

## 4.1) Física em espaços-tempos curvos

"Space tells matter how to move": Movimento de partículas em métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Princípio do acoplamento mínimo

Dinâmica de sistemas físicos em espaços curvos:

1. Leis de movimento em forma tensorial no espaço de Minkowski (plano,  $R=0$ )
2. Generalização para espaços curvos.

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \quad \partial \rightarrow \partial_\mu.$$

As equações assim obtidas têm o limite correto no limite de campos gravitacionais fracos,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

Movimento de queda livre de partículas

Em  $M^4$ :  $\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0$ , linhas de mundo são retas no espaço de Minkowski.

$\curvearrowleft$  não é tensorial

$$(i) \frac{d\dot{x}}{d\lambda} \partial_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \quad \rightarrow \frac{d\dot{x}}{d\lambda} \nabla_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d\dot{x}}{d\lambda} \left( \partial_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)$$

$\curvearrowleft$

tensorial

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} = 0}$$

Eq. geodésica

$\therefore$  Movimento inercial de partículas é descrito por geodésicas.

Límite Newtoniano

Na mecânica não relativística:  $\ddot{x} = -\vec{\nabla}\Phi, \quad \Phi = \text{potencial gravitacional}$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\mu}{dt^2} = -\partial^\mu \Phi$$

Comparando com o limite da RG satisfezendo.

1. Velocidade pequena:  $r \ll 1$

2. Campo gravitacional fraco:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = \text{perturbações}$

3. Campo gravitacional estático:  $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$

$$1 \Rightarrow \frac{dx^i}{dz} \ll \frac{dt}{dz} \rightarrow \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^2} + \Gamma_{00}^i \left( \frac{dt}{dz} \right)^2 = 0$$

$$3 \Rightarrow \Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_0 g^{rr} + \partial_r g^{rr} - 2g^{00}) = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g^{00}$$

$$2 \Rightarrow g^{rr} = \eta^{rr} - h^{rr}, \quad h^{rr} = \eta^{rr} \eta^{ss} h_{ss}$$

Em 1º orden em  $h$ , de fato verificamos que:

$$\begin{aligned} g^{rr} g_{rr} &= (\eta^{rr} - h^{rr})(\eta_{rr} + h_{rr}) \\ &= \delta^r_r + \eta^{rr} h_{rr} - \eta_{rr} h^{rr} = \delta^r_r \end{aligned}$$

Substituindo a fórmula para  $g^{rr}$  na expressão de  $\Gamma_{00}^i$ :

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} (\eta^{rr} - h^{rr}) \partial_r (\eta_{00} + h_{00})$$

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \eta^{rr} \partial_r h_{00}$$

$$\boxed{\Gamma_{00}^i = 0}$$

$$\boxed{\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \partial_r h_{00}}$$

$$\underline{n=0}: \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \Gamma_{00}^0 \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad \therefore \boxed{\frac{\partial t}{\partial z} = \text{cte}}$$

$$\underline{n=i}: \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^2} + \Gamma_{00}^i \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \partial_i h_{00} \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} h_{00} &= -2\Phi \\ g_{00} &= -(1+2\Phi) \end{aligned}}$$

$$\Gamma_{00}^i = \partial_i \Phi$$

O movimento em um campo gravitacional Newtoniano  $\Phi$  corresponde ao movimento geodésico em uma métrica com componente temporal:

$$\boxed{g_{00} = -(1+2\Phi)}$$

Límite Newtoniano.

Passagem da gravitação Newtoniana para a RG:

potencial gravitacional  $\Phi \rightarrow$  métrica  $g_{\mu\nu}$

força gravitacional  $-\vec{F}\Phi \rightarrow$  símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$

$\nabla^2 \Phi \rightarrow$  curvatura  $R_{\mu\nu\rho}^\rho$

→ a

→ a

## 4.2) As equações de Einstein

"Matter tells space how to curve": Campo gravitacional produzido por uma distribuição de massa

Na mecânica newtoniana:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{e}_r = -\vec{\nabla} \Phi, \quad \Phi = -\frac{GM}{r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G M \delta(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi = +4\pi G \underbrace{M \delta(\vec{r})}_{e}$$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G \cdot e$$

Na mecânica relativística:

$$\begin{cases} \Phi \rightarrow g_{\mu\nu} & (\text{componente } 00) \\ e \rightarrow T_{\mu\nu} & ("") \end{cases}$$

$$R_{\mu\nu} \stackrel{?}{=} \kappa T_{\mu\nu} \quad (\text{I})$$

Sabemos, no entanto, que o tensor energia-momento satisfaz, no espaço de Minkowski, a lei de conservação:

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0 \xrightarrow[\text{acoplamento minimo}]{} \nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0;$$

O que implicaria  $\nabla^\nu R_{\mu\nu}$  se (I) estivesse correta. O lado esquerdo das equações de campo deve satisfazer  $\nabla^\nu ( )_{\mu\nu} = 0$ . O tensor construído com derivadas 2<sup>as</sup> da métrica que satisfaz essa condição é o tensor de Einstein:

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0, \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (\text{II})$$

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad \text{ou} \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

Límite newtoniano (determinação de  $\kappa$ )

• Contraindo a equação com  $g^{\mu\nu}$ :

$$g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \Rightarrow R - \frac{1}{2} R = \kappa T \quad \therefore R = -\kappa T$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)$$

- Distribuição de massa no limite não relativístico:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \quad (\rho \text{ desprezível; "pocira")}$$

No referencial comóvel:  $u_r = (1, 0, 0, 0)$

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = g^{rr} u_r u_r = -(1-2\Phi) u_0^2 = -1 \Rightarrow u_0 = -\frac{1}{\sqrt{1-2\Phi}}$$

$$= -1 + \Phi$$

A densidade  $\rho$  deve ser pequena para que o limite newtoniano seja válido. Podemos então tomar as aproximações:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu, \quad u_r = (-1, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = g^{rr} \rho u_0 u_0 = -\rho$$

$$\left. \begin{array}{l} T_{00} = \rho, \quad T = -\rho \\ \text{[rho desprezível]} \end{array} \right\}$$

- Tensor de Ricci no limite de campo fraco e estático:

- Tensor de Ricci no limite de campo fraco e estático:

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^i_{000} = R^i_{000} && (R^i_{000} = 0 \text{ por antisimmetria}) \\ &= \partial_i R^i_{00} - \partial_0 R^i_{0i} + R^j_{ia} R^i_{00} - R^i_{0a} R^j_{00} \\ &= \nabla^2 \Phi \end{aligned}$$

$$R^i_{00} = \partial_i \Phi$$

- Componente 00 da eq. de Einstein: (1º orden)

$$R_{00} = K \left( T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right)$$

$$\nabla^2 \Phi = K \left( \rho - \frac{1}{2} (-\rho) (-1) \right) = \frac{K \rho}{2} \quad \boxed{K = 8\pi G}$$

Comparando com:  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$

Substituindo em (II), obtemos:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}}$$

"Eq. de Einstein"

- Forma equivalente:  $R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)$

- Eq. de Einstein no vácuo:  $R_{\mu\nu} = 0$

4.5) A constante cosmológica  $\Lambda$ 

- Valor absoluto da energia não é mensurável na mecânica Newtoniana, apenas diferenças de energia podem ser medidas. Por exemplo, mudando-se o zero de uma função potencial:

$$V(x) \rightarrow V(x) + V_0,$$

as equações de movimento não se alteram

(invariante por trans. Lorentz)

- Energia do vácuo: densidade de energia constante que em todo espaço-tempo.

Minkowski:  $T_{\mu\nu} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu}$ .

Incluindo-se a energia de vácuo na eq. de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

$$\Lambda = 8\pi G \rho_{vac}.$$

"Eq. de Einstein com cte. cosmológica"

- $\rho_{vac} = -P_{vac}$  : pressão é negativa
- Fluidos perfeitos:  $T_{\mu\nu} = (\rho + P)^{\circ} U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}$   
 $= P g_{\mu\nu} = -\rho g_{\mu\nu}$

## 5.1) A métrica de Schwarzschild

Campo exterior a uma distribuição de massa:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Eq. Einstein no vácuo.

- simetria esférica
- campo estático

→ métrica de Schwarzschild  $ds^2$  (planetas, estrelas, buracos negros, etc)

• Métrica esfericamente simétrica e estática:

Ex:  $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$ ,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  [M<sup>4</sup>]

Em geral:  $ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2$

$\left. \begin{matrix} \{ & \nearrow \\ \text{dilatação temporal} & \text{Raio e área de cercas esféricas} \\ \text{dependente de } r & \text{variam de maneira independente. } (A \neq 4\pi r^2) \end{matrix} \right.$

- Termos cruzados de forma  $dt dx^i$  não aparecem pois mudam de sinal sob reflexões temporais  $t \rightarrow -t$ , o que é incompatível com uma métrica estática.

• Mudança de coordenada radial:  $\bar{r} = e^{\delta(r)} r$

$$d\bar{r} = \left( 1 + r \frac{d\delta}{dr} \right) e^{\delta(r)} dr$$

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + \underbrace{\left( 1 + r \frac{d\delta}{dr} \right)^{-2} e^{2(\beta-\delta)}}_{e^{2\bar{\beta}}} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\bar{\beta}} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2$$

Renomeando  $\bar{\beta} \rightarrow \beta$ ,  $\bar{r} \rightarrow r$ :

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$\left. \begin{matrix} \{ & | \\ g_{tt} & g_{rr} \\ \end{matrix} \right.$

$$g_{\theta\theta} = r^2, g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$$

(Equivale à forma original)

$g_{tt} = -e^{2\alpha}$	$g_{rr} = -e^{-2\beta}$
$g_{\theta\theta} = e^{2\beta}$	$g^{\theta\theta} = e^{-2\beta}$
$g_{\phi\phi} = r^2$	$g^{\phi\phi} = r^{-2}$
$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$	$g^{\phi\phi} = r^{-2} \sin^{-2}\theta$

$$\alpha(r), \beta(r) = ?$$

- Símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} g^{tt} (\partial_t g_{tt} + \partial_t g_{tt} - \partial_x g_{tt}) = \frac{1}{2} g^{tt} \partial_t g_{tt} = 0$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left( \partial_t g_{rr} + \partial_r g_{tt} - \partial_r g_{tr} \right) = \frac{1}{2} (-e^{2\beta}) \left( -2e^{2\beta} \frac{\partial r}{\partial t} \right) = \partial_r \alpha$$

Nove componentes não nulos independentes:

$$\Gamma_{rr}^t = \partial_r \alpha$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r e^{-2\beta}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta$$

(5.12)

$$\Gamma_{tt}^r = e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = 1/r$$

$$\Gamma_{rr}^r = \partial_r \beta$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = 1/r$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cos\theta / \sin\theta$$

- Tensor de curvatura:

$$\text{Ex: } R_{rr}^t = \partial_t \Gamma_{rr}^t - \partial_r \Gamma_{tr}^t + \Gamma_{ta}^t \Gamma_{rr}^a - \Gamma_{rd}^t \Gamma_{tr}^d \quad (5.13)$$

$$= -\partial_r^2 \alpha + \partial_r \alpha \cdot \partial_r \beta - (\partial_r \alpha)^2$$

- Tensor de Ricci

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \cdot \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \quad (5.14)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \cdot \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta$$

$$R_{\theta\theta} = -\partial_\theta^2 \alpha - (\partial_\theta \alpha)^2 + \partial_\theta \alpha \cdot \partial_\theta \beta + \frac{2}{r} \partial_\theta \beta$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$$

- Escalar de curvatura

$$R = -2e^{2\beta} \left[ \partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \cdot \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right] \quad (5.15)$$

- Equações de Einstein no vácuo ,  $R_{\mu\nu} = 0$ .

Os componentes do tensor de Ricci se anulam individualmente. Para determinar os funções  $\alpha(r)$  e  $\beta(r)$  é conveniente primeiro considerar as combinações:

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} \partial_r (\alpha + \beta) \Rightarrow \alpha = -\beta + c, \quad c = \text{cte.}$$

Re definindo a variável temporal:

$$t \rightarrow t e^{-c} \Rightarrow dt \rightarrow dt^2 e^{-2c} \Rightarrow \alpha \rightarrow \alpha - c \quad \boxed{\alpha = -\beta}$$

Resta agora determinar  $\alpha$ . Podemos usar para isso o componente  $\alpha$  da eq. de Einstein:

$$0 = R_{\theta\theta} = e^{2\alpha} [\times (-2\partial_r \alpha) - 1] + 1$$

$$\Rightarrow e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha + 1) = 1$$

$$\partial_r (r e^{2\alpha}) = 1 \quad \Rightarrow \quad r e^{2\alpha} = r - R_S$$

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_S}{r}$$

$$\boxed{ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2}$$

"Métrica de Schwarzschild"

- Determinações de  $R_S$  (raio de Schwarzschild)

limite de campo fraco:  $g_{00} \rightarrow -1 (1 + 2\Phi)$ ,  $\Phi = -\frac{GM}{r} \Rightarrow R_S = 2GM$

comparando com:  $g_{00} = -1 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)$

### Comentários

1. Teorema de Birkhoff: a solução de Schwarzschild é a única solução das equações de Einstein com simetria esférica (estaticidade é consequência).
2. A métrica de Schwarzschild descreve apenas a região exterior à fonte, onde  $T_{\mu\nu} = 0$ . No interior de uma estrela, por exemplo, a solução não se aplica.

## 5.3) Singularidade

$$\text{Em } r = R_S : \begin{cases} g_{rr} \rightarrow \infty \\ g_{tt} \rightarrow 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Componente da métrica diverge} \\ \text{Métrica é singular} \end{array}$$

Os componentes da métrica dependem da escolha de coordenadas, no entanto.

Exemplo Espaço de Minkowski  $M^4$ ,  $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

$$t = \ln \bar{t}, \bar{t} > 0 \Rightarrow dt = \frac{1}{\bar{t}} d\bar{t} \Rightarrow ds^2 = -\frac{1}{\bar{t}^2} d\bar{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \therefore \text{g}_{00} \text{ diverge p/ } \bar{t} \rightarrow 0$$

[singularidade operante, ou de coordenadas]

Definição Um ponto  $p \in M$  do espaço-tempo é uma singularidade de curvatura se alguma contracção do tensor de Ricci diverge em  $p$ .

