Analiza Matematyczna 2 - poradnik

Dawid Gradowski (puckmoment na dc)

Luty 2025

Spis treści

1 Prolog

Ten dokument tworzę dlatego by poznać wspaniałe narzędzie jakim jest LaTeX oraz by przygotować się do egzaminu z Analizy Matematycznej 2, ale to nie są jedyne powody. Tworzę ją jako człowiek z misją, człowiek który upierdolił wszystkie 3 kartkówki, z czego na 2 z nich dostał 0 punktów. Nie lękajcie się jednak czytelnicy tej notatki, ponieważ jestem dowodem na to, że nawet z najgorszych sytuacji da się wyjść obronną ręką.

Miejsce na wytłumaczenie z czego będzie się składać notatka.

2 Przydatne rzeczy do wszystkiego

2.1 Szeregi harmoniczne różnej krotności

Jednym z typowych szeregów jest tak zwany **szereg harmoniczny**. Znajomość tego szeregu oraz kiedy jest on zbieżny jest kluczowa jeśli chce się zdać ten przedmiot. Szereg ten wygląda następująco:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

gdzie:

- dla $p \leq 1$ ciąg ten jest rozbieżny
- dla $p > 1$ ciąg ten jest zbieżny

Szeregi harmoniczne oraz ich zbieżności bardzo nam się przydadzą w momencie gdy będziemy korzystać w kryterium porównawczego o którym można przeczytać w dalszej części notatki.

2.2 Wzór na e

Bardzo ważnym wzorem w zadaniu pierwszym na kartkówce pierwszej jest coś co ja nazywam wzorem na e. Wygląda on następująco:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

Wzoru tego trzeba było użyć na każdej kartkówce nr 1 jaką rozwiązywałem oraz zawsze w tym samym miejscu, w zadaniu 1 w przykładzie w którym używało się kryterium Cauchy'ego. Nigdy nie będzie on tak ładnie widoczny jak powyżej więc na przykładzie zadania z kartkóweczki wytłumacze jak uzyskać odpowiednią postać. Na kartkówce był taki przykład:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3n^2-n}{3n^2+4n})^{n^2}$$

W trakcie stosowania kryterium Cauchy'ego otrzymujemy następującą postać:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2-n}{3n^2+4n})^{n}$$

W pierwszej kolejności możemy wyciągnąć n przed nawias by w nawiasie zostały nam n pierwszej potęgi.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2-n}{3n^2+4n})^{n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{n(3n-1)}{n(3n+4)})^{n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{3n-1}{3n+4})^{n}$$

Aby w nawiasie uzyskać postać $1+\frac{1}{x}$ trzeba uzyskać w liczniku $3n+4$ tak samo jak jest w mianowniku. $3n-1 = 3n+4-5$ więc można to zapisać następująco:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{3n-1}{3n+4})^{n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{3n+4-5}{3n+4})^{n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{3n+4}{3n+4}+\frac{-5}{3n+4})^{n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{-5}{3n+4})^{n}$$

Już coraz bardziej wygląda to jak postać której szukamy. Brakuje nam jedyneczki w liczniku. Aby mieć jedynkę w liczniku trzeba górę i dół przemnożyć przez $-\frac{1}{5}$.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{-5}{3n+4})^{n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{-5}{3n+4}\times\frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{5}})^{n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{-\frac{3n}{5}-\frac{4}{5}})^{n}$$

No i teraz mamy postać typu kongo, która wygląda dodupnie, ale spokojnie bo to już ostatnia prosta. Wytłumaczę na prostym przykładzie co trzeba zrobić:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x})^y = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{x})^x)^{\frac{y}{x}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{y}{x}}$$

Robiąc to samo na naszym przykładzie otrzymamy:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{-5}{3n+4})^n = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{-\frac{3n}{5}-\frac{4}{5}})^{-\frac{3n}{5}-\frac{4}{5}})^{\frac{n}{-\frac{3n}{5}-\frac{4}{5}}} = e^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{e^{\frac{5}{3}}}$$

I tak właśnie z jakiegoś gówna dostaliśmy piękne e.

