

# Analiza Matematyczna 2 - poradnik

Dawid Gradowski (puckmoment na dc)

Luty 2025

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Prolog</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Przydatne rzeczy do wszystkiego</b>	<b>3</b>
2.1	Szeregi harmoniczne różnej krotności . . . . .	3
2.2	Wzór na $e$ . . . . .	4
2.3	Reguła łańcuchowa . . . . .	6
2.4	Przydatne granice . . . . .	7
2.5	Przydatne wzory na pochodne . . . . .	8
2.6	Inne przydatne własności . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Kryteria określające zbieżność</b>	<b>9</b>
3.1	Kryterium Cauchy'ego . . . . .	9
3.2	Kryterium d'Alemberta . . . . .	10
3.3	Kryterium porównawcze . . . . .	11
3.4	Kryterium Leibniza . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Szeregi potęgowe</b>	<b>12</b>
4.1	Kryterium Cauchy'ego - Hadamarda . . . . .	13
4.2	Kryterium d'Alemberta (szeregi potęgowe) . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Rozwijanie funkcji w szereg</b>	<b>14</b>
5.1	Funkcja z kreską ułamkową . . . . .	15
5.2	Funkcja z logarytmem naturalnym . . . . .	16
5.3	Inne funkcje . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Funkcje 2 zmiennych</b>	<b>17</b>
6.1	Znajdowanie granicy (sposób z t) . . . . .	17
6.2	Pokazywanie, że granica nie istnieje . . . . .	18

6.3	Obliczanie wartości przybliżonej . . . . .	19
6.4	Wyznaczanie ekstremów . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Kartkówka nr 1</b>	<b>23</b>
7.1	Kartkówka wraz z dokładnym omówieniem . . . . .	24
7.1.1	Zadanie 1 . . . . .	24
7.1.2	Zadanie 2 . . . . .	24
7.1.3	Zadanie 1 (rozwiązanie) . . . . .	24
7.1.4	Zadanie 2 (rozwiązanie) . . . . .	26
7.2	Kartkówka gr. A . . . . .	27
7.2.1	Zadanie 1 . . . . .	27
7.2.2	Zadanie 2 . . . . .	27
7.2.3	Zadanie 1 (odp) . . . . .	27
7.2.4	Zadanie 2 (odp) . . . . .	27
7.3	Kartkówka gr. B . . . . .	28
7.3.1	Zadanie 1 . . . . .	28
7.3.2	Zadanie 2 . . . . .	28
7.3.3	Zadanie 1 (odp) . . . . .	28
7.3.4	Zadanie 2 (odp) . . . . .	28
7.4	Kartkówka gr. A ale inna . . . . .	28
7.4.1	Zadanie 1 . . . . .	28
7.4.2	Zadanie 2 . . . . .	28
7.4.3	Zadanie 1 (odp) . . . . .	29
7.4.4	Zadanie 2 (odp) . . . . .	29
7.5	UWAGA do odpowiedzi . . . . .	29

## 1 Prolog

Ten dokument tworzę dlatego by poznać wspaniałe narzędzie jakim jest  $\text{\LaTeX}$  oraz by przygotować się do egzaminu z Analizy Matematycznej 2, ale to nie są jedyne powody. Tworzę ją jako człowiek z misją, człowiek który upierdolił wszystkie 3 kartkówki, z czego na 2 z nich dostał 0 punktów. Nie lękajcie się jednak czytelnicy tej notatki, ponieważ jestem dowodem na to, że nawet z najgorszych sytuacji da się wyjść obronną ręką.

## 2 Przydatne rzeczy do wszystkiego

### 2.1 Szeregi harmoniczne różnej krotności

Jednym z typowych szeregów jest tak zwany **szereg harmoniczny**. Znajomość tego szeregu oraz kiedy jest on zbieżny jest kluczowa jeśli chce się zdać ten przedmiot. Szereg ten wygląda następująco:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

gdzie:

- dla  $p \leq 1$  ciąg ten jest rozbieżny
- dla  $p > 1$  ciąg ten jest zbieżny

Szeregi harmoniczne oraz ich zbieżności bardzo nam się przydadzą w momencie gdy będziemy korzystać w kryterium porównawczego o którym można przeczytać w dalszej części notatki.

