

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Espaços Vetoriais

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

Espaços vetoriais

Subespaços

Conjuntos geradores

Subespaços associados a uma matriz

Espaço nulo

Espaço das linhas e espaço das colunas

Independência linear

Bases e dimensão

Bases e dimensão do espaço nulo, do espaço das linhas e do espaço das colunas

Coordenadas de um elemento

Mudança de base

Bases ortonormadas e projeção ortogonal

Introdução

Ao longo deste capítulo considera-se um conjunto não vazio \mathcal{V} , com uma operação \oplus definida para cada $X \in \mathcal{V}$ e para cada $Y \in \mathcal{V}$,

$$X \oplus Y,$$

e uma operação \odot definida para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e para cada $X \in \mathcal{V}$,

$$\alpha \odot X.$$

Diz-se que o conjunto \mathcal{V} está **munido** com as operações \oplus e \odot .

As operações \oplus e \odot são usualmente designadas por

adição e **multiplicação por escalar**,

(respectivamente) porque, como se verá a seguir, estas operações têm muitas propriedades em comum com outras operações de adição e multiplicação por escalar conhecidas, tais como a adição e a multiplicação por escalar de vetores de \mathbb{R}^n e de matrizes $m \times n$.

Definição de espaço vetorial

O conjunto \mathcal{V} , munido das operações \oplus e \odot , é um **espaço vetorial real** se, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{V}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. \mathcal{V} é fechado relativamente a \oplus $X \oplus Y \in \mathcal{V}$

2. \oplus é comutativa $X \oplus Y = Y \oplus X$

3. \oplus é associativa $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$

4. existe (único) o el. neutro $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ (zero de \mathcal{V}) para \oplus $0_{\mathcal{V}} \oplus X = X$

5. existe (único) o simétrico $\ominus X \in \mathcal{V}$ de X em relação a \oplus $\ominus X \oplus X = 0_{\mathcal{V}}$

6. \mathcal{V} é fechado relativamente a \odot $\alpha \odot X \in \mathcal{V}$

7. \odot é distributiva em relação a \oplus $\alpha \odot (X \oplus Y) = \alpha \odot X \oplus \alpha \odot Y$

8. \odot é “distributiva” em relação a $+$ $(\alpha + \beta) \odot X = \alpha \odot X \oplus \beta \odot X$

9. os produtos (o de \mathbb{R} e \odot) são “associativos” $(\alpha\beta) \odot X = \alpha \odot (\beta \odot X)$

10. o escalar 1 é o “elemento neutro” para \odot $1 \odot X = X$

Daqui em diante, designaremos os espaços vetoriais reais apenas por espaços vetoriais (e.v.)

Exemplos de espaços vetoriais

1. \mathbb{R}^n munido das operações adição e multiplicação por escalar usuais.

2. \mathbb{R}^+ munido das operações:

$$x \oplus y = xy \quad \text{e} \quad \alpha \odot x = x^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. O conjunto $\mathbb{R}^{m \times n}$ das matrizes $m \times n$ munido das operações adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar real.

4. O conjunto de todas as funções reais de variável real, com o mesmo domínio, munido da adição de funções e multiplicação de uma função por um escalar real.

5. O conjuntos \mathcal{P} de todos os polinómios (de qualquer grau) e o conjunto \mathcal{P}_n dos polinómios de grau menor ou igual a n (incluindo o polinómio nulo), com as operações usuais.

O conjunto dos polinómios de grau n , com as operações usuais, não é e.v.

Mais algumas propriedades dos espaços vetoriais

Proposição: Seja \mathcal{V} um e.v. Então

- (a) $0 \odot X = 0_{\mathcal{V}}, \forall X \in \mathcal{V};$
- (b) $\alpha \odot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}, \forall \alpha \in \mathbb{R};$
- (c) $\alpha \odot X = 0_{\mathcal{V}} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } X = 0_{\mathcal{V}};$
- (d) $(-1) \odot X = \ominus X$ é o simétrico de X em relação a $\oplus, \forall X \in \mathcal{V}.$

Para simplificar as notações, daqui em diante, escreve-se

- i. $X + Y$ em vez de $X \oplus Y$, para $X, Y \in \mathcal{V};$
- ii. αX em vez de $\alpha \odot X$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{V};$
- iii. $-X$ em vez de $\ominus X$, para $X \in \mathcal{V}.$

Definição de subespaço

O subconjunto não vazio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um **subespaço (vetorial)** do e.v. \mathcal{V} se, munido das mesmas operações de \mathcal{V} , for ele próprio um e.v.

