Álgebra Linear e Geometria Analítica

Cónicas e Quádricas

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Equação geral de uma cónica

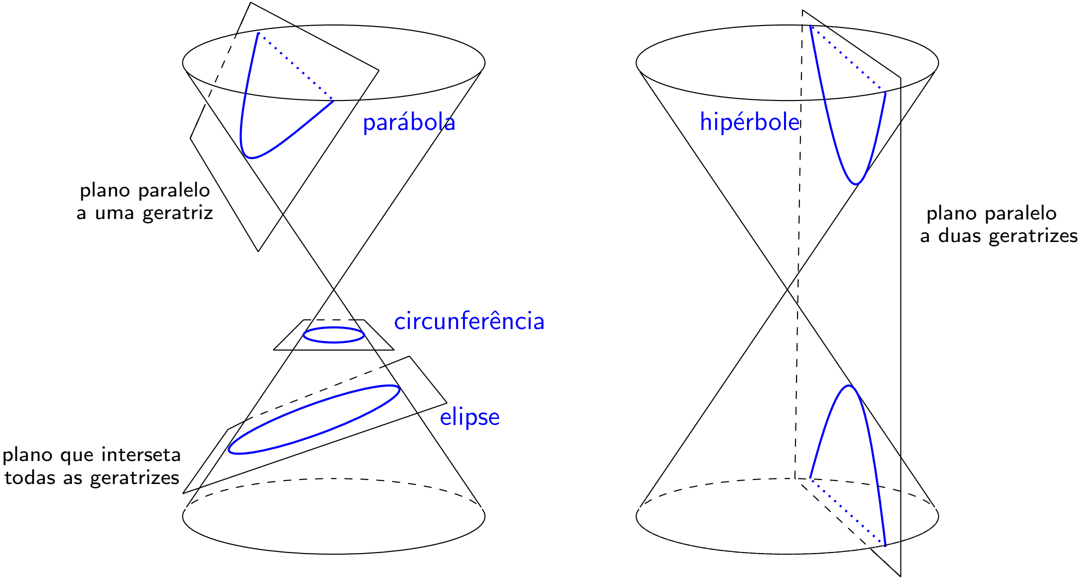
Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos e $\delta, \eta, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\alpha\, x^2 + \beta\, y^2 + 2\,\gamma\, x\, y + \delta\, x + \eta\, y + \mu \;=\; 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{X^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta & \eta \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \mu \;=\; 0$$
$$\Updownarrow$$
$$X^T A X \,+\, B\, X \,+\, \mu \,=\, 0,$$

com A matriz simétrica 2×2 não nula e B matriz 1×2, é a equação geral que as coordenadas $X \in \mathbb{R}^2$ dos pontos de uma cónica satisfazem.

As cónicas são curvas obtidas pela interseção de um plano com uma superfície cónica.

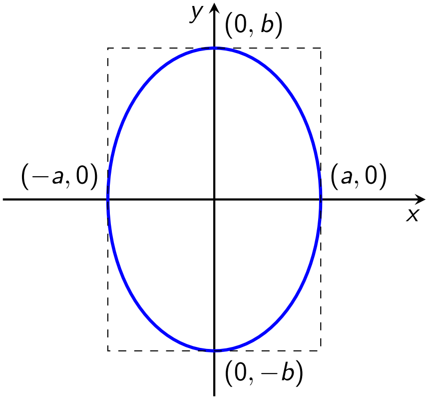
Secções cónicas



https://github.com/ridlo/tikz_by_example/blob/master/conicSection.tex

Equação reduzida de uma elipse

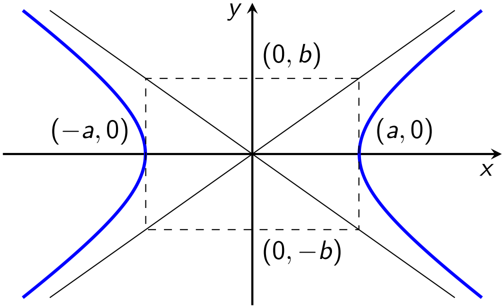
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$



$a < b \longrightarrow$ o eixo maior da elipse está no eixo OY (figura nesta página)
$a > b \longrightarrow$ o eixo maior da elipse está no eixo OX
$a = b \longrightarrow$ a elipse é uma circunferência com raio $a (= b)$

Equação reduzida de uma hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$



vértices:
$(-a, 0)$ e $(a, 0)$

A equação

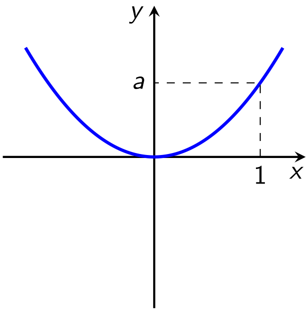
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; a, b > 0,$$

é a equação de uma hipérbole com vértices $(0, -b)$ e $(0, b)$, que estão no eixo OY.