## 2.2 Wzór na $e$

Bardzo ważnym wzorem w zadaniu pierwszym na kartkówce pierwszej jest coś co ja nazywam wzorem na  $e$ . Wygląda on następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Wzoru tego trzeba było użyć na każdej kartkówce nr 1 jaką rozwiązywałem oraz zawsze w tym samym miejscu, w zadaniu 1 w przykładzie w którym używało się kryterium Cauchy'ego. Nigdy nie będzie on tak ładnie widoczny jak powyżej więc na przykładzie zadania z kartkóweczki wytłumaczę jak uzyskać odpowiednią postać. Na kartkówce był taki przykład:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3n^2 - n}{3n^2 + 4n})^{n^2}$$

W trakcie stosowania kryterium Cauchy'ego otrzymujemy następującą postać:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n^2 - n}{3n^2 + 4n})^n$$

W pierwszej kolejności możemy wyciągnąć  $n$  przed nawias by w nawiasie zostały nam  $n$  pierwszej potęgi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n^2 - n}{3n^2 + 4n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n(3n - 1)}{n(3n + 4)})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n - 1}{3n + 4})^n$$

Aby w nawiasie uzyskać postać  $1 + \frac{1}{x}$  trzeba uzyskać w liczniku  $3n + 4$  tak samo jak jest w mianowniku.  $3n - 1 = 3n + 4 - 5$  więc można to zapisać następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n - 1}{3n + 4})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n + 4 - 5}{3n + 4})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n + 4}{3n + 4} + \frac{-5}{3n + 4})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{-5}{3n + 4})^n$$

Już coraz bardziej wygląda to jak postać której szukamy. Brakuje nam jedyneczki w liczniku. Aby mieć jedynkę w liczniku trzeba górę i dół przemnożyć przez  $-\frac{1}{5}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{-5}{3n + 4})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{-5}{3n + 4} \times \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{5}})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{-\frac{3n}{5} - \frac{4}{5}})^n$$

No i teraz mamy postać typu kongo, która wygląda dodupnie, ale spokojnie bo to już ostatnia prosta. Wytlumaczę na prostym przykładzie co trzeba zrobić:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{y}{x}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y}{x}}$$

Robiąc to samo na naszym przykładzie otrzymamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{3n+4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-\frac{3n}{5} - \frac{4}{5}}\right)^{-\frac{3n}{5} - \frac{4}{5}}\right)^{\frac{n}{-\frac{3n}{5} - \frac{4}{5}}} = e^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{e^{\frac{5}{3}}}$$

I tak właśnie z jakiegoś gówna dostaliśmy piękne  $e$ .

### 2.3 Reguła łańcuchowa

Reguła łańcuchowa to jedno z podstawowych narzędzi rachunku różniczkowego (liczenia pochodnych), które pozwala na liczenie pochodnych funkcji złożonych. Reguła wygląda następująco. Zakładamy, że mamy funkcję składającą się z 2 funkcji:

$$h(x) = g(f(x))$$

gdzie:

- $f(x)$  to funkcja wewnętrzna
- $g(u)$  to funkcja zewnętrzna, przy czym nasze  $u = f(x)$

Aby znaleźć pochodną  $h(x)$ , stosujemy regułę łańcuchową:

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Jak stosować to w praktyce. Weźmy sobie taki przykład:

$$h(x) = \sqrt{5x+3} = (5x+3)^{\frac{1}{2}}$$

I teraz określamy sobie co jest funkcję wewnętrzną, a co zewnętrzną:

- funkcja wewnętrzna:  $f(x) = 5x+3$
- funkcja zewnętrzna:  $g(u) = u^{\frac{1}{2}}$ , przy czym nasze  $u = f(x)$

Licząc pochodną otrzymujemy:

- $f'(x) = 5$
- $g'(u) = \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (5x+3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{5x+3}}$

Wstawiając więc otrzymane pochodne do wzoru na regułę łańcuchową otrzymujemy:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5x+3}} \cdot 5 = \frac{5}{2\sqrt{5x+3}}$$

## 2.4 Przydatne granice

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

## 2.5 Przydatne wzory na pochodne

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ciekawe przykłady zastosowania:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Te mniej typowe wzory:

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$



## 2.6 Inne przydatne własności

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

## 3 Kryteria określające zbieżność

Kryteria opisane poniżej pozwalają określić czy dany szereg jest zbieżny czy rozbieżny. Generalnie to chuj wie co to znaczy, jak chcesz wiedzieć to sobie w google wpisz, ale to nie jest wiedza potrzebna do zdania.

### 3.1 Kryterium Cauchy'ego

Dla szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jego zbieżność wyznaczamy licząc  $g$  albo  $q$  (nie mogłem się odczytać w notatkach jaka to literka ale ja na kartkówce co zdałem pisałem  $g$ ).