Teorema: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um **subespaço** do e.v. \mathcal{V} se e só se

1. $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{S}$, onde $0_{\mathcal{V}}$ representa o elemento neutro de \mathcal{V} em relação à adição;
2. \mathcal{S} é **fechado em relação à adição** em \mathcal{V} :

$$X + Y \in \mathcal{S}, \text{ para } X, Y \in \mathcal{S};$$

3. \mathcal{S} é **fechado em relação à multiplicação por escalar** em \mathcal{V} :

$$\alpha X \in \mathcal{S}, \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}, X \in \mathcal{S}.$$

Exemplos de subespaços

Exemplo:

1. \mathcal{V} e $\{0_{\mathcal{V}}\}$ são os **subespaços triviais** de \mathcal{V} ;
2. $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de \mathbb{R}^3 ;
3. $\{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ não é um subespaço de \mathbb{R}^2 ;

Subespaço gerado por um conjunto e conjunto gerador

Dados os elementos X_1, \dots, X_k de \mathcal{V} e os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, o elemento $X \in \mathcal{V}$ tal que

$$X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k$$

é uma **combinação linear** dos elementos X_1, \dots, X_k .

Teorema:

Seja \mathcal{V} um e.v., $K = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$ e S o conjunto das combinações lineares de elementos de K , ou seja, $S = \{\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$. O conjunto **S é um subespaço de \mathcal{V}** .

O subespaço S designa-se por **subespaço gerado** por K , e escreve-se

$$S = \langle K \rangle \text{ ou } S = \langle X_1, \dots, X_k \rangle.$$

Diz-se, também, que K **gera** o subespaço S ou é um **conjunto gerador** do subespaço S .

Subespaço gerado por um conjunto

Exercício: Confirme que se $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{V}$, então $S = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$ é um subespaço de \mathcal{V} .

Exemplo: Dados os vetores não colineares $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$,

1. $\langle X_1 \rangle$ é a **reta** que passa pela origem e tem vetor director X_1 ;
2. $\langle X_1, X_2 \rangle$ é o **plano** que passa pela origem e tem vetores diretores X_1 e X_2 .

Propriedades dos conjuntos geradores

Lema: Dados $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{V}$ e $i, j \in \{1, \dots, k\}$, com $i \neq j$,

- i. $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle$;
- ii. $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, \alpha X_i, \dots, X_k \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- iii. $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_i + \beta X_j, \dots, X_k \rangle$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Espaço nulo de uma matriz

O **espaço nulo** de A , $\mathcal{N}(A)$, é o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo associado a A $m \times n$,

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}.$$

O **espaço nulo** de A , $\mathcal{N}(A)$, pode escrever-se como o conjunto de todas as combinações lineares de $n - \text{car}(A)$ vetores de \mathbb{R}^n , facilmente obtidos usando colunas de uma matriz escalonada reduzida A_r equivalente (por linhas) a A .

Espaço nulo de uma matriz

Exemplo

Considerando a matriz A e a matriz escalonada reduzida A_r :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim A_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X \in \mathcal{N}(A) \iff AX=0 \iff A_r X=0 \iff$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \iff X = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 N_2 + x_4 N_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \text{ var. livres.}$$

O conjunto $\{N_2, N_4\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{N}(A)$.

Exercício:

Mostre que se o sistema $AX = B$ é possível e se \bar{X} é uma sua solução, então o conjunto de soluções do sistema é $\{\bar{X} + Y : Y \in \mathcal{N}(A)\}$.

