Notas: - Variedades C^k são definidas análogamente.

- Variedades C^0 são variedades topológicas.

- Condições de que atlas seja máximo usada para criterio distinções entre estruturas analíticas.

- $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em M . Não é única, em geral: \exists^* possuem

(28) várias estruturas diferenciáveis não equivalentes, por exemplo. Em 3d, ela é única. Em \mathbb{R}^4 , há um contínuo de estruturas diferenciáveis distintas.

Exemplo Círculo S^1 .

pnts. do círculo: $\theta \in [0, 2\pi)$ ~ não é intervalo aberto



Para cobrir o círculo com abertos, são necessários ao menos dois vizinhos coordenados. Por exemplo:

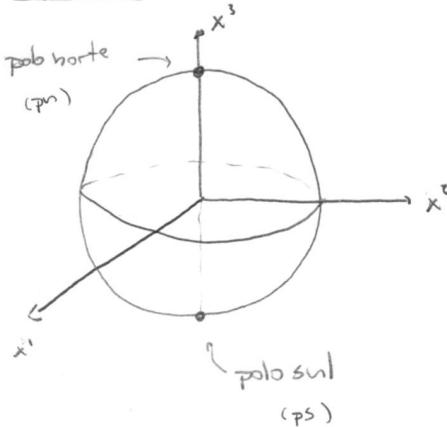
$$U^1 = (0, \pi), \quad \phi_1(p) = \theta$$

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1}(q) = \theta \bmod 2\pi$$

$$U^2 = (\pi - \alpha, 2\pi + \alpha), \quad \phi_2(q) = \theta, \quad \text{com } \alpha > 0.$$

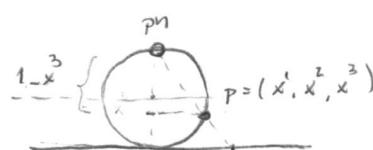
(resto da divisão de θ por 2π)

Exemplo Esfera S^2 : coordenadas estereográficas



$$\text{Esfera unitária: } (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$$

$$\text{Carta 1, } U_1 = S - \{pn\}, \quad \phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



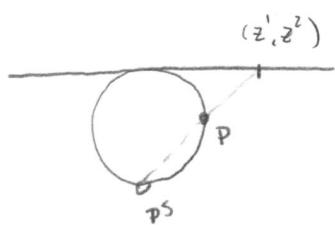
$$\phi_1(p) = (y^1, y^2)$$

$$\frac{x^1}{1-x^3} = \frac{y^1}{2} \Rightarrow y^1 = \frac{2x^1}{1-x^3}$$

$$\text{Análogamente: } y^2 = \frac{2x^2}{1-x^3}$$

$$\therefore \phi_1(x^1, x^2, x^3) = (y^1, y^2) = \left(\frac{2x^1}{1-x^3}, \frac{2x^2}{1-x^3} \right), \quad x^3 = \sqrt{1-(x^1)^2 - (x^2)^2}$$

• Carta 2:



$$U_2 = S^2 - \{p\}, \quad \phi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\phi_2(x^1, x^2, x^3) = (z^1, z^2) = \left(\frac{2x^1}{1+x^3}, \frac{2x^2}{1+x^3} \right)$$

Mudança de coordenadas:

$$z^i = \frac{4y^i}{(y^1)^2 + (y^2)^2}, \quad i=1,2.$$

→ diferenciável em $U_1 \cap U_2 = S^2 - \{p_1, p_2\}$.

Exemplo Superfícies de Riemann de gênero g.



toro ($g=1$)



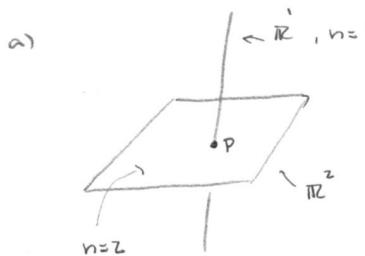
$g=2$



gênero g

Superfícies 2d compactas e orientáveis. A superfície de Riemann com $g=0$ é o esfera.

Contraexemplos



Em p, não há vizinhança \mathbb{R}^n .

Não é variedade topológica

b) Superfície cônica em \mathbb{R}^3



$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

não é diferenciável em p, apenas contínua.

S é variedade topológica, mas não diferenciável

Mudança de coordenadas

$$\phi_\alpha(p) = (x^1, \dots, x^n)$$

$$\phi_\beta(p) = (y^1, \dots, y^n)$$

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^a} = \underbrace{\frac{\partial y^b}{\partial x^a}}_{\text{Em } \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y^b}{\partial x^c} \end{vmatrix} \neq 0.$$

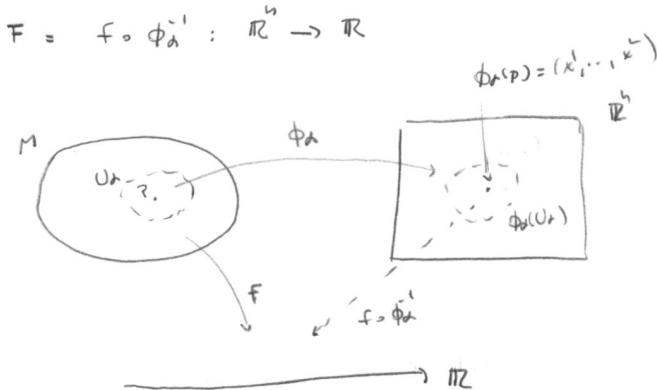
Matriz Jacobiana.

Funções diferenciáveis

$$\text{Em } U_\alpha \cap U_\beta : \begin{cases} \phi_\alpha(p) = (x^1, \dots, x^n) \\ \phi_\beta(p) = (y^1, \dots, y^n) \end{cases} \Rightarrow \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \text{Im}(\phi_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \quad i=1, \dots, n$$

Consideremos uma função f definida em M , $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Temos:



Se $f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ , dizemos que f é C^∞ (smooth).

$\mathcal{F} = \text{espaço de todas funções } C^\infty \text{ em } M \quad [C^\infty(M)]$

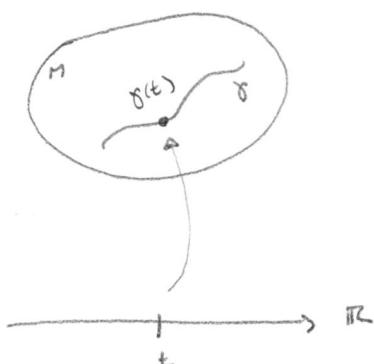
Curvas diferenciáveis

Curva: $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$

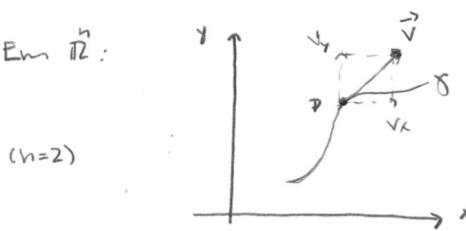
Diz-se que γ é diferenciável quando

$$f(\gamma(t)): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

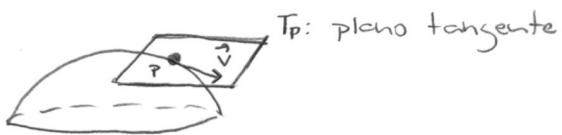
é C^∞ para qualquer função diferenciável $f \in C^\infty(M)$.



2.3) Campos vetoriais

Vetores em um ponto PEm \mathbb{R}^n :

Em uma variedade:



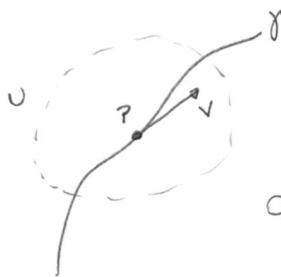
$$\text{Derivada direcional: } \vec{v} \cdot \vec{\nabla} F = v^i \frac{\partial F}{\partial x^i}$$

↓
Vetor tangente: $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto x^i(t)$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = v^i \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}$$

"Vetores como"

"derivadas direcionais"

DefiniçãoCurva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M, \gamma(t_0) = P$ Função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ O vetor tangente v à curva γ no ponto P é definido como:

$$v: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v(f) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} [f(\gamma(t))]$$

O vetor tangente v atribui a cada função f na variedade sua derivada ao longo da curva. A definição dada é independente da escolha de coordenadas, pois não faz referência a certos locais U_i, ϕ_i .