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Najczęściej wartość bezględna  $|a_n|$  to po prostu  $a_n$ . Posiadając policzone  $g$  dowiadujemy się, że:

- $g < 1$  to szereg jest bezwzględnie zbieżny
- $g > 1$  to szereg jest rozbieżny
- $g = 1$  to kryterium jest niewystarczające, więc nie rozstrzyga zbieżności

Kryterium to najlepiej stosować gdy całe wyrażenie jest do potęgi  $n^p$ , gdzie  $p$  to jakaś liczba całkowita.

### 3.2 Kryterium d'Alemberta

Tak samo jak w poprzednim kryterium, dla szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jego zbieżność wyznaczamy licząc  $g$ . Zmienia się jednak wzór

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Najczęściej wartość bezgłębna  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  to po prostu  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Posiadając policzone  $g$  tak samo jak w poprzednim dowiadujemy się, że:

- $g < 1$  to szereg jest bezwzględnie zbieżny
- $g > 1$  to szereg jest rozbieżny
- $g = 1$  to kryterium jest niewystarczające, więc nie rozstrzyga zbieżności

Kryterium to najlepiej stosować gdy w szeregu występują jakieś silnie albo  $n$ -te potęgi.

### 3.3 Kryterium porównawcze

Jeśli mamy 2 szeregi dodatnie

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

i dla prawie wszystkich  $n$  zachodzi  $a_n \leq b_n$  to:

- ze zbieżności szeregu  $(B)$  wynika zbieżność szeregu  $(A)$
- z rozbieżności szeregu  $(A)$  wynika rozbieżność szeregu  $(B)$

Ewentualnie jak komuś łatwiej zapamiętać to:

- ze zbieżności większego szeregu możemy udowodnić zbieżność szeregu mniejszego
- z rozbieżności szeregu mniejszego możemy udowodnić rozbieżność szeregu większego

Prawie wszystkie  $n$  oznacza, że dla jakiegoś  $n$  staje się to prawdą, bo jak któreś  $n$  jest prawdą to później idzie to w nieskończoność, a to całkiem sporo przypadków jakby nie patrzeć. Zwykle jest tak, że już dla  $n = 1$  jest to prawdą, więc nie ma się czym martwić.

Kryterium to najlepiej stosować gdy dla dużych  $n$  nasze  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  przypomina szereg harmoniczny jakiegokolwiek krotności. Tylko co to znaczy, że dla dużych  $n$  coś przypomina nam coś? To bardzo proste. Weźmy dla przykładu taki szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2-n}$$

Dla małych  $n$  jedynka w liczniku ma dość duży wpływ na wartość wyrażenia, ale gdyby nasze  $n$  było olbrzymie to byłby to że tak to ujęm jeden chuj, dlatego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2-n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2-n}$$

Mając taką postać możemy wyciągnąć  $n$  przed nawias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 - n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(3n - 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n - 1} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Możemy teraz zauważyć podobieństwo do szeregu harmonicznego o którym pisałem w części 2.1. Jest to szereg harmoniczny pierwszego stopnia, który jest rozbieżny. Teraz aby udowodnić rozbieżność znajdziemy szereg harmoniczny mniejszy od naszego ciągu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2 - n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$$

Na mocy kryterium porównawczego, szereg ten jest rozbieżny.

### 3.4 Kryterium Leibniza

Jest to kryterium zbieżności szeregów naprzemiennych, które określa warunkową zbieżność szeregu. Nie do końca wiem co to znaczy ale tak jest. Szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  jest zbieżny warunkowo gdy:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,
2. Ciąg  $a_n$  jest nierosnący, czyli  $a_n - a_{n+1} \geq 0$

**UWAGA! Trzeba pamiętać, że określa to wyłącznie zbieżność warunkową szeregu a nie bezwzględną!**

## 4 Szeregi potęgowe

Wzór ogólny szeregu potęgowego wygląda następująco:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Dla takiego szeregu potęgowego możemy wyliczyć promień zbieżności  $r$ . Promień wykorzystujemy przy liczeniu przedziału zbieżności.

Przedział zbieżności określa dla jakich wartości  $x$  szereg ten jest zbieżny, nie określa on jednak zbieżności na granicach przedziału. Szereg jest zbieżny gdy:

$$x \in (x_0 - r; x_0 + r)$$

Obszar zbieżności jest tym samym co przedział zbieżności ale z uwzględnieniem zbieżności dla wartości skrajnych.

#### 4.1 Kryterium Cauchy'ego - Hadamarda

Kryterium to określa promień zbieżności szeregu potęgowego. Jest ono bardzo podobne do kryterium Cauchy'ego. Zaczynamy od policzenia  $g$  z tego samego wzoru, którego używaliśmy przy kryterium Cauchy'ego

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Teraz w zależności od obliczonego  $g$ , nasze  $r$  jest równe:

$$r = \begin{cases} \infty, & \text{if } g = 0 \\ 0, & \text{if } g = \infty \\ \frac{1}{g}, & \text{if } g < 0 < \infty \end{cases} \quad (1)$$

#### 4.2 Kryterium d'Alemberta (szeregi potęgowe)

Tak jak wykorzystaliśmy kryterium Cauchy'ego tak bliźniaczo możemy wykorzystać kryterium d'Alemberta.