2.3 Reguła łańcuchowa

Reguła łańcuchowa to jedno z podstawowych narzędzi rachunku różniczkowego (liczenia pochodnych), które pozwala na liczenie pochodnych funkcji złożonych. Reguła wygląda następująco. Zakładamy, że mamy funkcję składającą się z 2 funkcji:

$$h(x) = g(f(x))$$

gdzie:

- $f(x)$ to funkcja wewnętrzna
- $g(u)$ to funkcja zewnętrzna, przy czym nasze $u = f(x)$

Aby znaleźć pochodną $h(x)$, stosujemy regułę łańcuchową:

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Jak stosować to w praktyce. Weźmy sobie taki przykład:

$$h(x) = \sqrt{5x+3} = (5x+3)^{\frac{1}{2}}$$

I teraz określamy sobie co jest funkcję wewnętrzną, a co zewnętrzną:

- funkcja wewnętrzna: $f(x) = 5x + 3$
- funkcja zewnętrzna: $g(u) = u^{\frac{1}{2}}$, przy czym nasze $u = f(x)$

Licząc pochodnę otrzymujemy:

- $f'(x) = 5$
- $g'(u) = \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (5x+3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{5x+3}}$

Wstawiając więc otrzymane pochodne do wzoru na regułę łańcuchową otrzymujemy:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5x+3}} \cdot 5 = \frac{5}{2\sqrt{5x+3}}$$

2.4 Przydatne granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\ x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\ x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = log_a e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$$

$$\lim_{x\to \infty} \ln(x) = \infty$$

2.5 Przydatne wzory na pochodne

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ciekawe przykłady zastosowania:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Te mniej typowe wzory:

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{log_a e}{x}$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \mathrm{tg}\ x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \mathrm{ctg}\ x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \mathrm{arctg}\ x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \mathrm{arcctg}\ x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

2.6 Inne przydatne własności

$$\text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\text{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

3 Kryteria określające zbieżność

Kryteria opisane poniżej pozwalają określić czy dany szereg jest zbieżny czy rozbieżny. Generalnie to chuj wie co to znaczy, jak chcesz wiedzieć to sobie w google wpisz, ale to nie jest wiedza potrzebna do zdania.

3.1 Kryterium Cauchy'ego

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jego zbieżność wyznaczamy licząc g albo q (nie mogłem się odczytać w notatkach jaka to literka ale ja na kartkówce co zdałem pisałem g).

$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Najczęściej wartość bezględna $|a_n|$ to po prostu a_n. Posiadając policzone g dowiadujemy się, że:

- $g < 1$ to szereg jest bezwzględnie zbieżny
- $g > 1$ to szereg jest rozbieżny
- $g = 1$ to kryterium jest niewystarczające, więc nie rozstrzyga zbieżności

Kryterium to najlepiej stosować gdy całe wyrażenie jest do potęgi n^p, gdzie p to jakaś liczba całkowita.

3.2 Kryterium d'Alemberta

Tak samo jak w poprzednik kryterium, dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jego zbieżność wyznaczamy licząc g. Zmienia się jednak wzór

$$g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Najczęściej wartość bezględna $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ to po prostu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Posiadając policzone g tak samo jak w poprzednim dowiadujemy się, że:

- $g < 1$ to szereg jest bezwzględnie zbieżny
- $g > 1$ to szereg jest rozbieżny
- $g = 1$ to kryterium jest niewystarczające, więc nie rozstrzyga zbieżności

Kryterium to najlepiej stosować gdy w szeregu występują jakieś silnie albo n-te potęgi.

3.3 Kryterium porównawcze

Jeśli mamy 2 szeregi dodatnie

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

i dla prawie wszystkich n zachodzi $a_n \leq b_n$ to:

- ze zbieżności szeregu (B) wynika zbieżność szeregu (A)
- z rozbieżności szeregu (A) wynika zbieżność szeregu (B)

Ewentualnie jak komuś łatwiej zapamiętać to:

- ze zbieżności większego szeregu możemy udowodnić zbieżność szeregu mniejszego
- z rozbieżności szeregu mniejszego możemy udowodnić zbieżność szeregu większego

Prawie wszystkie n oznacza, że dla jakiegoś n staje się to prawdą, bo jak któreś n jest prawdą to później idzie to w nieskończoność, a to całkiem sporo przypadków jakby nie patrzeć. Zwykle jest tak, że już dla $n = 1$ jest to prawdą, więc nie ma się czym martwić.
Kryterium to najlepiej stosować gdy dla dużych n nasze $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ przypomina szereg harmoniczny jakiejkolwiek krotności. Tylko co to znaczy, że dla dużych n coś przypomina nam coś? To bardzo proste. Weźmy dla przykładu taki szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2 - n}$$

Dla małych n jedynka w liczniku ma dość duży wpływ na wartość wyrażenia, ale gdyby nasze n było olbrzymie to byłby to że tak to ujmę jeden chuj, dlatego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2 - n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 - n}$$

Mając taką postać możemy wyciągnąć n przed nawias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 - n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Możemy teraz zauważyć podobieństwo do szeregu harmonicznego o którym pisałem w części 2.1. Jest to szereg harmoniczny pierwszego stopnia, który jest rozbieżny. Teraz aby udowodnić rozbieżność znajdźmy szereg harmoniczny mniejszy od naszego ciągu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2 - n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$$

Na mocy kryterium porównawczego, szereg ten jest rozbieżny.