• Expressões em coordenadas

Carta local: $U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

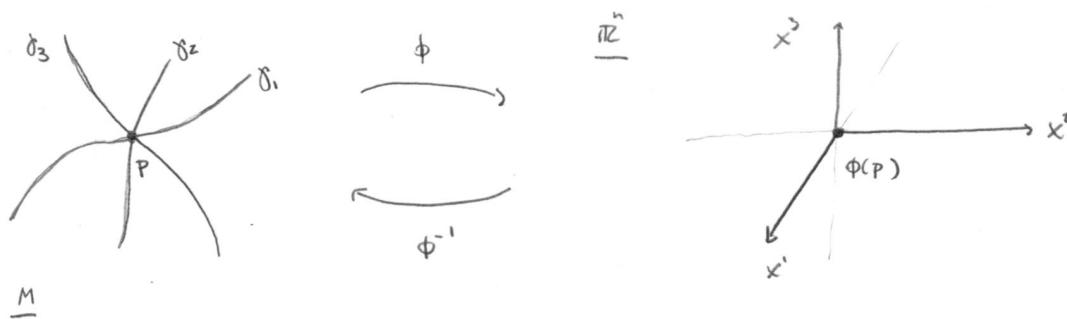
$$f(\gamma(t)) = f \circ \gamma(t)$$

$$= (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma)(t) = F(x^i(t))$$

$\underbrace{F: \mathbb{R}^n \rightarrow t}_{x^i(t)}$

$$v(f) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} [f(\gamma(t))] = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} [F(x^i(t))] = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}}_{v^i} \Rightarrow v(f) = v^i \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}$$

Exemplo Vectors coordenados associados ao círculo local (U, ϕ)



A curva γ_a tem como imagem o eixo x^a :

$$\phi(\gamma_a(t)) = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) \Rightarrow x^a(t) = \delta_a \cdot t$$

\uparrow
a-ésima coordenada

O vetor tangente à curva γ_a é o vetor coordenado da G T_p :

$$\partial_a(f) = \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] \Big|_{t=0}$$

Sua expressão em coordenadas é dada por:

$$(\partial_a)^i = \frac{dx^i}{dt} = \delta_a \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\partial_a(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta_a^i = \frac{\partial f}{\partial x^a}}, \quad a = 1, \dots, n.$$

Operações com vetores tangentes

Adição:

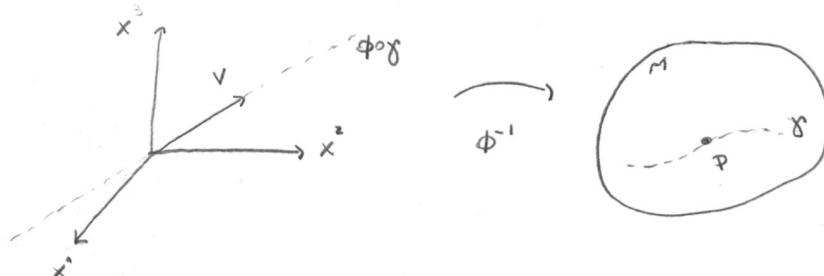
$$(U+V)(f) = U(f) + V(f)$$

Produto por escalar:

$$(dU)(f) = dU(f)$$

Proposições Qualquer vetor da forma $v = v^i \partial_i$ é tangente a uma curva γ .

Prova: Basta tomar uma curva $\gamma(t) = \phi^{-1}[\phi(p) + t(v^1, \dots, v^n)]$, $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$.



$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] \\ &= \frac{d}{dt} \left[(f \circ \phi^{-1})(\phi(p) + t(v^1, \dots, v^n)) \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad \therefore v = v^i \partial_i \end{aligned}$$

Espaco tangente T_p

O espaço tangente T_p é formado por todos os vetores tangentes a curvas diferentes passando pelo ponto p . Naturalmente, é possível que curvas distintas γ e γ' possuam o mesmo vetor tangente em p . Nesse caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} V: \text{ tangente a } \gamma \text{ em } p \\ V': \text{ tangente a } \gamma' \text{ em } p \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{V(f) = V'(f), \forall f \in C^k(M)}_{V \sim V'}$$

e não distinguimos V e V' . Assim, um vetor $v \in T_p$ é definido como uma classe de equivalência de vetores tangentes a p . Cada vetor descreve uma direção a partir do ponto p na variedade.

Exercício Prove que os vetores coordenados ∂_i formam uma base de T_p .

Mudança de coordenadas

Duas cortes locais em p : $\left\{ \begin{array}{l} \phi(p) = (x^1, \dots, x^n) \\ \phi'(p) = (x'^1, \dots, x'^n) \end{array} \right.$

Mapas de transição: $\left\{ \begin{array}{l} x^r = x^r(x^1, \dots, x^n), r=1, \dots, n \\ x^s = x^s(x^1, \dots, x^n), s=1, \dots, n \end{array} \right.$

Expandido um vetor v nas bases de vetores coordenados associados a cada corte local, obtemos a relação entre suas componentes nessas bases.

$$v = v^r \frac{\partial}{\partial x^r} = v^{r'} \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \frac{\partial}{\partial x^r} \Rightarrow \boxed{v^{r'} = \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} v^r}$$

$$v = v^r \frac{\partial}{\partial x^r} = v^s \frac{\partial x^r}{\partial x^s} \frac{\partial}{\partial x^s} \Rightarrow \boxed{v^s = \frac{\partial x^r}{\partial x^s} v^r}$$

Comparando com o caso de transformações de Lorentz no espaço de Minkowski:

$$e_{(r)} \rightarrow \partial_r, \quad \Delta^r{}_r \rightarrow \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}$$

Propriedades

1. $\nabla(af) = a\nabla(f)$
 2. $\nabla(f+g) = \nabla(f) + \nabla(g)$
 3. $\nabla(fg) = \nabla(f)g + f\nabla(g)$
- } linearidade
} regra de Leibniz

Definição 2 Um vetor tangente ∇ em p é uma função $\nabla: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as três propriedades acima. [Equivalente à primeira definição]

Campo vectorial em M

Um campo vectorial em M é uma função $\nabla: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que satisfaçõa as condições 1, 2 e 3 para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$ e $a \in \mathbb{R}$. Um campo vectorial associa um vetor tangente $\nabla(p) \in T_p$ a cada ponto $p \in M$ da verdade.

Exercício Considere a seguinte curva no plano \mathbb{R}^2 :

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(\lambda) = (\sin \lambda, \cos \lambda)$$

- Determine o vetor tangente à curva em cada ponto da mesma. Esboce a curva e represente o vetor tangente no ponto em que $\lambda=0$.
- Sejam ∂_r e ∂_θ os vetores coordenados associados a coordenadas polares. Mostre que esses vetores são representados na base coordenada associada às coordenadas cartesianas (x, y) por:

$$\partial_r = \cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y$$

$$\partial_\theta = -r \sin \theta \partial_x + r \cos \theta \partial_y$$

- Obtenha os componentes do vetor tangente a γ na base $\{\partial_r, \partial_\theta\}$.

Res:

$$a) \begin{cases} x'(x) = x(x) = \sin x \\ x''(x) = y(x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow \nabla' = \frac{dx'}{dx} = \cos x, \quad \nabla'' = \frac{dx''}{dx} = -\sin x$$

$$\therefore \boxed{\nabla = (\cos x, -\sin x)}$$

TRG - AULA 13

$$b) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \partial r &= \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \partial x + \sin \theta \partial y \\ \partial \theta &= \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \theta \partial x + r \cos \theta \partial y \end{aligned}$$

Note que, normalizando tais vetores, obtemos a base usual de vetores unitários:

$$\hat{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \hat{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

Além disso, com a identificação: $\partial x = \vec{i}$, $\partial y = \vec{j}$, temos:

$$\hat{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, \quad \hat{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}.$$

c) Transformando os componentes do vetor tangente para coordenadas polares:

$$\begin{cases} r = x^1 \\ \theta = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} v^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial x^1} v^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial x^1}{\partial x^2} v^2 \\ &= \frac{\partial r}{\partial x} \cos \lambda - \frac{\partial r}{\partial y} \sin \lambda \\ \begin{cases} x = x^1 \\ y = x^2 \end{cases} \quad v^2 &= \frac{\partial x^2}{\partial x^1} v^1 = \frac{\partial x^2}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^2} v^2 \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \lambda - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \lambda \end{aligned}$$

As derivadas parciais dependem do ponto onde são calculadas. Na curva γ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow \sin \lambda$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow \cos \lambda$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \rightarrow -\cos \lambda$$

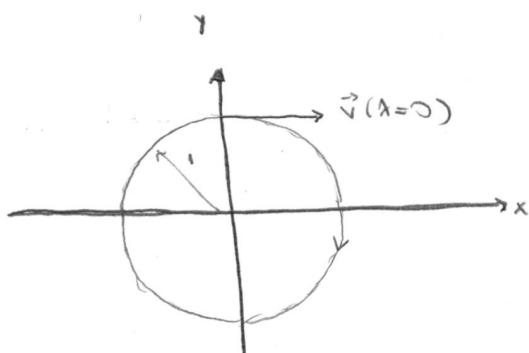
$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \rightarrow \sin \lambda$$

Substituindo:

$$v^1 = \sin \lambda \cos \lambda - \cos \lambda \sin \lambda = 0$$

$$v^2 = -\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda = -1$$

$$\therefore \boxed{v = -\partial \theta = (0, -1)_{\text{pol}}}$$



2.4) Campos tensoriais

Vetores duais (1-formas)

Em um ponto $p \in M$, o espaço cotangente T_p^* é definido como o espaço vetorial dual ao espaço tangente T_p . Ou seja, T_p^* é o espaço dos funcionais lineares sobre T_p :

$$\text{vetor dual } w \in T_p^* : \quad \begin{cases} w: T_p \rightarrow \mathbb{R} \\ w(\alpha U + V) = \alpha w(U) + w(V) \end{cases} \quad [\text{linearidade}]$$

Um campo vetorial dual é uma atribuição de um vetor cotangente $w(p)$ a cada ponto p de maneira diferenciável:

$$w(v) \in C^\infty(M), \quad \forall \text{ campo vetorial } v.$$

Ou seja, além de linear em cada ponto, a ação de um campo vetorial dual w em qualquer campo vetorial v deve ter como resultado uma função suave (C^∞).