Na métrica de Schwarzschild:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{sol. das equações de Einstein no vácuo})$$

$$R_F^{\nu\rho\delta} R_{\mu\nu\rho\delta} = 12 \frac{r^2}{R_S^4} = \frac{48 GM^2}{r^6}$$

$$\text{Em } r = R_S: \quad \frac{12}{R_S^4} = \frac{3}{4GM^4}, \quad \text{regular} \quad [ \text{singularidade operante} ]$$

$$\text{Em } r = 0: \quad R_F^{\nu\rho\delta} R_{\mu\nu\rho\delta} \rightarrow \infty \quad \underline{\text{Singularidade de curvatura}}$$

- O ponto  $r=0$  se encontra no interior da estrela, onde a solução não se aplica.  $\therefore$  Sol é regular no exterior da estrelas.

- Em buracos negros, a matéria colapsa para um ponto isolado. A métrica de buracos negros apresenta uma singularidade.
- A métrica de Schwarzschild pode ser reescrita em novas coordenadas nos quais  $g_{\mu\nu}$  é explicitamente bem comportada no raio de Schwarzschild.

- Sugestão de leitura: R. Geroch, "What is a singularity in General Relativity?" Annals of Physics 48, 526-540 (1968)

## 5.4) Geodésicos na métrica de Schwarzschild

Simetrias e quantidades conservadas

- Métrica independente de coordenada  $x^\delta$ :  $\partial_\delta g_{\mu\nu} = 0$

Eq. geodésica:  $U^\rho \nabla_\rho U^\delta = 0 \rightarrow P^\rho \nabla_\rho P_\mu = 0$  ( $P = U^\rho U^\delta$ )  
 $\Rightarrow P^\ell (\partial_\rho P_\mu - \Gamma_{\rho\mu}^\delta P_\delta) = 0 \rightarrow \partial_\rho P_\mu = \Gamma_{\rho\mu}^\delta P_\delta$

Mas:  $\partial_\rho P_\mu = \frac{dP_\mu}{dx} \frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{dP_\mu}{dx}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\mu}^\delta P_\delta &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\rho g_{\mu\alpha} + \partial_\mu g_{\rho\alpha} - \partial_\alpha g_{\rho\mu}) P^\rho P_\delta \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\rho\delta} \cdot P^\rho P^\delta \end{aligned} \quad \text{(simétrico em } \delta \text{)}$$

$$\therefore \frac{dP_\mu}{dx} = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\rho\delta} \cdot P^\rho P^\delta \rightarrow \boxed{\frac{dP_\mu}{dx} = 0 \text{ se } \partial_\mu g_{\rho\delta} = 0}.$$

O componente  $P_\delta$  do quadrivecto é conservado se  $\partial_\delta g_{\mu\nu} = 0$ .

Eq. geodésica na métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Christoffel:  $\Gamma_{tr}^t = \frac{GM}{r(r-2GM)}$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{GM}{r^3} (r-2GM), \quad \Gamma_{rr}^t = -\frac{GM}{r(r-2GM)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -(r-2GM), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -(r-2GM) \sin^2 \theta$$

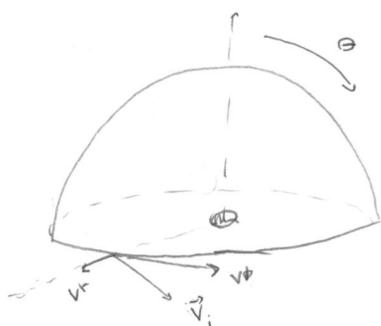
$$\Gamma_{r\theta}^\theta = 1/r, \quad \Gamma_{\phi\theta}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = 1/r, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cos \theta / \sin \theta$$

Eq. geodésica:  $\frac{d^2x^\mu}{dx^2} + \Gamma_{\rho\delta}^\mu \frac{dx^\rho}{dx} \frac{dx^\delta}{dx} = 0$  [4 eqs. de 2º ordem acopladas]

cond. iniciais:  $t, r, \theta, \phi, \frac{dt}{dx}, \frac{dr}{dx}, \frac{d\theta}{dx}, \frac{d\phi}{dx}$  (sol. única)

Fazendo uso de simetria esférica, podemos escolher coordenadas tais que:



$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(\lambda=0) = \pi/2 \\ \frac{d\theta}{dx} = 0 \end{array} \right.$$

Coord. rotacionais angulares.

[coord.]

$$\text{Eq. geod. } (\theta): \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = 0$$

Procuramos uma solução descrevendo um movimento restrito ao plano:  $\boxed{\theta(t) = \pi/2}$ .

Nas outras equações, podemos ignorar termos com  $d\phi/dx$ . Obtem-se:

$$\frac{dt}{dx} + \frac{ZGM}{r(r-ZGM)} \frac{dt}{dx} \frac{dr}{dx} = 0$$

$$\frac{dr}{dx} + \frac{GM}{r^3} (r-2GM) \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 - \frac{GM}{r(r-2GM)} \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 - (r-2GM) \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{Z}{r} \frac{dr}{dx} \frac{d\phi}{dx} = 0$$

### Energia e momento angular

Métrica é independente de  $t$  e  $\phi \rightarrow P_t$  e  $P_\phi$  são qtds conservadas.

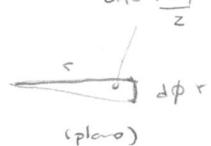
$$P_t = \partial_{tt} P^t = - \left( 1 - \frac{ZGM}{r} \right) m \frac{dt}{dx} \rightarrow$$

$$E = \left( 1 - \frac{ZGM}{r} \right) \frac{dt}{dx}$$

$$dA = \frac{r}{Z} \frac{d\phi}{dx}$$

$$P_\phi = \partial_{\phi\phi} P^\phi = r^2 m \frac{d\phi}{dx} \rightarrow$$

$$L = r^2 \frac{d\phi}{dx}$$



E,L:  $m \neq 0$ : energia e momento angular por unidade de massa  
luz: energia e momento angular.

### Conservações da norma ao longo de geodésicos

$$E = - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx} \frac{dx^\nu}{dx}$$

Cte para geodésicos em qualquer métrica (conexão compatível com a métrica)

$$E = \begin{cases} 1, & \text{tipo tempo} \quad (m \neq 0) \\ 0, & \text{tipo luz} \quad (m=0) \end{cases}$$

$$-\epsilon = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 + \underbrace{r^2 \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2}_{L^2/r^2} \times \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)$$

$$-E^2 + \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + \epsilon \right) = 0 \quad \Rightarrow r(x)$$

corrigido RG  
pot. Natura  
tens. centrifuga

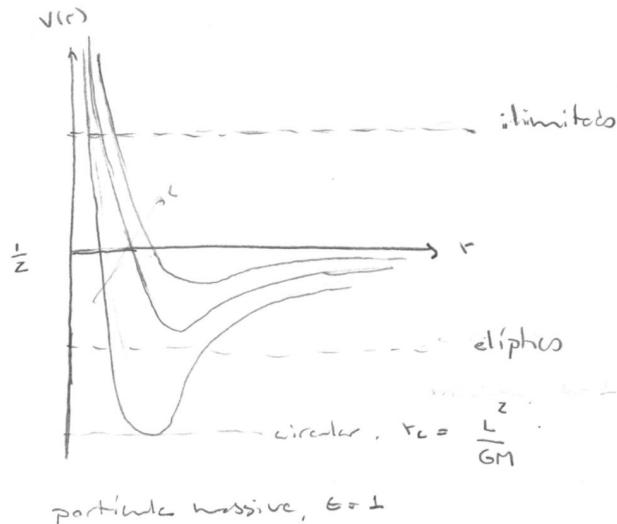
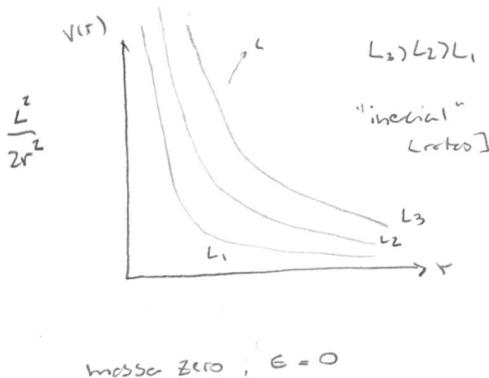
$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 + V(r) = E \quad , \quad V(r) = \frac{\epsilon}{2} - \epsilon \frac{GM}{r} + \underbrace{\frac{L^2}{2r^2}}_{T_{\text{eff}}} - \frac{GML^2}{r^3} \quad , \quad \epsilon = \frac{E^2}{Z}$$

T\_{\text{eff}}

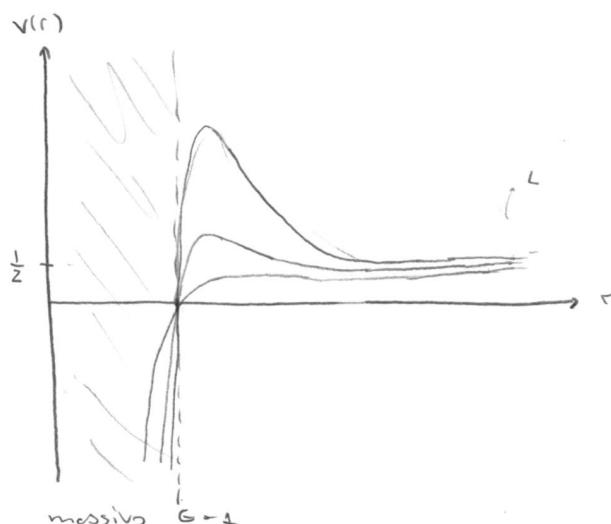
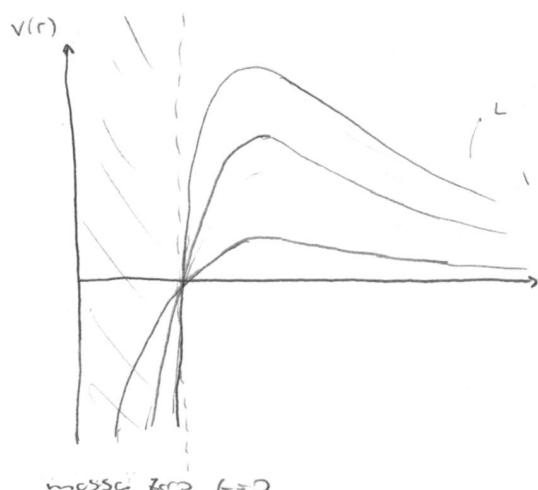
Problema é reformulado como o movimento 1D de uma partícula com energia total  $\epsilon$  em um potencial efetivo  $V(r)$ .

$$V(r) = \frac{\epsilon}{2} - G \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2}$$

- Mecânica Newtoniana:

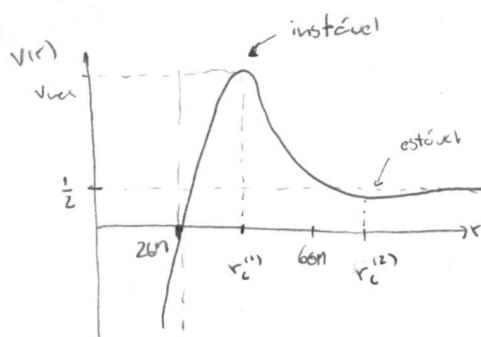


- Relatividade geral:  $V(r) = \frac{\epsilon}{2} - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}$



$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \frac{\epsilon}{2}, \quad V(R_s) = 0$$

$\epsilon = 0, L$

Órbitas de partículas massivas ( $\epsilon=1$ )

$$V(r) = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} V(r) = -\infty$$

$$V(r_s) = 0 \quad (\text{horizonte})$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GM^2L^2}{r^4} = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{L^2}{GM} r + 3L^2 = 0 \Rightarrow r_c = \frac{L^2 + \sqrt{L^4 - 12GM^2L^2}}{2GM}$$

$$\Rightarrow r_c = \frac{L^2 \pm L^2 \sqrt{1 - 6GM^2/L^2}}{2GM} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{L^2}{GM}, \quad 3GM$$

Para  $L = \sqrt{12}GM$ ,  $\Delta = 0 \Rightarrow$  única órbita circular em  $r_c = 6GM$

Para  $L < \sqrt{12}GM$ , não há órbitas circulares.



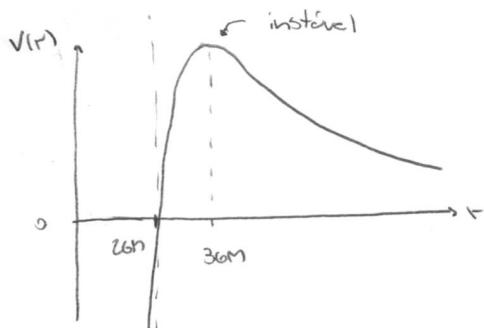
$\therefore$  Mínimo raios de órbita circular estável:  $r_c^{\min} = 6GM$

- Uma órbita instável para  $L > \sqrt{12}GM$  em  $r_c = \frac{L^2}{2GM} \left(1 - \sqrt{1 - 6GM^2/L^2}\right)$

- Órbitas confinadas deixam de ser elípticas

- Para  $V > V_{\text{máx}}$ : partícula segue para  $r = \infty$ .

estável: $r > 6GM$
instável: $3GM \leq r \leq 6GM$

Órbitas de partículas de massa zero ( $\epsilon=0$ )

$$V(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} V(r) = -\infty$$

$$V(r_s) = 0$$

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{L^2}{r^3} + \frac{3GM^2L^2}{r^4} = 0 \Rightarrow \boxed{r_c = 3GM} \quad \text{"esfera de fótons"} \\ \text{instável}$$

## 5.5) Testes experimentais

## a) Precessão do periólio de Mercúrio

Órbitas planetárias são elípticas na mecânica Newtoniana. Isso deixa de ser verdade na RG. Em primeira aproximação, o movimento pode ser descrito por elipses que giram em torno de seu centro.

Periólio: pto de maior aproximação ao Sol



→ Devido a correções relativísticas, o periólio não é um pto fixo, como no movimento elíptico, mas precessiona.