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

i następnie sytuacja wygląda dokładnie tak samo jak w poprzednim kryterium, więc używamy równania (1). Można też zauważyć, że nasze  $r$ , jeśli granica istnieje jest po prostu równe

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

## 5 Rozwijanie funkcji w szereg

Istnieje coś takiego jak szereg Taylora, który wygląda następująco:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)$$

Na kartkówkę drugiej trzeba będzie najprawdopodobniej rozwinąć funkcję w szeregu Maclaurina. Jest to szereg Taylora dla którego  $x_0 = 0$ . Rozwinięcie funkcji w szereg polega na wyliczeniu dużej ilości pochodnych tak, aby w pewnym momencie wyznaczyć wzór na  $n$ -tą pochodną. Jak pierwszy raz zobaczyłem, że muszę coś takiego zrobić to się załamalem i dałem ff, ale ty tak nie rób. Pokażę ci zaraz wspaniałe wzorki :).

## 5.1 Funkcja z kreską ułamkową

Nie będę zgrywał bohatera i po prostu się przyznam, że nie wiedziałem jak nazwać tę funkcję, ale ta funkcja wygląda podobnie do czegoś takiego:

$$f(x) = \frac{3x}{8+x^3}$$

Jeśli mamy coś takiego w zadaniu to należy zapamiętać, że:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ lub } \frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n$$

wtedy kiedy  $q \in (-1, 1)$ . Dla przykładu rozwińmy sobie podaną wyżej funkcję. W liczniku potrzebujemy samej 1, a w mianowniku  $1+q$  z czego  $q$  może być czymś dziwnym, a więc

$$\frac{3x}{8+x^3} = 3x \times \frac{1}{8+x^3} = \frac{3x}{8} \times \frac{1}{1+\frac{x^3}{8}} = \frac{3x}{8} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^3}{8}\right)^n$$

Mamy już szereg ale to nie koniec zadania. Teraz musimy pomnożyć to co jest przed szeregiem z tym co jest w szeregu. Nie ma się tu czego bać po prostu wymnażamy jakby tego  $\sum$  nie było. Można sam szereg sobie ładniej zapisać:

$$\frac{3x}{8} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^3}{8}\right)^n = \frac{3x}{8} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{8^{n+1}} x^{3n+1}$$

Trzeba też wyznaczyć dla jakich  $x$  stwierdzenie  $\frac{x^3}{8} \in (-1, 1)$  co jest równoważne z

$$-1 < \frac{x^3}{8} < 1$$

$$-8 < x^3 < 8$$

$$-2 < x < 2$$

## 5.2 Funkcja z logarytmem naturalnym

Wzór wygląda następująco

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}$$

gdzie  $t \in (-1, 1)$ . Zasada używania wzoru jest podobna jak w sekcji 5.1.

Przykład:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \ln(1-2x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-2x)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \cdot \frac{2^{n+1}}{n+1} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \cdot \frac{2^{n+1}}{n+1} x^{n+2} \end{aligned}$$

## 5.3 Inne funkcje

Istnieją jeszcze 3 wzory, ale nie są one potrzebne do zdania kartkówek. Te wzory to:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{dla } x \in R \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{dla } x \in R \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{dla } x \in R \end{aligned}$$



## 6 Funkcje 2 zmiennych

### 6.1 Znajdowanie granicy (sposób z $t$ )

Znajdziemy sobie granicę takiej dzikiej funkcji 2 zmiennych:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{ctg}(3x^2 + 3y^2)$$

Możemy zauważyć, że po lekkim przekształceniu nasze zmienne  $x$  i  $y$  występują tylko w postaci  $x^2 + y^2$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{ctg}(3x^2 + 3y^2) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{ctg}(3 \cdot (x^2 + y^2))$$

W takiej sytuacji możemy za  $x^2 + y^2$  podstawić  $t$  i nie będzie to miało wpływu na granice gdy  $t$  będzie dążyć do 0:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{ctg}(3 \cdot (x^2 + y^2)) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{ctg}(3t)$$

I to jest moment w którym trzeba coś wiedzieć. Do tych zadań trzeba dobrze znać regułę łańcuchową opisaną w rozdziale 2.3 oraz granice opisane w rozdziale 2.4. Nie ma więc jednego sprawdzonego sposobu, trzeba po prostu się trochę obyć w tych zadaniach albo olać i liczyć na to, że punkty z reszty zadań wystarczą by zdać. Granica naszego przykładu jest równa:

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{ctg}(3t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \frac{\cos 3t}{\sin 3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sin 3t}{3t}\right)^{-1} \cdot \cos 3t = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1^{-1} = \frac{1}{3}$$

To co jest napisane powyżej jest bardzo sprytne ale teraz pozostaje pytanie: czy to jest coś na co bym wpadł na kartkówce? Nie wydaje mi się, ale punkty z pozostałych zadań pozwalają zdać więc na giga luzie.