Espaço das linhas e espaço das colunas de uma matriz

Seja A uma matriz $m \times n$ com linhas $L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R}^n$ e colunas $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}^m$

$$A = \begin{bmatrix} L_1^T \\ \vdots \\ L_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

- ▶ O espaço das linhas de A é o subespaço de \mathbb{R}^n

$$\mathcal{L}(A) = \langle L_1, \dots, L_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n.$$

- ▶ O espaço das colunas de A é o subespaço de \mathbb{R}^m

$$\mathcal{C}(A) = \langle C_1, \dots, C_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Espaço das linhas e espaço das colunas de uma matriz

Como consequência das propriedades dos conjuntos geradores (slide 11) conclui-se o seguinte:

Teorema: Se as matrizes A e B são **equivalentes por linhas**,

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B).$$

Independência linear

Um subconjunto não vazio $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\}$ de um e.v. \mathcal{V} diz-se **linearmente independente (l.i.)** se

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0,$$

caso contrário, \mathcal{K} é **linearmente dependente (l.d.)** em \mathcal{V} .

Nota: $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K}$ é linearmente dependente.

Exemplos:

- ▶ Dois vetores não nulos de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 são colineares se e só se são l.d.
- ▶ Três vetores não colineares de \mathbb{R}^3 definem um plano se e só se são l.d.

Independência linear

Seja $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\}$ um subconjunto de um e.v. \mathcal{V} .

\mathcal{K} é **linearmente dependente** se e só se o sistema que se obtém da equação

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}}$$

é **possível e indeterminado**, isto é, se tem uma **solução com os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ não todos nulos**.

Se existe $1 \leq j \leq k$ tal que **$\alpha_j \neq 0$** , então

$$X_j = \frac{\alpha_1}{\alpha_j} X_1 + \dots + \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} X_{j-1} + \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} X_{j+1} + \dots + \frac{\alpha_k}{\alpha_j} X_k$$

concluindo-se que **X_j pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{K} \setminus \{X_j\}$** .

Geradores e independência linear

Sejam \mathcal{V} um e.v. e $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

Lema: Seja $X \in \mathcal{K}$. Então X é combinação linear dos elementos de $\mathcal{K} \setminus \{X\}$ se e só se $\langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle$.

Teorema: \mathcal{K} é um conjunto **linearmente**

- ▶ **dependente** \iff existe $X \in \mathcal{K}$ tal que $X \in \langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle$, ou seja, $\langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle$;
- ▶ **independente** \iff para cada $X \in \mathcal{V} \setminus \langle \mathcal{K} \rangle$, o conjunto $\mathcal{K} \cup \{X\}$ é l.i.

Corolário:

Seja \mathcal{V} um e.v. e $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

- ▶ Se \mathcal{K} gera \mathcal{V} mas não é l.i., é possível retirar um elemento de \mathcal{K} , obtendo-se ainda um conjunto gerador de \mathcal{V} .
- ▶ Se \mathcal{K} é l.i. mas não gera \mathcal{V} , é possível acrescentar um elemento de \mathcal{V} a \mathcal{K} , obtendo-se ainda um conjunto l.i.

Corolário:

Se \mathcal{V} é um e.v. gerado por um número finito de elementos (\mathcal{V} é **finitamente gerado**), então \mathcal{V} tem um conjunto gerador que é linearmente independente.

Base de um espaço vetorial

Uma **base de um e.v.** $\mathcal{V} \neq \{0_{\mathcal{V}}\}$ é um

- conjunto linearmente independente,
- conjunto gerador de \mathcal{V} .

Nota:

- Por convenção, o e.v. trivial $\{0_{\mathcal{V}}\}$ tem como base o conjunto vazio.
- Um conjunto l.i. é base do subespaço por ele gerado.

