

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Valores próprios e vetores próprios

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

Valores próprios, vetores próprios e subespaços próprios

Matrizes diagonalizáveis

Diagonalização ortogonal de matrizes simétricas

Valor próprio e vetor próprio

Sejam A uma matriz $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ é um **valor próprio** de A se existe um vetor **não nulo** $X \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$AX = \lambda X.$$

Todo o vetor $X \in \mathbb{R}^n$ **não nulo** que satisfaz $AX = \lambda X$ é designado por **vetor próprio** de A **associado** ao **valor próprio** λ .

λ é um **valor próprio** de A



o sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)X = 0$ possui uma solução **não trivial**



$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Polinómio caraterístico

Seja A uma matriz $n \times n$.

O **polinómio caraterístico** de A é um polinómio de grau n em λ dado por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

A equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$ diz-se a **equação caraterística** de A .

Teorema: Os valores próprios de A são as raízes **reais** do polinómio caraterístico de A .

Observação: Os valores próprios de uma matriz **triangular** são as entradas da sua diagonal principal.

Subespaço próprio associado a um valor próprio

Teorema: Seja λ um valor próprio da matriz A $n \times n$. Então,

$$U_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : X \text{ é vetor próprio de } A \text{ associado a } \lambda\} \cup \{0\}$$

é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n .

U_λ diz-se o subespaço próprio de A associado ao valor próprio λ e

$$U_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)X = 0\} = \mathcal{N}(A - \lambda I_n).$$

Teorema: Seja A $n \times n$ com k valores próprios distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}.$$

Então $1 \leq \dim U_{\lambda_i} \leq n_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, k$.

Exemplo 1

Determinar valores os próprios e os subespaços próprios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

O polinómio caraterístico de A é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

A equação caraterística de A é

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \\ &\iff \lambda = 2 \vee \lambda = 3 \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são 2 e 3, com $n_2 = n_3 = 1$. A dimensão dos subespaços associados é igual a 1, pois $1 \leq \dim U_2 \leq 1$ e $1 \leq \dim U_3 \leq 1$.

Exemplo 1 – continuação

$$(A - 2I)X = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = x, x \in \mathbb{R}$$

$$U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_1 \rangle, \quad \text{com } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(A - 3I)X = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = 2x, x \in \mathbb{R}$$

$$U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_2 \rangle, \quad \text{com } X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

Determinar os valores e subespaços próprios de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

O polinómio caraterístico de A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 1)$$

possui **uma única raiz real** $\lambda=0$ (e um par de raízes complexas conjugadas).

O espaço próprio de A é $U_0 = \mathcal{N}(A) = \langle X \rangle$, com $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, e $\dim U_0 = 1$.

Exemplo 3

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determinar valores e subespaços próprios.

A é triangular $\Leftrightarrow p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) \Leftrightarrow$ possui valores próprios 1 e 2.

$$X \in U_1 \Leftrightarrow (A - 1I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = 0 \Leftrightarrow U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$X \in U_2 \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = 0 \Leftrightarrow U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Matrizes semelhantes

A e B são matrizes **semelhantes** se existir uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Observação: Como P é invertível verifica-se que

$$P^{-1}AP = B \iff AP = PB \iff A = PBP^{-1}.$$

Teorema: Matrizes **semelhantes** possuem o mesmo polinómio caraterístico e, portanto, os mesmo valores próprios.

Matrizes diagonalizáveis

Uma matriz A n diz-se **diagonalizável** se é semelhante a uma **matriz diagonal**, ou seja, A é uma matriz diagonalizável se existe uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = D,$$

onde D é uma matriz diagonal.

A matriz P diz-se uma **matriz diagonalizante** de A .

Matrizes diagonalizáveis

Teorema: A , $n \times n$, é diagonalizável \iff A possui n vetores próprios l.i.

Demonstração:

A $n \times n$ é diagonalizável se e só se existem uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D $n \times n$ que verificam a igualdade

$$P^{-1}AP = D.$$

Se P tem colunas X_1, \dots, X_n e D tem na diagonal $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = D &\iff AP = PD \iff A \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \iff \\ &\iff \begin{bmatrix} AX_1 & \cdots & AX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \cdots & \lambda_n X_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note-se que

- ▶ P é invertível se e só se as suas colunas, X_1, \dots, X_n , são linearmente independentes;
- ▶ $AX_i = \lambda_i X_i$ se e só se X_i é vetor próprio de A associado ao valor próprio λ_i , com $i = 1, \dots, n$.

Então A é diagonalizável se e só se A tem n vetores próprios linearmente independentes.

Da demonstração do teorema anterior, A é diagonalizável se é semelhante a uma matriz diagonal $P^{-1}AP = D$, verificando-se que

- ▶ as colunas da matriz diagonalizante P são n vetores próprios l.i. de A ,
- ▶ a matriz D contém os valores próprios de A na diagonal principal,
- ▶ a ordem dos vetores próprios determina a ordem dos valores próprios, pois a i -ésima coluna de P é um vetor próprio de A associado ao valor próprio (de A) que está na i -ésima entrada da diagonal de D , para $i = 1, \dots, n$.

Vetores próprios linearmente independentes

Lema: Vetores próprios associados a valores próprios distintos são l.i.

Demonstração: Sejam X_1 e X_2 vetores próprios de A associados a dois valores próprios distintos λ_1 e λ_2 e suponha-se que $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0$.

Pré-multiplicando ambos os membros da igualdade por $A - \lambda_1 I$, obtém-se

$$\alpha_1 \underbrace{(A - \lambda_1 I)X_1}_0 + \alpha_2 \underbrace{(A - \lambda_1 I)X_2}_{AX_2 - \lambda_1 X_2} = 0 \iff \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{X_2}_{\neq 0} = 0,$$

donde $\alpha_2 = 0$. Logo, $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0 \iff \alpha_1 X_1 = 0$ e, como $X_1 \neq 0$, também $\alpha_1 = 0$. Conclui-se que o conjunto $\{X_1, X_2\}$ é l.i.

