Aplicações Lineares

Álgebra Linear e Geometria Analítica -A **Folha Prática 7**

Aplicações lineares

1. Averigue se são aplicações lineares as funções definidas por

   (a) $L(x,y) = (x+1, y, x+y)$;
   (b) $L(x,y,z) = (x+y, y, x-z)$;
   (c) $L(x,y,z) = (x-y, x^2, 2z)$;
   (d) $L(x,y,z) = (x+y, 0, 2x-z)$;
   (e) $L(at^2+bt+c) = at+b+1$.

2. Seja $L : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ definida por

$$L(A) = \begin{cases} A^{-1} & \text{se } A \text{ é não-singular} \\ 0 & \text{se } A \text{ é singular} \end{cases}$$

   para $A \in M_{n\times n}$. Averigue se L é uma aplicação linear.

3. Dada A uma matriz $n \times n$, defina-se $L : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ por $L(B) = AB - BA$ para $B \in M_{n\times n}$. Averigue se L é uma aplicação linear.

4. Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear, satisfazendo $L(1,1) = (2,-3)$ e $L(0,1) = (1,2)$. Determine

   (a) $L(3,-2)$;
   (b) $L(a,b)$.

5. Seja $L : P_2 \to P_3$ uma aplicação linear tal que $L(1) = 1$, $L(t) = t^2$ e $L(t^2) = t^3 + t$. Determine

   (a) $L(2t^2 - 5t + 3)$;
   (b) $L(at^2 + bt + c)$.

Matriz de uma aplicação linear

6. Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por

$$L(x,y,z) = (x+2y+z, 2x-y, 2y+z).$$

   Seja $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{T} = ((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz representativa de L relativamente

   i. à base $\mathcal{B}_c$;
   ii. às bases $\mathcal{B}_c$ e $\mathcal{T}$;
   iii. às bases $\mathcal{T}$ e $\mathcal{B}_c$;
   iv. à base $\mathcal{T}$;

   e determine $L(1,1,-2)$ usando cada uma das matrizes obtidas em i.-iv.

7. Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

   Sejam $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ e $\mathcal{T} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente.

   (a) Determine a matriz representativa de L relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determine a matriz representativa de L relativamente às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$.
   (c) Determine $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$, usando cada uma das matrizes obtidas anteriormente.

8. Seja $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma aplicação linear definida por

$$L(at^2+bt+c) = (a+2c)t^2 + (b-c)t + (a-c).$$

   Sejam $\mathcal{S} = (t^2, t, 1)$ e $\mathcal{T} = (t^2-1, t, t-1)$ bases de $\mathcal{P}_2$.

(a) Encontre a matriz representativa de L relativamente às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$.

(b) Determine $L(2t^2 - 3t + 1)$, usando a alínea anterior.

9. Dada C uma matriz $n \times n$, considere-se $L : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ definida por $L(A) = CA$ para $A \in M_{n\times n}$.

 (a) Mostre que L é uma aplicação linear.

 (b) Considerando $n = 2$, $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $M_{2\times 2}$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

 uma base de $M_{2\times 2}$, determine a matriz representativa de L relativamente

 i. à base $\mathcal{B}_c$; ii. às bases $\mathcal{B}_c$ e $\mathcal{S}$; iii. às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{B}_c$; iv. à base $\mathcal{S}$.

10. Sejam $X_1 = t + 1$, $X_2 = t - 1$, $Y_1 = t^2 + 1$, $Y_2 = t$, $Y_3 = t - 1$ e $L : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ a aplicação linear tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

 é a matriz que representa L relativamente às bases $\mathcal{S} = (X_1, X_2)$ e $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$. Determine

 (a) os vetores das coordenadas de $L(X_1)$ e $L(X_2)$ na base $\mathcal{T}$;

 (b) $L(X_1)$ e $L(X_2)$; (c) $L(2t + 1)$; (d) $L(at + b)$.

11. Determine a matriz representativa da aplicação linear $L : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por $L\big(p(t)\big) = p''(t) + p(0)$ relativamente à

 (a) base canónica de $\mathcal{P}_3$;

 (b) base $\mathcal{T} = (t^3, t^2 - 1, t, 1)$ de $\mathcal{P}_3$, diretamente.

12. Se $\mathrm{id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é a aplicação identidade definida por $\mathrm{id}_{\mathcal{V}}(X) = X$ para qualquer $X \in \mathcal{V}$, mostre que a matriz de $\mathrm{id}_{\mathcal{V}}$ relativamente a qualquer base de $\mathcal{V}$ é a matriz identidade I_n com $n = \dim \mathcal{V}$.

Núcleo e imagem de uma aplicação linear

13. Seja $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por $L(x, y, z, w) = (x + y, z + w, x + z)$.

 (a) Determine o núcleo e a imagem de L.

