Determinantes

Álgebra Linear e Geometria Analítica A **Folha Prática 2**

---

1. Calcule os seguintes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 7,$$

determine, justificando, os seguintes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 4c_2 & 4c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 - 5c_1 & a_2 - 5c_2 & a_3 - 5c_3 \\ 10b_1 & 10b_2 & 10b_3 \\ -4c_1 & -4c_2 & -4c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Determine todos os valores de λ para os quais

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & 3 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Mostre que se c é um número real e A é uma matriz do tipo $n \times n$, então $\det(cA) = c^n \det(A)$.

5. Se A e B são matrizes 5×5 tais que $|A| = 3$ e $|B| = -5$, determine, justificando, os seguintes determinantes:

   (a) $|A^T|$; (b) $|AB|$; (c) $|A^4|$; (d) $|B^{-1}|$; (e) $|2A|$; (f) $|2A^{-1}|$; (g) $\left|(2A)^{-1}\right|$; (h) $|AB^{-1}A^T|$.

6. Seja A uma matriz 4×4 tal que $\det(A) = 3$. Diga, justificando, qual é o valor de $\det(2(A^{-1})^T)$.

7. Sejam A e B matrizes 5×5, com B invertível. Sabendo que $\det(AB) = 24$ e $\det(B^{-1}) = 4$, calcule $\det(A)$.

8. Sem calcular explicitamente os determinantes, mostre que:

   (a) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0;$

   (b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

   (c) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

9. Utilizando apenas propriedades dos determinantes, calcule:

   (a) $\begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & a_2 + 2b_2 & a_3 + 2b_3 \\ 3c_1 + b_1 & 3c_2 + b_2 & 3c_3 + b_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}$, sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1;$

   (b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, sabendo que $\begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 + a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2 + b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 10;$

   (c) $\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1 + a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2 + a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3 + a_3 \end{vmatrix}$, sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2;$

(d) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_1 & 2a_3+5a_1 \\ b_1+b_2 & b_1 & 2b_3+5b_1 \\ c_1+c_2 & c_1 & 2c_3+5c_1 \end{vmatrix}$, sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1.$

10. Calcule os determinantes seguintes, usando o Teorema de Laplace:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & -6 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

11. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a matriz adjunta de A, $\operatorname{adj} A$.

(b) Calcule o determinante de A.

(c) Mostre que $A\,(\operatorname{adj} A) = \det(A)\, I_3$.

(d) Calcule a matriz inversa de A.

12. Calcule a adjunta da matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
e efetue o produto $A\,(\operatorname{adj} A)$. Sem efetuar mais cálculos indique o valor do determinante de A.

13. Calcule, caso exista, a inversa das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

14. Verifique que a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
é invertível e calcule o elemento (1,2) da inversa de A.

15. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule o determinante de A.

(b) Calcule o elemento (2,3) da adjunta de A e o elemento (2,3) da inversa de A.

16. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule o elemento (4,1) da inversa de A, A^{-1}, sem determinar a matriz A^{-1}.

17. Determine todos os valores de α para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha-4 & 0 & 10 \\ 4 & \alpha+5 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha-3 \end{bmatrix}$$

é singular.

18. Se

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 6 & 1 \\ 0 & \beta-1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta+5 \end{bmatrix}$$

determine todos os valores de β para os quais o sistema homogéneo $AX = 0$ apenas admite a solução trivial.

19. Diga em que condições se pode usar a Regra de Cramer para resolver um sistema de equações lineares.

20. Se possível, resolva os seguintes sistemas de equações lineares, usando a Regra de Cramer:

(a) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 6 \\ 3x + 2y - z = -1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 4x - 3z = -2 \\ 2x - y = -2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} -2x - y + z = -3 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x + 3y + 2z + w = 0 \\ 2y + z + 3w = 4 \\ 2x + y - z + 2w = 5 \\ 3x - z + 3w = 9 \end{cases}$.

21. Sejam A, B e C matrizes tais que $AB = AC$. Mostre que se $\det(A) \neq 0$, então $B = C$. Mostre ainda através de um exemplo não trivial que esta conclusão pode não ser válida se $\det(A) = 0$.

22. Mostre que :

(a) Se A é uma matriz do tipo $n \times n$, então $\det(AA^T) \geq 0$;
(b) Se $AB = I_n$, então $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$;
(c) Sendo A e B matrizes $n \times n$, se A é singular, então AB também é uma matriz singular;
(d) Se A é uma matriz não singular tal que $A^2 = A$, então $\det(A) = 1$;
(e) Se $A = A^{-1}$, então $\det(A) = \pm 1$;
(f) Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 invertível, então $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A^2)$.

23. Diga, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

(a) $\det\left(AA^T\right) = \det\left(A^2\right)$;
(b) $\det(-A) = -\det(A)$;
(c) Se $A^T = A^{-1}$, então $\det(A) = 1$;
(d) Se $\det(A) = 0$, então $A = O$;
(e) Se $\det(A) = 7$, então o sistema $AX = 0$ tem apenas a solução trivial;
(f) Se $A^4 = I_n$, então $\det(A) = 1$;
(g) Se $A^2 = A$ e $A \neq I_n$, então $\det(A) = 0$;
(h) Se $\det(AB) = 0$, então $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$;
(i) Se $AB \neq BA$ então $\det(AB) \neq \det(BA)$;
(j) Se A, B e C são matrizes $n \times n$ tais que $AC = BC$ então $A = B$.

24. Seja A uma matriz $n \times n$ com determinante não nulo. Mostre que $\det(\operatorname{adj} A) = [\det(A)]^{n-1}$.