# 1. Relatividade restrita

Refs.: Carroll, cap. 1
Schutz, caps. 1 a 4

## 1.1) Mecânica Newtoniana e transformações de Galileu

Na mecânica clássica não relativística, espaço e tempo são absolutos: medidas de duração e comprimento são independentes do observador.

tempo: $t$ , $\Delta t$

espaço: $\vec{r} = (x, y, z)$ , $(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$

Existe uma classe especial de referenciais, ditos inerciais, nos quais vale a 1ª lei de Newton. Nesses referenciais, a dinâmica de uma partícula é descrita pela equação de movimento dada pela 2ª lei de Newton:

Em referencial inercial: $\vec{F} = m \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ .

A velocidade relativa de dois referenciais inerciais quaisquer é constante.

Um evento qualquer ocorre em um ponto do espaço em um determinado instante do tempo, sendo portanto descrito por quatro coordenadas:

evento: $(t, \vec{r}) = (t, x, y, z)$ .

As coordenadas de um evento medidas em diferentes referenciais inerciais estão relacionadas por transformações de Galileu. Há três tipos de transformações de Galileu:

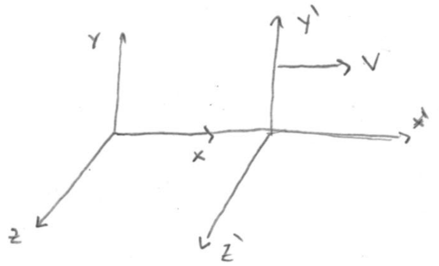
movimento relativo: $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t$ , $t' = t$

translações da origem: $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{R}$ , $t' = t + s$

rotações espaciais: $\vec{r}\,' = O \cdot \vec{r}$ , $O^{-1} = O^T$ .

O conjunto formado por composições arbitrárias desses três tipos de transformações é chamado de grupo de Galileu não homogêneo.

Exemplo: Referencial movendo-se no eixo x; transformação de Galileu.




$$x' = x - Vt \qquad t' = t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

As transformações de Galileu preservam intervalos de tempo e de comprimento:

$$\Delta t' = \Delta t \,, \qquad \Delta r' = \Delta r \,,$$

bem como a equação de movimento. Para referenciais em movimento relativo, por exemplo:

$$m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt'^2} = m\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r} - \vec{V}t) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \qquad \therefore \vec{F}' = m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\,, \ \vec{F}' = \vec{F}.$$

No caso de rotações, as coordenadas da força também são rodadas, $\vec{F}' = O.\vec{F}$.

Portanto, as transformações de Galileu preservam a cinemática e a dinâmica de partículas não relativísticas e formam o grupo de simetria da mecânica Newtoniana.

Adição de velocidades

Partícula | em S: $\vec{r}$
| em S': $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}} - \vec{V}$$
$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V} \iff \boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}}$$

## 1.2) Espaço-tempo na relatividade restrita

A eletrodinâmica de Maxwell não é covariante por transformações de Galileu, ou seja, a forma das equações de Maxwell não é preservada por essas transformações. Em particular, as equações de Maxwell determinam a velocidade de propagação da luz,

$$\text{eqs. Maxwell} \Rightarrow \text{vel. da luz} = c = 3\times 10^{8}\ \text{m/s},$$

e, sob transformações de Galileu, teríamos $c \to c + V$, o que não é observado. As equações de Maxwell são na verdade covariantes sob transformações de Lorentz, mantendo sua forma em referenciais inerciais arbitrários sob essas transformações das coordenadas espaciais e temporal.

<u>Exemplo</u>: Referencial movendo-se no eixo $x$; transformação de Lorentz.

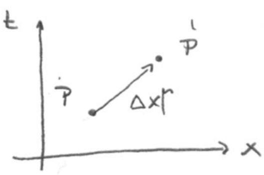
$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Para que a mecânica clássica se mantenha consistente, no entanto, as transformações das coordenadas espaciais e temporal entre referenciais inerciais devem ser as mesmas para o campo eletromagnético e partículas, visto que habitam o mesmo espaço-tempo. A relatividade restrita surge como uma generalização da mecânica de partículas covariante sob transformações de Lorentz.

- Espaço-tempo de Minkowski

Na relatividade restrita, espaço e tempo deixam de ser absolutos, combinando-se em um espaço-tempo quadridimensional. Medidas de duração e comprimento dependem do observador, mas uma combinação dessas quantidades, chamada de intervalo $(\Delta s)^2$, mantém-se independente do observador.

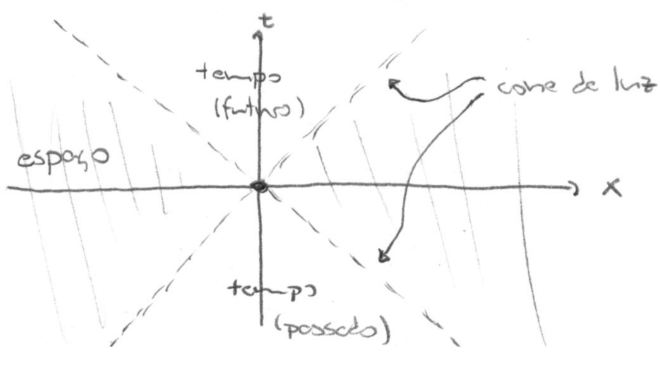
evento no espaço-tempo: $x^\mu = (ct, x, y, z)$




Intervalo: $(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$

não é positivo definido

$$(\Delta s)^2 \begin{cases} = 0, & \text{tipo luz} \\ < 0, & \text{tipo tempo} \\ > 0, & \text{tipo espaço} \end{cases}$$



Eventos separados por um intervalo de tipo espaço são simultâneos em algum referencial inercial. Nesse caso:

intervalo tipo espaço: $(\Delta s)^2 = (\text{distância espacial})^2$

↖ em referencial onde P e P' são simultâneos

Intervalos de tipo tempo descrevem o movimento inercial de partículas massivas.

intervalo tipo tempo: $(\Delta s)^2 = -(\Delta \tau)^2$

$\tau$: tempo próprio, medido ao longo de $\Delta x^\mu$.

Intervalos de tipo luz descrevem trajetórias de partículas de massa zero.

O intervalo é descrito de maneira compacta em termos da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, que define a geometria do espaço-tempo de Minkowski.

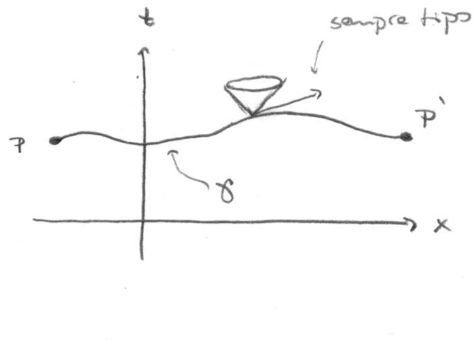
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} , \qquad \mu,\nu = \underset{t}{0}, \underbrace{1,2,3}_{\vec{r}}$$

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

$$\boxed{(\Delta s)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu} ,$$ usando a convenção de soma de Einstein.

Usaremos neste curso unidades tais que $\boxed{c = 1}$.

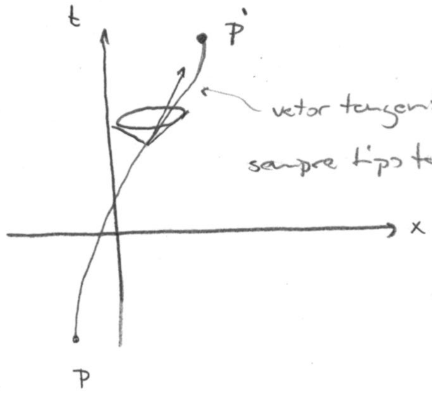
- Distância ao longo de uma curva espacial




Curva $\gamma$: $x^\mu(\lambda)$

$$\Delta s = \int ds$$
$$= \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda$$

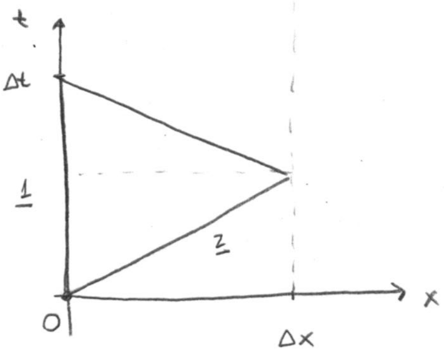
• Distância ao longo de uma curva temporal (trajetória de partícula)