## 6.2 Pokazywanie, że granica nie istnieje

Weźmy sobie taki przykład:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{3x^4 + 2y^4}$$

Musimy znaleźć takie 2 ciągi, które również będą dążyły do  $(0,0)$ . Jeśli nie rozumiesz to spójrz na takie dwa przykładowe ciągi, których ty też możesz użyć dla dowolnego przypadku:

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0,0)$$

$$\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0,0)$$

Możemy zauważyć, że tak na prawdę możemy użyć  $\frac{x}{n}$  gdzie  $x$  jest dowolną liczbą, a  $n$  dąży do nieskończoności. Gdy już wybraliśmy sobie ciągi sprawa jest giga prosta. Podstawiamy sobie nasze ciągi do naszej funkcji:

- Dla  $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{3x^4 + 2y^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{3}{n^4} + \frac{2}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{5}{n^4}} = \frac{1}{5}$$

- Dla  $\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{3x^4 + 2y^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{8}{n^3} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{3 \cdot 16}{n^4} + \frac{2}{n^4}} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

Otrzymaliśmy 2 różne granice dlatego wiemy, że granica nie istnieje. Otrzymanie różnych granic w taki sposób udowadnia nam, że granica nie istnieje **ale otrzymanie w taki sposób takich samych granic nie gwarantuje, że granica istnieje**. W nieskończonej ilości kombinacji ciągów, mogą się znaleźć 2 takie dla których wyjdą różne granice.

### 6.3 Obliczanie wartości przybliżonej

Obliczmy wartość przybliżoną funkcji na przykładzie:

$$f(x, y) = \sqrt{5x - y^2}$$

$$P = (1.04; -0.97) = (x, y)$$

Przyjmujemy sobie punkt blisko naszego punktu  $P$ :

$$P_0 = (1; -1) = (x_0, y_0)$$

Jeśli funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $(x_0, y_0)$  to możemy podać przybliżone wartości "blisko" punktu  $(x_0, y_0)$ . Jeśli nie rozumiecie o co chodzi to pełen chill, zaraz wszystko się wyklaruje. Istnieje taki wzór:

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + f'x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'y(x_0, y_0)\Delta y$$

Wartości  $\Delta x$  oraz  $\Delta y$  to różnice współrzędnych punktów  $P$  i  $P_0$ , czyli:

$$\Delta x = x - x_0 = 1.04 - 1 = 0.4 = \frac{4}{100}$$

$$\Delta y = y - y_0 = -0.97 - (-1) = 0.3 = \frac{3}{100}$$

Aby wyznaczyć  $f'x(x_0, y_0)$  oraz  $f'y(x_0, y_0)$  trzeba użyć reguły łańcuchowej opisanej w rozdziale 2.3. Otrzymamy z tego:

$$f'x(1, -1) = \frac{1}{2\sqrt{5x - y^2}} \cdot 5 = \frac{5}{2\sqrt{5 - 1}} = \frac{5}{4}$$

$$f'y(1, -1) = \frac{1}{2\sqrt{5x - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{2}{2\sqrt{5 - 1}} = \frac{1}{2}$$

Z kolei nasze  $f(x_0, y_0)$  jest równe:

$$f(1, -1) = \sqrt{5x - y^2} = \sqrt{5 - 1} = 2$$

Podstawiając wszystkie wartości do wzoru na przybliżenie  $f(x, y)$  otrzymujemy:

$$f(x, y) \approx 2 + \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{100} = 2 + \frac{10}{200} + \frac{3}{200} = 2 + \frac{13}{200} = 2.065$$

## 6.4 Wyznaczanie ekstremów

Wyznamy ekstrema lokalne poniższej funkcji.

