U F $\underline{m}$ G

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física
Prof. Nelson Yokomizo

Relatividade Geral

Lista de exercícios 2: Geometria diferencial

Exercícios

1. [Schutz 5.3] Uma mudança de coordenadas é dita não singular se o Jacobiano associado é não nulo. Em duas dimensões, passando de coordenadas (x, y) para novas coordenadas (ξ, η), o Jacobiano é dado por:

$$J = \det \begin{bmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{bmatrix} .$$

Determine se as transformações a seguir são singulares ou não singulares. Para as transformações singulares, descreva os pontos nos quais o Jacobiano se anula.

a) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$ (coordenadas polares)
b) $\xi = \ln x$, $\eta = y$

2. [Schutz 5.5] Determine os vetores tangentes às seguintes curvas:

a) $x = \operatorname{sen}\lambda$, $y = \cos\lambda$
b) $x = s^2$, $y = -(s + 2)(s - 2)$

Esboce as curvas e represente o vetor tangente no ponto em que o parâmetro da curva é igual a zero.

3. Determine a métrica g_{ab} e a métrica inversa g^{ab} do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ em coordenadas polares (r, θ). Calcule os símbolos de Christoffel para a conexão de Levi-Civita em coordenadas polares usando a fórmula:

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}).$$

4. Considere as seguintes curvas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha(\lambda) = (\lambda, (\lambda - 1)^2, -\lambda) ,$$
$$\beta(\lambda) = (\cos\lambda, \operatorname{sen}\lambda, -1) .$$

Ambas as curvas passam pelo ponto $p = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$.

a) Obtenha os vetores tangentes às curvas.

b) Calcule a derivada direcional da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - yz$ no ponto p na direção do vetor tangente para as duas curvas.

5. Considere os vetores coordenados ∂_r e ∂_θ associados a coordenadas polares no plano $\mathbb{R}^2$. Mostre que esses vetores são representados na base de vetores coordenados associados a coordenadas cartesianas (x, y) por:

$$\begin{aligned} \partial_r &= \cos\theta\, \partial_x + \operatorname{sen}\theta\, \partial_y\,, \\ \partial_\theta &= -r \operatorname{sen}\theta\, \partial_x + r\cos\theta\, \partial_y\,. \end{aligned}$$

Normalizando tais vetores, obtemos a base de vetores unitários:

$$\hat{e}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)_{cart}\,, \qquad \hat{e}_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)_{cart}\,.$$

6. [Schutz 5.21] Considere o plano x-t no espaço de Minkowski. A métrica nesse plano é dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2\,.$$

Podemos introduzir novas coordenadas (λ, a) na região $|x| < |t|$ através de:

$$t = a \operatorname{senh}\lambda\,, \qquad x = a\cosh\lambda\,,$$

Para cada valor fixo de a, a linha de mundo obtida ao se variar a coordenada λ descreve um movimento com aceleração constante. As coordenadas (λ, a) são chamadas de coordenadas de Rindler. Determine o tensor métrico e os símbolos de Christoffel nas coordenadas (λ, a).

7. [Schutz 5.22] Mostre que se $U^\alpha \nabla_\alpha V^\beta = W^\beta$ para uma conexão compatível com a métrica então $U^\alpha \nabla_\alpha V_\beta = W_\beta$.

8. Seja V^μ um campo vetorial tal que $V^\mu V_\mu = 1$ em todos os pontos de uma variedade Riemanniana M. Mostre que $V^\mu \nabla_\nu V_\mu = 0$ para uma conexão compatível com a métrica.

9. [Wald 2.8] Determine a métrica e a métrica inversa do espaço de Minkowski no sistema de coordenadas girante:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= \sqrt{x^2 + y^2}\, \cos(\phi - \omega t) \\ y' &= \sqrt{x^2 + y^2}\, \operatorname{sen}(\phi - \omega t) \\ z' &= z\,, \end{aligned}$$

onde $\tan\phi = y/x$.

10. O divergente de um quadrivetor é definido como:

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\nu} V^\nu \,.$$

Mostre que vale a seguinte identidade para as somas de símbolos de Christoffel que aparecem na expressão do divergente:

$$\Gamma^\mu{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\nu g_{\rho\sigma} \,.$$

11. [Schutz 6.39] Para uma conexão sem torção, o colchete de Lie de dois campos vetoriais U^μ e V^ν é o campo vetorial com componentes dados por:

$$[U, V]^\sigma = U^\mu \nabla_\mu V^\sigma - V^\mu \nabla_\mu U^\sigma \,.$$

Mostre que:

$$\begin{aligned} &[U, V] = -[V, U] \,, \\ &[U, V]^\sigma = U^\mu \partial_\mu V^\sigma - V^\mu \partial_\mu U^\sigma \,, \\ &[U, fV] = f[U, V] + V U^\mu \nabla_\mu f \,, \end{aligned}$$

onde f é uma função qualquer.

12. [Carroll 3.6] Uma boa aproximação para a métrica perto da superfície da Terra é dada por:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2)$$

onde

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

é o potencial gravitacional Newtoniano, sendo G a constante de Newton e M a massa da Terra. Considere um relógio fixado a uma altura constante em um ponto da superfície da Terra. Seja R a distância do relógio ao centro da Terra. Parametrizando seu movimento por

$$x^\mu(t) = (t, R, \theta, \omega t) \,,$$

onde R, θ são constantes e $\omega = 2\pi/(24 \text{ hs})$ é a velocidade angular da Terra, determine o tempo medido pelo relógio em função da variação do tempo coordenado Δt em latitudes arbitrárias. Inserindo os fatores necessários de c e usando a aproximação de rotação lenta $R^2\omega^2 \ll \Phi$, mostre que:

$$\Delta\tau \simeq \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} \Delta t \,.$$

Calcule o tempo medido por um relógio fixado à superfície da Terra em uma rotação completa da Terra e determine a correção relativística $\Delta\tau - 24$ hs em segundos.