Curva $\gamma$: $x^\mu(\lambda)$

$$\Delta\tau = \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda$$

Exemplo: Paradoxo dos gêmeos




Para 1: $x^\mu = (\lambda, 0, 0, 0)$ , $0 < \lambda < \Delta t$

$$\Delta\tau = \int_0^{\Delta t} \sqrt{-\eta_{00}}\, d\lambda = \Delta t \qquad \therefore \boxed{\Delta\tau_1 = \Delta t}$$

Para 2: $x^\mu_{(ida)} = (\lambda, v\lambda, 0, 0)$ , $0 < \lambda < \Delta t/2$

$$\Rightarrow \frac{dx^0}{d\lambda} = 1, \quad \frac{dx^1}{d\lambda} = v, \quad \frac{dx^2}{d\lambda} = \frac{dx^3}{d\lambda} = 0$$

$v = 2\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

$$(\Delta\tau)_{ida} = \int_0^{\Delta t/2} \sqrt{-(\eta_{00} + \eta_{11} v^2)}\, d\lambda$$

$$= \int_0^{\Delta t/2} \sqrt{1-v^2}\, d\lambda = \sqrt{1-v^2}\,\frac{\Delta t}{2}$$

"Dilatação temporal" do tempo próprio do observador 2.

$$\therefore \boxed{\Delta\tau_2 = \sqrt{1-v^2}\,\Delta t} < \Delta\tau_1$$

## 1.3 Transformações de Lorentz

→ Transformações de coordenadas que preservam o intervalo $\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$.

- translações: $x^\mu \mapsto x^{\mu'} = \delta^{\mu'}_{\mu} (x^\mu + a^\mu)$

$$\Delta x^\mu = \Delta x^{\mu'}$$

- rotações e boosts: $x^\mu \mapsto x^{\mu'} = \underbrace{\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}}_{\text{matriz de transformação}} x^\nu \qquad (x' = \Lambda x)$

Invariância: 
$$\Delta s^2 = (\Delta x)^T \eta (\Delta x)$$
$$\Delta s'^2 = (\Delta x')^T \eta (\Delta x')$$
$$= (\Delta x)^T \Lambda^T \eta \Lambda (\Delta x)$$

$$\boxed{\eta = \Lambda^T \eta \Lambda}$$

$\Lambda$: transformações de Lorentz

Em coordenadas: $\eta_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu'}{}_{\rho} \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\sigma}$

$$\boxed{\eta_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu'}{}_{\rho} \Lambda^{\nu'}{}_{\sigma} \eta_{\mu'\sigma'}}$$

- Rotações: $\Lambda = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right]$, $R^T R = \mathbb{1}$ (rotação 3d)

$\mathbb{1} = R^T \mathbb{1} R$ ← métrica de $\mathbb{R}^3$

Ex: $R_z(\theta) \to \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

- Boost No eixo $x$: $\Lambda = \begin{bmatrix} \cosh\phi & -\operatorname{senh}\phi & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh}\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\phi \in \mathbb{R}$.

$S \to S'$ em MRU

Exerc. Verifique que o boost na direção $x$ preserva a métrica $\eta$

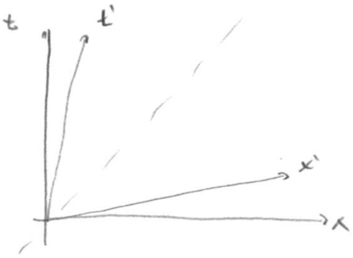
$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} x^\nu \Rightarrow \begin{cases} t' = \cosh\phi \, t - \operatorname{senh}\phi \, x \\ x' = -\operatorname{senh}\phi \, t + \cosh\phi \, x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Fazendo a mudança de parâmetro:

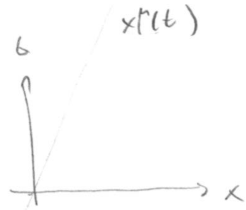
$$\tanh \phi = v \Rightarrow \cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma$$

$$\operatorname{senh} \phi = \gamma v$$

$$\therefore \begin{cases} t' = \gamma (t - vx) \\ x' = \gamma (x - vt) \end{cases}$$




<u>Exemplo</u> Adição de velocidades




Em S: $v = \tanh \xi$ , $\begin{cases} x = \lambda \operatorname{senh} \xi \\ t = \lambda \cosh \xi \end{cases}$

Em S': $\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \phi & -\operatorname{senh} \phi \\ -\operatorname{senh} \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \cosh \xi \\ \lambda \operatorname{senh} \xi \end{bmatrix}$

$V = \tanh \phi$ $\quad = \begin{bmatrix} \lambda (\cosh \phi \cosh \xi - \operatorname{senh} \phi \operatorname{senh} \xi) \\ \lambda (-\operatorname{senh} \phi \cosh \xi + \cosh \phi \operatorname{senh} \xi) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \lambda \cosh (\xi - \phi) \\ \lambda \operatorname{senh} (\xi - \phi) \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x' = \lambda \operatorname{senh}(\xi - \phi) \\ t' = \lambda \cosh(\underbrace{\xi - \phi}_{\xi'}) \end{cases} \Rightarrow v' = \tanh \xi'$ , $\xi' = \xi - \phi$

$$\boxed{\xi = \xi' + \phi}$$

"Adição de rapidez"

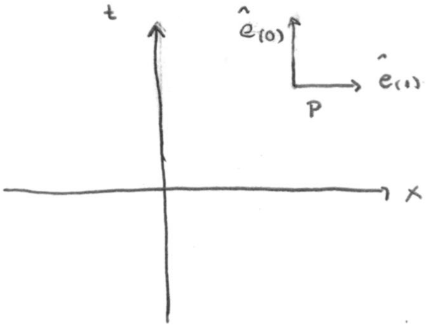
$$v = \tanh \xi = \tanh(\xi' + \phi) = \frac{\tanh \xi' + \tanh \phi}{1 + \tanh \xi' \cdot \tanh \phi} = \frac{v' + V}{1 + v'V}$$

velocidade em S

$$\therefore \boxed{v = \frac{v' + V}{1 + v'V}}$$

"Fórmula da adição relativística de velocidades"

1.4 Vetores no espaço de Minkowski $M^4$.




Espaço tangente em $p$: $T_p$

Os vetores $V \in T_p$ correspondem a direções no espaço-tempo. Um campo vetorial é uma função que associa a cada ponto $p$ um vetor em seu espaço tangente.

Fibrado tangente: $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p$

Campo vetorial: $V : M \to T(M)$ tal que $p \mapsto V(p) \in T_p$.

Escolhendo uma base para $T_p$ em cada ponto $p$, podemos representar vetores e campos vetoriais em termos de suas coordenadas na base escolhida.

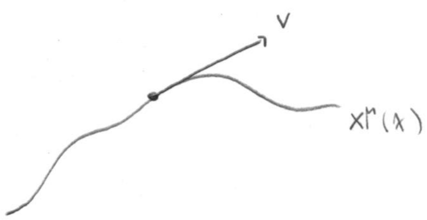
Base: $\{\hat{e}_{(0)}, \hat{e}_{(1)}, \hat{e}_{(2)}, \hat{e}_{(3)}\}$

Vetores: $A = A^\mu \hat{e}_{(\mu)}$ . $A^\mu$: componentes do vetor.

Para um campo vetorial, os componentes são funções da posição, $A^\mu = A^\mu(x)$.

A base canônica é formada por vetores $\hat{e}_{(\mu)}$ paralelos aos eixos $x^0, x^1, x^2, x^3$, sendo o análogo em $M^4$ da tríade $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$.

<u>Exemplo</u> Vetor tangente a curva



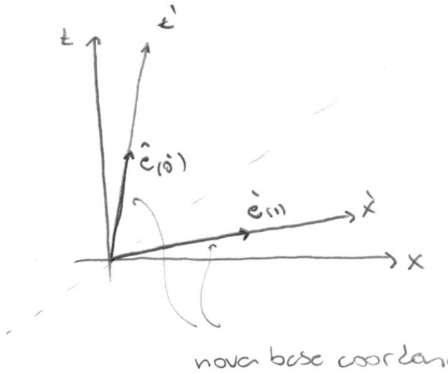

Trajetória no espaço-tempo: $x^\mu(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
("linha de mundo")

Tangente: $V^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\lambda}$

Analisemos como os componentes do vetor tangente se transformam sob transformações de Lorentz.