$$f(x, y) = x^2 - x^2y^3 + 3y^2 - 3y + 1$$

Pierwszym krokiem w liczeniu ekstremów jest wyznaczenie dziedziny. Jak to zrobić każdy mniej więcej powinien wiedzieć, dla każdej funkcji robi się to inaczej. W przypadku naszej funkcji dziedzina to:

$$(x, y) \in R^2$$

Kolejnym krokiem jest sprawdzenie dla jakiego punktu/punktów zachodzi warunek konieczny. Warunkiem koniecznym tego czy dany punkt, np.  $(x_0, y_0)$  może być ekstremum lokalnym jest, że dla tego punktu pochodna  $x$ -owa oraz pochodna  $y$ -owa muszą być równe 0.

$$f'x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'y(x_0, y_0) = 0$$

W przypadku naszej funkcji te pochodne to:

$$f'x(x, y) = 2x - 2xy^3$$

$$f'y(x, y) = -3x^2y^2 + 6y - 3$$

Tworzymy układ równań z którego wynika:

$$\begin{cases} 2x - 2xy^3 = 0 / : 2 \\ -3x^2y^2 + 6y - 3 = 0 / : 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - xy^3 = 0 \Rightarrow x(1 - y^3) = 0 \\ -x^2y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy:

$$x = 0 \vee 1 - y^3 = 0 \rightarrow y^3 = 1 \rightarrow y = 1$$

Podstawiamy otrzymane wartości do drugiego równania:

- Dla  $x = 0$ :

$$2y - 1 = 0 \text{ więc } y = \frac{1}{2}$$

Otrzymujemy więc punkt  $(0, \frac{1}{2})$ .

- Dla  $y = 1$ :

$$-x^2 + 2 - 1 = 0 \text{ więc } x = 1 \vee x = -1$$

Otrzymujemy więc punkty  $(1, 1)$  i  $(-1, 1)$ .

Mamy więc 3 punkty (są to tak zwane punkty krytyczne), które będziemy musieli sprawdzić:  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(1, 1)$  i  $(-1, 1)$ .

Następnie musimy wyznaczyć 4 drugie pochodne, aby wypełnić nimi macierz Hessego, zwaną również Hesjanem. W naszym przypadku nasze pochodne to:

$$\begin{aligned}f''_{xx}(x, y) &= 2 - 2y^3 \\f''_{yy}(x, y) &= -6x^2y + 6 \\f''_{xy}(x, y) &= f''_{yx}(x, y) = -6xy^2\end{aligned}$$

Ale czym jest Hesjan. Hesjan to macierz składająca się z drugich pochodnych jakiejś funkcji. Macierz ta wygląda następująco:

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Więc w naszym przypadku macierz ta wygląda następująco:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 - 2y^3 & -6xy^2 \\ -6xy^2 & -6x^2y + 6 \end{bmatrix}$$

Macierz ta jest nam potrzebna do warunku wystarczającego istnienia ekstremum. Warunek ten pozwala na podstawie wartości wyznacznika macierzy dla konkretnego punktu określić, czy jest to ekstremum czy punkt siodłowy (coś co nie jest ekstremum). Mamy 3 przypadki:

- $\det H(x, y) > 0 \rightarrow$  punkt jest ekstremum
- $\det H(x, y) < 0 \rightarrow$  punkt jest punktem siodłowym
- $\det H(x, y) = 0 \rightarrow$  nie da się określić za pomocą wyznacznika

Dodatkowo gdy określimy sobie, że punkt jest ekstremum to dla tego punktu:

- $f''_{xx}(x, y) > 0 \rightarrow$  punkt jest minimum lokalnym
- $f''_{xx}(x, y) < 0 \rightarrow$  punkt jest maksimum lokalnym

Aby obliczyć wyznacznik macierzy 2x2 należy użyć wzoru:

$$\det H(x, y) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Obliczmy sobie wyznacznik dla poszczególnych punktów.

- Dla punktu  $(0, \frac{1}{2})$

$$\det H(0, \frac{1}{2}) = \begin{vmatrix} \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{7}{4} \cdot 6 - 0 \cdot 0 = \frac{21}{2} > 0$$

Wiemy, że w punkcie  $(0, \frac{1}{2})$  jest ekstremum. Widzimy również, że

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{7}{4} > 0$$

więc punkt  $(0, \frac{1}{2})$  jest minimum lokalnym.

- Dla punktu  $(1, 1)$

$$\det H(1, 1) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-6) \cdot (-6) = -36 < 0$$

Wiemy, że w punkcie  $(1, 1)$  jest punkt siodłowy.

- Dla punktu  $(-1, 1)$

$$\det H(-1, 1) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 6 \cdot 6 = -36 < 0$$

Wiemy, że w punkcie  $(-1, 1)$  jest punkt siodłowy.

## 7 Kartkówka nr 1

Kartkówka pierwsza składa się z 2 zadań. Pierwsze zadanie polega na zbadaniu zbieżności szeregu, stosując kryteria Cauchy'ego oraz d'Alemberta.