Base de um espaço vetorial

Exemplos:

1. Sejam $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Então $\mathcal{C}_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é a **base canónica de \mathbb{R}^n** .
2. Seja E_{ij} a matriz $m \times n$ que tem a entrada (i, j) igual a 1 e todas as outras iguais a 0. Então $\mathcal{C}_{m \times n} = \{E_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ é a **base canónica de $\mathbb{R}^{m \times n}$** .
3. A **base canónica** do e.v. \mathcal{P}_n dos polinómios na variável x de grau menor ou igual a n (incluindo o polinómio nulo) é $\mathcal{P}_n = \{1, x, \dots, x^n\}$.
4. O e.v. \mathcal{P} de todos os polinómios não admite uma base com um número **finito** de elementos. O conjunto $\{1, x, x^2, \dots\}$ é uma base de \mathcal{P} .

Base de um espaço vetorial

Sejam \mathcal{V} um e.v. e $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

Proposição:

- ▶ Se \mathcal{K} gera \mathcal{V} , então qualquer elemento de \mathcal{V} pode escrever-se como combinação linear dos elementos de \mathcal{K} , de pelo menos uma maneira.
- ▶ Se \mathcal{K} é l.i., então qualquer elemento de \mathcal{V} pode escrever-se como combinação linear dos elementos de \mathcal{K} , de no máximo uma maneira.

Proposição:

Se \mathcal{K} é uma base de \mathcal{V} , então

cada elemento de \mathcal{V} escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de \mathcal{K} .

Dimensão de um espaço vetorial

Teorema: Seja \mathcal{V} um e.v. com uma base que contém n elementos e $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ um subconjunto com r elementos.

i. \mathcal{K} é l.i. $\Rightarrow r \leq n$

Neste caso, existe uma base de \mathcal{V} que contém \mathcal{K} .

ii. \mathcal{K} gera $\mathcal{V} \Rightarrow r \geq n$

Neste caso, existe uma base de \mathcal{V} que é um subconjunto de \mathcal{K} .

Corolário:

Todas as bases de \mathcal{V} possuem o mesmo número de elementos.

A **dimensão** de um e.v. \mathcal{V} é o número de elementos de uma base de \mathcal{V} e denota-se por **$\dim \mathcal{V}$** .

Dimensão de um espaço vetorial

Consequência do teorema anterior:

Seja \mathcal{V} um espaço vetorial com dimensão n e \mathcal{K} um subconjunto de \mathcal{V} com r elementos.

- i. $r > n \Rightarrow \mathcal{K}$ é l.d.
- ii. $r < n \Rightarrow \mathcal{K}$ não gera \mathcal{V}
- iii. $r = n \Rightarrow \mathcal{K}$ é uma base de \mathcal{V} se e só se \mathcal{K} é l.i.,
se e só se \mathcal{K} gera \mathcal{V} .

Se \mathcal{B} é um e.v. com dimensão n e \mathcal{K} é um subconjunto de \mathcal{V} com n elementos, para verificar se \mathcal{B} é uma base de \mathcal{V} é suficiente verificar uma das condições:

- (i) \mathcal{B} é linearmente independente, ou,
- (ii) \mathcal{B} gera \mathcal{V} .

Exemplos

Exemplos:

1. $\dim\{0_{\mathcal{V}}\} = 0$,
2. $\dim \mathbb{R}^n = n$,
3. $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$,
4. $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

Teorema:

Se $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathcal{V}$ e $\dim \mathcal{V} = n$, então

- i. \mathcal{K} l.i. $\Rightarrow \mathcal{K}$ é base de \mathcal{V} ;
- ii. \mathcal{K} gera \mathcal{V} $\Rightarrow \mathcal{K}$ é base de \mathcal{V} .

Bases e dimensão de $\mathcal{L}(A)$

Teorema: Seja A uma matriz $m \times n$ e A_e uma matriz escalonada equivalente (por linhas) a A . Então

1. as linhas não nulas de A_e formam uma base de $\mathcal{L}(A)$;
2. $\dim \mathcal{L}(A) = \text{car}(A)$.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim A_e = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim A_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sendo A_e e A_r as formas escalonada e reduzida de A , respectivamente.

Das matrizes A_e e A_r obtêm-se, respectivamente, as seguintes bases de $\mathcal{L}(A)$:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2, -4, 3), (0, 0, 1, -1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1, -2, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\}.$$

Observe-se que $\dim \mathcal{L}(A) = 2 = \text{car}(A)$.