Transf. Lorentz: $x^\mu \mapsto x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu \Rightarrow V^{\mu'} = \dfrac{d}{d\lambda}(\Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu) = \Lambda^{\mu'}{}_\nu V^\nu$ .

Sejam $e_{(\nu')}$ os vetores da nova base associada às novas coordenadas $x^{\nu'}$. Comparando a expansão do vetor tangente nas duas bases, obtemos a regra de transformação para os vetores da base.




$$V = V^{\mu}\,\hat{e}_{(\mu)}$$
$$= V^{\nu'}\,\hat{e}_{(\nu')} = \Lambda^{\nu'}{}_{\mu}\,V^{\mu}\,\hat{e}_{(\nu')}$$

$$\underset{\text{base antiga}}{\hat{e}_{(\mu)}} = \Lambda^{\nu'}{}_{\mu}\,\underset{\text{nova base}}{\hat{e}_{(\nu')}}$$

Representando a transformação inversa como:

Inv. da trasf. Lorentz: $\Lambda^{\rho}{}_{\sigma'}$,
$$\begin{cases} \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\,\Lambda^{\nu'}{}_{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} \\ \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\,\Lambda^{\nu}{}_{\rho'} = \delta^{\mu'}_{\rho'} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\} & S \text{ p/ } S' \\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\} & S' \text{ p/ } S \end{cases}$$

podemos inverter a relação obtida e expressar a nova base em termos da antiga.

$$\therefore \quad \boxed{\hat{e}_{(\nu')} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\,\hat{e}_{(\mu)}} \quad , \quad \boxed{V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\,V^{\nu}} \, .$$

- 4-vetores se transformam com $\Lambda$ (como as coordenadas)
- vetores de base se transformam com $\Lambda^{-1}$.

## 1.5 Vetores duais (1-formas) no espaço de Minkowski $M^4$

Espaço dual: $T_p^*$, espaço cotangente

Fibrado cotangente: $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*$

$\left[ \begin{array}{l} T_p: \text{contravariantes} \\ T_p^*: \text{covariantes} \end{array} \right]$

Os elementos $w \in T_p^*$ são funcionais lineares em $T_p$, $w: T_p \to \mathbb{R}$.

$$w(\underset{\mathbb{R}}{a}\,\underset{\text{vetores}}{V + W}) = a\,w(V) + w(W) \quad \in \mathbb{R}$$

Base dual: $\{\hat{\theta}^{(\nu)}\ ;\ \nu = 0, 1, 2, 3\}$

$$\hat{\theta}^{(\nu)}(\hat{e}_{(\mu)}) = \delta^{\nu}_{\mu} \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}^{(0)}(\hat{e}_{(0)}) = 1, \quad \hat{\theta}^{(0)}(\hat{e}_{(1)}) = 0, \ \dots$$

Vetores duais: $\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}$

Para um campo vetorial dual, os componentes são funções da posição, $\omega_\mu = \omega_\mu(x)$.

- Ação de vetor dual em termos de componentes

$$\omega(V) = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}\left(V^\nu \hat{e}_{(\nu)}\right)$$

$$= \omega_\mu V^\nu \underbrace{\hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)})}_{\delta^\mu_\nu}$$

$$= \omega_\mu V^\mu$$

$$\therefore \boxed{\omega(V) = \omega_\mu V^\mu}$$

- Transformações dos componentes e vetores de base sob transf. Lorentz $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}$

$$\omega(V) = \omega_\nu V^\nu$$

$$= \omega_{\mu'} V^{\mu'} = \omega_{\mu'} \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} V^\nu$$

$$\omega_\nu = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\, \omega_{\mu'} \Rightarrow \boxed{\omega_{\mu'} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'}\, \omega_\nu}$$

$$\omega = \omega_\nu \hat{\theta}^{(\nu)} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\, \omega_{\mu'} \hat{\theta}^{(\nu)}$$

$$= \omega_{\mu'} \hat{\theta}^{(\mu')}$$

$$\boxed{\hat{\theta}^{(\mu')} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\, \hat{\theta}^{(\nu)}}$$

<u>Exemplo</u> Gradiente de uma função escalar

Função: $\phi : M \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \phi(x)$$

Gradiente: $d\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \hat{\theta}^{(\mu)}$

(1-forma)

Transformação dos componentes de $d\phi$ sob uma transformação de Lorentz:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}$$

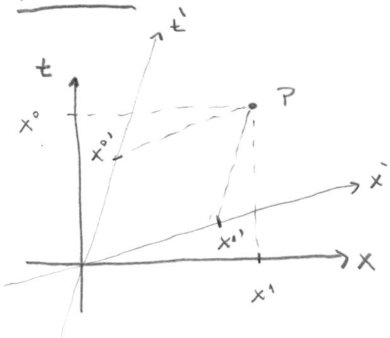
notação: $\dfrac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \phi = \phi_{,\mu}$

Se V é tangente à curva $x^\mu(\lambda)$, temos:

$$d\phi(V) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} V^\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d\phi}{d\lambda}$$

$$\therefore \boxed{d\phi(V) = \frac{d\phi}{d\lambda}}$$ "Derivada direcional"

## Revisão




Evento: $x^\mu = (t, x, y, z)$

$= (x^0, x^1, x^2, x^3)$ em $S$

$= (x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ em $S'$

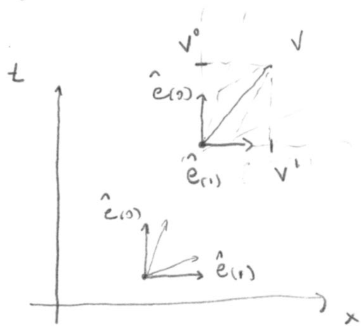
Transf. Lorentz:

(boost na direção x)

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} \cosh\phi & -\operatorname{senh}\phi & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh}\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = \Lambda x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\phi & -\operatorname{senh}\phi & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh}\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

- Vetores




$V = V^\mu \hat{e}_{(\mu)}$

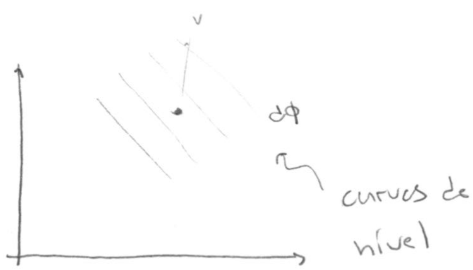
$= V^{\mu'} \hat{e}_{(\mu')}$

$\hat{e}_{(\mu')} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'} \hat{e}_{(\nu)}$

$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} V^{\nu}$

"tangentes a curvas"

- Vetores duais (1-formas)




$\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}$

$= \omega_{\mu'} \hat{\theta}^{(\mu')}$

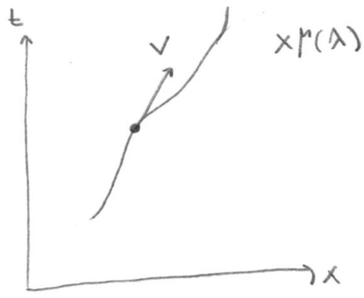
$\hat{\theta}^{(\mu')} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \hat{\theta}^{(\nu)}$

$\omega_{\mu'} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'} \omega_{\nu}$

"diferenciais de funções"

$d\phi(V) \sim$ # de curvas de nível atravessadas

## 1.9 Energia e momento




Vetor tangente:

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

depende da parametrização

→ tipo tempo: $m > 0$

$\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu < 0$

→ tipo luz: $m = 0$

$\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0$

→ partículas massivas

Podemos calcular o tempo próprio ao longo da curva:

$$\tau = \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda \,.$$

Usemos agora o tempo próprio para parametrizar a curva: $x^\mu(\tau)$.

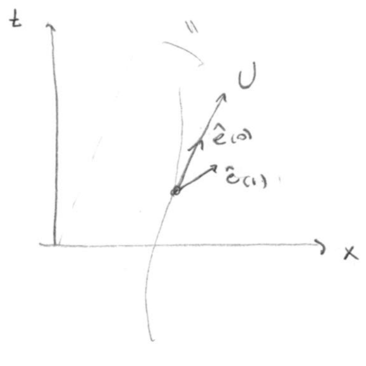
4-velocidade: $\boxed{U^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}}$

4-momento: $\boxed{p^\mu = m\, U^\mu}$

- $d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \Rightarrow \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \eta_{\mu\nu} \dfrac{dx^\mu}{d\tau} \dfrac{dx^\nu}{d\tau} = -1$.

$\therefore$ $U^\mu$ é normalizado.