Drugie zadanie polega na zbadaniu czy dany szereg jest zbieżny warunkowo czy bezwzględnie.

Poniżej zamieszcze wszystkie kartkówki jakie przerobiłem ucząc się do poprawy kartkówki, ale tylko jedno wytłumaczę dokładnie. Gdyby ktoś chciał rozwiązania proszę do mnie napisać to mogę podesłać.

## 7.1 Kartkówka wraz z dokładnym omówieniem

### 7.1.1 Zadanie 1

Stosując odpowiednie kryterium zbadać zbieżność szeregu liczbowego

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 3^{2n-1}}{4^{2n+1}} \text{ oraz b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n^2}$$

### 7.1.2 Zadanie 2

Stwierdzić (uzasadniając) czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2-n}$$

jest zbieżny bezwzględnie czy warunkowo.

### 7.1.3 Zadanie 1 (rozwiązanie)

W tym zadaniu we wszystkich kartkówkach jakie do tej pory przerabiałem zawsze trzeba było użyć raz kryterium Cauchy'ego i raz d'Alemberta. Filipczak bardzo chciał byście napisali nazwę kryterium z jakiego korzystacie i super by było jakbyście ją napisali poprawnie.

- a) W tym przypadku najlepiej będzie użyć kryterium d'Alemberta opisanego w sekcji 3.2. Skąd taki wniosek? A stąd, że w podpunkcie b) będziemy korzystać z Cauchy'ego, a kiedyś musimy kryterium d'Alemberta użyć. Nasz przykład wyglądał następująco:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 3^{2n-1}}{4^{2n+1}}$$

Przypomnijmy sobie szybko wzór na  $g$ . Warto zauważyć, że można ominąć wartość bezględną we wzorze ponieważ wszystkie wyrazy (czy jak to tam nazwać) szeregu są dodatnie:

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Ja dla ułatwienia osobno upraszczam sobie  $a^n$  oraz  $a^{n+1}$ . Otrzymujemy więc:

$$a^n = \frac{2^n \cdot 3^{2n-1}}{4^{2n+1}} = \frac{2^n \cdot 3^{2n} \cdot \frac{1}{3}}{4^{2n} \cdot 4}$$



$$a^{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot 3^{2(n+1)-1}}{4^{2(n+1)+1}} = \frac{2^n \cdot 2 \cdot 3^{2n} \cdot 3}{4^{2n} \cdot 4^3}$$

Podstawiając wartości te do wzoru na  $g$  otrzymujemy:

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n \cdot 2 \cdot 3^{2n} \cdot 3}{4^{2n} \cdot 4^3} \cdot \frac{4^{2n} \cdot 4}{2^n \cdot 3^{2n} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} > 1$$

a więc na mocy d'Alemberta szereg jest rozbieżny.

- b) Jeśli w szeregu widzimy, że całość jest podniesiona do  $n$ 'tej potęgi to najprawdopodobniej należy użyć kryterium Cauchy'ego opisanego w sekcji 3.1. W podpunkcie w którym należy użyć tego kryterium ważne będzie również użycie wzoru na  $e$  opisanego w sekcji 2.2. Przypomnijmy sobie nasz przykład:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{2n+3} \right)^{3n^2}$$

Kryterium Cauchy'ego stosujemy ponieważ nasza  $n$ 'ta potęga pięknie nam się skraca z  $n$ 'tym pierwiastkiem. Tutaj również można zignorować wartość bezwzględną z tego samego powodu co w podpunkcie a).

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{2n-1}{2n+3} \right)^{3n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{2n+3} \right)^{3n}$$

Tutaj odsyłam do sekcji z wzorem na  $e$  ponieważ to jest za dużo pisania by krok po kroku to rozpisywać po raz kolejny. Mogę powiedzieć tylko, że:

$$g = e^{-6} < 1$$

więc na mocy kryterium Cauchy'ego szereg ten jest zbieżny.

#### 7.1.4 Zadanie 2 (rozwiązanie)

W tym zadaniu trzeba rozpatrzyć zbieżność warunkową bądź bezwzględną w dwóch krokach:

Krok 1. Sprawdzamy za pomocą kryterium Leibniza opisanego w sekcji 3.4 czy dany szereg jest warunkowo zbieżny.

Warunek 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2-n}, \text{ więc } a_n = \frac{3n+1}{2n^2-n}$$
$$\lim_{a \rightarrow \infty} a_n = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n^2-n} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{n^2(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2(2 - \frac{1}{n})} = 0$$

Warunek pierwszy spełniony.