Definição Um campo vetorial dual w em uma variedade diferenciável M é um mapa $w: \text{Vect}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ tal que:

$$(i) \quad w(U+V) = w(U) + w(V), \quad \forall U, V \in \text{Vect}(M)$$

$$(ii) \quad w(fV) = f w(V), \quad \forall f \in C^\infty(M) \text{ e } V \in \text{Vect}(M).$$

Vetores duais também são chamados de 1-formas. Representaremos o espaço de 1-formas por $\Omega^1(M)$.

Exemplo Diferencial df de uma função $f(x)$.

$$\begin{aligned} df(v) &= V(f) \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{definição de } df} &\Rightarrow \begin{cases} df(U+V) = (U+V)(f) = U(f) + V(f) = df(U) + df(V) \\ df(gV) = (gV)(f) = gV(f) = g df(V) \end{cases} \\ \therefore (i) \text{ e } (ii) &\text{ são satisfeitos.} \end{aligned}$$

Base do espaço T_p^*

Os diferenciais das funções coordenadas x^r formam uma base de T_p^* . A ação de dx^r em um vetor qualquer é:

$$dx^r(v) = v(x^r)$$

Em particular, para os vetores coordenados:

$$dx^r(\partial_x) = \partial_x(x^r) = \delta_x^r$$

ou seja, os vetores dx^r formam a base dual à base de vetores coordenados ∂_x . Segue que, para um vetor genérico:

$$dx^r(v) = v^\nu \partial_\nu x^r = v^\nu \delta_\nu^r = v^r$$

Um campo vetorial cotangente pode ser expandido na base dx^r em cada ponto da variedade:

$$w = w_\mu dx^\mu$$

Representação de w em um sistema de coordenadas.

A ação de w em um vetor é dada em termos de componentes por:

$$\begin{aligned} w(v) &= w_\mu dx^\mu (v^\nu \partial_\nu) \\ &= w_\mu v^\nu dx^\mu (\partial_\nu) \\ &= w_\mu v^\nu \delta_\nu^r = w_\mu v^r \end{aligned}$$

$$\therefore w(v) = w_\mu v^\mu$$

Exercício: Mostre que $w_\mu = w(\partial_\mu)$.

Mudança de coordenadas

Ao se passar de uma carta local $\phi(p) = (x^1, \dots, x^n)$ para outra carta local $\phi'(p) = (x'^1, \dots, x'^n)$, a base de T_p^* muda de acordo com:

$$dx^r = \frac{\partial x^r}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Troca de base induzida por mudança de coordenadas.

Os componentes de um vetor dual na nova base $d\mathbf{x}^r$ podem ser expressos em termos de seus componentes na base antiga $d\mathbf{x}^i$:

$$\omega = \omega_p d\mathbf{x}^p = \omega_p \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}^p}{\partial \mathbf{x}^r}}_{\downarrow} d\mathbf{x}^r \\ = \omega_p^i d\mathbf{x}^i$$

$$\therefore \boxed{\omega_p^i = \frac{\partial \mathbf{x}^p}{\partial \mathbf{x}^i} \omega_p}$$

Transformações dos componentes de ω .

Exercício Considere a seguinte curva em \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{d}(\lambda) = (\lambda^2, \lambda^3 + \lambda^2, \lambda)$$

Tomando $\lambda = -1$, tem-se $\mathbf{d}(-1) = (1, 0, -1) = p$. Seja $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

a) Obtenha o vetor tangente a \mathbf{d} . Calcule seus componentes em p .

b) Determine o diferencial df da função f .

c) Calcule a derivada diferencial de f no ponto p na direção do vetor tangente a \mathbf{d} .

Res: a) $v^i = \frac{dx^i}{dt} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = (2\lambda, 3\lambda^2 + 2\lambda, 1), \quad \forall \lambda \\ v(\lambda = -1) = (-2, 1, 1) \end{array} \right. \quad \left[v^i = \frac{dx^i}{dt} \right]$

b) $(df)_i = df(d_i) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Rightarrow$
 $\Rightarrow df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right) = -2 e^{-(x^2+y^2+z^2)} (x, y, z)$

O diferencial df também pode ser expresso explicitamente como combinações lineares dos vetores da base dual dx, dy, dz :

$$df = -2 e^{-(x^2+y^2+z^2)} (x dx + y dy + z dz)$$

$$\left[df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right]$$

c) Em $p = (1, 0, -1)$, temos:

$$df = -2 e^{-2} (1, 0, -1)$$

$$\left[df(v) = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i \right]$$

$$df(v) = (df)_i; v^i = -2 e^{-2} [1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1] = 6 e^{-2}$$

Campos tensoriais

Em cada ponto $p \in M$, um tensor de tipo (k,l) é definido como um funcional multilinear:

$$T: T_p \times \dots \times T_p \times T_p \times \dots \times T_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{K \text{ cópias}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{l \text{ cópias}}$

Um campo tensorial de tipo (k,l) é uma atribuição de um tensor de tipo (k,l) a cada ponto da variedade de maneira diferenciável:

$$T(w^{(1)}, \dots, w^{(n)}, v_{(1)}, \dots, v_{(l)}) \in C^\infty(M), \quad \forall w^{(r)}, v_{(s)}$$

Em cada ponto, uma base do espaço $\mathcal{T}(k,l)$ de todos os tensoros de tipo (k,l) pode ser construída tomando-se produtos tensoriais de vetores das bases coordenadas de

$$T_p \circ T_p^*$$

$$T = T^{p_1 \dots p_n} {}_{v_1 \dots v_l} \underbrace{\partial p_1 \otimes \dots \otimes \partial p_n \otimes dx^{v_1} \otimes \dots \otimes dx^{v_l}}$$

componentes de T em um sistema de coordenadas

Sob uma mudança de coordenadas, os componentes de T se transformam assim:

$$T^{p_1 \dots p_n} {}_{v_1 \dots v_l} = \frac{\partial x^{p_1}}{\partial x'^{p_1}} \dots \frac{\partial x^{p_n}}{\partial x'^{p_n}} \frac{\partial x^{v_1}}{\partial x'^{v_1}} \dots \frac{\partial x^{v_l}}{\partial x'^{v_l}} T^{p_1 \dots p_n} {}_{v_1 \dots v_l}.$$

Exercício Demonstre a regra de transformações acima a partir das fórmulas de transformações dos vetores da base ∂p e dx^v .

Operações com tensoros

Não se alteram: traço, contrações, produto tensorial

simetrizações e antisimetrizações

Alteram-se: expressões envolvendo a métrica: $\gamma_{pv} \rightarrow g_{pv}$

[próximas aulas] derivadas parciais não produzem novos tensoros: $\partial p \rightarrow \nabla_p$

"derivada covariante"

Exemplo Considere um tensor de tipo (0,2) simétrico com componentes:

$$S_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix}, \text{ em um dado sist. de coordenadas } (x, y).$$

Introduza novas coordenadas:

$$x' = \frac{2x}{y}, \quad y' = \frac{y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = x'y', \quad y = 2y'.$$

Os vetores das bases coordenadas de T_p nesses sistemas se relacionam por:

$$dx = y' dx' + x' dy', \quad dy = 2dy'.$$

O tensor S é escrito explicitamente como:

$$\begin{aligned} S &= dx \otimes dx + x^2 dy \otimes dy \\ &= (y' dx' + x' dy') \otimes (y' dx' + x' dy') + (x'y')(2dy') \otimes (2dy') \\ &= y'^2 dx' \otimes dx' + x'y' dx' \otimes dy' + x'y' dy' \otimes dx' + (x'^2 + 4x^2y'^2) dy' \otimes dy' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{\mu\nu}' = \begin{bmatrix} y'^2 & x'y' \\ x'y' & x'^2 + 4x^2y'^2 \end{bmatrix}$$

É comum o uso de uma notação mais compacta na qual são omitidos os símbolos dos produtos tensoriais:

$$dx \otimes dx \rightarrow dx^2, \quad dx \otimes dy \rightarrow dx dy, \quad dy \otimes dx \rightarrow dy dx, \quad dy \otimes dy \rightarrow dy^2.$$

Nessa notação:

$$\begin{aligned} S &= dx^2 + x^2 dy^2 \\ &= (y' dx' + x' dy')^2 + (x'y')^2 (2dy')^2 \\ &= y'^2 dx'^2 + x'y' (dx' dy' + dy' dx') + (x'^2 + 4x^2y'^2) dy'^2 \end{aligned}$$

O mesmo resultado seria obtido aplicando-se a fórmula de transformação em termos da matriz Jacobiana [verifique]:

$$S_{\mu\nu}' = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu}} S_{\mu\nu}.$$

2.5) O tensor métrico

Definição Uma métrica g em M é um tensor $(0,2)$ simétrico não-degenerado.

Em termos de coordenadas:

$$g: T_p \times T_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$U, V \mapsto g(U, V) \in \mathbb{R}$$

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad \det g \neq 0.$$

Em geral, omite-se o símbolo de produto tensorial,

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2.$$

ou seja, o elemento da linha ds^2 é uma representação da matriz, $g = ds^2$.