Bases e dimensão de $\mathcal{N}(A)$

Teorema:

Seja A uma matriz $m \times n$. Então

$$\dim \mathcal{N}(A) = \text{nul}(A) = n^\circ \text{ de inc. livres do sistema } AX=0.$$

Exemplo

Considerando a matriz A do exemplo anterior, vimos que (slide 13)

$$X \in \mathcal{N}(A) \iff X = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 N_2 + x_4 N_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \text{ var. livres, logo,}$$

$$\mathcal{N}(A) = \langle N_2, N_4 \rangle.$$

Como N_2 e N_4 são l.i., o conjunto gerador $\{N_2, N_4\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e $\dim \mathcal{N}(A) = 2 = \text{nul}(A)$.

Bases e dimensão de $\mathcal{C}(A)$

Observe-se que

$$B \in \mathcal{C}(A) \iff \text{o sistema } AX = B \text{ é possível.}$$

Teorema: Seja A uma matriz $m \times n$ e A_e uma matriz escalonada equivalente (por linhas) a A . Então

- uma base de $\mathcal{C}(A)$ é formada pelas colunas de A que correspondem às colunas dos pivôs de A_e ;
- $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A)$.

Exemplo:

Para a matriz A do exemplo anterior (slide 26),

- uma base de $\mathcal{C}(A)$ é $\{(1, 2, 1), (-4, -7, -3)\}$,
- $\dim \mathcal{C}(A) = 2 = \text{car}(A)$.

Número de linhas (colunas) linearmente independentes

Corolário:

- A característica de uma matriz é o número máximo de linhas (colunas) l.i.
- Uma **matriz quadrada é invertível** se e só se o conjunto das suas **linhas (colunas)** é l.i.

Exemplo – Espaços $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$ em \mathbb{R}^3

Sendo A uma matriz $m \times 3$, $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$ são subespaços de \mathbb{R}^3 .

Se $\text{car}(A) = 0$ (i.e. A é a matriz nula), então $\mathcal{L}(A) = \{(0, 0, 0)\}$ e $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^3$.

Se $\text{car}(A) = 1$ e (a, b, c) é a linha não nula da forma escalonada de A ,
 $\mathcal{L}(A)$ é a reta que contém $(0, 0, 0)$ e tem vetor diretor (a, b, c) ,
 $\mathcal{N}(A)$ é o plano ortogonal à reta anterior e que contém $(0, 0, 0)$.

Se $\text{car}(A) = 2$ e (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) são as linhas não nulas da forma escalonada de A ,
 $\mathcal{L}(A)$ é o plano que contém $(0, 0, 0)$ e tem vetores diretores (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) ,
 $\mathcal{N}(A)$ é a reta ortogonal ao plano anterior e que contém $(0, 0, 0)$.

Se $\text{car}(A) = 3$, então $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, 0)\}$.

Coordenadas de um elemento numa base ordenada

Seja $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ uma **base ordenada** de um e.v. \mathcal{V} .

Teorema: Cada elemento $X \in \mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de \mathcal{B} , ou seja, existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n.$$

Estes coeficientes a_1, \dots, a_n dizem-se as **coordenadas** de X na **base** \mathcal{B} .

O **vetor das coordenadas** de X na **base** \mathcal{B} é $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Coordenadas - Propriedades

Propriedades:

Seja \mathcal{V} um espaço vetorial com **dimensão** n e $\mathcal{S} = (X_1, \dots, X_n)$ uma base ordenada de \mathcal{V} .