Warunek 2: W tym warunku jest trochę więcej pisania ale jest on giga prosty, każdy chyba umie dość biegle odejmować. Jak ktoś chce lepiej rozpisana wersje to niech napiszę to pewnie dam.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n+1}{2n^2-n} - \frac{3n+4}{2(n+1)^2-n-1} = \frac{10n^2+10n+1}{(4n-1)(n^2+n)} > 0$$

To tak mniej więcej trzeba sobie ogarnąć, że jak podstawimy liczbę 1 lub większą to liczba będzie większa od zera bo to co na górze i na dole jest większe od zera wiadomo o co chodzi.

Jestem prawie pewny, że w każdym tym zadaniu szeregi te spełniają kryterium Leibniza co oznacza, że są zbieżne conajmniej warunkowo (ale i tak to trzeba udowodnić).

Krok 2. Udawadnianie zbieżności bezwzględnej jest zadaniem bardzo prostym w którym mamy dowolność, jakiego kryterium możemy użyć ale we wszystkich przypadkach używałem kryterium porównawczego opisanego w sekcji 3.3. A więc o co chodzi z tą zbieżnością bezwzględną. No musimy sobie obliczyć zbieżność dla wartości bezwzględnej wyrazów czy jakoś tak, czyli dla naszego przykładu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2-n}$$

liczymy zbieżność dla szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2-n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2-n}$$

, więc jedyne co się zmienia to pozbywamy się tego  $(-1)^n$ . Jak już mówiłem, teraz kryterium jest dowolne ale najczęściej wystarczy kryterium porównawcze.

$$\frac{3n+1}{2n^2-n} \simeq \frac{3n}{2n^2-n} > \frac{1}{n}$$

a więc z kryterium porównawczego wiemy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2-n}$  jest rozbieżny, więc nasz początkowy szereg nie jest zbieżny bezwzględnie.

Odpowiedzią na to zadanie więc jest, że szereg jest zbieżny warunkowo. Gdyby w drugim kroku udowodniono, że jest zbieżny bezwzględnie to byśmy napisali, że jest zbieżny bezwzględnie bo to nas bardziej interesuje.

## 7.2 Kartkówka gr. A

### 7.2.1 Zadanie 1

Stosując odpowiednie kryterium zbadać zbieżność szeregu liczbowego

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n^2-n}{3n^2+4n} \right)^{n^2} \text{ oraz b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 3^{n+1}}{(2n+1)!}$$

### 7.2.2 Zadanie 2

Stwierdzić (uzasadniając) czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{2n^2+3}$$

jest zbieżny bezwzględnie czy warunkowo.

### 7.2.3 Zadanie 1 (odp)

Odpowiedź:

- a) zbieżny
- b) zbieżny

### 7.2.4 Zadanie 2 (odp)

Odpowiedź: zbieżny warunkowo

### 7.3 Kartkówka gr. B

#### 7.3.1 Zadanie 1

Stosując odpowiednie kryterium zbadać zbieżność szeregu liczbowego

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^{2n-1}}{3^{2n+1}} \text{ oraz b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{n^3}$$

#### 7.3.2 Zadanie 2

Stwierdzić (uzasadniając) czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n - 1}{n^3 + 2n^2}$$

jest zbieżny bezwzględnie czy warunkowo.

#### 7.3.3 Zadanie 1 (odp)

Odpowiedź:

- a) rozbieżny
- b) zbieżny

#### 7.3.4 Zadanie 2 (odp)

Odpowiedź: zbieżny bezwzględnie

### 7.4 Kartkówka gr. A ale inna

#### 7.4.1 Zadanie 1

Stosując odpowiednie kryterium zbadać zbieżność szeregu liczbowego

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{2n-1}}{5^{n+1}} \text{ oraz b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n - 1}{3n + 1} \right)^{n^2}$$

#### 7.4.2 Zadanie 2

Stwierdzić (uzasadniając) czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n + 1}{3n^2 - n}$$

jest zbieżny bezwzględnie czy warunkowo.

### 7.4.3 Zadanie 1 (odp)

Odpowiedź:

- a) zbieżny
- b) zbieżny

### 7.4.4 Zadanie 2 (odp)

Odpowiedź: zbieżny warunkowo

## 7.5 UWAGA do odpowiedzi

Te odpowiedzi liczył student debil (ja we własnej osobie) i nie daje gwarancji, że są one dobre. Jeśli ktoś ma dowód, że się pomyliłem to będę wdzięczny jak mnie poinformuje, to będę mógł poprawić błąd. Tyczy się to również błędów ortograficznych i innych takich, ponieważ notatkę robiłem sam, bez żadnych korekt i innych tego typu podobnych. Każdy feedback jest dla mnie cenny, wielkie pozdro i powodzenia.