Isomorfismo $T_p \cong T_p'$ (subir e descer índices)

$$g \text{ é não-degenerado} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ inversa } g^{1\nu} \\ V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \text{ é isomorfismo } T_p \rightarrow T_p' \end{array} \right.$$

Métrica inversa:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu \quad \left\{ \begin{array}{l} W_\mu = g^{\mu\nu} V^\nu \text{ é isomorfismo inverso } T_p' \rightarrow T_p \\ W^\mu = g^{\mu\nu} W_\nu \end{array} \right.$$

Ação de g

$$\left. \begin{aligned} g(U, V) &= g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu (U^\mu \partial_\mu, V^\nu \partial_\nu) \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu (U^\mu \partial_\mu) dx^\nu (V^\nu \partial_\nu) \\ &= g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu = U \cdot V. \end{aligned} \right\}$$

Exemplo Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$$

$$V_a = V^a$$

$$g_{ab} = \text{diag}(+1, \dots, +1) = g^{ab}$$

$$W^a = W_a$$

Exemplo Espaço-tempo de Minkowski M^4

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$V_0 = -V^0, \quad V_i = V^i$$

$$g_{\mu\nu} = (-1, +1, +1, +1) = g^{\mu\nu}$$

$$W^0 = -W_0, \quad W^i = W_i$$

Exemplo Coordenadas esféricicas em \mathbb{R}^3

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta) \\ g^{ij} = \text{diag}(1, r^{-2}, r^{-2} \sin^{-2} \theta) \end{array} \right.$$

$$V_1 = V^1, \quad V_2 = r^2 V^2, \quad V_3 = r^2 \sin^2 \theta V^3$$

$$W^1 = W_1, \quad W^2 = \frac{1}{r^2} W_2, \quad W^3 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} W_3$$

Forma canônica Pode-se escolher uma base orthonormal teps em T_p na qual:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \dots, -1, +1, \dots, +1) = g(e_\mu, e_\nu)$$

em cada ponto $p \in M$. A assinatura da métrica é o número de autovalores positivos e negativos nessa representação. Em geral, ela não é uma base coordenada. Em um dado ponto p , existem coordenadas nas quais $g_{\mu\nu}$ assume tal forma em T_p e $\partial^\mu \partial_\nu = 0$ (mas $\partial^2 g \neq 0$).

- Métrica Riemanniana: todos sinais são positivos . $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, \dots, +1)$
- Métrica Lorentziana: um sinal negativo < 0 , $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$
restante positivos

A assinatura é constante se o tensor métrico g é contínuo e não degenerado, como assumimos. [Assinatura: número de sinais - c + na forma canônica.]

Medidas de comprimento e tempo próprio

- Tipos de vetores: $g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \left\{ \begin{array}{ll} < 0 & v \text{ é tipo tempo} \\ > 0 & \text{espaço} \\ = 0 & \text{luz} \end{array} \right.$

- Curva γ é de tipo: tempo, se $v = \dot{\gamma}'$ é um vetor tipo tempo ao longo de γ .
espaço
luz

- Comprimento de curva tipo espaço: $L_\gamma = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt$. $\dot{x} = dx/dt$.

Tempo próprio ao longo de curva tipo tempo: $c = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt$

- Ângulo entre vetores tipo espaço em p : $\cos \theta = \frac{g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu}{[g_{\mu\sigma} x^\mu x^\sigma g_{\nu\tau} y^\nu y^\tau]^{1/2}} = \frac{x \cdot y}{\sqrt{x \cdot x} \sqrt{y \cdot y}}$

Estrutura causal de M

Evento q é relacionado causalmente a $p \Leftrightarrow \exists$ curva tipo tempo em liz ligando p a q .



caus de luz locais em cada p determinados por g .

[Escolha de cone futuro e passado em cada p : orientação temporal]

2.6) Um universo em expansão

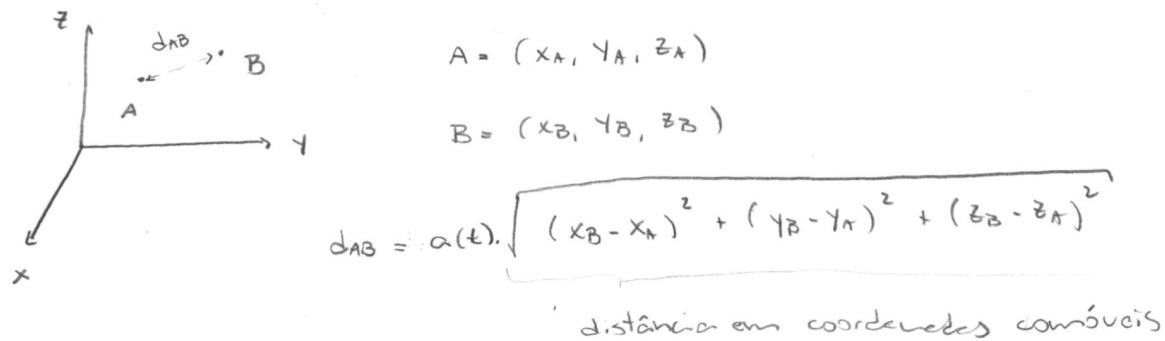
- Métrica de espaços FLRW planos:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

- Soluções isotrópicas e homogêneas da eq. de Einstein.

- Em cada fatia (ou folha) espacial com tempo $t = \text{cte}$:

$$(3) ds^2 = \alpha^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad \text{um espaço Euclidiano} \approx \mathbb{R}^3.$$



- Fator de escala $\alpha(t)$ depende do tipo de matéria:

$$\alpha(t) = t^q, \quad q = \begin{cases} 2/3 & , \text{ poeira} \\ & ("dominado por matéria") \\ 1 & , \text{ radiação} \\ & ("dominado por radiação") \end{cases} \quad (p=0)$$

$t \in (0, \infty)$

↑
Big Bang

$$\alpha(t) = e^{Ht}, \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad \Lambda: \text{constante cosmológica}$$

- Curvas tipo luz em um modelo de Big Bang: $\alpha(t) = t^2$, $\left\{ \begin{array}{l} 0 < q < 1 \\ 0 < t < \infty \end{array} \right.$
- Por simplicidade, fixe $y=z=0$. Determinaremos curvas $x^r(\lambda)$ tipo luz.

tangentes: $v = \frac{dx^r}{d\lambda} \partial_r \quad , \quad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{dz}{d\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dy(v) = dz(v) = 0$

a) $ds^2 = -dt^2 + t^{2q} (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$

\uparrow luz

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dt}{dx} = \pm t^q}$$

$$b) \quad O = g(V, V)$$

$$= [-dt^2 + t^{2q} (dx^2 + dy^2 + dz^2)](V, V)$$

$$= -dt \otimes dt (V, V) + t^{2q} [dx \otimes dx (V, V) + dy \otimes dy (V, V) + dz \otimes dz (V, V)]$$

$$= -dt(V) \cdot dt(V) + t^{2q} dx(V) \cdot dx(V)$$

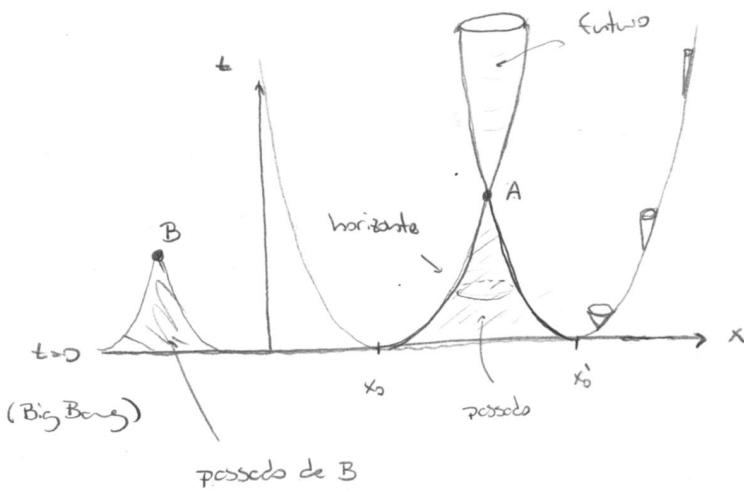
Mais: $\left\{ \begin{array}{l} dt(V) = dt(v^r \partial_r) = v^r dt(\partial_r) = v^r \delta^r_{\mu} = v^\mu = \frac{dt}{dx} \end{array} \right.$

$$dx(V) = dx(v^r \partial_r) = \dots = \frac{dx}{dx}$$

$$\Rightarrow dt(V) = \pm t^{\frac{q}{2}} dx(V) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \pm t^{\frac{q}{2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{dt}{dx} = \pm t^{\frac{q}{2}}}$$

$$c) \quad \frac{dt}{t^{\frac{q}{2}}} = \pm dx \quad \Rightarrow \quad \frac{t^{-\frac{q}{2}+1}}{1-q} \Big|_{x_0}^{x} = \pm (x - x_0)$$

$$t = [\pm (1-q)(x-x_0)]^{\frac{1}{1-q}} \quad [\text{tipo } x^\alpha, \alpha = 1/(1-q)]$$



- Em $t=0$, $\frac{dt}{dx}=0$: curva converge para o eixo x .