- Sistema de repouso instantâneo: $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$




$\rightsquigarrow$ $p^\mu = (\underset{\text{"}mc^2\text{"}}{m}, \underbrace{0, 0, 0}_{\vec{p}\,=\,0})$

$$U^\mu = \Lambda^\mu{}_{\nu'} U^{\nu'} \Rightarrow \begin{bmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{0'} \\ U^{1'} \\ U^{2'} \\ U^{3'} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} U^0 = \gamma \\ U^1 = \gamma v \\ U^2 = 0 \\ U^3 = 0 \end{array} \right. \qquad \therefore \quad U^\mu = (\gamma, \gamma v, 0, 0)$$

$$P^\mu = (m\gamma, m\gamma v, 0, 0)$$

$$= \left( \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \underbrace{\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}}, 0, 0 \right)$$

Em geral: $P^\mu = (m\gamma, \underbrace{m\gamma\vec{v}})$ , $\vec{v}$: vel. de $\bar{S}$ em relação a $S$.

massa relativística: "$Mc^2$" momento relativístico $P^\mu = (E, \vec{p})$

- Interpretação física? Verifique limite $v \ll 1$ ( $v \ll c$ ).

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \simeq 1 + \frac{v^2}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} m\gamma\vec{v} \simeq m\left(1 + \cancel{\frac{v^2}{2}}\right)\vec{v} \simeq m\vec{v} & \leftarrow \text{momento} \\ m\gamma = m\left(1 + \frac{v^2}{2}\right) = m + \frac{mv^2}{2} & \leftarrow \text{energia} \end{array} \right.$$

de.

$\therefore \quad p^0 = \text{energia} = E$

Para velocidades quaisquer: $E = \underbrace{m\gamma}_{M} c^2 = Mc^2$. $\quad \therefore \boxed{E = Mc^2}$

- $\eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -m^2$ ( calcule no sistema de repouso )

- "2ª Lei de Newton relativística": $f^\mu = m \dfrac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \dfrac{dp^\mu}{d\tau}$ . $\boxed{a^\mu = \dfrac{dU^\mu}{d\tau}}$

4-força $= m a^\mu$ 4-aceleração.

<u>Exercício</u> [Schutz, 2.20] A linha de mundo de uma partícula é descrita pelas equações:

$$x(t) = at + b \operatorname{sen} \omega t \quad , \quad z(t) = 0$$

$$y(t) = b \cos \omega t \quad . \quad \text{com } |b\omega| < 1.$$

em um referencial inercial. Calcule a 4-velocidade e a 4-aceleração.

Sol.
$$\begin{cases} v_x = a + b\omega \cos \omega t \\ v_y = -b\omega \operatorname{sen} \omega t \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$$v^2 = (a + b\omega \cos \omega t)^2 + (b\omega \operatorname{sen} \omega t)^2$$

$$v = \sqrt{a^2 + 2ab\omega \cos \omega t + b^2\omega^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 - 2ab\omega \cos \omega t - b^2\omega^2}}$$

$$\boxed{U^\mu = \gamma\,(1, a + b\omega \cos \omega t, -b\omega \operatorname{sen} \omega t, 0)}$$

Para calcular a aceleração.

$$d\tau^2 = -ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - v^2 \quad \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - v^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma .$$

Segue que:

$$a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{dU^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dU^\mu}{dt}$$

$$\frac{dU^\mu}{dt} = \underbrace{\frac{d\gamma}{dt}}\,(1, a + b\omega \cos \omega t, -b\omega \operatorname{sen} \omega t, 0) + \gamma\,(0, -b\omega^2 \operatorname{sen} \omega t, -b\omega^2 \cos \omega t, 0)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{\cdots}} = -\frac{1}{2}\gamma^3\,(+2ab\omega^2 \operatorname{sen} \omega t) = -\gamma^3 ab\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$$

$$\therefore \boxed{a^\mu = -\gamma^3 ab\omega^2 \operatorname{sen} \omega t\, U^\mu + \gamma^2 (0, -b\omega^2 \operatorname{sen} \omega t, -b\omega^2 \cos \omega t, 0)}$$

[Exerc: Schutz 2.21]

- Invariância do produto escalar

$$\eta_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} \eta_{\mu\nu} \quad \iff \quad \eta = \Lambda^T \eta \Lambda$$

Em S: $U^\mu, V^\nu \rightarrow U \cdot V = \eta_{\mu\nu} U^\mu V^\nu$

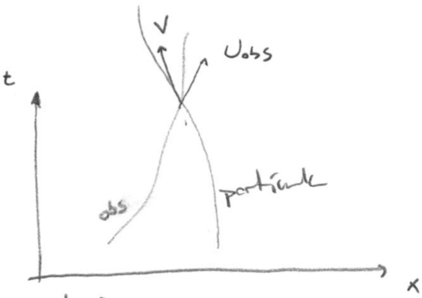
Transf. Lorentz: $\begin{cases} U^\mu \mapsto U^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\rho} U^\rho \\ V^\nu \mapsto V^{\nu'} = \Lambda^{\nu'}{}_{\sigma} V^\sigma \end{cases}$

Em S': 
$$U' \cdot V' = \eta_{\mu'\nu'} U^{\mu'} V^{\nu'}$$
$$= \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu'}{}_{\rho} U^\rho \Lambda^{\nu'}{}_{\sigma} V^\sigma$$
$$= \underbrace{\Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\mu'}{}_{\rho}}_{\delta^\mu_\rho} \underbrace{\Lambda^{\nu}{}_{\nu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\sigma}}_{\delta^\nu_\sigma} \eta_{\mu\nu} U^\rho V^\sigma$$
$$= \eta_{\rho\sigma} U^\rho V^\sigma = U \cdot V$$

$$\delta^\mu_\rho \eta_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{3} \underbrace{\delta^\mu_\rho}_{\substack{0 \text{ p/ } \mu \neq \rho \\ 1 \text{ p/ } \mu = \rho}} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\nu}$$
$$\delta^\nu_\sigma \eta_{\rho\nu} = \eta_{\rho\sigma}$$

$\therefore \quad \boxed{U' \cdot V' = U \cdot V}$ Produto escalar é invariante.

- Observador em movimento




Observador: $U^\mu_{obs}$

4-momento da partícula: $P^\mu$

→ Qual é a energia da partícula medida pelo observador em movimento?

No referencial de repouso instantâneo do observador:

$\begin{cases} U^{\mu'}_{obs} = (1,0,0,0) \\ P^{\mu'} = (E', \vec{p}') \end{cases} \Rightarrow \boxed{E' = -U_{obs} \cdot P}$ invariante

pode ser calculado em qqer referencial.

Exercício [Schutz 2.30]

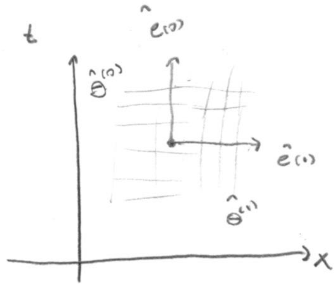
$\begin{cases} U^\mu_{obs} = (2,1,1,1) \\ P^\nu = (300, 299, 0, 0) \text{ Kg} \end{cases}$

Energia do raio cósmico medida pelo foguete:

$E = -(-2.300 + 1.299) = 301$ Kg

Restaurando fatores de c: $E = 301.(3\times10^8)^2 \text{ Kg m}^2/\text{s}^2$

## 1.6 Tensores




Vetores: $V = V^\mu \hat{e}_{(\mu)}$ (tangentes)

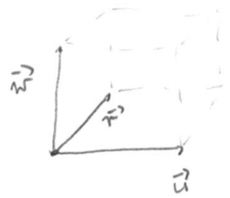
1-formas $\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}$ (gradientes)

Base canônica: $\hat{e}_{(0)}, \ldots, \hat{e}_{(3)}$

Base dual: $\hat{\theta}^{(0)}, \ldots, \hat{\theta}^{(3)}$

$\hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)}) = \delta^\mu_\nu$.

Considere o volume de um paralelepípedo em $\mathbb{R}^3$:




$\vec{u} = (u^1, u^2, u^3)$

$\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$

$\vec{w} = (w^1, w^2, w^3)$

$$\text{Vol} = |(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|$$

$$= \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} u^i v^j w^k .$$

linear em cada vetor

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } (ijk) \text{ é permutação par de } (123) \\ -1, & \text{ímpar} \\ 0, & \text{em outros casos} \end{cases}$$

"Símbolo de Levi-Civita"

$\Rightarrow$ Vol é um tensor de tipo $(0,3)$ em $\mathbb{R}^3$. Analogamente, a área de um paralelogramo é descrita por um tensor de tipo $(0,2)$.

