UFMG

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física
Prof. Nelson Yokomizo

Relatividade Geral

Data de entrega: **02/10/2020**
Enviar para: **trg.ufmg@gmail.com**

Avaliação 2

Exercício 1. [15pt] Considere a seguinte curva no espaço Euclidiano $\mathbf{R}^2$:

$$\alpha(\lambda) = (e^\lambda \cos\lambda, e^\lambda \operatorname{sen}\lambda).$$

Tomando $\lambda = 0$, vemos que a curva passa pelo ponto $p = (1, 0)$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Obtenha o vetor tangente à curva em função do parâmetro λ. Calcule os seus componentes no ponto p. Esboce a curva e represente sua tangente no ponto p.

b) Determine o diferencial df da função f.

c) Calcule a derivada direcional da função f no ponto p na direção do vetor tangente à curva α.

Exercício 2. [15pt] A métrica de $\mathbb{R}^2$ em coordenadas polares é dada por:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2\,,$$

onde

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\,,$$

e x, y são coordenadas canônicas nas quais $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Denote $z^1 = r$ e $z^2 = \theta$. Os vetores coordenados associados ao sistema de coordenadas polares são descritos na base de vetores coordenados canônicos através de:

$$e_1 \equiv \partial_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,, \qquad e_2 \equiv \partial_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta)\,.$$

Definindo os símbolos $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ através de:

$$\frac{\partial e_i}{\partial z^j} = \tilde{\Gamma}^k_{ij} e_k\,,$$

determine todos os coeficientes $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, $i, j, k = 1, 2$. Como esses símbolos se comparam aos símbolos de Christoffel Γ^i_{jk} da conexão associada à métrica? (Não é preciso calculá-los.)

Exercício 3. [30pt] A métrica do espaço de de Sitter bidimensional é dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht} dx^2 \,,$$

onde $H > 0$ é uma constante.

a) Mostre que os símbolos de Christoffel não nulos da conexão associada a essa métrica são dados por:

$$\Gamma^0_{11} = He^{2Ht} \,, \qquad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = H \,.$$

.

b) Determine todos os componentes não nulos do tensor de curvatura de Riemann $R_{\rho\sigma\mu\nu}$. Use as simetrias do tensor de curvatura para justificar quais são os componentes não nulos e determinar as relações entre eles.

c) Calcule o tensor de Ricci e o escalar de curvatura.

d) Construa a equação geodésica. Verifique que a seguinte curva é uma geodésica:

$$t(\lambda) = \frac{1}{H} \ln \lambda \,, \qquad x(\lambda) = -\frac{1}{H\lambda} \,, \quad \lambda > 0 \,.$$

Exercício 4. [20pt] O tensor energia-momento de um fluido perfeito é definido em um espaço qualquer como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu} \,,$$

onde ρ é a densidade de energia e p a pressão do fluido. A condição de conservação de energia é expressa por

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \,.$$

Considere o espaço de de Sitter bidimensional descrito no exercício anterior e um fluido com quadrivelocidade $U^\mu = (1, 0)$. O tensor de energia-momento assume então a forma:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & e^{-2Ht} p \end{pmatrix} \,,$$

onde o índice μ indica a linha e o índice ν indica a coluna do componente $T^{\mu\nu}$ na matriz. Além disso, considere que o fluido satisfaz a equação de estado $p = w\rho$, onde w é uma constante. (Os símbolos de Christoffel descritos no exercício 3 podem ser usados para a resolução deste exercício.)

a) Impondo a condição de conservação de energia, mostre que

$$\partial_t \rho + H\rho(1 + w) = 0 \,, \qquad \partial_x \rho = 0 \,.$$

b) Determine a evolução temporal da densidade de energia $\rho(t)$ para os casos $w = -1$ e $w = 1/3$. Tome como condição inicial: $\rho(0) = \rho_0$.

Exercício 5. [20pt] Considere um espaço-tempo tridimensional com métrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \,.$$

Com a identificação $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, os símbolos de Christoffel não nulos são dados por:

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{GM}{r(r - 2GM)} \,,$$
$$\Gamma^1_{00} = GM\frac{(r - 2GM)}{r^3} \,, \quad \Gamma^1_{11} = -GM\frac{1}{r(r - 2GM)} \,, \quad \Gamma^1_{22} = -(r - 2GM) \,,$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \,.$$

a) Construa os três componentes da equação geodésica.

b) Considere uma curva restrita a um raio r constante. Escreva os componentes da equação geodésica sob a condição de raio constante. Mostre que

$$t' = \frac{dt}{d\lambda} \text{ e } \theta' = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

são constantes.

c) Considere o caso de uma geodésica circular tipo luz. Mostre que nesse caso $r = 3GM$.

Data de entrega: 02/10/2020
Enviar para: trg.ufmg@gmail.com