- Para $i = 1, \dots, n$, o vetor X_i tem o seguinte vetor de coordenadas em \mathcal{S} :

$$[X_i]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow i\text{-ésima coordenada}$$

- $[0_{\mathcal{V}}]_{\mathcal{S}} = 0_{\mathbb{R}^n}$;
- Para $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{V}$, e $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$,
 $[a_1 Y_1 + \dots + a_r Y_r]_{\mathcal{S}} = a_1 [Y_1]_{\mathcal{S}} + \dots + a_r [Y_r]_{\mathcal{S}}.$

Exemplo: Considere-se a base ordenada $\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (1, 2))$ e os vetores $u = (0, 1)$ e $v = (1, -1)$ de \mathbb{R}^2 . Sabemos que existem escalares únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0, 1) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 2).$$

Resolvendo o sistema que se obtém desta equação matricial (sistema possível e determinado) obtém-se $\alpha = -1$ e $\beta = 1$. Logo,

$$[(0, 1)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De forma análoga conclui-se que

$$[(1, -1)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo (cont.):

Considere-se, agora, a base ordenada $\mathcal{B}_2 = ((3, 2), (0, 1))$ e vamos determinar o vetor das coordenadas de u na base \mathcal{B}_2 .

$$(0, 1) = \alpha(3, 2) + \beta(0, 1) \Leftrightarrow (\alpha = 0) \wedge (\beta = 1).$$

Assim,

$$[(0, 1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, procedendo de forma análoga, obtemos

$$[(1, -1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}.$$

Mudança de base

Sejam $\mathcal{S}, \mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$ duas bases ordenadas de \mathcal{V} e $X \in \mathcal{V}$.

Qual é a relação entre os vetores de coordenadas $[X]_{\mathcal{S}}$ e $[X]_{\mathcal{T}}$?

$$\begin{aligned} [X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} &\Rightarrow X = a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n \\ &\Rightarrow [X]_{\mathcal{S}} = a_1 [Y_1]_{\mathcal{S}} + \dots + a_n [Y_n]_{\mathcal{S}} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} [Y_1]_{\mathcal{S}} & \dots & [Y_n]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}}_{M(\mathcal{T}, \mathcal{S})} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}} \end{aligned}$$

A matriz $M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$, cujas colunas são os vetores de coordenadas na base \mathcal{S} dos elementos da base \mathcal{T} designa-se por **matriz de mudança de base \mathcal{T} para \mathcal{S}** .

Mudança de base – Exemplo

Sejam $\mathcal{S} = ((1, 1), (1, 2))$ e $\mathcal{T} = ((0, 1), (1, -1))$ bases ordenadas de \mathbb{R}^2 .

Dado $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, tem-se que

$$X = a(0, 1) + b(1, -1).$$

Logo, $[X]_{\mathcal{S}} = a[(0, 1)]_{\mathcal{S}} + b[(1, -1)]_{\mathcal{S}}$. Do exemplo anterior,

$$[(0, 1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [(1, -1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

então

$$[X]_{\mathcal{S}} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{M(\mathcal{T}, \mathcal{S})} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}}.$$

Invertibilidade de uma matriz de mudança de base

Teorema: Sejam \mathcal{S} e \mathcal{T} duas bases de um espaço vetorial \mathcal{V} . Então $M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ é invertível e

$$M(\mathcal{T}, \mathcal{S})^{-1} = M(\mathcal{S}, \mathcal{T}).$$

Demonstração: Sejam $M = M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$, $\dim \mathcal{V} = n$ e $Y \in \mathbb{R}^n$ tal que $MY = 0$. Existe $X \in \mathcal{V}$ tal que $Y = [X]_{\mathcal{T}}$. Então

$$[X]_{\mathcal{S}} = M[X]_{\mathcal{T}} = MY = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0_{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad Y = 0.$$

Mostrámos que o sistema homogéneo $MY = 0$ possui apenas a solução trivial, ou seja, que M é invertível. Para cada $X \in \mathcal{V}$, tem-se Consequentemente, se $X \in \mathcal{V}$,

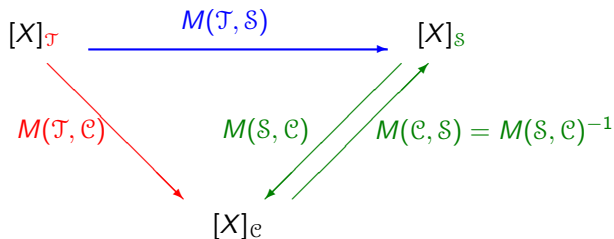
$$[X]_{\mathcal{S}} = M[X]_{\mathcal{T}} \quad \Rightarrow \quad [X]_{\mathcal{T}} = M(\mathcal{T}, \mathcal{S})^{-1}[X]_{\mathcal{S}}.$$

pelo que $M^{-1} = M(\mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Mudança de base em \mathbb{R}^n