Eq. da trajetória

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + V(r) = \varepsilon \quad \times \left[ \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 L^2 = \frac{2\varepsilon r^4}{L^2} \right] \quad (\varepsilon=1)$$

$$L = r^2 \frac{dr}{d\phi}$$

$$\rightarrow \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{2r^4}{L^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2 GM}{r^3} \right) = \frac{2\varepsilon r^4}{L^2}$$

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{L^2} r^4 - \frac{2GM}{L^2} r^3 + r^2 - 2GM \cdot r = \frac{2\varepsilon}{L^2} r^4$$

Mudança de variável:  $x = \frac{L}{GMr}$   $\Rightarrow \frac{dr}{d\phi} = \frac{dx}{dx} \frac{dx}{d\phi} = -\frac{L^2}{GMx^2} \frac{dx}{d\phi}$

[  $x=1$  corresponde à órbita circular Newtoniana  $r_c = L^2/GM$  ]

$$\frac{\frac{L^4}{G^2 M^2 x^4}}{\left( \frac{dx}{d\phi} \right)^2} + \frac{1}{L^2} \left( \frac{L^2}{GMx} \right)^4 - \frac{2GM}{L^2} \left( \frac{L^2}{GMx} \right)^3 + \left( \frac{L^2}{GMx} \right)^2 - \frac{2L^2}{x} = \frac{2\varepsilon}{L^2} \left( \frac{L^2}{GMx} \right)^4 \quad \left[ \times \frac{x^2}{L^4} \right]$$

$$\left( \frac{dx}{d\phi} \right)^2 + \frac{L^2}{GM^2 x^2} - 2x + x^2 - \frac{2GM^2}{L^2} x^3 = \frac{2\varepsilon L^2}{GM^2}$$

Derivando em relação a  $\phi$ :

$$2 \left( \frac{dx}{d\phi} \right) \frac{d^2x}{d\phi^2} - 2 \frac{dx}{d\phi} + 2x \frac{dx}{d\phi} - \frac{2GM^2}{L^2} 3x^2 \frac{dx}{d\phi} = 0$$

$$\therefore 2 \left( \frac{dx}{d\phi} \right)$$

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} - 1 + x = \frac{3GM^2}{L^2} x^2$$

newtoniano

correções relativísticas: perturbações

Perturbações de órbita newtoniana:

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 + x_1 \\ \frac{d^2x_0}{d\phi^2} - 1 + x_0 = 0 \\ \frac{d^2x_1}{d\phi^2} + x_1 = \frac{3GM^2}{L^2} x_0^2 \end{array} \right\}$$

[ordem zero]

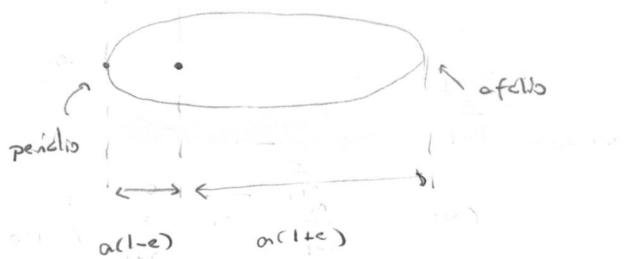
[ordem 1]

A solução exata da eq. de ordem zero é uma seção cônica:

$$\boxed{x_0 = 1 + e \cos \phi} \Rightarrow \begin{cases} x_0' = -e \sin \phi \\ x_0'' = -e \cos \phi \end{cases} \Rightarrow (-e \cos \phi) - 1 + (1 + e \cos \phi) = 0 \\ a(1-e^2) = L^2 / GM$$

$$x_0 = \frac{L^2}{GM} \frac{1}{r_0} \Rightarrow r_0 = \frac{L^2 / GM}{1 + e \cos \phi}$$

$$\boxed{e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos \phi}}$$



Substituindo na eq. de 1ª ordem para a perturbação:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{d\phi^2} + x_1 &= \frac{3GM^2}{L^2} (1 + e \cos \phi)^2 \\ &= \frac{3GM^2}{L^2} (1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi) \\ &= \frac{3GM^2}{L^2} \left[ \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) + 2e \cos \phi + \frac{1}{2} e^2 \cos 2\phi \right] \end{aligned}$$

$$\cos^2 \phi = \frac{1 + \cos 2\phi}{2}$$

Notando que:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} (\phi \sin \phi) = \frac{d}{d\phi} (\sin \phi + \phi \cos \phi) = 2 \cos \phi - \phi \sin \phi \quad \therefore \frac{d^2}{d\phi^2} (\phi \sin \phi) + \phi \sin \phi = 2 \cos \phi$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2} (\cos 2\phi) = \frac{d}{d\phi} (-2 \sin 2\phi) = -4 \cos 2\phi \quad \therefore \frac{d^2}{d\phi^2} (\cos 2\phi) + \cos 2\phi = -3 \cos 2\phi$$

pode-se verificar que a equação é resolvida por:

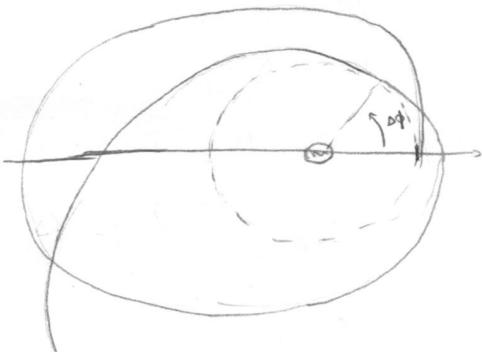
$$x_r = \frac{3GM^2}{L^2} \left[ \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) + e \phi \sin \phi - \frac{1}{6} e^2 \cos 2\phi \right]$$

↓                                   ↑  
 cte                                   oscilações  
 ↓                                   ↓  
 cumulativo em órbitas sucessivas

Aproximação:  $x = 1 + e \cos \phi + \frac{3GM^2}{L^2} e \phi \sin \phi$

$\cos[(1-\alpha)\phi] = \cos \phi \cos \alpha \phi + \sin \phi \sin \alpha \phi$   
 $= \cos \phi + \alpha \phi \sin \phi$ , para  $\alpha \phi \ll 1$ .

$$x = 1 + e \cos[(1-\alpha)\phi], \quad \alpha = \frac{3GM^2}{L^2}$$



$$\Delta\phi = 2\pi\alpha = \frac{6\pi GM}{L^2} \text{ por período}$$

"Avanço do perihelio"

Retornando à variável radial original:

$$r = \frac{L^2/GM}{1 + e \cos[(1-\alpha)\phi]}$$

ordem 0:  $L^2 = GM(1-e^2)a$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \frac{6\pi GM}{(1-e^2)a c^2}$$

$[GM \rightarrow \frac{GM}{c^2}]$  ← deve ter unidade de comprimento

### Órbita de Mercúrio

$$\frac{GM}{c^2} = 1.48 \times 10^3 \text{ m}^3$$

$$a = 5.8 \times 10^{10} \text{ m}$$

$$e = 0.2056$$

$$\Delta\phi = 5 \times 10^{-7} \text{ por órbita}$$

$$= 0.103'' / órbita$$

$$T = 88 \text{ dias} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = 43'' / \text{segundo}$$

b) Desvio para o vermelho



• Observador estacionário:  $U^i = 0$

$$-1 = U^r U_m = g_{00}(U^0)^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(U^0)^2$$

$$\therefore U^0 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1/2} = \frac{dt}{dz} \sim \text{dilatação temporal}$$

(\*)

Foton:  $x^r(\lambda)$ ,  $P^r = \frac{dx^r}{d\lambda}$  Em  $M^4$ :  $P^r = (w_1, \vec{k})$  [h]

Frequência observada:

$$w = -S_{pr} U^r \frac{dx^r}{d\lambda}$$

O movimento do foton é caracterizado pelas quantidades conservadas:

$$E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{dz}, \quad L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$$

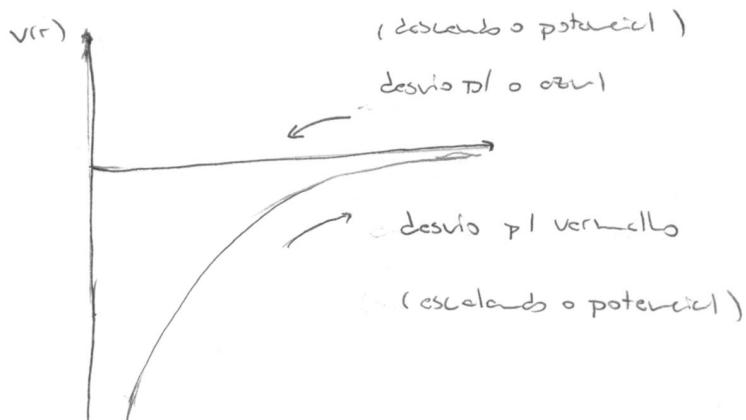
$$\Rightarrow w = -g_{00} U^0 \frac{dt}{dz} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{1/2} \frac{dt}{dz} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1/2} E$$

$$\frac{w_2}{w_1} = \left[ \frac{1 - \frac{2GM}{r_1}}{1 - \frac{2GM}{r_2}} \right]^{1/2} \xrightarrow{r \gg 2GM} 1 - \frac{GM}{r_1} + \frac{GM}{r_2} = 1 + \Phi_1 - \Phi_2$$

$$\therefore \frac{w_2}{w_1} = 1 + \Phi_1 - \Phi_2$$

$$r_2 > r_1 \Rightarrow \Phi_2 > \Phi_1 \Rightarrow w_2 < w_1$$

"desvio para o vermelho"



Observações

1960 22.5m (Harvard)

[Pound e Rebka]

## c) Deflexões da luz pelo Sol

No mecanismo newtoniano, raios de luz movem-se em linhas retas no vazio. Na TRG, a trajetória de um feixe de luz é afetada pela curvatura do espaço-tempo. Em particular, a luz emitida por estrelas é defletida pelo campo gravitacional do Sol. A observação desse fenômeno em 1919 constitui o primeiro teste experimental da previsão da TRG.

escola \*



Para descobrir o efeito, analisamos as trajetórias de geodésicos nulos na métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Tomando  $\theta = \pi/2$ , temos para linhas do tipo luz ( $ds^2 = 0$ ):

$$- \left( 1 - \frac{2GM}{r^2} \right) \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = 0 \quad (\text{I})$$

No movimento geodésico, só conservadas as quantidades:

$$E = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{dt}{dx} \quad L = r^2 \frac{d\phi}{dx}$$

Multiplicando a eq. (I) por  $(1-2GM/r)$  e expressando o resultado em termos das quantidades conservadas:

$$\left( \frac{dr}{dx} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{L^2}{r^2} = E^2$$

Multiplicando agora por  $(d\phi/dx)^{-2} = r^4/L^2$ , obtemos uma eq. para a trajetória.

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + r^2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) = \frac{E^2 r^4}{L^2} \quad \Rightarrow \quad r(\phi)$$

- Mudança de variável.

$$u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} = - \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}$$

$$\frac{1}{u^4} \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{u^2} (1 - 2GMu) = \frac{E^2}{L^2 u^4}$$

$$\left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 - 2GMu^3 = \frac{E^2}{L^2}$$

Derivando em relação a  $\phi$ , obtemos um eq. dif linear para a trajetória:

$$2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u \frac{du}{d\phi} - 6GMu^2 \frac{du}{d\phi} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3GMu^2}$$

correção relativística

Newtoniano

- Método perturbativo:  $u = u_0 + u_1$

ordem zero:

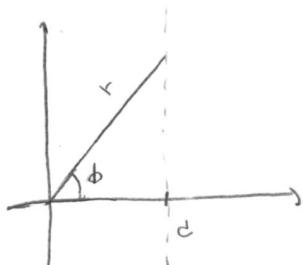
$$\frac{d^2u_0}{d\phi^2} + u_0 = 0$$

ordem 1:

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = 3GMu_0^2$$

A solução exata da eq. de ordem zero é uma reta.

$$u_0 = \frac{d}{r} \cos(\phi - \phi_0) \Rightarrow r_0 = \frac{d}{\cos \phi} \Rightarrow r_0 \cos \phi = \text{cte}$$



$$\cos \phi = \frac{d}{r} \Rightarrow r(\phi) = \frac{d}{\cos \phi} \quad \text{"Eq. da reta"}$$

$d$  = distância de maior aproximação

Substituindo  $u_0$  na eq. de 1º ordem para a perturbação:

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{3GM}{d^2} \cos^2 \phi = \frac{3GM}{2d^2} (1 + \cos 2\phi)$$

Usando a identidade:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \cos 2\phi + \cos 2\phi = -3 \cos 2\phi,$$

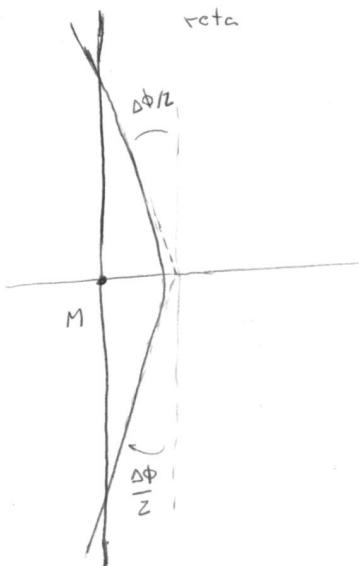
verifica-se que a equação é resolvida por:

$$u_r = \frac{3GM}{2d^2} \left( 1 - \frac{\cos 2\phi}{3} \right) = \frac{GM}{d^2} (2 - \cos^2 \phi)$$

$$[\cos 2\phi = \cos^2 \phi - 1]$$

$$\therefore u_r = \frac{1}{d} \cos \phi + \frac{GM}{d^2} (2 - \cos^2 \phi) = \frac{1}{r}$$

reta                          deflexão



Longe da massa central, a trajetória da luz é retílinea.

Há dois ângulos limites distintos, no entanto:

$$\phi_\infty = \pm \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\phi}{2} \right)$$

Para deflexões pequenas:  $\Delta\phi \ll \pi/2$ ,  $\phi \sim \pi/2$ .

$$\Rightarrow 2 - \cos^2 \phi \approx 2.$$

Temos então para  $r \rightarrow \infty$ :  $\frac{1}{d} \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\phi}{2} \right) + \frac{2GM}{d^2} = 0$

$$\frac{2GM}{d} \approx \sin \frac{\Delta\phi}{2} \approx \frac{\Delta\phi}{2}$$

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{4GM}{d}}$$

$$\text{Para: } \begin{cases} M = M_\odot \\ d = R_\odot \end{cases} \Rightarrow \Delta\phi \approx 1.75^\circ$$

## 5.6) Buracos negros de Schwarzschild



• Buraco negro: região do espaço-tempo delimitada por um horizonte de eventos.