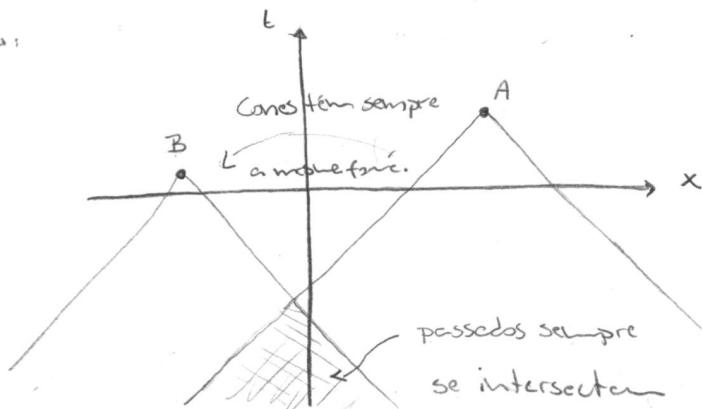
- $x > x_0$: $t = [(1-q)(x-x_0)]^{\frac{1}{1-q}}$

$x < x_0$: $t = [(1-q)(x_0-x)]^{\frac{1}{1-q}}$

- Curvas de luz são "deformadas"

- $\exists A, B$: $\text{passado}(A) \cap \text{passado}(B) = \emptyset$

Comparando com Minkowski:



3.2) Derivada covariante

Introduções: derivadas parciais não são tensores

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} W_{\nu} &= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \partial_{\rho} \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu}} W_{\nu} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \partial_{\rho} W_{\nu}}_{\text{regras de transf.}} + W_{\nu} \underbrace{\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}}_{\text{termo extra}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu}}, \end{aligned}$$

$\therefore \partial_{\mu} W_{\nu}$ não é tensor.

p/ tensor

Há várias generalizações de ∂ que formam tensores:

- derivada exterior $d\omega$ (apenas para K -formas)
- derivada de Lie $\mathcal{L}_\xi \omega$ (em relações a um campo vetorial ξ^I)
- derivada covariante, $\nabla_p V^{\nu}$ (requer uma conexão ∇)

A derivada exterior é definida em qualquer variedade. As derivadas de Lie e covariante requerem alguma estrutura extra: a escolha de um campo vetorial ξ , no caso da derivada de Lie, e a introdução de uma conexão, no caso da derivada covariante.

Definições: Uma derivada covariante em M é uma aplicação $\nabla: \mathcal{S}(K, l) \rightarrow \mathcal{S}(K, l+1)$

que leva T em ∇T com componentes $\nabla_p T^{I_1 \dots I_K}_{\nu_1 \dots \nu_L}$, tal que:

1. $\nabla(aT + S) = a.\nabla T + \nabla S$ [linearidade]
2. $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$ [regras de Leibniz]
3. $\nabla_p(T^{I_1 \dots I_K}_{\nu_1 \dots \nu_L}) = (\nabla T)_{\rho}^{I_1 \dots I_K}_{\nu_1 \dots \nu_L}$ [comuta com contração]
4. $\nabla_p \phi = \partial_p \phi$ [reduz-se a ∂ em escaler]

Diz-se que ∇ é livre de torção se: $\nabla_p \nabla_q \phi = \nabla_q \nabla_p \phi, \forall \phi$.

Notações: Derivada covariante \Leftrightarrow conexões afim (no fibrado tangente)

Símbolos de Christoffel (coeficientes da conexão)

1+2 \Rightarrow

$$\nabla_p v^y = \partial_p v^y + \Gamma_{p\lambda}^\lambda v^\lambda$$

[Wald, pag. 30-32]

↑
Símbolos de Christoffel ($d^3 = 64$ coeficientes)

• Regra de transformações

$$\forall v \in \text{tensor} \Rightarrow \nabla_r v^y = \frac{\partial x^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^y} \nabla_i v^y$$

Usando a fórmula para ∇v em termos de Γ :

$$\begin{aligned} \nabla_r v^y &= \partial_r v^y + \Gamma_{r\lambda}^\lambda v^\lambda \\ &= \frac{\partial x^r}{\partial x^i} \partial_r \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^y} v^y \right) + \Gamma_{r\lambda}^\lambda \frac{\partial x^i}{\partial x^y} v^\lambda \\ &= \frac{\partial x^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^y} \partial_r v^y + \frac{\partial x^r}{\partial x^i} \left(\partial_r \frac{\partial x^i}{\partial x^y} \right) v^y + \Gamma_{r\lambda}^\lambda \frac{\partial x^i}{\partial x^y} v^\lambda \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^y} \nabla_r v^y = \frac{\partial x^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^y} \partial_r v^y + \frac{\partial x^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^y} \Gamma_{r\lambda}^\lambda v^\lambda$$

Comparando as duas expressões, segue que:

$$\frac{\partial x^r}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^r \partial x^y} + \Gamma_{r\lambda}^\lambda \frac{\partial x^i}{\partial x^y} = \frac{\partial x^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^y} \Gamma_{r\lambda}^\lambda$$

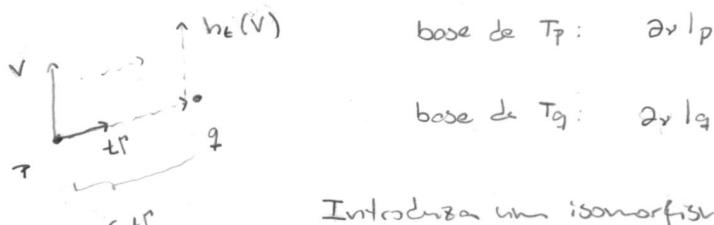
$$\Rightarrow \Gamma_{r\lambda}^\lambda = \frac{\partial x^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^y} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^r \partial x^y} \Gamma_{r\lambda}^\lambda - \frac{\partial x^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^y} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^r \partial x^y}$$

$\therefore \Gamma$ não é um tensor, mas é tal que sua combinação com derivadas parciais ∂_r produz um tensor $\nabla_r v$.

• Interpretações geométrica

[Schrödinger, "Space-time structure"]

Cap. IV

Introduza um isomorfismo: $\left\{ \begin{array}{l} h_t: T_p \rightarrow T_q \\ h_t(\partial_v l_p) = \partial_v l_q - \epsilon t^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda l_q \end{array} \right.$

$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ ← Índices de transf. linear

$\partial_\lambda l_q$ direção na qual se está demandado

Os coeficientes $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ descrevem uma transformação linear dependente da direção μ . O vetor v^ν é transportado em:

$$\begin{aligned} v|_p \rightarrow h_t(v|_p) &= h_t(v^\nu \partial_\nu l_p) \\ &= v^\nu h_t(\partial_\nu l_p) \\ &= v^\nu (\partial_\nu l_q - \epsilon t^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda l_q) \\ &= (v^\nu - \epsilon t^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\lambda) \partial_\nu l_q \\ &\quad [h_t(v|_p)]^\nu \end{aligned}$$

transporte paralelo: $v^\nu \rightarrow v^\nu - \epsilon t^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\lambda$, de P para q

A derivada covariante corresponde a:

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} \nabla_\mu v^\nu(p) &= \lim_{q \rightarrow p} \frac{v^\nu(q) - h_t[v^\nu(p)]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v^\nu(q) - v^\nu(p) + \epsilon t^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\lambda}{\epsilon} \\ &= t^\mu \cdot \partial_\mu v^\nu + t^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\lambda \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu^\nu$$

Derivada covariante de vetores cotangentes ($\nabla_p w^e$)

$$\begin{aligned}\nabla_p (v^e w^e) &= (\nabla_p v^e) w^e + v^e \nabla_p w^e \\ &= (\partial_p v^e + \Gamma_{p\lambda}^\rho v^\lambda) w^e + v^e \nabla_p w^e \\ &= (\partial_p v^e) w^e + \Gamma_{p\lambda}^\rho v^\lambda w^e + v^e \nabla_p w^e \\ \therefore \partial_p (v^e w^e) &= (\partial_p v^e) w^e + v^e (\partial_p w^e)\end{aligned}$$

Igualando os dois expressões:

$$\underbrace{\Gamma_{p\lambda}^\rho v^\lambda w^e}_{\Gamma_{pe}^\lambda v^\lambda w^e} + v^e \nabla_p w^e = v^e \partial_p w^e$$

$$\Gamma_{pe}^\lambda v^\lambda w^e$$

$$\boxed{\nabla_p w^e = \partial_p w^e - \Gamma_{pe}^\lambda v^\lambda w^e}$$

Derivada covariante de campos tensoriais

$$\begin{aligned}\nabla_\delta T^{m_1 \dots m_k}{}_{v_1 \dots v_l} &= \partial_\delta T^{m_1 \dots m_k}{}_{v_1 \dots v_l} \\ &\quad + \Gamma_{\delta\lambda}^{m_1} T^{\lambda m_2 \dots m_k}{}_{v_1 \dots v_l} + \Gamma_{\delta\lambda}^{m_2} T^{m_1 \lambda \dots m_k}{}_{v_1 \dots v_l} + \dots \\ &\quad - \Gamma_{\delta v_1}^{m_1} T^{m_1 \dots m_k}{}_{v_2 \dots v_l} - \Gamma_{\delta v_2}^{m_1} T^{m_1 \dots m_k}{}_{v_1 \lambda \dots v_l}\end{aligned}$$

Tensor de torções ($\Gamma_{p\nu}^\lambda$)

$$\begin{aligned}\nabla_p \nabla_\nu \phi &= \nabla_p (\partial_\nu \phi) \\ &= \partial_p \partial_\nu \phi - \Gamma_{p\mu}^\lambda \partial_\lambda \phi\end{aligned}$$

$$\nabla_\nu \nabla_p \phi = \partial_\nu \partial_p \phi - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda \phi$$

$$\nabla_p \nabla_\nu \phi - \nabla_\nu \nabla_p \phi = -(\Gamma_{p\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu p}^\lambda) \partial_\lambda \phi$$

$$\Gamma_{p\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu p}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = 2 \Gamma_{\nu p}^\lambda$$

$$\text{Torções: } \boxed{\Gamma_{p\nu}^\lambda = 2 \Gamma_{[\nu p]}^\lambda}$$

Conexão é livre de torção se $T = 0$.