<u>Definição</u> Um tensor $T$ de tipo $(k,l)$ é um funcional linear

$$T : \underbrace{T_p^* \times \cdots \times T_p^*}_{k \text{ cópias}} \times \underbrace{T_p \times \cdots \times T_p}_{l \text{ cópias}} \to \mathbb{R} .$$

- Funcional linear:

(i) $T(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(l)}) \in \mathbb{R}$

(ii) $T(\underline{a\,\omega^{(1)} + \tilde{\omega}^{(1)}}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(l)}) =$

$= a\,T(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(l)}) + T(\tilde{\omega}^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(l)})$

<u>Exemplo</u> O tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$, tipo $(0,2)$

$$\eta : T_p \times T_p \to \mathbb{R}$$

$$\eta(U,V) = U \cdot V = \eta_{\mu\nu} U^\mu V^\nu$$

Na base canônica: $\eta = \eta_{\mu\nu} \hat{\theta}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(\nu)}$ $\quad [\hat{\theta}^{(\mu)} \to dx^\mu]$

<u>Exemplo</u> Delta de Kronecker $\delta^\mu_\nu$, tipo $(1,1)$

$$\delta : T_p^* \times T_p \to \mathbb{R}$$

$$\delta(\omega, V) = \delta^\mu_\nu \omega_\mu V^\nu = \omega_\mu V^\mu$$

Na base canônica: $\delta = \delta^\mu_\nu \hat{e}_{(\mu)} \hat{\theta}^{(\nu)}$

Os tensores de tipo $(k,l)$ formam um espaço vetorial $\mathcal{T}(k,l)$ com operações:

$$(R+S)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = R(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) + S(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)})$$

escalar

$$(aR)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = a\, R(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)})$$

Uma base canônica pode ser construída tomando produtos tensoriais de vetores das bases canônicas de $T_p$ e $T_p^*$.

<u>Produto tensorial</u>

$$\left\{ \begin{array}{l} R \text{ de tipo } (k,l) \\ S \text{ de tipo } (m,n) \end{array} \right. \to \text{ produto tensorial } R\otimes S \text{ de tipo } (k+m, l+n).$$

$$R\otimes S(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l+n)}) =$$

$$= R(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) \cdot S(\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(l+1)}, \dots, V^{(l+n)})$$

Base: $\hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\Theta}^{(\nu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{\Theta}^{(\nu_\ell)}$ , $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

$4^{k+\ell}$ vetores de base

Tensores: $T = \underbrace{T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_\ell}}_{4^{k+\ell} \text{ componentes}} \hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\Theta}^{(\nu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{\Theta}^{(\nu_\ell)}$

índices superiores: contravariantes
inferiores: covariantes

Em termos de componentes:

- Ação de tensores

$$T(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(\ell)}) = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_\ell} \, \omega^{(1)}_{\mu_1} \cdots \omega^{(k)}_{\mu_k} V^{(1)\nu_1} \cdots V^{(\ell)\nu_\ell}$$

- Transformação de Lorentz

$$T^{\mu_1' \cdots \mu_k'}{}_{\nu_1' \cdots \nu_\ell'} = \Lambda^{\mu_1'}{}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\mu_k'}{}_{\mu_k} \Lambda^{\nu_1}{}_{\nu_1'} \cdots \Lambda^{\nu_\ell}{}_{\nu_\ell'} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_\ell}$$

## Tensores como operadores lineares:

$T$ de tipo $(0,2)$ : $T_{\mu\nu}$ , $T(U,V) = T_{\mu\nu} U^\mu V^\nu \in \mathbb{R}$

contraindo apenas um índice: $\underbrace{U^\mu \mapsto T_{\mu\nu} U^\mu}_{} \in T_p^*$

$T$ como op. linear $T : T_p \to T_p^*$

**Exemplo** Delta de Kronecker como operador identidade

Em $T_p$: $V^\mu \mapsto \delta^\nu_\mu V^\mu = V^\nu$

Em $T_p^*$: $\omega_\mu \mapsto \delta^\mu_\nu \omega_\mu = \omega_\nu$

Exemplo $\eta_{\mu\nu}$ como isomorfismo entre $T_p$ e $T_p^*$ (subir e descer índices)

$$V^\nu \mapsto \eta_{\mu\nu} V^\nu \equiv V_\mu \in T_p^* \qquad \eta_{ab} : T_p \to T_p^*$$

A transformação inversa é descrita analogamente pela métrica inversa $\eta^{\mu\nu}$, um tensor de tipo (2,0) tal que

mesmos componentes que $\eta_{\mu\nu}$.

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho \; , \quad \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu \; ,$$

através de:

$$\omega_\nu \mapsto \eta^{\mu\nu} \omega_\nu \equiv \omega^\mu \in T_p \; , \qquad \eta^{ab} : T_p^* \to T_p \; .$$

Ou seja, podemos subir e descer índices com a métrica $\eta_{\mu\nu}$ e a métrica inversa $\eta^{\mu\nu}$.

Exemplo Tensor do campo eletromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} = -F_{\nu\mu}$$

Os campos $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ em um referencial $S'$ em MRU no eixo x com vel. v são obtidos aplicando-se a transformação de Lorentz ao tensor $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu'\nu'} = \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} F_{\mu\nu} \to \Lambda^T F \Lambda$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_{\mu'\nu'} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ E_1 & 0 & & \\ \gamma(E_2 - v B_3) & \gamma(-B_3 + v E_2) & 0 & \\ \gamma(E_3 + v B_2) & \gamma(B_2 + v E_3) & -B_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ E_{1'} & 0 & & \\ E_{2'} & -B_{3'} & 0 & \\ E_{3'} & B_{2'} & -B_{1'} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} E_{1'} = E_1 , & E_{2'} = \gamma(E_2 - v B_3) , \quad E_{3'} = \gamma(E_3 + v B_2) \\ B_{1'} = B_1 , & B_{2'} = \gamma(B_2 + v E_3) , \quad B_{3'} = \gamma(B_3 - v E_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} , & \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} , & \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{E}) \end{cases}$$

[ Feynman, cap. 26 ]

As regras de transformação dos campos elétricos e magnéticos acima valem para unidades naturais com $c = 1$. Recuperamos fatores de $c$ com a substituição:

$$\vec{E} \to \frac{\vec{E}}{c} , \qquad \vec{v} \to \frac{\vec{v}}{c}$$

1.7) Manipulações com tensores

. Produto tensorial

ex: $\begin{cases} R^{\mu\nu} \text{ de tipo } (2,0) \\ S^{\rho}{}_{\sigma} \text{ de tipo } (1,1) \end{cases} \rightarrow (R\otimes S)^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma} = R^{\mu\nu} S^{\rho}{}_{\sigma}$

produto tensorial de R e S; tipo (3,1)

• Subir e descer índices

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu \quad , \qquad \omega^\mu = \eta^{\mu\nu}\omega_\nu$$

$$T^{\mu\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\sigma\rho} T^{\mu\nu\rho} \quad , \qquad A^{\mu}{}_{\nu}{}^{\sigma} = \eta^{\sigma\rho} A^{\mu}{}_{\nu\rho}$$

No espaço de Minkowski, a métrica e a métrica inversa possuem os mesmos componentes:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1) = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} ,$$

e a operação de subir ou descer índices apenas muda o sinal do componente temporal:

$$\omega_\mu = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto \omega^\mu = (-\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$V^\mu = (V^0, V^1, V^2, V^3) \mapsto V_\mu = (-V^0, V^1, V^2, V^3)$$

. Contração

$$T^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} \mapsto S^{\mu\nu\rho}{}_{\alpha} = T^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{\alpha\sigma} \qquad \left( = \sum_\sigma T^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{\alpha\sigma} \right)$$

tensor de tipo (4,2) — tensor de tipo (3,1).