, BN de Schwarzschild: geometria exterior descrita pela métrica de Schwarzschild.

.  $(M, g)$  é extensão de  $(M, g)$  se  $MCM^{-1} \circ g|_M = g$ .

Há extensões da métrica de Schwarzschild que são regulares no horizonte de eventos e permitem a descrição do comportamento de objetos que mergulham no buraco negro e de sua observação por observadores distantes.

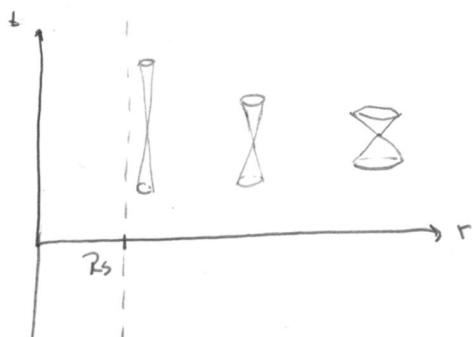
Geodésicos radiais na métrica de Schwarzschild

Geodésicos radiais inteiros ( $\theta = \pi/2, \phi = \text{cte}$ )

$$ds^2 = 0 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dt}{dr} = \pm \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1}}$$

Comportamento dos cones de luz.



$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dt}{dr} = \pm 1 \quad (\sim M^4)$$

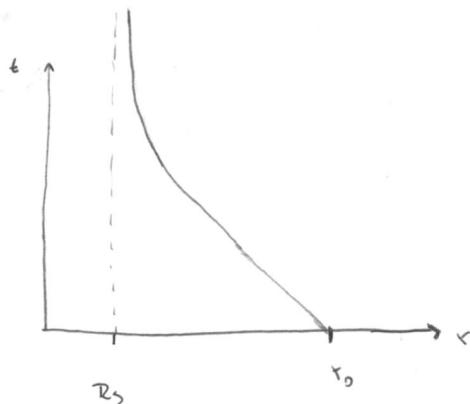
$$\lim_{r \rightarrow 2GM} \frac{dt}{dr} = \pm \infty$$

Cones de luz se estreitam para  $r \rightarrow R_s$ .

• O movimento de um fio de luz incidente é descrito por:

$$dt = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr \Rightarrow t_{in} = r_0 - r + 2GM \ln \left( \frac{r_0 - 2GM}{r - 2GM} \right)$$

para condições iniciais  $t_0 = 0, r_0$ .

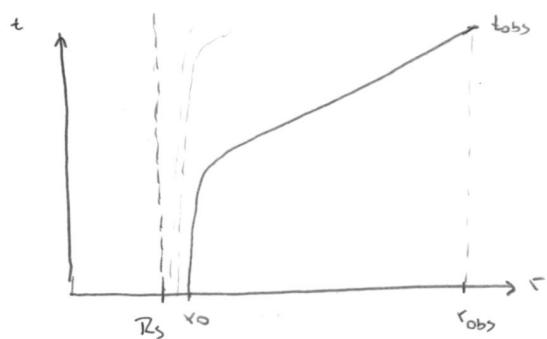


$$\lim_{r \rightarrow R_s} t(r) = \infty$$

Em coordenadas de Schwarzschild, a luz se aproxima arbitrariamente ao horizonte de eventos, sem jamais alcançá-lo. Como partículas massivas são mais lentas que a luz, isso vale para qualquer objeto.

- O movimento de um raio de luz emergente é descrito por

$$dt = + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr \Rightarrow t_{\text{out}} = r - r_0 + 2GM \ln \left( \frac{r - 2GM}{r_0 - 2GM} \right)$$



$$t_{\text{obs}} = r_{\text{obs}} - r_0 + 2GM \ln \left( \frac{r_{\text{obs}} - 2GM}{r_0 - 2GM} \right)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow R_s} t_{\text{obs}}(r_0) = -\infty$$

A luz emitida na vizinhança do horizonte de eventos pode gastar um tempo  $\Delta t$  arbitrariamente grande para alcançar um observador a uma distância finita em  $r_{\text{obs}}$ .

### Objeto mergulhando no buraco negro

Considere um objeto massivo abandonado de  $r_0 > R_s$  em  $t_0 = 0$ .

$$\begin{cases} r(t_0) = r_0 \\ \frac{dr}{dt}(t_0) = 0 \\ \frac{d\phi}{dt} = 0 \Rightarrow L = C \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + V(r) = E, \quad V(r) = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM^2}{r^3}$$

$$\text{Em } t_0 = 0: \quad E = V(r_0) = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r_0}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r_0} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} \quad (r < r_0)$$

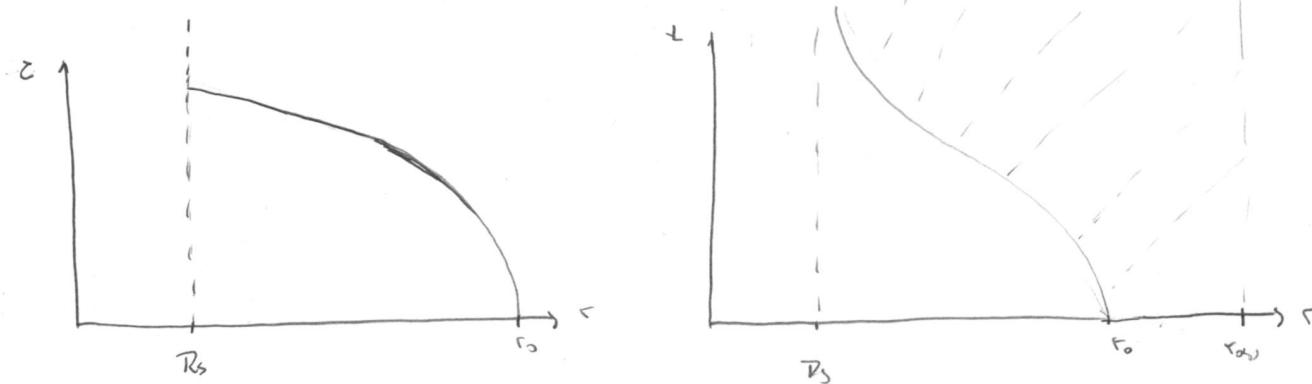
$$dz = -\frac{1}{\sqrt{2GM}} \sqrt{\frac{r_0 r}{r_0 - r}} dr$$

$$z(r) = \sqrt{\frac{r_0}{2GM}} \left( \sqrt{r(r_0 - r)} - r_0 \arctan \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}} + r_0 \frac{\pi}{2} \right)$$

Tomando  $r = 2GM$ , obtemos o tempo próprio gasto pela partícula para chegar ao horizonte de eventos:

$$\Delta z = \sqrt{\frac{r_0}{2GM}} \left( \sqrt{2GM(r_0 - 2GM)} - r_0 \arctan \sqrt{\frac{2GM}{r_0 - 2GM}} + r_0 \frac{\pi}{2} \right)$$

O resultado é finito, ou seja, a partícula encontra o horizonte em intervalo de tempo finito se medido por um relógio que se move com ela.



Para um observador distante em  $r_{obs} > r_0$ , um relógio caindo no buraco negro corre cada vez mais lentamente, e seu movimento congeia no horizonte de eventos no valor  $\Delta z(r_0)$ . O relógio mergulha no buraco negro, mas como nenhuma informação pode sair, o que lhe ocorre após cruzar o horizonte é uma informação inacessível ao observador exterior.

### Coordenadas de Eddington-Finkelstein

A descrição do movimento de um objeto mergulhando no buraco negro requer as extensões da métrica de Schwarzschild para o interior do buraco negro. Uma tal extensão é dada pelas coordenadas de Eddington-Finkelstein.

• Coordenadas tortoza:

$$r^* = r + 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right)$$

$$r \in (R_s, +\infty)$$

↓

$$r^* \in (-\infty, +\infty)$$

$$dr^* = dr + 2GM \frac{1}{r/2GM - 1} \frac{dr}{2GM} = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr$$

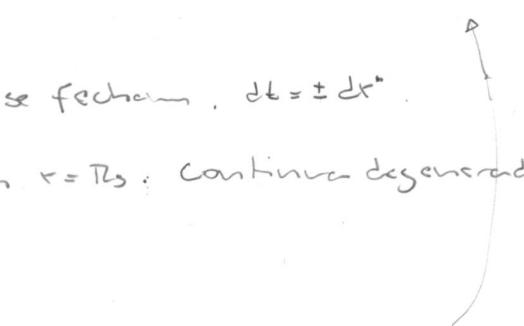
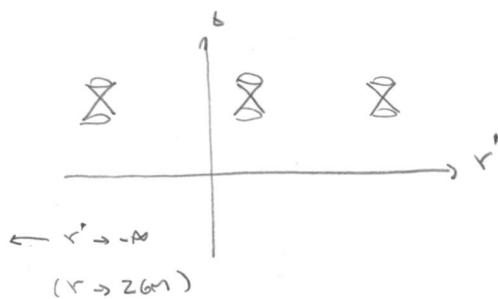
$$\Rightarrow ds^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2, \quad r = r(r^*)$$

Propriedades:

- Cones de luz na direção radial não se fecham,  $dt = \pm dr^*$ .

- Não há divergências na métrica em  $r = R_s$ : Continua degenerada, os artigos,

com  $g_{tt} = g_{rr^*} = 0$  em  $r = 2GM$ .



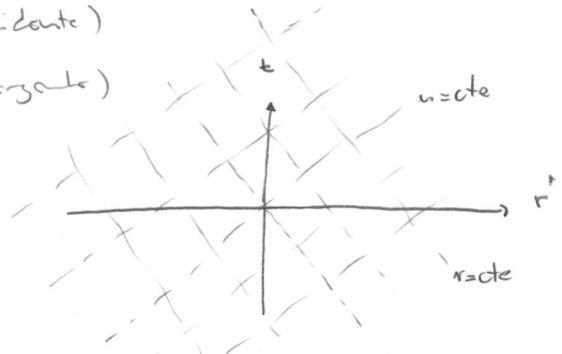
• Coordenadas nulos:

$$\begin{cases} v = t + r^* \\ u = t - r^* \end{cases}$$

(incidente)

(emergente)

$$\begin{cases} v = cte : \text{geodésicos nulos incidentes} \\ u = cte : \text{emergentes} \end{cases}$$



Substituindo a variável  $t$  pela coordenada nula  $v$ , temos:

$$ds^2 = + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \left( - (dr - dr^*)^2 + dr^{*2} \right) + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dr^2 + (dr dr + dr dr) + r^2 d\Omega^2$$

"Coordenadas de Eddington - Finkelstein"

Em tais coordenadas, a métrica deixa de ser degenerada no horizonte.

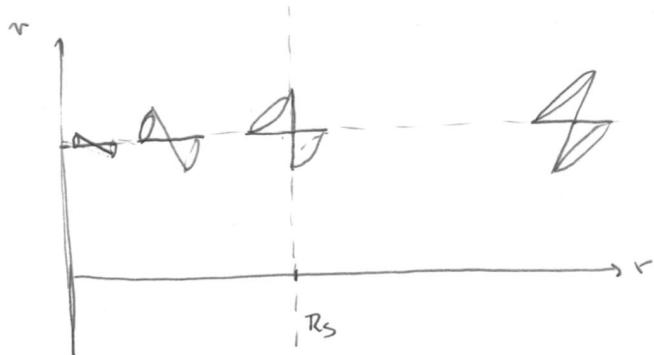
$$g = \begin{vmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = -r^4 \sin^2 \theta < \infty$$

Vê-se assim explicitamente que temos apenas uma singularidade aparente em  $R_s$ .

As curvas儒as radicais são dadas por:

$$\frac{dr}{dr} = \begin{cases} 0 & , \text{ incidente} \\ 2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & , \text{ emergente} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z & , \quad r \rightarrow \infty \\ +\infty & , \quad r \rightarrow 2GM+ \\ -\infty & , \quad r \rightarrow 2GM- \\ 0 & , \quad r \rightarrow 0 \end{cases}$$



Para  $r < R_s$ , os raios de luz incidente e emergente ambos se moveem no sentido de  $r$  decrescente, dirigindo-se à singularidade central.

Um dado ponto no diagrama  $rr$  corresponde a um ponto específico no plano tr:

$$t = r - r - 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right)$$

Como estamos omitindo as coordenadas angulares  $\theta$  e  $\phi$ , cada ponto corresponde na verdade a uma superfície esférica. Feixes de luz radiais emergentes a partir dessa esfera determinam uma esfera de luz emergente a partir de  $r$ . Similarmente, os feixes de luz radiais incidentes formam uma esfera luminosa no interior da superfície. Vemos que ambos se dirigem para raios menores. Portanto, ambos os esferas têm uma área menor que a superfície original. Esse é um exemplo de uma superfície fechada apisionada.

## 5.7) A métrica de Kruskal

- Métrica de Eddington-Finkelstein (extensão p/ o futuro)

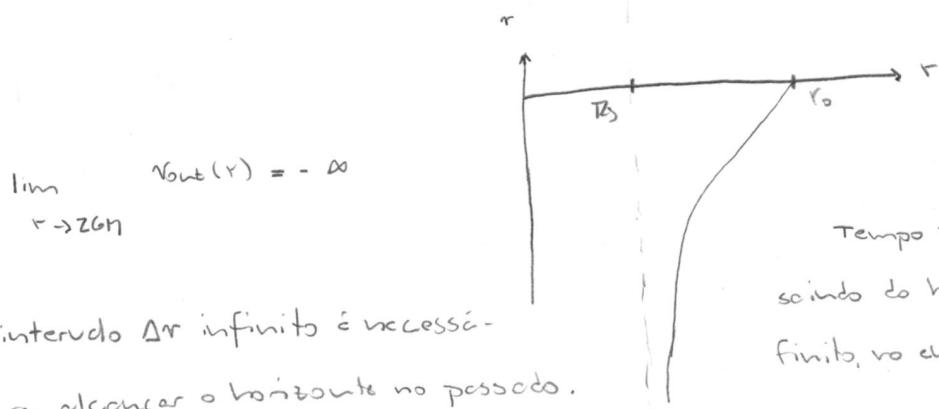
$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dr^2 + (dr^2 + dr^2) + r^2 d\theta^2$$

$$v = t + r^*, \quad r^* = r + 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right)$$

Estende a métrica de Schwarzschild completando geodésicos dirigidos ao futuro que cruzam o horizonte de eventos. Geodésicos dirigidos ao passado continuam incompletos, no entanto.