 (b) Encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem de L.

 (c) Averigue se L é injetiva e/ou sobrejetiva.

 (d) Verifique o Teorema das Dimensões.

14. Seja $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma aplicação linear definida por $L(at^2 + bt + c) = (a + c)t^2 + (b + c)t$.

 (a) Verifique se os elementos $t^2 - t - 1$ e $t^2 + t - 1$ pertencem a $\ker L$.

 (b) Verifique se os elementos $2t^2 - t$ e $t^2 - t + 2$ pertencem a $\mathrm{im}\, L$.

 (c) Determine uma base para $\ker L$ e uma base para $\mathrm{im}\, L$.

 (d) Diga, justificando, se L é injetiva e/ou sobrejetiva.

15. Encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem da aplicação linear $L : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definida por

 (a) $L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a + b & b + c \\ a + d & b + d \end{bmatrix}$; (b) $L(A) = A^T$.

16. Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(X) = AX$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

 (a) Verifique que a matriz de L relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$ é a matriz A.

 (b) Sem determinar o núcleo de L, verifique que $\dim(\ker L) \geq 2$.

(c) Sejam $S = ((1,1,1,0),(1,1,1,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1))$ e $T = ((1,1),(1,-1))$ bases de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente. Determine a matriz de L relativamente

i. à base S e à base canónica B_c de $\mathbb{R}^2$, $[L]_{S,B_c}$;

ii. às bases S e T, $[L]_{S,T}$.

17. Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear representada relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $L(1,2,3)$ e $L(x,y,z)$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Averigue se L é um isomorfismo.

(c) Determine a imagem de L e uma sua base, o núcleo de L e uma sua base.

(e) Determine a matriz de L relativamente à base $\mathcal{S} = ((1,1,0),(1,1,1),(1,0,0))$:

i. por definição.

18. Seja $S = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ e considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$L(1,1,1) = (-1,1), \qquad L(1,1,0) = (1,1), \qquad L(1,0,0) = (0,2).$$

(a) Determine a matriz de L relativamente à base S de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica B_c de $\mathbb{R}^2$, $[L]_{S,B_c}$.

(b) Calcule $[L(X)]_{B_c}$ e $L(X)$, sabendo que

$$[X]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Determine a matriz de L relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$, respetivamente.

(d) Determine $L(x,y,z)$ para um elemento genérico (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.

(e) Determine o núcleo de L e indique uma base para este subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(f) Diga, justificando, se L é injetiva.

(g) Sem determinar a imagem de L, diga qual a dimensão deste subespaço, usando

i. a característica de uma das matrizes representativas de L;

ii. o Teorema das Dimensões.

(h) Usando a dimensão da imagem de L como justificação, diga se L é sobrejetiva.

(i) Determine a imagem de L, assim como uma base para este subespaço de $\mathbb{R}^2$ a partir da

i. matriz calculada em (c).

ii. imagem do elemento genérico $L(x,y,z)$ calculada em (d).

19. Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(1,1) = (3,0,2)$ e $L(1,-1) = (1,0,2)$.

(a) Determine $L(x,y)$ para um elemento genérico (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine uma base para a imagem de L. Diga, justificando, se L é sobrejetiva.

(c) Sem determinar o núcleo de L, indique a sua dimensão. Diga, justificando, se L é injetiva.

(d) Determine a matriz que representa L relativamente às bases

$$\mathcal{S} = ((1,1),(1,-1)) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{T} = ((0,1,0),(1,0,1),(0,0,1)).$$

(e) Calcule $[X]_{\mathcal{S}}$, sabendo que

$$[L(X)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

20. Considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(a) Indique qual é o transformado $L(x, y, z)$ de um elemento genérico (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine a imagem de L, $\operatorname{im} L$, uma base para este subespaço e indique a sua dimensão.

(c) Diga, justificando, se L é sobrejetiva.

(d) Sem calcular o núcleo de L, indique, justificando, a sua dimensão e averigue se L é injetiva.

(e) Calcule a matriz de L relativamente à base $S = ((1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

(f) Sabendo que

$$[Y]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

i. verifique que $Y \in \operatorname{im} L$;

ii. determine um vetor de coordenadas na base S, $[X]_S$, tal que $L(X) = Y$.

21. Seja $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ uma aplicação linear.

(a) Se $\dim(\ker L) = 2$, qual é a dimensão da $\operatorname{im} L$?

(b) Se $\dim(\operatorname{im} L) = 3$, qual é a dimensão de $\ker L$?

22. Seja $L : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^5$ uma aplicação linear.

(a) Se L é sobrejetiva e $\dim(\ker L) = 2$, qual é a dimensão de $\mathcal{V}$?

(b) Se L é bijetiva, qual é a dimensão de $\mathcal{V}$?