Teorema: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os valores próprios distintos de A . Então

A possui $\dim U_{\lambda_1} + \dots + \dim U_{\lambda_k}$ vetores próprios l.i.

Diagonalização e valores próprios

Teorema: Seja $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}$ o polinómio caraterístico de A , sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os valores próprios distintos. Então,

A é diagonalizável se e só se $\dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, k$.

Observações:

Seja A uma matriz $n \times n$.

- ▶ Se A possui n valores próprios distintos, é diagonalizável.
- ▶ O recíproco da afirmação anterior é falso! Vide o exemplo 4.
- ▶ Para descobrir se A , com $k < n$ valores próprios distintos, é diagonalizável, é preciso verificar se $\dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$ só para $n_{\lambda_i} > 1$.
- ▶ $\dim U_{\lambda_i} = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_i I) = \text{nul}(A - \lambda_i I) = n - \text{car}(A - \lambda_i I)$.

Exemplos 1, 2 e 3

Considerando as matrizes dos exemplos 1, 2 e 3, verifica-se que

- ▶ a matriz A , 2×2 , do exemplo 1 é diagonalizável, pois tem 2 valores próprios distintos;
- ▶ a matriz A , 3×3 , do exemplo 2 não é diagonalizável, porque tem apenas 1 ($1 < 3$) vetor próprio l.i.;
- ▶ a matriz A , 3×3 , do exemplo 3 não é diagonalizável, pois $\dim U_1 = 1 < n_1 = 2$.

Exemplo 4

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 3 que tem polinómio caraterístico

$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$ e valores próprios 1 e 2.

$1 \leq \dim U_2 \leq 1 \Leftrightarrow \dim U_2 = 1$, mas $1 \leq \dim U_1 \leq 2 \Leftrightarrow \dim U_1 \in \{1, 2\}$.

Contudo, $A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem caraterística 1.

Logo, $\dim U_1 = \text{nul}(A - 1I) = 3 - \text{car}(A - 1I) = 2$ e A é diagonalizável, pois

$$\dim U_1 + \dim U_2 = 3.$$

Assim, $U_1 = \mathcal{N}(A - 1I) = \langle X_1, X_2 \rangle$. Verifique que $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 4 – continuação

Como $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $U_2 = \langle X_3 \rangle$ com $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Então, uma **matriz diagonalizante** de A é

$$P = [X_1 \ X_2 \ X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tal que } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Outra **matriz diagonalizante** de A , por exemplo, é

$$Q = [X_2 \ X_3 \ X_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicação ao cálculo da potência e da inversa

Se A é diagonalizável, então existe P invertível tal que $A = PDP^{-1}$.

Para $k \in \mathbb{N}$,

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow A^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

Se A é invertível, $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \text{ é semelhante a } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 511 & -255 \\ 510 & -254 \end{bmatrix}.$$

Diagonalização de matrizes simétricas

Recorde que A é **simétrica** se $A^T = A$.

Teorema: Uma matriz **simétrica** $n \times n$ possui **n valores próprios (reais)**.

Teorema: **Vetores próprios** de uma matriz **simétrica** associados a **valores próprios distintos** são **ortogonais**.

Demonstração: Se A $n \times n$ é **simétrica** e $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$, tem-se que

$$(AX_1) \cdot X_2 = X_1^T A^T X_2 = X_1^T A X_2 = X_1 \cdot (AX_2).$$

Se X_1 e X_2 são vetores próprios de A associados, respetivamente, aos valores próprios λ_1 e λ_2 ,

$$(AX_1) \cdot X_2 = \lambda_1 X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot (AX_2) = \lambda_2 X_1 \cdot X_2,$$

donde

$$(\lambda_1 - \lambda_2) X_1 \cdot X_2 = 0.$$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $X_1 \cdot X_2 = 0$.

Diagonalização ortogonal de matrizes simétricas

A matriz quadrada P é **ortogonal** se $P^T P = I \iff$ é invertível e $P^{-1} = P^T$.

Teorema: Dada uma matriz $P = [P_1 \ \cdots \ P_n]$ de colunas P_1, \dots, P_n ,

P é **ortogonal** $\Leftrightarrow \{P_1, \dots, P_n\}$ é uma **base o.n.** de \mathbb{R}^n .

A é **ortogonalmente diagonalizável** se A é diagonalizável e possui uma **matriz diagonalizante ortogonal** (cujas colunas são uma **base o.n.** de \mathbb{R}^n formada por **vetores próprios** de A).

Teorema: Toda a matriz **simétrica** é **ortogonalmente diagonalizável**.

Exemplo 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ é simétrica} \Leftrightarrow A \text{ é ortogonalmente diagonalizável}$$

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda^2) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = -1$$

$$\begin{aligned} U_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_1 \rangle, & X_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & P_1 &= \frac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ U_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_2 \rangle, & X_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, & P_2 &= \frac{X_2}{\|X_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uma matriz diagonalizante ortogonal de A é

$$P = [P_1 \ P_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{sendo} \quad P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é simétrica} \Leftrightarrow A \text{ é ortogonalmente diagonalizável}$$

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$$

$$U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 \cdot P_2 = 0$$

Exemplo 6 – continuação

$$U_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad P_3 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Então $\{P_1, P_2, P_3\}$ é uma base o.n. de vetores próprios de A e

$$P = [P_1 \ P_2 \ P_3] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonalizante ortogonal de A tal que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$