A contração transforma um tensor de tipo $(k,l)$ em um novo tensor $(k-1, l-1)$.
Em particular, a contração de um tensor (1,1) corresponde ao traço do tensor:

$$T^{\mu}{}_{\nu} \mapsto T^{\mu}{}_{\mu} , \qquad \text{traço de } T.$$

- Simetrização

Diz-se que um tensor é simétrico em um par de índices $\mu, \nu$ quando esses podem ser trocados sem alterar os valores dos componentes do tensor:

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\nu\mu\rho} \qquad [\text{simétrico em } \mu, \nu].$$

Diz-se que um tensor é simétrico em todos seus índices quando é simétrico em qualquer par de índices. Seus índices podem então ser permutados arbitrariamente sem alterar o valor dos componentes:

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\mu\rho\nu} = S_{\nu\mu\rho} = S_{\nu\rho\mu} = S_{\rho\mu\nu} = S_{\rho\nu\mu}. \quad [\text{completamente simétrico}]$$

Simetrização: $T_{\mu\nu} \mapsto T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}\right)$

$$T_{\mu_1 \cdots \mu_k} \mapsto T_{(\mu_1 \cdots \mu_k)} = \frac{1}{k!} \sum_{p} T_{\mu_{p(1)} \cdots \mu_{p(k)}}$$

Exemplo: $T_{(\mu\nu\rho)} = \frac{1}{3!}\left(T_{\mu\nu\rho} + T_{\mu\rho\nu} + T_{\nu\mu\rho} + T_{\nu\rho\mu} + T_{\rho\mu\nu} + T_{\rho\nu\mu}\right)$

Pode-se também simetrizar um tensor apenas em uma parte de seus índices:

$$T_{(\mu\nu)\rho} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu\rho} + T_{\nu\mu\rho}\right)$$

$$T_{(\mu|\nu|\rho)} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\nu\mu}\right)$$

- Antissimetrização

Analogamente:

tensor antissimétrico
- em $\mu, \nu$ : $A_{\mu\nu\rho} = -A_{\nu\mu\rho}$
- em todos os índices : $A_{\mu\nu\rho} = -A_{\mu\rho\nu} = A_{\rho\mu\nu} = \cdots$

Antissimetrização: $T_{\mu\nu} \mapsto T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}\right)$

$$T_{\mu_1 \cdots \mu_k} \mapsto T_{[\mu_1 \cdots \mu_k]} = \frac{1}{k!} \sum_{p} (-1)^p \, T_{\mu_{p(1)} \cdots \mu_{p(k)}}$$

Exemplo: $T_{[\mu\nu\rho]} = \frac{1}{3!}\left(T_{\mu\nu\rho} - T_{\mu\rho\nu} - T_{\nu\mu\rho} + T_{\nu\rho\mu} + T_{\rho\mu\nu} - T_{\rho\nu\mu}\right)$ [soma alternada]

- Derivadas parciais ( $M^4$ )

$$R^\mu{}_\nu \mapsto T_\alpha{}^\mu{}_\nu = \partial_\alpha R^\mu{}_\nu$$

Em espaços curvos, é preciso tomar derivadas covariantes para produzir novos tensores, $\partial_\alpha \to \nabla_\alpha$. Como derivadas parciais comutam, se mais de uma derivada é aplicada, o tensor resultante é simétrico nos novos índices:

$$\partial_\alpha \partial_\beta T^\mu{}_\nu = \partial_\beta \partial_\alpha T^\mu{}_\nu .$$

Propriedades

1. $T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}$

$$T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\left( T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu} \right) + \frac{1}{2}\left( T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} \right) = T_{\mu\nu}$$

De maneira mais geral: $T_{\mu\nu\rho\sigma\ldots} = T_{(\mu\nu)\rho\sigma\ldots} + T_{[\mu\nu]\rho\sigma\ldots}$

A propriedade não vale para mais de dois índices: $T_{\mu\nu\rho} \neq T_{(\mu\nu\rho)} + T_{[\mu\nu\rho]}$ .

2. $R^{(\mu\nu)} T_{\mu\nu} = R^{(\mu\nu)} T_{(\mu\nu)}$

$$R^{[\mu\nu]} T_{\mu\nu} = R^{[\mu\nu]} T_{[\mu\nu]}$$

3. Se $S_{\mu\nu}$ é simétrico, então: $S_{(\mu\nu)} = S_{\mu\nu}$ e $S_{[\mu\nu]} = 0$ .

Se $A_{\mu\nu}$ é antissimétrico, então: $A_{(\mu\nu)} = 0$ e $A_{[\mu\nu]} = A_{\mu\nu}$ .

4. $\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\mu} = \delta^\mu_\mu = 4$

Exercício Mostre que o traço $T^\mu{}_\mu$ é invariante por transformações de Lorentz.

Em $S$: $T^\mu{}_\mu$

Em $S'$: $T^{\mu'}{}_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^\nu{}_{\nu'} T^\mu{}_\nu$

$$T^{\mu'}{}_{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^\nu{}_{\mu'} T^\mu{}_\nu = \underbrace{\Lambda^\nu{}_{\mu'} \Lambda^{\mu'}{}_\mu}_{(\Lambda^{-1}\Lambda)^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu} T^\mu{}_\nu = T^\mu{}_\mu .$$

Símbolo de Levi-Civita (3d)

$$\tilde{\epsilon}^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } (ijk) \text{ é permutação par de } (1,2,3) \\ -1, & \quad \text{"} \qquad\qquad \text{ímpar} \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

$[(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)]$

$[(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)]$

No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, o símbolo de Levi-Civita se transforma como um tensor sob transformações que preservam a métrica $\delta_{ij}$ de $\mathbb{R}^3$. Sob transformações de coordenadas arbitrárias, $\tilde{\epsilon}^{ijk}$ define uma "densidade tensorial", representadas em geral com um til sobre o símbolo. Não discutiremos densidades tensoriais neste curso; ver Carroll 2.8.

O produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ é dado pela fórmula usual:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(A_2B_3 - A_3B_2) + \vec{j}\,(A_3B_1 - A_1B_3) + \vec{k}\,(A_1B_2 - A_2B_1)$$

Comparemos $(\vec{A}\times\vec{B})^i$ com $\tilde{\epsilon}^{ijk}A_jB_k$:

$i=1$: $\tilde{\epsilon}^{1jk}A_jB_k = \tilde{\epsilon}^{123}A_2B_3 + \tilde{\epsilon}^{132}A_3B_2 = A_2B_3 - A_3B_2 = (\vec{A}\times\vec{B})^1$

$i=2$: $\tilde{\epsilon}^{2jk}A_jB_k = \tilde{\epsilon}^{231}A_3B_1 + \tilde{\epsilon}^{213}A_1B_3 = A_3B_1 - A_1B_3 = (\vec{A}\times\vec{B})^2$

$i=3$: $\tilde{\epsilon}^{3jk}A_jB_k = \tilde{\epsilon}^{312}A_1B_2 + \tilde{\epsilon}^{321}A_2B_1 = A_1B_2 - A_2B_1 = (\vec{A}\times\vec{B})^3$

$$\therefore \boxed{(\vec{A}\times\vec{B})^i = \tilde{\epsilon}^{ijk}A_jB_k}$$

Substituindo $\vec{A}$ por $\vec{\nabla}$: $\boxed{(\vec{\nabla}\times\vec{V})^i = \tilde{\epsilon}^{ijk}\partial_jV_k}$

- Contrações de $\tilde{\epsilon}$:

$$\tilde{\epsilon}_{ijk}\tilde{\epsilon}^{imn} = \delta_j^m\delta_k^n - \delta_j^n\delta_k^m$$

$$\tilde{\epsilon}_{imn}\tilde{\epsilon}^{jmn} = 2\,\delta_i^j$$

$$\tilde{\epsilon}_{ijk}\tilde{\epsilon}^{ijk} = 6$$

## 1.8) Equações de Maxwell

No sistema de unidades naturais com $c=1$, as equações de Maxwell são dadas por:

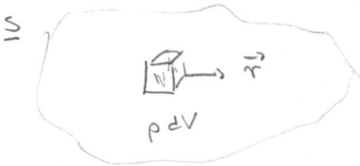
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{J} + \partial_t \vec{E} \end{cases}$$

As densidades de carga e corrente formam um 4-vetor:

$$\boxed{J^\mu = (\rho, \vec{J})} \qquad [\text{ 4-vetor corrente }]$$

Para representar $J^\mu$ de maneira explícita como um 4-vetor, note primeiro que em cada ponto do espaço:

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \Rightarrow J^\mu = \rho\,(1, \vec{v}) \,,$$




onde $\vec{v}$ é a velocidade da densidade de carga $\rho$. Seja $S'$ o referencial de repouso com velocidade $\vec{v}$ relativa ao referencial original $S$. Se $\rho^{(0)}$ é a densidade de carga em $S'$, temos:

$$J^{\mu'} = (\rho^{(0)}, \vec{0}) = \rho^{(0)}(1, \vec{0}) = \rho^{(0)} U^{\mu'} \,,$$

onde $U$ é a 4-velocidade da densidade de carga. Aplicando uma transformação de Lorentz:

$$J^\mu = \rho^{(0)}\gamma\,(1, \vec{v}) = \rho\,(1, \vec{v}) \,, \qquad \rho = \rho^{(0)}\gamma \,.$$

Ou seja,

$$\boxed{J^\mu = \rho^{(0)} U^\mu} \,. \qquad [\text{ Definição do 4-vetor corrente }]$$

Como $J^\mu$ é o produto de uma quantidade invariante por um quadrivetor, também é um 4-vetor. A fórmula $\rho = \rho^{(0)}\gamma$ descreve o aumento da densidade devido à diminuição do volume associado à contração de Lorentz, $\Delta V = \Delta V'/\gamma$.