3.4 Kryterium Leibniza

Jest to kryterium zbieżności szeregów naprzemiennych, które określa warunkową zbieżność szeregu. Nie do końca wiem co to znaczy ale tak jest. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny warunkowo gdy:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
2. Ciąg a_n jest nierosnący, czyli $a_n - a_{n+1} \geq 0$

UWAGA! Trzeba pamiętać, że określa to wyłącznie zbieżność warunkową szeregu a nie bezwzględną!

4 Szeregi potęgowe

Wzór ogólny szeregu potęgowego wygląda następująco:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Dla takiego szeregu potęgowego możemy wyliczyć promień zbieżności r. Promień wykorzystujemy przy liczeniu przedziału zbieżności.

Przedział zbieżności określa dla jakich wartości x szereg ten jest zbieżny, nie określa on jednak zbieżności na granicach przedziału. Szereg jest zbieżny gdy:

$$x \in (x_0 - r; x_0 + r)$$

Obszar zbieżności jest tym samym co przedział zbieżności ale z uwzględnieniem zbieżności dla wartości skrajnych.

4.1 Kryterium Cauchy'ego - Hadamarda

Kryterium to określa promień zbieżności szeregu potęgowego. Jest ono bardzo podobne do kryterium Cauchy'ego. Zaczynamy od policzenia g z tego samego wzoru, którego używaliśmy przy kryterium Cauchy'ego

$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Teraz w zależności od obliczonego g, nasze r jest równe:

$$r = \begin{cases} \infty, & \text{if } g = 0 \\ 0, & \text{if } g = \infty \\ \frac{1}{g}, & \text{if } g < 0 < \infty \end{cases} \tag{1}$$

4.2 Kryterium d'Alemberta (szeregi potęgowe)

Tak jak wykorzystaliśmy kryterium Cauchy'ego tak bliźniaczo możemy wykorzystać kryterium d'Alemberta.

$$g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

i następnie sytuacja wygląda dokładnie tak samo jak w poprzednim kryterium, więc używamy równania (1). Można też zauważyć, że nasze r, jeśli granica istnieje jest po prostu równe

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

5 Rozwijanie funkcji w szereg

Istnieje coś takiego jak szereg Taylora, który wygląda następująco:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)$$

Na kartkówcę drugiej trzeba będzie najprawdopodobniej rozwinąć funkcję w szeregu Maclaurina. Jest to szereg Taylora dla którego $x_0 = 0$. Rozwinięcie funkcji w szereg polega na wyliczeniu dużej ilości pochodnych tak, aby w pewnym momencie wyznaczyć wzór na n-tą pochodną. Jak pierwszy raz zobaczyłem, że muszę coś takiego zrobić to się załamałem i dałem ff, ale ty tak nie rób. Pokażę ci zaraz wspaniałe wzorki :).

5.1 Funkcja z kreską ułamkową

Nie będę zgrywał bohatera i po prostu się przyznam, że nie wiedziałem jak nazwać tą fukcję, ale ta funkcja wygląda podobnie do czegoś takiego:

$$f(x) = \frac{3x}{8 + x^3}$$

Jeśli mamy coś takiego w zadaniu to należy zapamiętać, że:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ lub } \frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n$$

wtedy kiedy $q \in (-1, 1)$. Dla przykładu rozwińmy sobie podaną wyżej funkcje. W liczniku potrzebujemy samej 1, a w mianowniku $1 + q$ z czego q może być czymś dziwnym, a więc

$$\frac{3x}{8+x^3} = 3x \times \frac{1}{8+x^3} = \frac{3x}{8} \times \frac{1}{1+\frac{x^3}{8}} = \frac{3x}{8} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{x^3}{8})^n$$

Mamy już szereg ale to nie koniec zadania. Teraz musimy pomnożyć to co jest przed szeregiem z tym co jest w szeregu. Nie ma się tu czego bać po prostu wymnażamy jakby tego $\sum$ nie było. Można sam szereg sobie ładniej zapisać:

$$\frac{3x}{8} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{x^3}{8})^n = \frac{3x}{8} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{8^{n+1}} x^{3n+1}$$