Geodésicos nulos emergentes:

$$\frac{dr}{dt} = 2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \Rightarrow v_{out}(r) = 2 \left[ r - r_0 + 2GM \ln \left( \frac{r - 2GM}{r_0 - 2GM} \right) \right]$$



Um intervalo  $\Delta r$  infinito é necessário para alcançar o horizonte no passado.

Tempo próprio de partícula massiva saindo do horizonte e alcançando  $r_0$  é finito, no entanto.

### Coordenadas de Eddington-Finkelstein emergentes (extensão p/ o passado)

Usando como variável temporal:

$$u = t - r^* = t - r - 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow dt = du + dr^* = du + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr$$

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) du^2 - (du^2 + dr^2) + r^2 d\theta^2$$

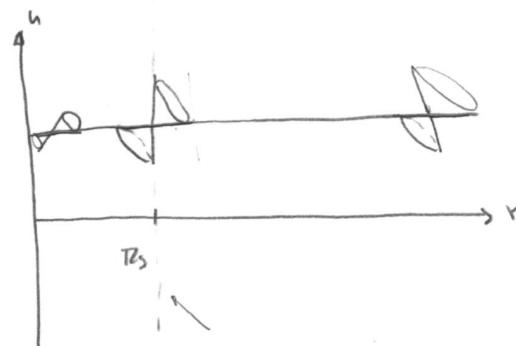
- MTW
  - ingoing EF / outgoing EF
  - Wold
  - ambos chamados de EF

Pode ser obtida a partir de  $ds_{EF}^2$  fazendo  $r = -u$ .

Geodésicos radiais nulos:

$$\frac{du}{dr} = \begin{cases} 0 & , \text{ emergente} \\ -2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} & , \text{ incidente} \end{cases}$$

Raios emergentes saem da região interior, cruzando o horizonte. É impossível, vindo da região exterior, atravessar o horizonte.

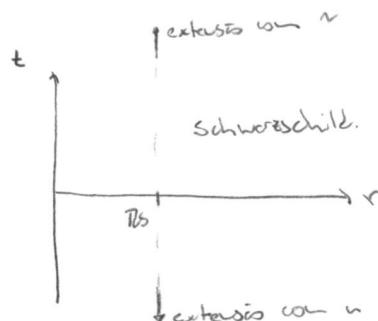


"Buraco branco"

Note que:

$$r = \text{cte}, t \rightarrow +\infty : \quad t = r - r - 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right) \rightarrow +\infty \quad (\text{incidente})$$

$$u = \text{cte}, r \rightarrow +\infty : \quad t = u + r + 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right) \rightarrow -\infty \quad (\text{emergente})$$



$r = 2GM$ ,  $t = +\infty$  é colado ao interior do buraco negro em EF.  
 $r = 2GM$ ,  $t = -\infty$  é colado ao interior do buraco branco.

- A geometria no exterior do buraco branco é igual à geometria exterior do buraco negro.
- Geodésicos especiais dirigidos ao horizonte também podem ser estendidos. As traições extensões (p/ futuro, passado e espacial) formam a extensão máxima da métrica de Schwarzschild.

### Coordenadas de Kruskal

Substituimos o par de coordenadas  $(t, r)$  pelas coordenadas nulas  $(u, v)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} u = t - r - 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right) \\ v = t + r + 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right) \end{array} \right.$$

• Região exterior:

$$v \in (2GM, +\infty), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

$$u, v \in (-\infty, +\infty)$$

$$\left| \begin{array}{l} du = dt - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \\ dr = dt + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} du \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} dt = \frac{du + dr}{2} \\ dr = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{du - dr}{2} \end{array} \right.$$

Substituindo na métrica de Schwarzschild:

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{1}{4} (du^2 + 2dudr + dr^2) + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \frac{1}{4} (dr^2 - 2drdu + du^2) + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (drdu + dudr) + r^2 d\Omega^2, \quad r = r(u, v) \end{aligned}$$

A variável  $r$  é determinada como função de  $u, v$  por

$$\frac{1}{2} (v-u) = r + 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right)$$

A métrica obtida é degenerada em  $r=2GM \Rightarrow v=-\infty$  ou  $u=+\infty$ . Aplicando uma nova transformação:

$$\left| \begin{array}{l} r' = e^{u/4GM} \\ u' = -e^{-u/4GM} \end{array} \right.$$

$\rightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} r' = \sqrt{\frac{r}{2GM} - 1} e^{(v+t)/4GM} \\ u' = -\sqrt{\frac{r}{2GM} - 1} e^{(v-t)/4GM} \end{array} \right.$$

Horizonte:  
 $u' = v' = 0$ .

$$\Rightarrow ds^2 = -\frac{16G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} (dr'du' + du'dr') + r^2 d\Omega^2,$$

$$\text{com: } u'v' = -\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{r/2GM}$$

Essa métrica é regular no horizonte. Podemos agora passar para coordenadas  $(T, R)$  com vetores coordenados  $\partial T$  de tipo tempo e  $\partial R$  de tipo espaço, da vez de trabalhar com coordenadas nulas:

$$T = \frac{r' + u'}{2}, \quad R = \frac{r' - u'}{2} \quad \Rightarrow \quad -(dr'du' + du'dr') = 2(-dT^2 + dR^2)$$

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2$$

"Métrica de Kruskal"

A variável  $r$  é determinada em função de  $T, R$  por:

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right) e^{r/2GM}$$

Além disso:

$$\frac{T}{R} = \tanh\left(\frac{t}{4GM}\right)$$

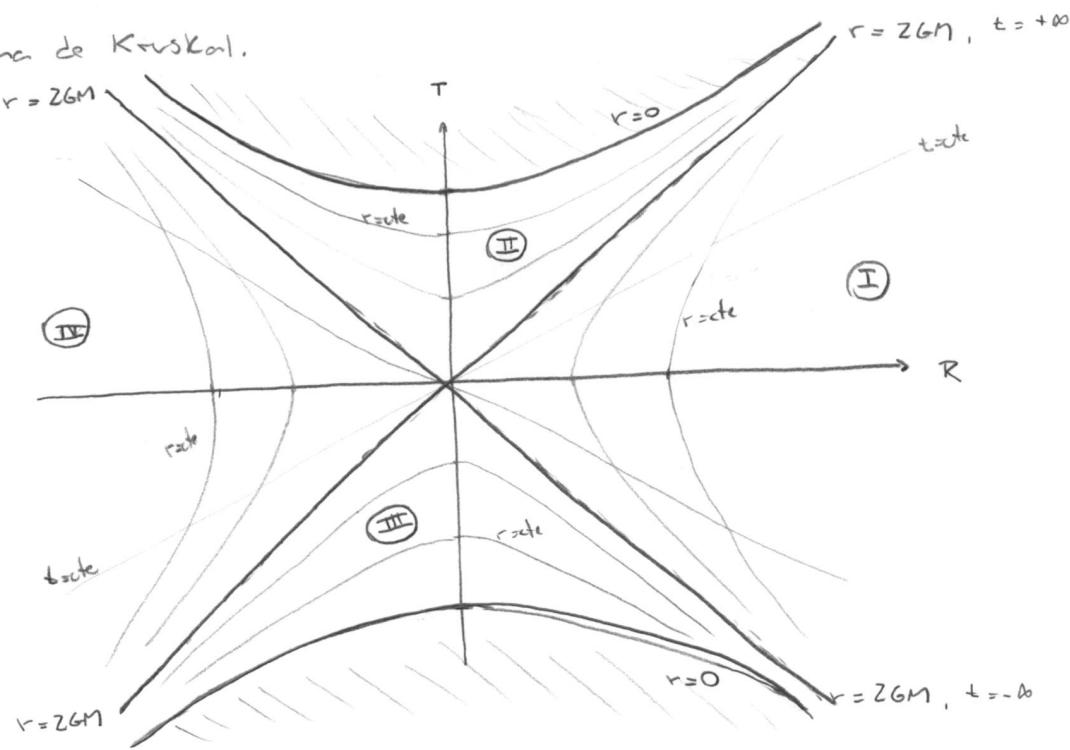
### Propriedades

- Geodésicas radiais nulas:  $dT = \pm dR$
- Horizonte de eventos:  $T = \pm R$
- $r = cte \Rightarrow T^2 - R^2 = cte$  (hipérboles)
- $t = cte \Rightarrow T/R = cte$  (retas)

$$- r=0 \Rightarrow T^2 - R^2 = 1$$

$$- T^2 - R^2 \leq 1 \text{ poi } \left(1 - \frac{r}{R_S}\right)^{\frac{r}{R_S}} \leq 1 \text{ para } r \gg 0$$

Diagrama de Kruskal.



Schwarzschild:

$$(I) \quad \begin{cases} T = \sqrt{\frac{r}{2GM} - 1} e^{\frac{r}{4GM}} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right) \\ R = \sqrt{\frac{r}{2GM} - 1} e^{\frac{r}{4GM}} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right) \end{cases} \quad T^2 - R^2 \leq 1 \text{ p/ } r \geq 2GM$$

$R > 0$  por def.

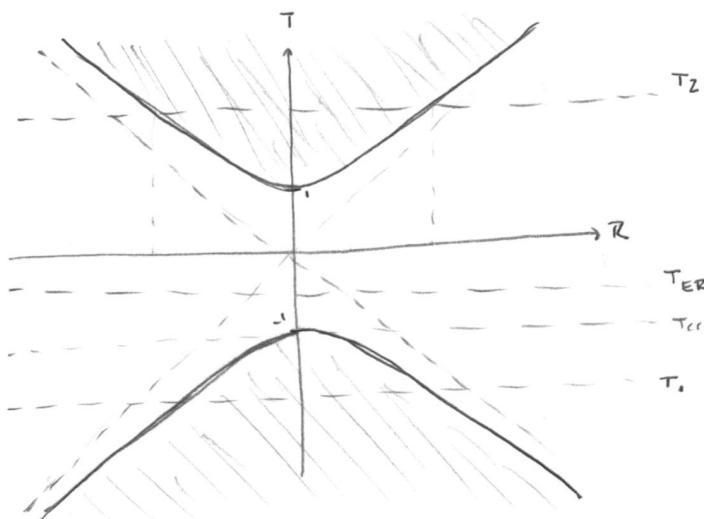
II: interior do buraco negro

III: interior do buraco branco

IV: segunda região exterior (inacessível, causalmente desconectada)

Ponte de Einstein-Rosen

Considere subespaços com  $T = \text{cte}$  no diagrama de Kruskal. Há três regiões distintas.

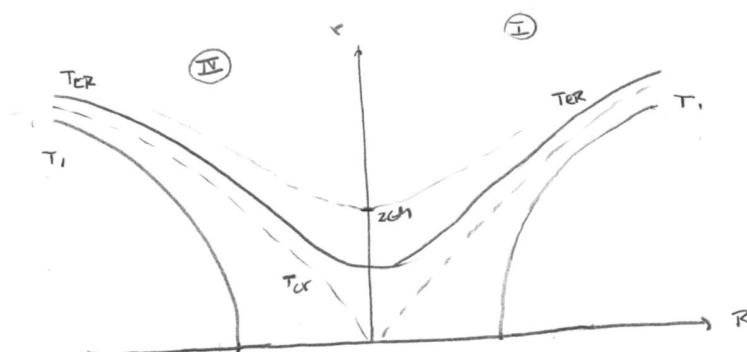


Fixando  $T$ , podemos determinar  $r$  em função de  $R$  invertendo:

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right) e^{r/2GM}$$

$$r(R, T) = 2GM \left[ 1 + W\left(\frac{R^2 - T^2}{e}\right) \right]$$

"função de Lambert"

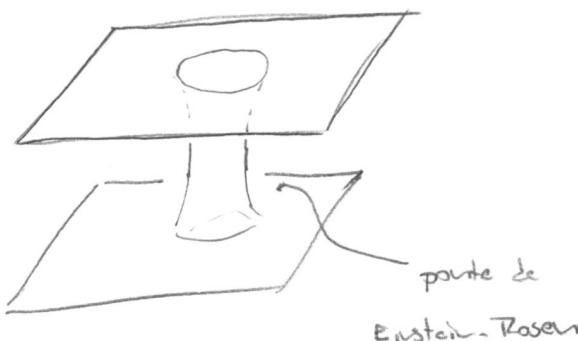


• Para  $T > 1$ :

duas regiões exteriores desacopladas.

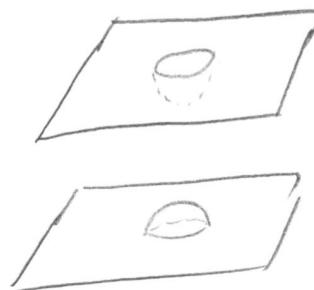
• Para  $|T| \leq 1$

ponte de Einstein-Rosen conecta os dois regiões exteriores.



$$|T| \leq 1$$

$$\text{Abertura máxima: } T = 2GM$$



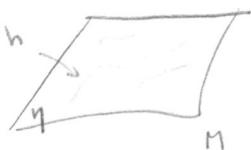
$$T > 1$$

ONDAS GRAVITACIONAIS

7.1) Gravitação linearizada e transformações de calibre

Refs: Carroll, Cap. 7

Hobson et al, Caps. 17, 18

Perturbações lineares

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

↓      ↓

Minkowski      Pert. Linear

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

→ Eq. de campo para  $h_{\mu\nu}$ ?

• Métrica inversa:  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad h^{\nu\mu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}$

$$\begin{aligned} g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} &= (\eta^{\mu\rho} - h^{\mu\rho})(\eta_{\nu\rho} + h_{\nu\rho}) \\ &= \delta_{\nu}^{\mu} + h^{\mu}_{\nu} - h^{\nu}_{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} \end{aligned}$$

• Transformações de Lorentz

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu} \\ x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} x^{\mu'} \end{array} \right. \quad \text{inversa de } \Lambda^{\mu}_{\mu'}$$

$$\begin{aligned} g_{\mu'\nu'} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu} \\ &= \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\ &= \eta_{\mu'\nu'} + \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} h_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Podemos tratar  $h_{\mu\nu}$  como um campo tensorial simétrico em  $M^4$ : a perturbação obedece a regra de transformações correta.