\mathcal{S}, \mathcal{T} : bases de \mathbb{R}^n

\mathcal{C} : base canónica de \mathbb{R}^n



$M(\mathcal{S}, \mathcal{C})$: matriz cujas colunas são os vetores da base \mathcal{S}

$M(\mathcal{T}, \mathcal{C})$: matriz cujas colunas são os vetores da base \mathcal{T}

$$M(\mathcal{T}, \mathcal{S}) = M(\mathcal{C}, \mathcal{S}) M(\mathcal{T}, \mathcal{C}) = M(\mathcal{S}, \mathcal{C})^{-1} M(\mathcal{T}, \mathcal{C})$$

Cálculo de uma matriz de mudança de base em \mathbb{R}^n

Dadas as bases $\mathcal{S} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$ de \mathbb{R}^n e \mathcal{C} a base canónica do mesmo espaço vetorial, a matriz $M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ pode obter-se por aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan:

$$[M(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \mid M(\mathcal{T}, \mathcal{C})] = [X_1 \ \cdots \ X_n \mid Y_1 \ \cdots \ Y_n] \sim [I_n \mid M(\mathcal{T}, \mathcal{S})]$$

Exemplo: Para obtermos a matriz $M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ de mudança da base $\mathcal{T} = ((0, 1), (1, -1))$ para a base $\mathcal{S} = ((1, 1), (1, 2))$, temos de calcular os seguintes vetores de coordenadas

$$[(0, 1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (0, 1) = \alpha_1 (1, 1) + \alpha_2 (1, 2),$$

$$[(1, -1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (1, -1) = \beta_1 (1, 1) + \beta_2 (1, 2).$$

Mudança de base em \mathbb{R}^n - Exemplo

Tal conduz a dois sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

com a mesma matriz dos coeficientes (cujas colunas são os vetores de \mathcal{S}).

Os sistemas anteriores podem-se resolver em simultâneo, formando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right],$$

$$M(\mathcal{T}, \mathcal{S}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Conjunto ortogonal e ortonormado em \mathbb{R}^n

Um conjunto $\{X_1, \dots, X_k\}$ de vetores de \mathbb{R}^n diz-se

- **ortogonal** se $X_i \cdot X_j = 0$, para $i, j = 1, \dots, k$, com $i \neq j$;
- **ortonormado (o.n.)** se é um conjunto ortogonal de vetores unitários ($\|X_i\| = 1$, $i = 1, \dots, k$).

Exemplo:

1. $\{(1, 1, 0), (2, -2, 1)\}$ é ortogonal;
2. $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ é o.n.

Teorema: Todo o conjunto ortogonal de vetores não nulos é l.i.

Corolário:

Todo o conjunto ortogonal de n vetores (não nulos) de \mathbb{R}^n é uma **base** de \mathbb{R}^n .

Coordenadas de um vetor de \mathbb{R}^n numa base o.n.

Teorema: Seja $X \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ uma base o.n. de \mathbb{R}^n . Então

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} X \cdot X_1 \\ \vdots \\ X \cdot X_n \end{bmatrix},$$

isto é,

$$X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n,$$

com $a_i = X \cdot X_i$, $i = 1, \dots, n$.

Exemplo:

Determinar as coordenadas do vetor $(1, 5)$ na base o.n. de \mathbb{R}^2

$$\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right).$$

Projeção ortogonal em \mathbb{R}^n

Seja \mathcal{W} um subespaço de \mathbb{R}^n , \mathcal{B} uma base de \mathcal{W} e $Y \in \mathbb{R}^n$. O vetor Y é **ortogonal** ao **subespaço** \mathcal{W} se

$$Y \cdot Z = 0, \text{ para } Z \in \mathcal{W}.$$

Teorema: O vetor Y é ortogonal a \mathcal{W} se e só se Y é ortogonal a cada vetor de \mathcal{B} .