Trzeba też wyznaczyć dla jakich x stwierdzenie $\frac{x^3}{8} \in (-1, 1)$ co jest równoznawcze z

$$-1 < \frac{x^3}{8} < 1$$

$$-8 < x^3 < 8$$

$$-2 < x < 2$$

5.2 Funkcja z logarytmen naturalnym

Wzór wygląda następująco

$$ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

gdzie $t \in (-1, 1)$. **Warto zwrócić uwagę na to, że szereg zaczyna się od jedynki, a nie od zera.** Zasada używania wzoru jest podobna jak w sekcji 5.1. Przykład:

$$f(x) = x\ln(1-2x) = x\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-2x)^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \cdot \frac{2^n}{n} x^{n+1}$$

5.3 Inne funkcje

Istnieją jeszcze 3 wzory, ale nie są one potrzebne do zdania kartkówek. Te wzory to:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ dla } \; x \in R$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ dla } \; x \in R$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ dla } \; x \in R$$

6 Funkcje 2 zmiennych

6.1 Znajdowanie granicy (sposób z t)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\text{ctg}(3x^2+3y^2)$$

6.2 Pokazywanie, że granica nie istnieje

Weźmy sobie taki przykład:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{3x^4+2y^4}$$

Musimy znaleźć takie 2 ciągi, które również będą dążyły do $(0,0)$. Jeśli nie rozumiesz to spójrz na takie dwa przykładowe ciągi, których ty też możesz użyć dla dowolnego przypadku:

$$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\to} (0,0)$$

$$(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\to} (0,0)$$

Możemy zauważyć, że tak na prawdę możemy użyć $\frac{x}{n}$ gdzie x jest dowolną liczbą, a n dąży do nieskończoności. Gdy już wybraliśmy sobie ciągi sprawa jest giga prosta. Podstawiamy sobie nasze ciągi do naszej funkcji:

- Dla $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{3x^4+2y^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{5}{n^4}} = \frac{1}{5}$$

- Dla $(\frac{2}{n}, \frac{1}{n})$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{3x^4+2y^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8}{n^3}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{3\cdot 16}{n^4}+\frac{2}{n^4}} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

Otrzymaliśmy 2 różne granice dlatego wiemy, że granica nie istnieje. Otrzymanie różnych granic w taki sposób udowadnia nam, że granica nie istnieje **ale otrzymanie w taki sposób takich samych granic nie gwarantuje, że granica istnieje.** W nieskończonej ilości kombinacji ciągów, mogą się znaleźć 2 takie dla których wyjdą różne granice.

6.3 Obliczanie wartości przybliżonej

Obliczmy wartość przybliżoną funkcji na przykładzie:

$$f(x,y) = \sqrt{5x - y^2}$$

$$P = (1.04; -0.97) = (x, y)$$

Przyjmujemy sobie punkt blisko naszego punku P:

$$P_0 = (1; -1) = (x_0, y_0)$$

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0) to możemy podać przybliżone wartości "blisko" punktu (x_0, y_0). Jeśli nie rozumiecie o co chodzi to pełen chill, zaraz wszystko się wyklaruje. Istnieje taki wzór:

$$f(x,y) \simeq f(x_0, y_0) + f'x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'y(x_0, y_0)\Delta y$$

Wartości Δx oraz Δy to różnice współrzednych punktów P i P_0, czyli:

$$\Delta x = x - x_0 = 1.04 - 1 = 0.4 = \frac{4}{100}$$

$$\Delta y = y - y_0 = -0.97 - (-1) = 0.3 = \frac{3}{100}$$

Aby wyznaczyć $f'x(x_0, y_0)$ oraz $f'y(x_0, y_0)$ trzeba użyć reguły łańcuchowej opisanej w rozdziale 2.3. Otrzymamy z tego:

$$f'x(1,-1) = \frac{1}{2\sqrt{5x - y^2}} \cdot 5 = \frac{5}{2\sqrt{5-1}} = \frac{5}{4}$$

$$f'y(1,-1) = \frac{1}{2\sqrt{5x - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{2}{2\sqrt{5-1}} = \frac{1}{2}$$

Z kolei nasze $f(x_0, y_0)$ jest równe:

$$f(1,-1) = \sqrt{5x - y^2} = \sqrt{5-1} = 2$$

Podstawiając wszystkie wartości do wzoru na przybliżenie $f(x,y)$ otrzymujemy:

$$f(x,y) \approx 2 + \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{100} = 2 + \frac{10}{200} + \frac{3}{200} = 2 + \frac{13}{200} = 2.065$$

6.4 Wyznaczanie ekstermów

Wyznaczmy ekstrema lokalne poniższej funkcji.