Para determinar as equações de campo de  $h_{\mu\nu}$ , basta calcular o tensor de Einstein para uma métrica da forma  $g = \eta + h$  em 1<sup>o</sup> ordem em  $h$  e substituir na equações de Einstein.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

ordem zero em  $h$ : energia das perturbações desprezível.

ou, de modo equivalente:  $R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} T^{(0)} g_{\mu\nu} \right)$ .

Símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\delta} (\partial_{\rho} g_{\delta\nu} + \partial_{\nu} g_{\delta\rho} - \partial_{\delta} g_{\rho\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\sigma\delta} (\partial_{\rho} h_{\delta\nu} + \partial_{\nu} h_{\delta\rho} - \partial_{\delta} h_{\rho\nu}) \quad [1^{\text{a}} \text{ ordem}]\end{aligned}$$

Tensor de Riemann

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu\rho\delta} &= g_{\mu\nu} R^{\lambda}_{\nu\rho\delta} \\ &= \eta_{\mu\nu} \left( \partial_{\rho} \Gamma^{\lambda}_{\nu\delta} - \partial_{\delta} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} + \underbrace{\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\delta\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\delta\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}}_{2^{\text{a}} \text{ ordem}} \right) \\ &= \eta_{\mu\nu} \frac{1}{2} \eta^{\lambda\alpha} \left[ \partial_{\rho} (\partial_{\nu} h_{\alpha\delta} + \partial_{\delta} h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} h_{\nu\delta}) - \partial_{\delta} (\partial_{\nu} h_{\alpha\rho} + \partial_{\rho} h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} h_{\nu\rho}) \right] \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} h_{\mu\delta} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} h_{\nu\delta} - \partial_{\delta} \partial_{\nu} h_{\mu\rho} + \partial_{\delta} \partial_{\mu} h_{\nu\rho})\end{aligned}$$

Tensor de Ricci

$$\begin{aligned}R_{\nu\delta} &= g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\delta} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\delta} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} h^{\rho\delta} - \square h_{\nu\delta} - \partial_{\delta} \partial_{\nu} h + \partial_{\delta} \partial_{\mu} h^{\mu\nu})\end{aligned}$$

onde  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$  é o D'Alembertiano.

Escalar de curvatura

$$\begin{aligned}R &= g^{\nu\delta} R_{\nu\delta} = \eta^{\nu\delta} R_{\nu\delta} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} h^{\rho\nu} - \square h - \square h + \partial_{\delta} \partial_{\mu} h^{\delta\mu}) \\ &= \partial_{\rho} \partial_{\nu} h^{\rho\nu} - \square h.\end{aligned}$$

Equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\nu h^{\rho\sigma} + \partial^\nu \partial_\mu h^{\rho\sigma} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\nu h) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\nu h^{\rho\sigma} - \square h) g_{\mu\nu}$$

$$= 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$\text{ou: } (\partial_\mu \partial^\nu h^{\rho\sigma} + \partial^\nu \partial_\mu h^{\rho\sigma} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\nu h) = 16\pi G (T_{\mu\nu}^{(0)} - 1/2 T^{(0)} \eta_{\mu\nu})$$

$$\text{No vácuo: } \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\nu h^{\rho\sigma} - \partial^\nu \partial_\mu h^{\rho\sigma} + \partial_\mu \partial^\nu h = 0 \quad [R_{\mu\nu} = 0]$$

Transformações de calibre

Mudanças de coordenadas alteram a forma das perturbações e permitem simplificar a eq. para  $h_{\mu\nu}$ . Para preservar a validade da teoria de perturbações lineares, restringimos-las a transformações que podem ser expressas pelas suas expansões em 1ª ordem:

$$x^\mu \mapsto y^\mu = x^\mu - \epsilon \xi^\mu(x)$$

"translações infinitesimal dependente da posição"

A variação  $\epsilon \xi^\mu$  das coordenadas atribuídas a um ponto qualquer são tratadas como perturbações lineares de mesma ordem que  $h_{\mu\nu}$ .

A métrica nos novos coordenados é dada por:

$$g^{(\epsilon)\mu\nu} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}$$

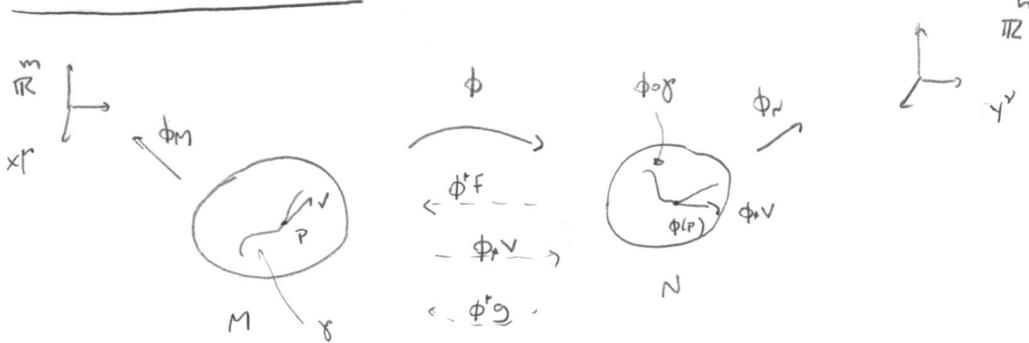
$$= (\delta_\rho^\mu - \epsilon \partial_\rho \xi^\mu) (\delta_\sigma^\nu - \epsilon \partial_\sigma \xi^\nu) (g^{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma})$$

$$\approx g^{\mu\nu} - \underbrace{\epsilon \partial^\mu \xi^\nu}_{- h^{(\epsilon)\mu\nu}} - \underbrace{\epsilon \partial^\nu \xi^\mu}_{- h^{(\epsilon)\mu\nu}} - h^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow h^{(\epsilon)\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \epsilon \partial^\mu \xi^\nu + \epsilon \partial^\nu \xi^\mu$$

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = h_{\mu\nu} + 2\epsilon \partial_{\mu\nu} \xi^\nu$$

"Transformações de calibre"

Mapas diferenciáveis

$\phi: M \rightarrow N$  é diferenciável se  $\phi_N \circ \phi \circ \phi_M^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^0$ , ∀  $\phi_M, \phi_N$ .

Seja:  $\frac{dy^i}{dx^r}$  existe,  $r = 1, 2, \dots$

• Escalar:  $f: N \rightarrow \mathbb{R}$       Pullback:  $\phi^f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi^f = f \circ \phi$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Vectors: } v \in TM, v^p = \frac{\partial x^p}{\partial x} & \quad \text{Pushforward: } (\phi_* v)^q = \frac{\partial y^q(\phi(x))}{\partial x} \\ & \quad \left| \quad \right| = \frac{\partial y^q}{\partial x^r} v^r \\ & \quad \text{tangente a } \gamma \quad \text{tangente a } \phi \circ \gamma \end{aligned}$$

• Tensor covariante:  $g_{ab} \in \mathcal{I}^{(0,2)}$

$$\text{Pullback: } (\phi^* g)(u, v) = g(\phi_* u, \phi_* v)$$

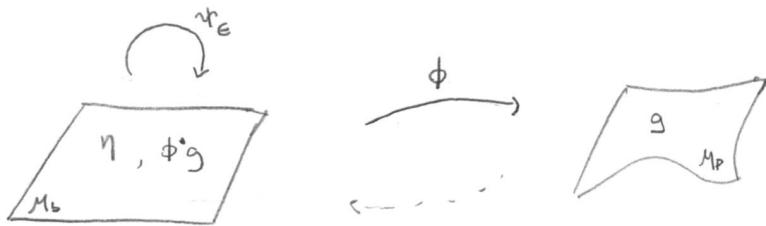
$$(\phi^* g)_{pq} = \frac{\partial y^l}{\partial x^p} \frac{\partial y^k}{\partial x^q} g_{kl}$$

Escolha de calibre

$M_b$ : Geometria de fundo,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$

$M_p$ : Espaço-tempo físico . Ses  
(sol da EE)

$\phi: M_b \rightarrow M_p$ , escolha de calibre



$$\text{Define-se: } h_{\mu\nu} = (\phi^*g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$$

Se o campo gravitacional é fraco em  $M_p$ , então existe  $\phi$  tal que  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . A escolha não é única, no entanto.

- $g$  é sol. das eqs. de Einstein  $\Rightarrow \phi^*g$  também é solução

A não unicidade do calibre pode ser representada por difeomorfismos da geometria de fundo, usados para parametrizar deformações infinitesimais de  $\phi$ :

$$\eta_\epsilon: M_b \rightarrow M_b \quad \rightsquigarrow \quad \text{novo difeomorfismo } \phi \circ \eta_\epsilon: M_b \rightarrow M_p$$

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = [(\phi \circ \eta_\epsilon)^* g]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$$

Seja  $\eta_\epsilon$  o fluxo definido por um campo vetorial  $\xi^\rho$  em  $M_b$ . Para transformações próximas da identidade:

$$\eta_\epsilon(x^\rho) = x^\rho - \epsilon \xi^\rho = y^\rho \quad [\text{translações infinitesimais}]$$

$$\begin{aligned} [(\phi \circ \eta_\epsilon)^* g]_{\mu\nu} &= [\eta_\epsilon^*(\phi^* g)]_{\mu\nu} \\ &= [\eta_\epsilon^*(\eta + h)]_{\mu\nu} \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu} (\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) \\ &= (\delta_\mu^\rho + \epsilon \partial_\mu \xi^\rho)(\delta_\nu^\sigma + \epsilon \partial_\nu \xi^\sigma)(\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) \\ &= \eta_{\mu\nu} + (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)\epsilon + h_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Mudanças de perturbações sob difeomorfismos infinitesimais na direção  $\xi^\rho$ .

7.2) Graus de liberdade de  $h_{\mu\nu}$ 

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_s \partial_\nu h^s_\mu + \partial_s \partial_\nu h^s_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h^{kl} + g_{\mu\nu} \square h)$$

$$\approx 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad , \quad \xi \sim h$$

Decomposição de  $h_{\mu\nu}$ 

$$h_{00} = -2\bar{\Phi}$$

$$h_{ij} = 2s_{ij} - 2\bar{\Xi}s_{ij} \quad , \quad \bar{\Xi} = -\frac{1}{6} s^{ke} h_{ke}$$

$$h_{0i} = n_i$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{troço zero} & \text{parte com troço } \neq 0 \\ (\text{strain}) & \end{matrix}$$

$$s_{ij} = \frac{1}{2} h_{ij} + \bar{\Xi} s_{ij} = \frac{1}{2} h_{ij} - \frac{1}{6} s^{ke} h_{ke} s_{ij} \quad . \quad s^{ij} h_{ij} = -6\bar{\Xi}$$

$$s^{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} s^{ij} h_{ij} - \frac{1}{6} s^{ke} h_{ke} 3 = 0$$

$$h = \begin{bmatrix} -2\bar{\Phi} & n_i \\ n_i & 2s_{ij} - 2\bar{\Xi}s_{ij} \end{bmatrix},$$

$$ds^2 = -(1+2\bar{\Phi})dt^2 + n_i(dt dx^i + dx^i dt) + [(1-2\bar{\Xi})s_{ij} + 2s_{ij}]dx^i dx^j$$

"escalar + vetor + tensor" (em relação ao grupo de rotações 3D)

Tensor de Einstein

$$G_{00} = \frac{1}{2} (\partial_s \partial_0 h^s_0 + \partial_s \partial_0 h^s_0 - \partial_0 \partial_0 h - \square h_{00} + \partial_\mu \partial_\nu h^{kl} - \square h)$$

$$\begin{aligned} &= 1/2 [-\cancel{\partial_0 \partial_0 h_{00}} + \cancel{\partial_1 \partial_0 h^1_0} + \cancel{\partial_0 \partial_0 h_{00}} + \cancel{\partial_2 \partial_0 h^2_0} - \cancel{\partial_0 \partial_0 h} \\ &\quad + \cancel{\partial_0 \partial_0 h_{00}} - \cancel{\nabla^z h_{00}} + \cancel{\partial_0 \partial_0 h_{00}} - 2\cancel{\partial_1 \partial_0 h^1_0} + \cancel{\partial_k \partial_e h^{ke}} + \cancel{\partial_0 \partial_0 h} - \cancel{\nabla^z h}] \\ &\quad \underbrace{\nabla^z h_{00} - \nabla^z h^1_1} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \nabla^z h^1_1 + \frac{1}{2} \partial_k \partial_e h^{ke}$$

$$= 3\nabla^z \bar{\Xi} + \partial_k \partial_e (s^{ke} - \bar{\Xi} g^{ke}) = 2\nabla^z \bar{\Xi} + \partial_k \partial_e s^{ke}$$

$$\therefore G_{00} = 2 \nabla^2 \Phi + 2\omega \partial_e S^{ke}$$

Os demais componentes do tensor de Einstein são obtidos da maneira análoga, levando as fórmulas:

$$G_{0j} = -\frac{1}{2} \nabla^2 n_j + \frac{1}{2} \partial_j \partial_k n^k + 2 \partial \partial_j \Phi + 2\omega \partial_k S_j^k$$

$$G_{ij} = (S_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j) (\Phi - \bar{\Phi}) + S_{ij} 2\partial \partial_k n^k - 2\omega \partial_i n_j \\ + 2 S_{ij} \partial^2 \Phi - \partial S_{ij} + 2\omega \partial_i S_j^k - S_{ij} \partial_k \partial_e S^{ke}$$

### Equações de Einstein

$$\bullet \quad G_{00} = 8\pi G T_{00} \Rightarrow \nabla^2 \Phi = 4\pi G T_{00} - \frac{1}{2} \partial_k \partial_e S^{ke}$$

A equação não contém a derivada temporal de  $\Phi$ . A perturbação escalar  $\Phi$  é completamente determinada por  $T_{00}$  e  $S^{ke}$ , e assim não é um grau de liberdade do campo.

$$\bullet \quad G_{0j} = 8\pi G T_{0j} \Rightarrow (S_{jk} \nabla^2 - \partial_j \partial_k) n^k = -16\pi G T_{0j} + 4 \partial \partial_j \Phi + 2 \partial \partial_k S_j^k$$

A equação não contém  $n^k$ . O vetor  $n^k$  é completamente determinado pelo tensor energia-momento da matéria e pelo "stress"  $S_{jk}$ .

$$\bullet \quad G_{ij} = 8\pi G T_{ij} \Rightarrow \text{Analogamente, eq. para } \Phi \text{ em função de } T_{\mu\nu} \text{ e } S_{\mu\nu}.$$

$\therefore$  Os graus de liberdade de  $T_{\mu\nu}$  são descritos pelo tensor de tensões  $S_{\mu\nu}$ .