Conexão compatível com a métrica

Definida pelas condições:

$$\nabla_p g_{\mu\nu} = 0$$

$$0 = \nabla_p g_{\mu\nu} = \partial_p g_{\mu\nu} - \overset{\lambda}{\Gamma}_{\mu p}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \overset{\lambda}{\Gamma}_{p\lambda}^{\lambda} g_{\mu\nu} \quad (+)$$

$$0 = \nabla_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \overset{\lambda}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\rho} - \overset{\lambda}{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\lambda} g_{\mu\rho} \quad (-)$$

$$0 = \nabla_\nu g_{\rho\lambda} = \partial_\nu g_{\rho\lambda} - \overset{\lambda}{\Gamma}_{\nu\rho}^{\lambda} g_{\lambda\lambda} - \overset{\lambda}{\Gamma}_{\rho\lambda}^{\lambda} g_{\nu\lambda} \quad (-)$$

Assumindo, além disso, que a conexão não possui torções:

$$\nabla^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}$$

$$\therefore \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

Portanto, há uma única conexão simétrica (= sem torções) compatível com a métrica, chamada de conexão de Levi-Civita.

- Para uma conexão compatível com a métrica, o tensor métrico pode ser tratado como uma constante em relação a ∇ :

$$\nabla_a (g_{ab} T^{c\dots e\dots}) = g_{ab} \nabla_c T^{c\dots e\dots}$$

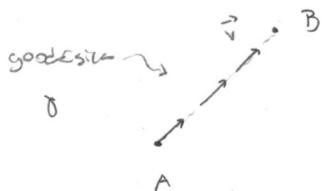
$$\nabla_e (g^{ab} T^{c\dots e\dots}) = g^{ab} \nabla_e T^{c\dots e\dots}$$

Exercícios Lista 1, Exerc. 5, 6, 12, 11

Lista 2, Exerc. 2, 3, 5, 7

3.3-4) Transporte paralelo e geodésicos

Introdução Em \mathbb{R}^n : geodésicos são retas = movimento inercial

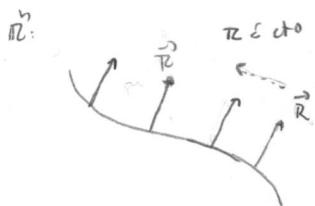


Dois características:

- curva de menor distância (s)
- tangentes são transportados em tangentes (Γ)

Transporte paralelo

(M, ∇_a) : variedade M equipada com conexão ∇_a .



Seja $x^r(x)$ uma curva em M . Um tensor $T^{I_1 \dots I_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ é transportado paralelamente ao longo de $x^r(x)$ se sua derivada covariante é nula ao longo da curva:

$$\left(\frac{DT}{dx} \right)^{I_1 \dots I_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{dx^{\delta}}{dx} \nabla_{\delta} T^{I_1 \dots I_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0$$

"Eq. do transporte paralelo"

Para um campo vetorial v^r :

$$- \frac{dx^{\delta}}{dx} \nabla_{\delta} v^r = \frac{dx^{\delta}}{dx} (\partial_r v^r + \Gamma_{\delta r}^{\mu} v^{\mu}) = \frac{dv^r}{dx} + \Gamma_{\delta r}^{\mu} \frac{dx^{\delta}}{dx} v^{\mu} = 0$$

- Noção de transporte paralelo é completamente determinada pela derivada covariante ∇_a , ou seja, por Γ . É definida mesmo na ausência de uma métrica.

• Para conexão compatível com a métrica:

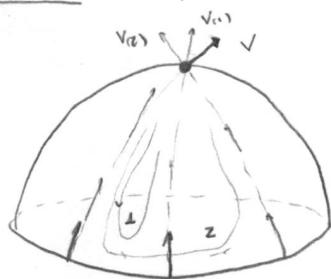
$$1. \frac{D}{dx} g_{\mu\nu} = \frac{dx^{\delta}}{dx} \nabla_{\delta} g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{Métrica é transportada paralelamente.}$$

$$2. \frac{D}{dx} (g_{\mu\nu} v^{\mu} w^{\nu}) = \left(\frac{D}{dx} g_{\mu\nu} \right) v^{\mu} w^{\nu} + g_{\mu\nu} \left(\frac{D}{dx} v^{\mu} \right) w^{\nu} + g_{\mu\nu} v^{\mu} \left(\frac{D}{dx} w^{\nu} \right) = 0$$

transportados paralelamente

Transporte paralelo preserva o produto interno.

Exemplo Dependência em relações ao caminho em S^2 .



Vetor V transportado paralelamente retorna rodado ao ponto inicial no polo norte. O ângulo de rotação depende do caminho tomado.

Geodésica (I) Uma curva $x^\mu(\lambda)$ é uma geodésica se o vetor tangente é transportado paralelamente ao longo da curva:

$$\frac{D}{D\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

"Eq. geodésica"

Exemplo No espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , temos $\Gamma = 0$, e geodésicas satisfazem:

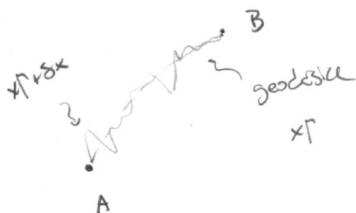
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^\mu(\lambda) = \lambda a^\mu + b^\mu, \quad a^\mu, b^\mu \text{ são constantes.}$$

Geodésicas são retas em \mathbb{R}^n .

Geodésica (II) Considere uma curva de tipo tempo $x^\mu(\lambda)$, e seja ζ o tempo próprio ao longo da curva:

$$\zeta = \int -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda$$

Uma geodésica é uma curva que maximiza o tempo próprio ζ entre dois eventos dados A e B : $\delta\zeta = 0$.



$$\begin{aligned} \delta\zeta &= \int \sqrt{-F} d\lambda \\ &= - \int \frac{1}{2\sqrt{-F}} \delta F d\lambda \end{aligned}$$

Parametrizando as curvas em termos do tempo próprio, $\lambda \rightarrow z$, temos que $f = -1$, e podemos considerar a variação:

$$\delta I = 0, \quad I = \int + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\nu}{\partial z} dz$$

Calculando a variação:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu \\ g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + (\partial \delta g_{\mu\nu}). \delta x^\sigma \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{1}{2} \int \left[\partial \delta g_{\mu\nu} \delta x^\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\nu}{\partial z} + g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial z} (\delta x^\mu) \frac{\partial x^\nu}{\partial z} + g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta x^\nu) \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\partial \delta g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\nu}{\partial z} \delta x^\sigma - \partial \delta g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\nu}{\partial z} \delta x^\sigma - g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial z^2} \delta x^\nu \right. \\ &\quad \left. - \partial \delta g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\nu}{\partial z} \delta x^\sigma - g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial z^2} \delta x^\mu \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\partial \delta g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\nu}{\partial z} - \partial \delta g_{\sigma\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\sigma}{\partial z} - g_{\sigma\nu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial z^2} \delta x^\sigma \right. \\ &\quad \left. - \partial \delta g_{\mu\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\sigma}{\partial z} - g_{\mu\sigma} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial z^2} \delta x^\mu \right] \delta x^\sigma dz = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial z^2} + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\sigma}{\partial z} = 0 \quad \times g^{\rho\sigma}$$

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial z^2} + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\nu}{\partial z} = 0$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho$$

Eq. geodésica.

Analogamente para curvas de tipo espaço.

Propriedades

1. A eq. geodésica é invariante por reparametrizações de forma:

$$\lambda = \alpha r + b \Rightarrow \frac{dx^r}{d\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{dx^r}{dr}, \quad \frac{d^2x^r}{d\lambda^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2x^r}{dr^2}$$

Como em uma geodésica o vetor tangente é transportado paralelamente, sua norma se mantém constante, $\nabla^r V_p = \text{cte}$. O fator α pode ser usado para ajustar $\nabla^r V_p = -1$, de modo que $\lambda \rightarrow z$. A constante b apenas desloca o zero da parametrização. Segue que a eq. geodésica seleciona uma família especial de parametrizações:

parâmetro afim: $\lambda = \alpha z + b$

Para reparametrizações gerais $\alpha(\lambda)$:

$$\text{eq.geod.} \rightarrow \frac{d^2x^r}{dz^2} + R^s_{rs} \frac{dx^s}{dz} \frac{dx^r}{dz} = - \frac{dx^r}{dz} \left(\frac{d^2\alpha}{dz^2} \right) \left(\frac{dx^r}{dz} \right)^{-2} \Leftrightarrow \nabla^r \nabla_p V^r = g(z) \nabla^r$$

e a variação da tangente é paralela a si mesma, em vez de se anular.