No limite não-relativístico: (1ª ordem em $\vec{v}$)

$$J^\mu \approx (\rho^{(0)}, \rho^{(0)}\vec{v}) \,.$$

A parte espacial de $J^\mu$ corresponde à corrente elétrica não relativística, justificando $J^\mu$ como a generalização 4d natural do vetor 3d $\vec{J}$. Além disso, essa definição é consistente com a conservação de carga em referenciais arbitrários:

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \Rightarrow \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\mu J^\mu = 0} .$$

Como $\partial_\mu J^\mu$ é um escalar, temos $\partial_{\mu'} J^{\mu'} = 0$ em qualquer referencial $S'$.

Em termos dos componentes dos campos e da corrente, as equações de Maxwell são dadas por:

$$\begin{cases} \partial_i E^i = J^0 , & \tilde{\epsilon}^{ijk}\partial_j B_k - \partial_0 E^i = J^i , \quad (\text{par não homogêneo}) \quad 4 \text{ eqs} \\ \partial_i B^i = 0 , & \tilde{\epsilon}^{ijk}\partial_j E_k + \partial_0 B^i = 0 , \quad (\text{par homogêneo}) \quad 4 \text{ eqs} \end{cases}$$

Os componentes dos campos elétrico e magnético podem ser representados em termos do tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$. É conveniente primeiro subir os índices de $F$:

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \boxed{\begin{aligned} F^{ij} &= \tilde{\epsilon}^{ijk} B_k \\ F^{0i} &= E^i \end{aligned}}$$

O par de equações não homogêneas corresponde portanto a:

$$\left.\begin{aligned} J^0 &= \partial_i F^{0i} = \partial_i F^{0i} + \partial_0 F^{00} = \partial_\mu F^{0\mu} \\ J^i &= \partial_j F^{ij} - \partial_0 F^{0i} = \partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{i0} = \partial_\mu F^{i\mu} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu}$$

Obtemos assim a forma tensorial dessas equações, válida em referenciais inerciais quaisquer.

Para obter a forma tensorial das equações homogêneas, notamos primeiro que:

$$\boxed{B^i = \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^{ijk}F_{jk}} .$$

Podemos verificar essa identidade explicitamente para $i = 1, 2, 3$:

$$i = 1: \quad \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^{ijk} F_{jk} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\epsilon}^{123} F_{23} + \tilde{\epsilon}^{132} F_{32}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(F_{23} - F_{32}\right) = B^1$$

$i = 2, 3$: analogamente.

De maneira alternativa, a identidade também pode ser provada usando uma fórmula de contração do símbolo de Levi-Civita:

$$\frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^{ijk} F_{jk} = \frac{1}{2}\underbrace{\tilde{\epsilon}^{ijk}\tilde{\epsilon}_{jkl}}_{2\delta^i_l} B^l = \delta^i_l B^l = B^i .$$

Mostremos agora que as quatro equações homogêneas são representadas em forma tensorial por:

$$\boxed{\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0} . \qquad [4 \text{ eqs independentes}]$$

A equação para o divergente de $\vec{B}$ segue diretamente da equação acima, quando os componentes de $\vec{B}$ são expressos em termos de $F_{\mu\nu}$:

$$\partial_i B^i = \partial_i\left(\frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^{ijk} F_{jk}\right) = \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^{ijk}\partial_i F_{jk} = \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^{ijk}\partial_{[i} F_{jk]} = 0 .$$

A equação $\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0$ fornece quatro equações independentes relacionando as derivadas do tensor do campo eletromagnético:

$$\partial_{[1} F_{23]} = 0 , \qquad \partial_{[0} F_{12]} = \partial_{[0} F_{23]} = \partial_{[0} F_{31]} = 0 .$$

A primeira equação, envolvendo apenas índices espaciais, foi usada na prova da equação $\partial_i B^i = 0$. As outras três equações correspondem aos componentes espaciais da equação de Faraday. Por exemplo, para

$$\lambda = 0, \quad \mu = 1, \quad \nu = 2,$$

temos:

$$0 = \partial_{[0} F_{12]} = \frac{\partial_0 F_{12} - \partial_0 F_{21} + \partial_1 F_{20} - \partial_1 F_{02} + \partial_2 F_{01} - \partial_2 F_{10}}{3!}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = 0$$

$$!$$

$$\partial_0 B_3 + \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0$$

Essa expressão corresponde ao terceiro componente $(i=3)$ da equação de Faraday:

$$\tilde{\epsilon}^{3jk} \partial_j E_k + \partial_0 B^3 = \tilde{\epsilon}^{312} \partial_1 E_2 + \tilde{\epsilon}^{321} \partial_2 E_1 + \partial_0 B_3$$

$$= \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \partial_0 B_3 = 0 \quad .$$

Analogamente para os outros componentes.

Em resumo, as equações de Maxwell são expressas de forma tensorial como:

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu \quad , \quad \partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0 \quad . \qquad \text{[Eqs. Maxwell]}$$

$$J^\mu = (\rho, J^1, J^2, J^3) \qquad \text{[4-vetor corrente]}$$

<u>Exercício</u> Verifique que a forma covariante da força de Lorentz é dada por:

$$f^\mu = q\, U^\lambda F^\mu{}_\lambda \quad ,$$

ou seja, que esta expressão se reduz à forma usual:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

no limite não relativístico, $v \ll 1$.

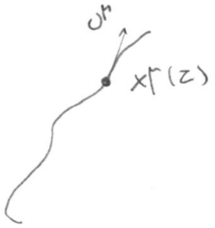
<u>Exercício</u> Escrevendo explicitamente os termos de antissimetrização em:

$$\partial_{[1} F_{23]} = 0 \quad ,$$

mostre que essa equação implica $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

## 1.9 Tensor energia-momento

**Revisão**: partícula relativística




$\tau$: tempo próprio

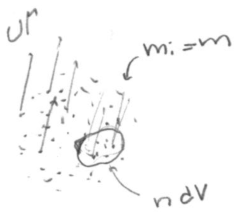
$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma, \gamma\vec{v}) \quad , \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

4-momento: $$P^\mu = mU^\mu = (\underbrace{m\gamma}_{E}, \underbrace{m\gamma\vec{v}}_{\vec{p}})$$ $\vec{p}$, momento relativístico

energia cinética

Para campos e fluidos, densidades de energia e momento são descritos por um tensor $T^{\mu\nu}$, o tensor energia-momento.

**Tensor energia-momento: poeira**




Distribuição de partículas de mesma massa em repouso relativo.

4-velocidade: $U^\mu$ (mesma para todas partículas)

densidade de partículas: $n$ $\quad \dfrac{\#\text{ partículas}}{\text{volume 3d}}$ no ref. de repouso.

4-vetor número-fluxo: $\boxed{N^\mu = n\,U^\mu}$ $\rightarrow$ $N_\mu N^\mu = n^2 U_\mu U^\mu = -n^2$.

$\therefore$ $n$ é um escalar.

Obs: A densidade espacial de partículas depende da escolha do referencial. A qtde $n$ é invariante pois é definida como a densidade espacial em um referencial especial, o referencial de repouso, definido pela distribuição de massa.