$\Phi, \bar{\Phi}, n^k$  são fixados por  $T_{\mu\nu}$  e  $S_{\mu\nu}$ .

Transformações de calibre

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \begin{bmatrix} -2\Phi & w_i \\ - & - & - & - \\ w_i & 2s_{ij} - 2\Phi s_{ij} \\ | & | & | & | \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\partial_0 \xi_0 & \partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 \\ | & | \\ \partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i & | \end{bmatrix}$$

$$s^{ij}(\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i) = 2 \partial^k \xi^k$$

$$\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i = \left( \partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i - \frac{2}{3} \partial^k \xi^k \cdot s_{ij} \right) + \frac{2}{3} \partial^k \xi^k \cdot s_{ij}$$

trago zero

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi + \partial_0 \xi^0 \\ w_i &\rightarrow w_i + \partial_0 \xi^i - \partial_i \xi^0 \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{3} (\partial^k \xi^k) \\ s_{ij} &\rightarrow s_{ij} + \partial_i \xi_j - \frac{1}{3} (\partial^k \xi^k) s_{ij} \end{aligned}$$

"Transformações de calibre"

Calibre transversal ("Newtonianos conformes" no contexto da cosmologia)

Condições de calibre:

$$\partial_i s^{ij} = 0, \quad \partial_i w_i = 0$$

[transversal:  $\vec{v} \cdot (\vec{v}) = 0$ ]

Transformações:  
( $s^{ij}$ )

$$\partial_i \left[ \frac{1}{2} (\partial^i \xi^j + \partial^j \xi^i) - \frac{1}{3} \partial^k \xi^k s^{ij} + s^{ij} \right] = 0$$

$$\frac{1}{2} \nabla^2 \xi^{ij} + \frac{1}{2} \partial^i \partial^j \xi^i - \frac{1}{3} \partial^i \partial^j \xi^i + \partial_i s^{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \xi^{ij} + \frac{1}{3} \partial^i (\partial^j \xi^i) = -2 \partial_i s^{ij}$$

A condição imposta sobre  $s^{ij}$  determina os componentes especiais  $\xi^i$  do vetor  $\xi^M$ .

Transformações:  $\partial_i (n^i + \partial_0 \xi^i - \partial^i \xi^0) = 0$

$$(n^i) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \xi^0 = \partial_i n^i + \partial_0 \partial^i \xi^i} \quad \leftarrow \text{fixa } \xi^0.$$

As equações de Einstein se reduzem à forma:

$$(00): z \nabla^2 \Phi = 8\pi G T_{00}$$

$$(0i): -\frac{1}{2} \nabla^2 n_j + z \partial_0 \partial_j \Phi = 8\pi G T_{0j}$$

$$(ij): (\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j) (\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{ij} n_j + 2 \delta_{ij} \partial_0 \Phi - \square s_{ij} = 8\pi G T_{ij}$$

### Calibre sincrono

Condições de calibre:  $\Phi = 0, n^i = 0$

Transformações:  $\left| \begin{array}{l} \partial_0 \xi^0 = -\Phi \quad \leftarrow \text{fixa } \xi^0 \\ \partial_0 \xi^i = -n^i + \partial^i \xi^0 \quad \leftarrow \text{fixa } \xi^i \end{array} \right.$

Métrica:  $ds^2 = -dt^2 + (s_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j$

$$\sim$$

$$h_{ij} = 2s_{ij} - 2\Psi s_{ij}$$

Neste calibre, as perturbações operam apenas na parte espacial da métrica.

### Calibre de Lorentz (ou harmônico)

[Produtos de ação gravitacional]

Condição de calibre:  $\partial_\mu h^{\mu\nu} - 1/2 \partial^\nu h = 0$

Transformações:  $\partial_\mu (h^{\mu\nu} + \partial^\mu \xi_\nu + \partial^\nu \xi^\mu) - 1/2 \partial_\nu (h + 2\partial^\mu \xi^\nu) = 0$

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} + \square \xi_\nu + \partial_\nu (\cancel{\partial_\mu \xi^\mu}) - 1/2 \partial^\nu h - \partial_\nu (\cancel{\partial^\mu \xi^\mu}) = 0$$

$$\therefore \square \xi_\nu = \frac{1}{2} \partial^\nu h - \partial_\mu h^{\mu\nu}$$

- O calibre harmônico pode ser caracterizado pela condição harmônica:

$$g^{r\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0,$$

que corresponde, em primeira ordem, a:

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} (\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} (\partial^\lambda h_{\mu\sigma} + \partial_\mu h^\lambda_\sigma - \partial_\sigma h_\mu) \\ &= \eta^{\lambda\sigma} \left( \partial_\mu h^{\mu\sigma} - \frac{1}{2} \partial_\sigma h \right) \end{aligned}$$

- Outra caracterização equivalente, que motiva o nome do calibre, é dada por:

$$\square x^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu x^\mu = 0,$$

uma generalização da eq. de Laplace ( $\nabla^2 \phi = 0$ ). As coordenadas  $x^\mu$  são funções.

Segue que:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\mu\nu} \nabla_\mu (\partial_\nu x^\mu) \\ &= g^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta_\nu^\mu \\ &= g^{\mu\nu} \left( \partial_\mu \overset{\circ}{\delta_\nu^\mu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \delta_\nu^\mu \right) = -g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \end{aligned}$$

## 7.4) Propagação de ondas gravitacionais

Equações de Einstein no vácuo ( $T_{\mu\nu} = 0$ )No calibre transversal:  $[\partial^i s^{ij} = 0, \partial^i n^j = 0]$ 

(00)  $2 \nabla^i \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = 0$

(01)  $-\frac{1}{2} \nabla^2 n^i_j + 2 \partial^i \partial^j \Phi = 0 \Rightarrow n^i_j = 0$

(11)  $(s_{ij} \nabla^2 - \partial^i \partial^j)(\Phi - \bar{\Phi}) - \partial_0 \partial_i n^i_j + 2 s_{ij} \partial^2 \Phi - \square s_{ij} = 0$

Tomando o traco da terceira equação, com  $\Phi = 0$  e  $n^i_j = 0$ :

$$0 = s^{ij} (s_{ij} \nabla^2 - \partial^i \partial^j) \Phi - \delta^{ij} \square s_{ij}$$

$$= (3 \nabla^2 - \nabla^2) \Phi - \square s^{ij} s_{ij} = 2 \nabla^2 \Phi \Rightarrow \Phi = 0.$$

Com isso, as equações se reduzem:

$$\boxed{\square s_{ij} = 0}, \quad \partial^i s^{ij} = 0, \quad \delta^{ij} s_{ij} = 0.$$

Perturbações lineares no calibre transversal de traco zero

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & - & - \\ 0 & -1 & 1 & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{array}{l} h_{00}^{TT} = 0 \\ \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \\ \partial_\mu h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \end{array} \right\} \text{condições de calibre}$$

[possível no vácuo]

Eq. de campo:  $\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0$

Soluções: ondas planasProcuramos soluções da forma:  $h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}$   
cte, espacial, simétrico, traco zero

$$\begin{aligned} 0 = \square h_{\mu\nu}^{TT} &= \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma (C_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) \\ &= \eta^{\rho\sigma} (ik_\rho)(ik_\sigma) C_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \\ &= -K^2 h_{\mu\nu}^{TT} \end{aligned}$$

$$\boxed{K^2 = 0; K^\alpha \in \text{tipo lnu.}}$$

ou seja, a onda se propaga à velocidade da luz. Podemos representar o quadvíctor  $k^\delta$  na forma:

$$k^\delta = (\omega, k^1, k^2, k^3) = (\omega, \vec{k})$$

$$k^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = k^2 \Rightarrow \omega = K. \quad \therefore \frac{\omega}{K} = 1.$$

### • Condições transversais

$$0 = \partial_\mu h_{\mu\nu}^{PV}$$

$$= \partial_\mu (C^{\mu\nu} e^{ik_s x^\delta}) = i C_{\mu\nu} k^\nu e^{ik_s x^\delta} \Rightarrow \boxed{C_{\mu\nu} k^\nu = 0} \quad \begin{matrix} 4 \text{ condições.} \\ (1 \text{ trivial}) \end{matrix}$$

O tensor  $C_{\mu\nu}$  foi introduzido com 5 coeficientes independentes. A condição de transversalidade reduz esse número a 2 coeficientes independentes.

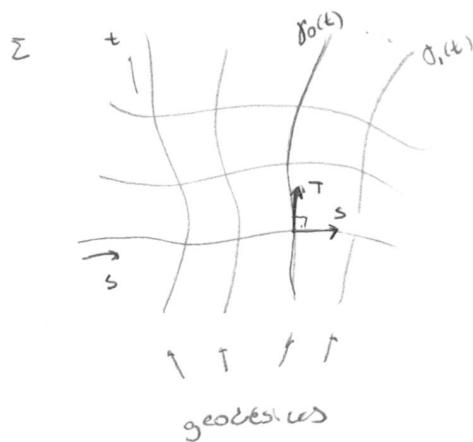
Exemplo Onda se propagando na direção z.

$$k^{\mu} = (\omega, 0, 0, k^3) = (\omega, 0, 0, \omega) \Rightarrow C_{ij} \delta^{ij} = 0 \quad \text{ou} \quad C_{33} = 0$$

$$\Rightarrow C_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore 2 \text{ modos.} \quad C_{11} = h_t \\ C_{12} = h_x$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_t & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Equações do desvio geodésico



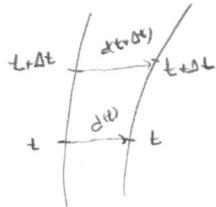
- $\theta_s(t)$ : família de geodésicas a um parâmetro
- $(s, t)$  é uma carta local na superfície bidimensional formada pelos geodésicos.

$$x^r(t, s) \in \Sigma \subset M$$

Curvas:  $x^r(t, s)$ , geodésicas para cada  $s$  fixo.

• Campos vetoriais:  $T^r = \frac{\partial x^r}{\partial t}$ ,  $S^r = \frac{\partial x^r}{\partial s}$  (desvio)

Como os curvos são geodésicas, temos:  $T^e \nabla_p T^r = 0$ . Além disso, é possível escolher parametrizações tais que  $T \perp S$  em  $t=0 \Rightarrow T \perp S$  para qualquer  $t$ .



Velocidade relativa:  $V^r = T^e \nabla_p S^r$

Aceleração relativa:  $A^r = T^e \nabla_p V^r$

- Segue do fato de ( $s, t$ ) serem coordenadas que os campos vetoriais associados satisfazem:

$$[T, S]^r = T^e \nabla_p S^r - S^e \nabla_p T^r = 0$$

pois:

$$[T, S]^f = TS^f - ST^f = \partial_t \partial_s f - \partial_s \partial_t f = 0$$

Portanto:  $\boxed{T^e \nabla_p S^r = S^e \nabla_p T^r}$ .

Calculemos a aceleração relativa:

$$A^r = T^e \nabla_p (T^e \nabla_p S^r)$$

$$= T^e \nabla_p (S^e \nabla_p T^r)$$

$$= T^e (\nabla_p S^e) (\nabla_p T^r) + T^e S^e \nabla_p \nabla_p T^r$$

$$= S^e (\nabla_p T^e) (\nabla_p T^r) + T^e S^e (R^r_{\nu\rho\sigma} T^\nu + \nabla_\nu \nabla_p T^r)$$

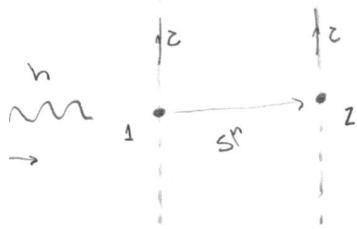
$$= S^e (\nabla_p T^e) (\nabla_p T^r) + R^r_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^e S^e + S^e \nabla_\nu (T^e \nabla_p T^r) - S^e (\nabla_\nu T^e) (\nabla_p T^r)$$

$$(3') = R^r_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^e S^e$$

$$\boxed{A^r = R^r_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^e S^e}$$

"Força de mola"  
(tidal force)

## Passagem de onda gravitacional



Partículas em movimento lento:  $\mathbf{U} = (1, 0, 0, 0)$  [ordem zero]

(A normalização de  $\mathbf{U}$  inclui correções de 1º orden; estes levam efeitos de 2º orden, no entanto, na variação de  $s^1$  determinada pela eq. do desvio geodésico.)

"referencial próprio local"  
[na origem,  $g_{11}=g_{22}=0$ ,  $R_{1111}=0$ ]

Em orden zero,  $\mathbf{z} \approx \mathbf{t} \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = R^{1000} U^v U^p S^6 = R^{1000} S^6$$

$$\frac{\partial^2 s^1}{\partial t^2} = R^{1000} S^6$$

Pto 2 com coordenadas  $s^1(t)$  associadas a vetor tangente com coord.  $s^2$ ; na origem,  $L = 0$  é a distância. Distância geodésica é dada por  $S(t) = \sqrt{s^1(t)s^2(t)}$ .

$$R^{1000} = \frac{1}{2} (\partial_p \partial_v h_{00} + \partial_v \partial_p h_{00} - \partial_v \partial_v h_{00} - \partial_p \partial_p h_{00})$$

$$R^{1000} = \frac{1}{2} (\partial_0^2 h_{00} + \partial_0 \partial_0^2 h_{00} - \partial_0 \partial_0 h_{00} - \partial_0 \partial_0^2 h_{00})$$

$$= \frac{1}{2} \partial_0^2 h_{00}$$

$$\text{Para o modo } h_{++} = h_{11} = -h_{22}$$

$$\frac{\partial^2 s^1}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \partial_0^2 (h_{++} e^{ik_0 x^3}) S^1, \quad S^1 = S_0 + S S^1(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 S^1}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \partial_0^2 (h_{++} e^{ik_0 x^3}) S_0^1 \quad \Rightarrow \quad S S^1 = \frac{1}{2} h_{++} e^{ik_0 x^3} S_0^1$$

$$\therefore S^1(t) \approx \left[ 1 + \frac{1}{2} h_{++} \cos \omega t \right] S_0^1$$

A: amplitude relativa  
de oscilações

$$\boxed{\frac{\Delta S^1}{S^1} \sim \frac{h_{++}}{Z}}$$

Analogamente para o componente  $S^2$ ,

$$S^2(t) = \left( 1 - \frac{1}{2} h_{++} \cos \omega t \right) S_0^2$$

As oscilações nas direções  $x^1$  e  $x^2$  estão completamente fora de fase.