2. Para geodésicos de tipo tempo: $U^\lambda \nabla_\lambda U^r = 0 \Rightarrow P^\lambda \nabla_\lambda P^r = 0$

"Partículas seguem a direção determinada pelo momento".

3. Para geodésicos nulos, reparametrizações $\alpha z + b$ continuam válidas, mas não há uma escolha natural como z . Pode-se escolher λ tal que

$$P^r = \frac{dx^r}{d\lambda} \Rightarrow E = -P^r U^r.$$

3.5) Um universo em expansão revisitado.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \sum_i dx^i dx^i$$

$$I = \frac{1}{2} \int \left[-\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 + a^2(t) \sum_{ij} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^j}{dz} \right] dz$$

a) Determinações da eq. geodésica a partir de $\delta I = 0$.

$$t \rightarrow t + \delta t, \quad a \rightarrow a + \dot{a} \delta t, \quad \dot{a} = da/dt$$

$$\delta I = \frac{1}{2} \int \left[-2 \frac{dt}{dz} \frac{d\delta t}{dz} + 2a\dot{a}\delta t \sum_{ij} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^j}{dz} \right] dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta t}{dz} + a\dot{a} \sum_{ij} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^j}{dz} = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{0i}^0 = 0, \quad \Gamma_{ij}^0 = a\dot{a} \sum_{ij}}$$

$$x' \rightarrow x^i + \delta x^i$$

$$\delta I = \frac{1}{2} \int a^2 \sum_{ij} 2 \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^j}{dz} (\delta x^i) dz$$

$$= - \int \left[2a\dot{a} \frac{dt}{dz} \sum_{ij} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^j}{dz} \delta x^i + a^2 \sum_{ij} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^j}{dz} \delta x^i \right] dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^i}{dz^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{dt}{dz} \frac{dx^i}{dz} = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{00}^i = \Gamma_{jk}^i = 0, \quad \Gamma_{0j}^i = \sum_{ij} \frac{\dot{a}}{a}}$$

curvatura

b) Geodésicas nulos: $0 = ds^2 = -dt^2 + a^2 dx^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{a} \frac{dt}{dx}$ Sinal positivo: geodésicas que se propagam na direção positiva do eixo x.

$$0 = \frac{dt}{dx^2} + a\dot{a} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \Rightarrow \frac{dt}{dx^2} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{w_0}{a}, \quad w_0 = \text{cte.}$$

$$\text{Energia medida por um observador comutável: } E = -P_{\mu} U^{\mu} = -g_{00} \frac{dt}{dx} U^0 = \frac{w_0}{a}$$

$$U^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$$

Considere instantes de tempo com factores de escala: $a_1 = a(t_1)$, $a_2 = a(t_2)$

$$E_1 = \frac{w_0}{a_1}, \quad E_2 = \frac{w_0}{a_2} \Rightarrow$$

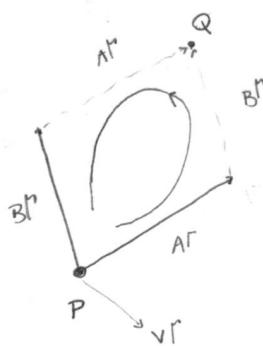
$$\boxed{\frac{E_2}{E_1} = \frac{a_1}{a_2}}$$

Desvio para o vermelho cosmológico

$$\lambda_0 = \frac{a}{a_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0: \text{hoje} \\ a: \text{amissão} \end{array} \right. \quad E = h\nu \Rightarrow \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\nu}{\nu_0} - 1 = \frac{a_0}{a} - 1 > 0 \quad \text{porque universo em expansão.}$$

$< 0 \quad \sim \sim \sim \sim \sim \sim$ contracção

3.6-7) O tensor de curvatura de Riemann ($R^{\delta \mu \nu}$)

O transporte paralelo de um vetor v^r ao longo de uma curva é não trivial em espaços curvos: o vetor retorna ao ponto inicial modificado:

$$v^r \xrightarrow{TP\delta} v^r + \delta v^r$$

$$\delta v^r = R^{\delta \mu \nu} g_{\mu \nu} A^r B^{\delta} v^{\delta}$$

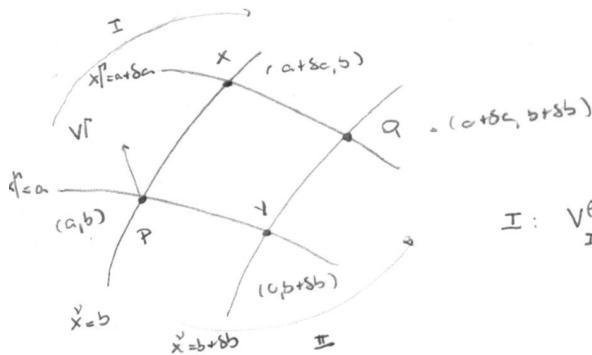
Tensor de curvatura: $R^{\delta \mu \nu} \in \mathbb{S}(1,3)$

Caracterizações equivalentes:

- Diferença entre o transporte paralelo entre $P \rightarrow Q$ por curvas distintas
- Não comutatividade da derivada covariante: $\nabla_p \nabla_q v^r - \nabla_q \nabla_p v^r \neq 0$.

Transporte paralelo: dependência do caminho

[Schutz 6.5]



$$\frac{Dv^r}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{dv^r}{d\lambda} = - \Gamma_{\alpha\beta}^r v^\beta \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \Rightarrow \frac{\partial v^r}{\partial x^\alpha} = - \Gamma_{\alpha\beta}^r v^\beta$$

$$\begin{aligned} I: v_I^r(Q) &= v^r(P) + \int_a^{a+\delta_a} \frac{\partial v_I^r}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \int_b^{b+\delta_b} \frac{\partial v_I^r}{\partial x^\nu} dx^\nu \\ &= v^r(P) - \int_a^{a+\delta_a} \Gamma_{\beta\alpha}^r v_I^\alpha dx^\beta - \int_b^{b+\delta_b} \Gamma_{\nu\alpha}^r v_I^\alpha dx^\nu \end{aligned}$$

$$II: v_{II}^r(Q) = v^r(P) - \int_b^{b+\delta_b} \Gamma_{\beta\alpha}^r v_{II}^\alpha dx^\beta - \int_a^{a+\delta_a} \Gamma_{\nu\alpha}^r v_{II}^\alpha dx^\nu$$

$$\delta v^r = v_{II}^r - v_I^r = + \int_a^{a+\delta_a} \Gamma_{\beta\alpha}^r v_I^\alpha dx^\beta + \int_b^{b+\delta_b} \Gamma_{\beta\alpha}^r v_I^\alpha dx^\beta - \int_b^{b+\delta_b} \Gamma_{\beta\alpha}^r v_{II}^\alpha dx^\beta - \int_a^{a+\delta_a} \Gamma_{\nu\alpha}^r v_{II}^\alpha dx^\nu$$

$$\begin{aligned} &= - \int_a^{a+\delta_a} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\Gamma_{\beta\alpha}^r v^\alpha) sb dx^\beta + \int_b^{b+\delta_b} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\Gamma_{\beta\alpha}^r v^\alpha) sb dx^\beta \\ &\approx - [(\partial_\nu \Gamma_{\beta\alpha}^r) v^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^r (\partial_\nu v^\alpha)] sb + [(\partial_\nu \Gamma_{\nu\alpha}^r) v^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^r (\partial_\nu v^\alpha)] sa sb \\ &\approx - \Gamma_{\nu\alpha}^r v^\alpha \end{aligned}$$

$$[\partial_\mu v^\alpha = - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu v^\nu]$$

Segue que:

$$\Delta V_{\text{II}}^{\rho} - V_{\text{I}}^{\rho} \approx \underbrace{(\partial_{\mu} \Gamma_{\nu\delta}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\delta}^{\rho} + \Gamma_{\mu\delta}^{\rho} \Gamma_{\nu\delta}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\delta}^{\rho} \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha}) v^{\delta}}_{R^{\rho}_{\mu\nu}}$$

Não comutatividade da derivada covariante

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] v^{\rho} &= \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} v^{\rho} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} v^{\rho} \\ &= \partial_{\mu} (\nabla_{\nu} v^{\rho}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \nabla_{\lambda} v^{\rho} + \Gamma_{\mu\delta}^{\rho} \nabla_{\nu} v^{\delta} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \partial_{\mu} \partial_{\nu} v^{\rho} + \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\delta}^{\rho} v^{\delta} + \Gamma_{\nu\delta}^{\rho} / \partial_{\mu} v^{\delta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \nabla_{\lambda} v^{\rho} + \Gamma_{\mu\delta}^{\rho} / \partial_{\nu} v^{\delta} + \Gamma_{\mu\delta}^{\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^{\delta} v^{\lambda} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= (\partial_{\mu} \Gamma_{\nu\delta}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\delta}^{\rho} + \Gamma_{\mu\delta}^{\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^{\delta} - \Gamma_{\nu\delta}^{\rho} \Gamma_{\mu\lambda}^{\delta}) v^{\delta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \nabla_{\lambda} v^{\rho} \\ &= R^{\rho}_{\mu\nu} v^{\delta} - T^{\lambda}_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} v^{\rho} \end{aligned}$$

No ausência de torção:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] v^{\rho} = R^{\rho}_{\mu\nu} v^{\delta}$$