$$f(x, y) = x^2 - x^2y^3 + 3y^2 - 3y + 1$$

Pierwszym krokiem w liczeniu ekstermów jest wyznaczenie dziedziny. Jak to zrobić każdy mniej więcej powinien wiedzieć, dla każdej funkcji robi się to inaczej. W przypadku naszej funkcji dziedzina to:

$$(x, y) \in R^2$$

Kolejnym krokiem jest sprawdzenie dla jakiego punktu/punktów zachodzi warunek konieczny. Warunkiem koniecznym tego czy dany punkt, np. (x_0, y_0) może być ekstremum lokalnym jest, że dla tego punktu pochodna x-owa oraz pochodna y-owa muszą być równe 0.

$$f'x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'y(x_0, y_0) = 0$$

W przypadku naszej funkcji te pochodne to:

$$f'x(x, y) = 2x - 2xy^3$$

$$f'y(x, y) = -3x^2y^2 + 6y - 3$$

Tworzymy układ równań z którego wynika:

$$\begin{cases} 2x - 2xy^3 = 0 / : 2 \\ -3x^2y^2 + 6y - 3 = 0 / : 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - xy^3 = 0 \Rightarrow x(1 - y^3) = 0 \\ -x^2y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy:

$$x = 0 \vee 1 - y^3 = 0 \rightarrow y^3 = 1 \rightarrow y = 1$$

Podstawiamy otrzymane wartości do drugiego równania:

- Dla $x = 0$:

  $$2y - 1 = 0 \text{ więc } \; y = \frac{1}{2}$$

  Otrzymujemy więc punkt $(0, \frac{1}{2})$.

- Dla $y = 1$:

  $$-x^2 + 2 - 1 = 0 \text{ więc } \; x = 1 \vee x = -1$$

  Otrzymujemy więc punkty $(1, 1)$ i $(-1, 1)$.

Mamy więc 3 punkty (są to tak zwane punkty krytyczne), które będziemy musieli sprawdzić: $(0, \frac{1}{2})$, $(1, 1)$ i $(-1, 1)$.

Następnie musimy wyznaczyć 4 drugie pochodne, aby wypełnić nimi macierz Hessego, zwaną również Hesjanem. W naszym przypadku nasze pochodne to:

$$f''xx(x,y) = 2 - 2y^3$$

$$f''yy(x,y) = -6x^2y + 6$$

$$f''xy(x,y) = f''yx(x,y) = -6xy^2$$

Ale czym jest Hesjan. Hesjan to macierz składająca się z drugich pochodnych jakiejś funkcji. Macierz ta wygląda następująco:

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f''xx(x,y) & f''xy(x,y) \\ f''yx(x,y) & f''yy(x,y) \end{bmatrix}$$

Więc w naszym przypadku macierz ta wygląda następująco:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 - 2y^3 & -6xy^2 \\ -6xy^2 & -6x^2y + 6 \end{bmatrix}$$

Macierz ta jest nam potrzebna do warunku wystarczającego istnienia ekstremum. Warunek ten pozwala na podstawie wartości wyznacznika macierzy dla konkretnego punktu określić, czy jest to ekstremum czy punkt siodłowy (coś co nie jest ekstremum). Mamy 3 przypadki:

- $\det H(x,y) > 0 \rightarrow$ punkt jest ekstremum
- $\det H(x,y) < 0 \rightarrow$ punkt jest punktem siodłowym
- $\det H(x,y) = 0 \rightarrow$ nie da się określić za pomocą wyznacznika

Dodatkowo gdy określimy sobie, że punkt jest ekstremum to dla tego punktu:

- $f''xx(x,y) > 0 \rightarrow$ punkt jest minimum lokalnym
- $f''xx(x,y) < 0 \rightarrow$ punkt jest maksimum lokalnym

Aby obliczyć wyznacznik macierzy 2x2 należy użyć wzoru:

$$\det H(x,y) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Obliczmy sobie wyznacznik dla poszczególnych punktów.

- Dla punktu $(0, \frac{1}{2})$

$$\det H(0, \frac{1}{2}) = \begin{vmatrix} \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{7}{4} \cdot 6 - 0 \cdot 0 = \frac{21}{2} > 0$$

Wiemy, że w punkcie $(0, \frac{1}{2})$ jest ekstremum. Widzimy również, że

$$f''xx(x,y) = \frac{7}{4} > 0$$

więc punkt $(0, \frac{1}{2})$ jest minimum lokalnym.

- Dla punktu $(1, 1)$

$$\det H(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-6) \cdot (-6) = -36 < 0$$

Wiemy, że w punkcie $(1, 1)$ jest punkt siodłowy.

- Dla punktu $(-1, 1)$

$$\det H(-1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 6 \cdot 6 = -36 < 0$$

Wiemy, że w punkcie $(-1, 1)$ jest punkt siodłowy.