- Para o modo  $b_x = b_{12} = b_{21}$

$$S^1 = S^1(0) + \frac{1}{2} b_x \cos(\omega t) S_0^1$$

$$S^2 = S^2(0) + \frac{1}{2} b_x \cos(\omega t) S_0^2$$



### Distância geodésica

Considere que os dois partículas se encontram no eixo  $x$ , separadas por uma distância de coordenadas  $L_c$ . A distância física é:

$$L = \int_0^{L_c} dx \sqrt{g_{11}} = \int_0^{L_c} dx \sqrt{1 + h_{11}^{\text{rr}}} = \int_0^{L_c} dx \left( 1 + \frac{1}{2} h_{11}^{\text{rr}} \right)$$

$$\approx L_c \left( 1 + \frac{1}{2} h_{11}^{\text{rr}} \right) \quad \text{em } x=0. \quad (h_{11}^{\text{rr}} = \text{de em } [0, L_c]) \quad \left[ \lambda \gg L \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\delta L}{L} = \frac{h_{11}^{\text{rr}}}{2}$$

Ref: EE Flanagan & SA Hughes,  
"The basis of GW theory"  
arXiv:gr-qc/0501041.

- Geodésicos no eixo  $x$  e transversal ao eixo  $x$ .

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{\rho \sigma}^i \frac{dx^\rho}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = 0, \quad \Gamma_{\rho \sigma}^i = \frac{1}{2} g^{\mu \nu} (\partial_\rho h_{\mu \sigma} + \partial_\sigma h_{\mu \rho} - \partial_\mu h_{\rho \sigma})$$

Para partículas em movimento não relativístico,  $\dot{r}^i = \frac{dx^i}{dt} \ll 1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \approx \frac{d}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i = 0 \quad . \quad \text{Mas: } \Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} (\partial_0 h_{00} + \partial_0 h_{00} - \partial_0 h_{00}) = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0}$$

"A localização em coordenadas de uma partícula em mov. não relativístico responde pelo passagem de onde"

## 7.5) Produção de ondas gravitacionais

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial^\sigma h^\delta_\mu + \partial_\mu \partial^\sigma h^\delta_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\sigma h^{\rho\sigma} + \eta_{\mu\nu} \square h)$$

Eq. Einstein:  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$

Perturbações de trago oposto (trace-reversed perturbation)

$$\boxed{\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \delta_{\mu\nu}} \Rightarrow \begin{aligned} \bar{h} &= \eta^{\mu\nu} (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \delta_{\mu\nu}) \\ &= h - z h = -h \end{aligned} \therefore \bar{h} = -h$$

Quando  $h=0$ , temos  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ , o que ocorre no calibre transversal de trago zero.

Subindo um dos índices na definição de  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , temos:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \delta^{\mu\nu}$$

$$-\square h_{\mu\nu} = -\square \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \bar{h}^\sigma_\mu &= \partial_\sigma (h^\sigma_\mu - \frac{1}{2} h \delta^\sigma_\mu) \Rightarrow \partial_\nu \partial_\sigma \bar{h}^\sigma_\mu = \partial_\nu \partial_\sigma h^\sigma_\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\sigma h \\ &= \partial_\sigma h^\sigma_\mu - \frac{1}{2} \partial_\sigma h \end{aligned}$$

$$\partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma} = \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \square h \Rightarrow -\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma} = -\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h$$

$$\Rightarrow G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\sigma \bar{h}^\sigma_\mu + \partial_\mu \partial_\sigma \bar{h}^\sigma_\nu - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma})$$

Transformações de calibre

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$$

$$\Rightarrow h \rightarrow h + 2 \partial_\mu \xi^\mu$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (h + 2 \partial_\lambda \xi^\lambda)$$

$$= \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda$$

Para a transformação de calibre:

$$\square \xi_p = - \partial_x \bar{h}^x_{\mu\nu}$$

as perturbações transformada satisfazem:

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} \rightarrow \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} + \square \xi^\nu + \cancel{\partial^\nu (\partial_x \xi^x)} - \cancel{\partial^x (\partial_x \xi^x)} = 0$$

$\sim$   
 $- \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}$

$$\boxed{\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0}$$

"Calibre de Lorenz"

No calibre de Lorenz, resta um único termo no tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = - \frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$\boxed{\square \bar{h}_{\mu\nu} = - 16\pi G T_{\mu\nu}}$$

Eq. Einstein ( $\bar{h}_{\mu\nu}$ )  
 [calibre de Lorenz]

### Funções de Green do D'Alembertiano

$$\square_x G(x^\delta - y^\delta) = \delta^{(\alpha)}(x^\delta - y^\delta) \quad \leftarrow \text{define } G \text{ (com cond. contorno específicos)}$$

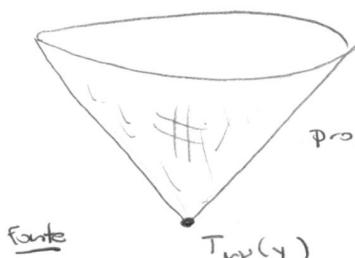
$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = - 16\pi G \int G(x^\delta - y^\delta) T_{\mu\nu}(y^\delta) dy$$

### Funções de Green retardada:

$$G(x^\delta - y^\delta) = - \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \underbrace{\delta(|\vec{x} - \vec{y}| - (x^\delta - y^\delta))}_{\text{cone de luz}} \underbrace{\Theta(x^\delta - y^\delta)}$$

amplitude com como  
inverso da distância

influência de  $T(y)$  se  
propaga para o futuro  $(x^\delta > y^\delta)$ ,  
mas não para o passado.



Perturbações se  
propagam na superfície  
do cone de luz  
futuro...

... mas não sobre o cone de luz passado

A perturbações em um dos pontos  $x$   
inclui efeitos produzidos por  $T_{\mu\nu}(y)$   
em todos os cones de luz possíveis de  $x$



## Funções de Green no eletromagnetismo

### • Eletrostática

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

Potencial de carga pontual

"

Função de Green  $\propto \left( -\frac{1}{\epsilon_0} \right)$

Função de Green:  $\vec{\nabla}_x^2 G(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \Rightarrow G(\vec{x} - \vec{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$

Carga pontual:  $\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad , \quad \rho = q \delta(\vec{x} - \vec{y})$

Distribuições de carga:  $\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\vec{y} \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$

### • Eletrodinâmica (cálculo de Lorchz)

$$\square \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\vec{y} \frac{\rho(t_r, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

" Informações sobre a presença de cargas se propagam à velocidade da luz "

Tempo retardado:  $t_r = t - |\vec{x} - \vec{y}| / c$   
[potencial retardado]

## Transformada de Fourier

Convenção:  $\tilde{\phi}(\omega, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \phi(t, \vec{x})$

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, \vec{x})$$

### Perturbação da métrica

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4G \int d^4y S(|\vec{x} - \vec{y}|) \Theta(x^2 - y^2) T_{\mu\nu}(y^0) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4G \int d^3y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} T_{\mu\nu}(t_r, \vec{y}), \quad t_r = t - |\vec{x} - \vec{y}|$$

$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \tilde{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x})$$

$$= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt d^3y e^{i\omega t} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})$$

$$= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r d^3y e^{i\omega t_r} e^{i\omega |\vec{x} - \vec{y}|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} T_{\mu\nu}(t_r, \vec{y})$$

$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = 4G \int d^3y \frac{e^{i\omega |\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{y})$$

Sol. geral no espaço de frequências.

### Objeto compacto, distante, não relativístico

Adotemos as aproximações:

1. Fonte localizada:  $\rho = 0$  para  $r > \delta r$ .

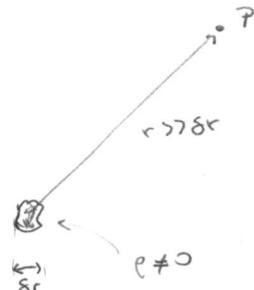
2. Fonte distante:  $r \gg \delta r$

3. Movimento lento:  $\delta r \ll \omega^{-1}$

tempo gasto pela luz para  
atravessar o objeto

$\propto T$ , escala de tempo de  
oscilações do objeto

Nesse regime:  $\frac{e^{i\omega |\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{e^{i\omega r}}{r}$



$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{y})$$

Os componentes de  $\tilde{h}_{\nu}$  não são independentes. A condição de Lorenz implica que:

$$0 = \partial_\mu \tilde{h}^\mu_\nu = \partial_\mu \left[ \frac{1}{(2\pi)} \int dw e^{i w t} \tilde{h}^{\mu\nu}(w, \vec{x}) \right]$$

$$\Rightarrow -i w \tilde{h}^{0\nu} + \partial_0 \tilde{h}^{i\nu} = 0$$

$$\boxed{\tilde{h}^{0\nu} = -\frac{i}{w} \partial_0 \tilde{h}^{i\nu}}$$

- $v=j$ :  $\tilde{h}^{0j}$  a partir de  $\tilde{h}^{ij}$
- $v=0$ :  $\tilde{h}^{00}$  " "  $\tilde{h}^{0j}$

Basta, portanto, determinar a parte espacial  $\tilde{h}^{ij}$ . Estamos interessados no cálculo de:

$$\int d^3y \tilde{T}_{ij}(w, \vec{y}) \rightarrow \boxed{\tilde{h}^{ij} = 4G \frac{e^{i w r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{ij}(w, \vec{y})}$$

Usando a identidade  $\delta_K^i = \partial_K y^i$  e integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int d^3y \partial_K y^i \tilde{T}^{Kj} &= \int d^3y [\partial_K (y^i \tilde{T}^{Kj}) - y^i \partial_K \tilde{T}^{Kj}] \\ &= - \int d^3y y^i \partial_K \tilde{T}^{Kj} \end{aligned}$$

Por conservação de energia:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow -i w \tilde{T}^{0\nu} + \partial_0 \tilde{T}^{\nu\nu} = 0$$

$$\boxed{\partial_K \tilde{T}^{Kj} = i w \tilde{T}^{0j}}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \int d^3y \tilde{T}_{ij} &= -i w \int d^3y y^i \tilde{T}^{0j} && [\text{T é simétrico}] \\ &= -\frac{i w}{2} \int d^3y (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) \\ &= -\frac{i w}{2} \int d^3y [\partial_i (y^i y^j \cancel{\tilde{T}^{00}}) - y^i y^j \partial_i \tilde{T}^{00}] && [\text{cons. energia}] \\ &= -\frac{\omega^2}{2} \int d^3y y^i y^j \tilde{T}^{00} \\ &= -\frac{\omega^2}{2} \tilde{T}_{ij}(w) \end{aligned}$$

definindo-se o momento de quadrupolo da distribuição de energia:

$$I_{ij}(t) = \int y^i y^j T^\infty(t, \vec{y}) d^3y$$

tensor constante em cada instante do tempo

Segue que:

$$\tilde{h}_{ij}(\omega, \vec{x}) = -2G\omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} I_{ij}(\omega), \quad \tilde{I}_{ij}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} I_{ij}(t)$$

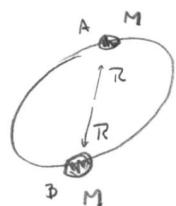
$$= \int d^3y y^i y^j \tilde{T}_{00}$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{ij}(t, \vec{x}) &= -\frac{2G}{\sqrt{2\pi}} \int dw e^{-i\omega t} \omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega) \\ &= \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dw e^{-i\omega(t-r)} \tilde{I}_{ij}(\omega) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} (tr)} \quad \text{"Fórmula do quadrupolo"}$$

### Exemplo Sistemas binários



Aproximações Newtonianas:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{4\pi^2 r^3}}$$

Posições:  $\left\{ \begin{array}{l} x_A^1 = R \cos \omega t, \quad x_A^2 = R \sin \omega t, \quad x_A^3 = 0 \\ x_B^1 = -R \cos \omega t, \quad x_B^2 = -R \sin \omega t, \quad x_B^3 = 0 \end{array} \right.$

$$T^\infty(t, \vec{x}) = M \delta(x^3) [ \delta(x^1 - x_A^1) \delta(x^2 - x_A^2) + \delta(x^1 - x_B^1) \delta(x^2 - x_B^2) ]$$

$$I_{11} = \int d^3x x^1 x^1 T^\infty = M \cdot 2R^2 \cos^2 \omega t = MR^2 (1 + \cos 2\omega t)$$

$$I_{22} = MR^2 (1 - \cos 2\omega t), \quad I_{12} = I_{21} = MR^2 \sin 2\omega t$$

$$\therefore \tilde{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{8GM\omega^2 R^2}{r} \begin{bmatrix} -\cos 2\omega t & -\sin 2\omega t & 0 \\ -\sin 2\omega t & \cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{8L}{L} \sim \frac{4GM\omega^2 R^2}{r}$$

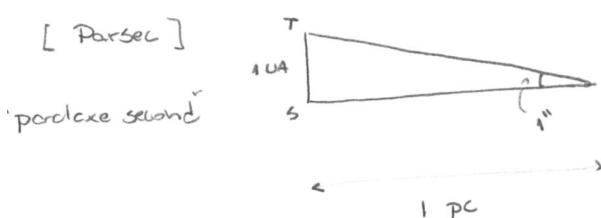
Amplitude h

Usando a fórmula para a frequência:

$$h \sim \frac{R_s^2}{r R}$$

$$M_\odot \rightarrow R_s \approx 3 \text{ km}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \sim 10 M_\odot \\ r \sim 100 \text{ Mpc} \\ R \sim 10 R_s \end{array} \right. \rightarrow h \sim 10^{-21}, \quad f \sim 10^{-2} \text{ Hz.}$$



$$1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc}$$

$$1 \text{ pc} = 3,26 \text{ ly}$$

$$= 3,08 \times 10^{16} \text{ m}$$

[ Primeira detecção LIGO ]

GW150914

$$(36 + 29) M_\odot, \quad 410^{+160}_{-180} \text{ Mpc}, \quad \Delta t \sim 0.2 \text{ s}, \quad 35-250 \text{ Hz}$$

$$62^{+4}_{-3} M_\odot \text{ (3 } M_\odot \text{ irradiados)}$$