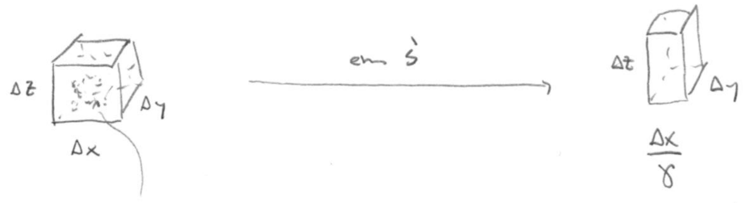
No referencial de repouso $S$:

$$U^\mu = (1,0,0,0) \Rightarrow N^\mu = (n, \vec{0})$$

Seja $\bar{S}$ um referencial movendo-se com velocidade $-v\hat{i}$ em relação a $S$.
Então em $\bar{S}$:

$$N^{\mu'} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\gamma \\ n\gamma v \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow N^{0'} = n' \text{, densidade em } S' \\ \leftarrow N^{1'} = n'v \text{, fluxo de partículas na direção } x'. \end{matrix}$$

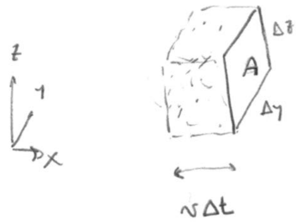
- Transformação de uma densidade:




Contração de Lorentz muda o elemento de volume.

$$\# \text{ de partículas} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cte.}}}{n\,\Delta x \Delta y \Delta z} = n' \frac{\Delta x}{\gamma} \Delta y\, \Delta z \Rightarrow \boxed{n' = n\gamma}$$

- Fluxo de partículas




$$N' = \frac{\# \text{ de partículas cruzando } A}{\text{área de } S \times \text{ tempo } \Delta t}$$

$$= \frac{n' v\,\Delta t\, \Delta y\, \Delta z}{\Delta y\, \Delta z\, \Delta t} = n'v \Rightarrow \boxed{N' = n v'}$$

fluxo = densidade × velocidade

Em geral: $N^{\mu} = (\, n\gamma,\ n\gamma v_x,\ n\gamma v_y,\ n\gamma v_z \,)$

densidade    fluxos de partículas nas direções x, y, z.

- No sistema de repouso, a densidade de massa é dada por:

(em S) $\quad \rho = \underset{\substack{\uparrow \\ P^0}}{m}\ \underset{\substack{\uparrow \\ N^0}}{n} = \text{componente } 00 \text{ do tensor } P^{\mu} N^{\nu}$

Define-se o tensor energia-momento como o produto tensorial:

$$T^{\mu\nu} = P^{\mu} N^{\nu} = m U^{\mu}\, n U^{\nu} = \rho\, U^{\mu} U^{\nu}. \qquad \boxed{T^{\mu\nu} = \rho\, U^{\mu} U^{\nu}}$$

Em S: $T^{\mu\nu} = \left[\begin{array}{c|c} \rho & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S'} T^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} T^{\mu\nu}$

$= \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} T^{\mu\nu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \rightarrow \Lambda T \Lambda^T$

Em S': $T^{\mu'\nu'} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \rho & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(-v\hat{i})$

$$= \begin{bmatrix} \rho\gamma^2 & \rho\gamma^2 v & 0 & 0 \\ \rho\gamma^2 v & \rho\gamma^2 v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$T^{00}$ = densidade de energia

$T^{10}$ = densidade de momento

$T^{01}$ = Fluxo de energia na direção $x^1$

$T^{11}$ = fluxo de momento $p^1$ na direção $x^1$

- Densidade de massa: $\rho' = n'm' = \underbrace{n\gamma}_{\text{contração de Lorentz}} \cdot \underbrace{m\gamma}_{\text{massa relativística}} = \rho\gamma^2 \leftarrow$ densidade de energia

  " energia

- Densidade de momento: $\rho' v = \rho\gamma^2 v \leftarrow \sum m\gamma v / \Delta V'$

- Fluxo de energia : $\rho' v = \rho\gamma^2 v \leftarrow \dfrac{\text{energia cruzando A}}{\text{área de A} \times \text{intervalo de tempo}}$

- Fluxo de momento: $\underbrace{\rho' v}_{\text{densidade de momento } p^1} \cdot v = \rho\gamma^2 v^2 \leftarrow \dfrac{\text{momento cruzando A}}{\text{área de A} \times \text{intervalo de tempo}}$

Em geral, para S' se movendo com velocidade $-\vec{v}$ em relação a S:

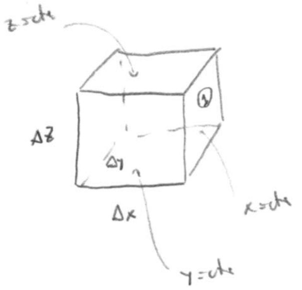
$$\begin{cases} T^{0'0'} = \rho\gamma^2 \\ T^{0'i'} = \rho\gamma^2 v^i \\ T^{i'0'} = \rho\gamma^2 v^i \\ T^{i'j'} = \rho\gamma^2 v^i v^j \end{cases} \rightarrow T^{\mu\nu} = \left[\begin{array}{c|c} \text{densidade de energia} & \text{Fluxo de energia} \\ \hline \text{densidade de momento} & \text{Fluxo de momento (tensor tensão)} \end{array}\right]$$

stress tensor $T^{ij}$

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \text{fluxo de momento } p^\mu \text{ na direção } x^\nu}$$

- Os componentes espaciais de $T^{\mu\nu}$ formam o tensor tensão:

$$T^{ij} = \text{fluxo de momento } p^i \text{ na direção } x^j$$




Força aplicada pelo fluido na face ⊥ com x=cte:

$$F^i = \underbrace{\frac{\Delta p^i}{\Delta t}}_{2^a\ \text{Lei}} = \frac{T^{i1}\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t}{\Delta t} = T^{i1}\,\Delta y\,\Delta z$$

$$T^{11} = \frac{F^1}{\underbrace{\Delta y\,\Delta z}_{\text{área}}}$$ pressão exercida pelo fluido na face

$T^{21}, T^{31}$ cisalhamento (viscosidade)

## Tensor energia-momento: fluido perfeito

- Transmissão de calor e viscosidade desprezíveis
- Caracterizado por duas quantidades: $\rho$, densidade de energia; $p$, pressão

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\,U^\mu U^\nu + p\,\eta^{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{bmatrix}$$

não há fluxo de energia

isotrópico: pressão não depende de direção.

Equação de estado: $p = p(\rho)$

Exs:
- Poeira: $p = 0$ (galáxias, matéria escura)
- Gás de fótons: $p = \frac{1}{3}\rho$ (RCF, neutrinos)
- Energia escura: $p = -\rho$

$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, simétrico

## Leis de conservação

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \partial_\mu T^{\mu 0} = 0 \\ \partial_\mu T^{\mu i} = 0 \end{cases}$$

(ou $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ )

$\vec{T}_0 = T^{0i} = T^{i0}$, Fluxo de energia

$\vec{T}_j = T^{ji} = T^{ij}$, Fluxo de momento

- $\partial_t \rho + \partial_i T^{i0} = 0$

$$\boxed{\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{T_0} = 0}$$

"Conservação de energia"

$\vec{T_0}$

região A

$$\int_A \vec{\nabla} \cdot \vec{T_0} \, dV = \int_{\partial A} \vec{T_0} \cdot \vec{n} \, dS$$

fluxo de energia através da fronteira

$$\int_A \partial_t \rho \, dV = \partial_t M$$

variação de energia no interior da região.

$\therefore \begin{cases} \partial_\mu T^{\mu 0} = 0 \\ \partial_\mu T^{\mu i} = 0 \end{cases}$ descreve a conservação da energia / do momento

- Para um fluido perfeito

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \left[ (\rho+p) U^\mu U^\nu + p \eta^{\mu\nu} \right]$$

$$= \partial_\mu(\rho+p) U^\mu U^\nu + (\rho+p) \partial_\mu U^\mu \cdot U^\nu + (\rho+p) U^\mu \partial_\mu U^\nu + \partial^\nu p$$

$[ U_\nu U^\nu = -1 ]$

Note que: $\partial_\mu ( U_\nu U^\nu ) = 0 \Rightarrow U_\nu \partial_\mu U^\nu = 0$

$$U_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = - U^\mu \partial_\mu (\rho+p) - (\rho+p) \partial_\mu U^\mu + U_\nu \partial^\nu p = 0$$

No limite não-relativístico : $U^\mu = (1, v^i)$, $p \ll \rho$ , e obtemos:

$$0 = U^\mu \partial_\mu \rho + \rho \partial_\mu U^\mu = \partial_t \rho + v^i \partial_i \rho + \rho \partial_i v^i$$

$$= \partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i)$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0}$$

"Eq. de continuidade"

(conservação da massa)

densidade de massa

fluxo de massa