A **projeção ortogonal** de $X \in \mathbb{R}^n$ **sobre o subespaço** \mathcal{W} de \mathbb{R}^n é o vetor $Z \in \mathcal{W}$ tal que

$$X = Y + Z, \text{ onde } Y \text{ é ortogonal a } \mathcal{W}.$$

O vetor Z denota-se por $\text{proj}_{\mathcal{W}} X$.

Projeção ortogonal sobre uma reta que passa na origem

Exemplo: Seja $\mathcal{W} = \langle X_1 \rangle$ uma reta, onde $\{X_1\}$ é uma base o.n. de \mathcal{W} .

Seja $X = \overrightarrow{OP}$, com $X = Y + Z$, onde Y é ortogonal a \mathcal{W} (logo $Y \cdot X_1 = 0$) e

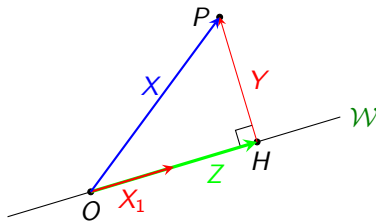
$$Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha X_1.$$

Note-se que

$$X \cdot X_1 = Y \cdot X_1 + \alpha X_1 \cdot X_1 = \alpha,$$

concluindo-se que

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1.$$



Observação: $\text{dist}(P, \mathcal{W}) = \|Y\| = \|X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X\|.$

Projeção ortogonal sobre um plano que passa na origem

Exemplo: Seja $\mathcal{W} = \langle X_1, X_2 \rangle$ um plano,
 $\{X_1, X_2\}$ uma base o.n. de \mathcal{W} e $X = \overrightarrow{OP}$.

Verifica-se que $X = Z + Y$, com

$$Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \quad \text{e} \quad Y \cdot X_1 = Y \cdot X_2 = 0.$$

Então, sendo

$$X = Y + Z = Y + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$$

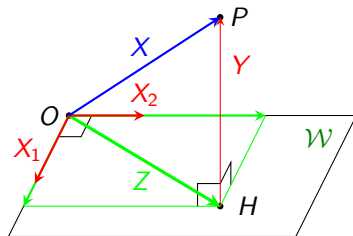
vem

$$X \cdot X_1 = \alpha_1 \quad \text{e} \quad X \cdot X_2 = \alpha_2.$$

Logo,

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1 + (X \cdot X_2) X_2.$$

Observação: $\text{dist}(P, \mathcal{W}) = \|Y\| = \|X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X\|.$



Projeção ortogonal em \mathbb{R}^n

Teorema: A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^n é dada por

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1)X_1 + \cdots + (X \cdot X_k)X_k \in \mathcal{W},$$

onde $\{X_1, \dots, X_k\}$ é uma base o.n. de \mathcal{W} .

Nota:

O vetor $Y = X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X$ é ortogonal a todos os vetores de \mathcal{W} .

Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

Teorema: Todo o subespaço $\mathcal{W} \neq \{0\}$ de \mathbb{R}^n possui uma base o.n.

Demonstração:

Suponha-se que $\dim(\mathcal{W}) = m$ e $\{X_1, \dots, X_m\}$ é uma base de \mathcal{W} . Seja

- $Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|},$
- $\mathcal{Z}_1 = \langle Y_1 \rangle,$
- $X'_k = X_k - \text{proj}_{\mathcal{Z}_{k-1}} X_k,$
- $Y_k = \frac{X'_k}{\|X'_k\|},$
- $\mathcal{Z}_k = \langle Y_1, \dots, Y_k \rangle,$ para $k = 2, \dots, m.$

O conjunto $\mathcal{B} = \{Y_1, \dots, Y_m\} \subset \mathcal{W}$ é o.n., logo l.i. e, consequentemente, é uma **base o.n.** de \mathcal{W} .

Exemplo:

Determinar uma base o.n. de $\langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, -1, 3), (2, 1, -2, 2) \rangle.$