UFMG

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física
Prof. Nelson Yokomizo

Relatividade Geral

Data de entrega: 04/09/2020

Avaliação

Exercício 1. [20pt] Considere eventos A, B e C no espaço-tempo de Minkowski com coordenadas dadas por

$$A^\mu = (0,0,0,0)\,, \qquad B^\mu = (3,5,0,0)\,, \qquad C^\mu = (5/4, 3/4, 0, 0).$$

em um referencial inercial S.

a) Determine se o intervalo entre os eventos A e B é de tipo tempo, espaço ou luz.

b) Construa uma transformação de Lorentz $\Lambda^{\mu'}{}_\mu$ para um novo referencial S' tal que no novo referencial os eventos A e B sejam simultâneos.

c) Determine as coordenadas do evento C em S'.

Exercício 2. [20pt] No espaço-tempo de Minkowski, sejam $V^\mu = (-1, 2, 0, -2)$ e $X^{\mu\nu}$ um tensor com componentes

$$X^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

onde o índice μ indica a linha e o coeficiente ν indica a coluna do componente $X^{\mu\nu}$ na matriz. Calcule as seguintes quantidades:

a) $V^\mu V_\mu$

b) $V_\mu X^{\mu\nu}$

c) $X^\mu{}_\nu$

d) $X_{[\mu\nu]}$

Em cada caso, expresse explicitamente a quantidade a ser calculada em termos de V^μ, $X^{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$.

Exercício 3. [20pt] Uma partícula massiva realiza um movimento helicoidal em um dado referencial. O movimento da partícula é descrito por:

$$x = R\cos\omega t\,, \quad y = R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,, \quad z = ut\,,$$

onde R, ω e u são constantes. Determine a quadrivelocidade U^μ e a quadriaceleração a^μ da partícula no referencial em questão. Calcule a aceleração própria $|a^\mu a_\mu|$.

Exercício 4. [20pt] O referencial S' se move com uma velocidade $v\,\hat{e}_x$ no sentido positivo do eixo x em relação ao referencial S. No referencial S', uma barra de comprimento L paralela ao eixo x' se move no sentido positivo do eixo y' com velocidade constante $u\,\hat{e}_{y'}$. Mostre que, para $u \neq 0$, a barra aparece inclinada em relação ao eixo x no referencial S e determine o ângulo de inclinação.

Exercício 5. [20pt] O tensor energia-momento de um fluido perfeito é definido como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu}\,,$$

onde ρ é a densidade de energia e p a pressão do fluido. A condição de conservação de energia é expressa por

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0\,.$$

Um fluido específico é caracterizado por uma equação de estado $p = p(\rho)$ relacionando sua pressão à densidade de energia.

a) A energia escura satisfaz a equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Impondo a condição de conservação de energia, mostre que ρ_Λ deve ser constante no espaço-tempo.

b) O caso $p = 0$ descreve o fluido chamado de poeira. Impondo a condição de conservação de energia, obtenha as seguintes condições sobre a densidade de energia:

$$\partial_\mu(\rho\,U^\mu) = 0\,, \qquad \rho\,U^\mu \partial_\mu U^\nu = 0\,.$$

Data de entrega: 04/09/2020

Enviar para: yokomizo@fisica.ufmg.br