O resultado pode ser estendido para tensors de tipo arbitrário:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] S^{\rho_1 \dots \rho_k}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_k} = R^{\rho_i}_{\lambda \mu \nu} S^{\lambda \rho_2 \dots \rho_k}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_k} + \dots - R^{\lambda}_{\sigma_1 \mu \nu} S^{\rho_1 \dots \rho_k}{}_{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_k} - \dots - T^{\lambda}_{\mu \nu} \nabla_{\lambda} S^{\rho_1 \dots \rho_k}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_k}$$

Expressões independentes de coordenadas

torção: $T(x, y) = \nabla_x y - \nabla_y x - [x, y]$

$\nabla(x, y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x, y]} z$

curvatura:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla_x u)^y = x^{\mu} \nabla_{\mu} u^y \\ [x, y]^{\mu} = x^{\nu} \partial_{\nu} y^{\mu} - y^{\nu} \partial_{\nu} x^{\mu} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} [\nabla(x, y)z]^{\rho} &= x^{\mu} \nabla_{\mu} (y^{\nu} \nabla_{\nu} z^{\rho}) - y^{\mu} \nabla_{\mu} (x^{\nu} \nabla_{\nu} z^{\rho}) - (x^{\mu} \partial_{\mu} y^{\nu} - y^{\mu} \partial_{\mu} x^{\nu}) \nabla_{\nu} z^{\rho} \\ &= x^{\mu} (\nabla_{\mu} y^{\nu}) \nabla_{\nu} z^{\rho} + x^{\mu} y^{\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} z^{\rho} - y^{\mu} (\nabla_{\mu} x^{\nu}) \nabla_{\nu} z^{\rho} - y^{\mu} x^{\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} z^{\rho} \\ &\quad - (x^{\mu} \partial_{\mu} y^{\nu} - y^{\mu} \partial_{\mu} x^{\nu}) \nabla_{\nu} z^{\rho} \\ &= x^{\mu} \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} y^{\sigma} \nabla_{\sigma} z^{\rho} - y^{\mu} \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} x^{\sigma} \nabla_{\sigma} z^{\rho} + x^{\mu} y^{\nu} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] z^{\rho} \\ &= [T^{\lambda}_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} z^{\rho} + [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] z^{\rho}] x^{\mu} y^{\nu} = R^{\rho}_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} z^{\rho} \end{aligned}$$

Proposição $R^p \delta_{pq} = 0 \iff \exists$ sistema de coordenadas em que $g_{pq} = \text{cte.}$

Diz-se nesse caso que o espaço é plano.

Propriedades Abaixando o primeiro índice, $R_{p\mu\nu} = g_{p\alpha} R^{\alpha}_{\mu\nu}$.

$$1. R_{p\mu\nu} = -R_{\mu\nu p}$$

$$2. R_{p\mu\nu} = -R_{\mu\nu p}$$

$$3. R_{p\mu\nu} = R_{\mu\nu p} \quad \Rightarrow \quad R_p(\delta_{\mu\nu}) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{p\mu\nu} = 0$$

$$4. R_{p\mu\nu} + R_{\mu\nu p} + R_{\nu p\mu} = 0 \quad (4'')$$

Se as propriedades 1-3 são satisfeitas, então as propriedades 4, 4' e 4'' são equivalentes.

O número de componentes independentes do tensor de Ricci é dado por:

$$N = \frac{1}{12} n^2(n^2-1) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lll} n=1 & \Rightarrow & 0 \\ n=2 & \Rightarrow & 1 \\ n=3 & \Rightarrow & 6 \\ n=4 & \Rightarrow & 20 \end{array}$$

Contracções

$$\text{Tensor de Ricci: } R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}, \quad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

$$\text{Escalar de curvatura: } R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

O tensor de Ricci e o escalar de curvatura capturam toda a informação sobre contracções (tracos) do tensor de Ricci. A parte de $R_{p\mu\nu}$ com traco zero em qualquer par de índices é descrita pelo tensor de Weyl:

$$C_{p\mu\nu} = R_{p\mu\nu} - \frac{2}{n-2} \left(g_{p\mu} R_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu} R_{\alpha\alpha} + \frac{2}{(n-1)(n-2)} \text{Sc} g_{\mu\nu} R \right)$$

$C_{p\mu\nu}$ possui as mesmas simetrias 1-4 do tensor de Ricci, mas todos os seus contracções se anulam.

Identidade de Bianchi:

Aplicando o comutador da derivada covariante à derivada de um vetor dual:

$$(\nabla_p \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_p) \nabla_\rho w_\sigma = - R^\lambda_{\mu\nu\rho} \nabla_\lambda w_\sigma - R^\lambda_{\sigma\nu\rho} \nabla_\rho w_\lambda \quad (\text{torções zero})$$

Além disso:

$$\begin{aligned} \nabla_\rho (\nabla_\nu \nabla_\rho w_\sigma - \nabla_\rho \nabla_\nu w_\sigma) &= \nabla_\mu (-R^\lambda_{\sigma\nu\rho} w_\lambda) \\ &= -w_\lambda \nabla_\mu R^\lambda_{\sigma\nu\rho} - R^\lambda_{\sigma\nu\rho} \nabla_\mu w_\lambda \end{aligned}$$

Antissimetrizando em μ, ν, ρ , os lados esquerdos das equações acima se tornam iguais.

Segue que

$$\begin{aligned} + R^\lambda_{[\mu\nu\rho]} \nabla_\lambda w_\sigma + R^\lambda_{\sigma[\mu\nu]} \nabla_\rho w_\lambda &= w_\lambda \nabla_{[\mu} R^\lambda_{\sigma]\nu\rho]} + R^\lambda_{\sigma[\nu\rho]} \nabla_{[\mu} w_\lambda \\ \Rightarrow \nabla_{[\mu} R^\lambda_{\sigma]\nu\rho]} &= 0 \quad \Rightarrow \boxed{\nabla_{[\mu} R^\lambda_{\sigma]\nu\rho]} = 0} \end{aligned}$$

Tensor de Einstein

Contraindo dois pares de índices na identidade de Bianchi:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} (\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\rho R_{\lambda\mu\nu\sigma} + \nabla_\sigma R_{\lambda\mu\rho\nu}) \\ &= \nabla^\mu R_{\mu\nu} - \nabla_\nu R + \nabla^\nu R_{\mu\nu} \\ \Rightarrow \nabla^\mu R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \nabla_\nu R \quad \Rightarrow \nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0 \end{aligned}$$

Tensor de Einstein:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}} \quad , \quad \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 .$$

Exemplo Esfera bidimensional S^2 .

$$\text{Métrica: } ds^2 = a^2 (\partial\theta^2 + \sin^2\theta \partial\phi^2), \quad g_{\theta\theta} = a^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2 \sin^2\theta$$

$$\text{Símbolos de Christoffel não nulos: } \begin{cases} \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cot\theta \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot\theta \end{cases}$$

Componentes não nulos do tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R_{\theta\phi\phi}^\theta &= \partial\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta - \partial\phi \Gamma_{\theta\phi}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta - \Gamma_{\theta\theta}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi \\ &= \partial\theta (-\sin\theta \cot\theta) - \partial\phi \cancel{\sqrt{a^2}} + 0 - (-\sin\theta \cos\theta) \cot\theta \\ &= -\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta = \sin^2\theta \end{aligned}$$

$$R_{\theta\phi\phi}^\theta = a^2 \sin^2\theta = -R_{\phi\theta\theta}^\phi = -R_{\theta\phi\theta}^\phi = R_{\phi\theta\theta}^\phi$$

$$\text{Tensor de Ricci: } R_{\theta\theta} = g^{\phi\phi} R_{\phi\theta\theta}^\phi = \frac{1}{a^2 \sin^2\theta} \cdot \cancel{c^2 \sin^2\theta} = 1$$

$$R_{\theta\phi} = R_{\phi\theta} = 0$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta$$

$$R = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = \frac{1}{a^2}$$

Escalar de curvatura.

$$R = \frac{2}{a^2}$$

Exemplo Universo em expansão

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{00}^0 = \Gamma_{0i}^i = 0, \quad \Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij} \dot{a}/a \\ \Gamma_{00}^i = \Gamma_{ji}^i = 0, \quad \Gamma_{0j}^i = \delta_{ij} \ddot{a}/a \end{array} \right.$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu}^{\lambda\sigma} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu}^{\lambda\sigma}$$

$$R_{00} = R^a_{\theta\theta} g_{00}$$

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial t \Gamma_{00}^\theta - \partial\theta \Gamma_{00}^\theta + \Gamma_{0x}^\theta \Gamma_{00}^x - \Gamma_{0x}^x \Gamma_{00}^\theta \\ &= -\partial t \left(\delta_{ij} \frac{\dot{a}}{a} \right) - \delta_{ij} \delta_{ij} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \end{aligned}$$

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}$$

$$R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = \delta_{ij} (2\ddot{a}^2 + a\ddot{a})$$

$$R_{ij} = \delta_{ij} (2\ddot{a}^2 + a\ddot{a})$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -R_{00} + \frac{1}{a^2} \sum_i R_{ii} = 3 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{a^2} (2\ddot{a}^2 + a\ddot{a})$$

$$= 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]$$

"Curvature temporal"

L Dodelson 2.1.3]

"Modern cosmology"