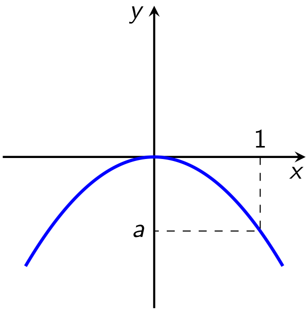
Equação reduzida de uma parábola

$$y = ax^2$$

$a > 0$



$a < 0$



A equação $x = ay^2$ é a equação de uma parábola simétrica em relação ao eixo OX.

Diagonalização ortogonal de A

Pode simplificar-se a equação geral de uma cónica

$$X^T A X + B X + \mu = 0$$

efetuando a diagonalização ortogonal da matriz simétrica A.

Seja P uma matriz ortogonal tal que

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

onde os valores próprios λ_1 e λ_2 de A estão ordenados do seguinte modo:

- $\lambda_1 \geq \lambda_2$, se ambos são não nulos;
- $\lambda_2 = 0$, se um dos valores próprio é nulo.

Redução da equação de uma cónica

Considerando $X = P\hat{X}$ e $\hat{B} = B\,P$ na equação das cónicas, obtém-se

$$\hat{X}^T P^T A\, P\, \hat{X} + B\, P\, \hat{X} + \mu = \hat{X}^T D\, \hat{X} + \hat{B}\, \hat{X} + \mu = 0$$

que, para $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ e $\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\delta} & \hat{\eta} \end{bmatrix}$, é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\delta} & \hat{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \mu = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1\, \hat{x}^2 + \lambda_2\, \hat{y}^2 + \hat{\delta}\hat{x} + \hat{\eta}\hat{y} + \mu = 0,$$

onde o termo cruzado (termo em "xy") foi eliminado.
A técnica para eliminar os termos $\hat{B}\hat{X}$ ou μ, quando possível, será mostrada nos exemplos.

Nota: Se $|P| > 0$, esta mudança de variável corresponde a uma rotação.

Exemplo 1

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 2y - 6 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$X^T A X + B X - 6 = 0$$

com

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

No Exemplo 5 do Capítulo 5 (slide 18) efetuou-se a diagonalização ortogonal da matriz simétrica A, tendo-se obtido

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

uma matriz ortogonal.

Exemplo 1 – continuação

Considerando $X = P\,\hat{X}$, obtém-se

$$\hat{X}^T\,P^T A\,P\,\hat{X} + BP\,\hat{X} = 6.$$

Tomando $\hat{X} = \begin{bmatrix}\hat{x}\\\hat{y}\end{bmatrix}$ e atendendo a que $BP = \begin{bmatrix}0 & 2\sqrt{2}\end{bmatrix}$, obtém-se

$$\begin{aligned} 3\hat{x}^2 - \hat{y}^2 + 2\sqrt{2}\hat{y} = 6 \quad &\Longleftrightarrow \quad 3\hat{x}^2 - (\hat{y}^2 - 2\sqrt{2}\hat{y} + 2) = 6 - 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3\hat{x}^2 - (\underbrace{\hat{y} - \sqrt{2}}_{\tilde{y}})^2 = 4 \\ &\qquad\quad \tilde{x} = \hat{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{\tilde{x}^2}{\frac{4}{3}} - \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Esta última é a equação reduzida de uma hipérbole.

Nota: A mudança de variável $\tilde{y} = \hat{y} - \sqrt{2}$ corresponde a uma translação.

Exemplo 2

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 18 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\left(x^2 + 6x + 9\right) - 18 + \left(y^2 + 4y + 4\right) - 4 + 18 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\,(\underbrace{x+3}_{\tilde{x}})^2 + (\underbrace{y+2}_{\tilde{y}})^2 = 4$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1.$$

Esta última é a equação reduzida de uma elipse.

Exemplo 3

$$2x^2 + 12x + 3y + 15 \;=\; 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\left(x^2 + 6x + 9\right) - 18 + 3y + 15 \;=\; 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\,(\underbrace{x+3}_{\tilde{x}})^2 + 3(\underbrace{y-1}_{\tilde{y}}) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{y} \;=\; -\tfrac{2}{3}\,\tilde{x}^2.$$

Esta é a equação reduzida de uma parábola.

Exemplos de equações que não correspondem a curvas

Exemplo 4:

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 24 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\left(x^2 + 6x + 9\right) - 18 + \left(y^2 + 4y + 4\right) - 4 + 24 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\,(x+3)^2 + (y+2)^2 = -2.$$

Esta é a equação de um conjunto vazio.

Exemplo 5:

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 22 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\,(x+3)^2 + (y+2)^2 = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -3 \quad \text{e} \quad y = -2.$$

Esta é a equação de um ponto.

Cónicas degeneradas

Situações degeneradas que podem ocorrer:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \rightarrow$ conjunto vazio;
2. $\frac{x^2}{a^2} = -1 \quad \rightarrow$ conjunto vazio;
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \rightarrow$ um ponto (origem do referencial);
4. $\frac{x^2}{a^2} = 0 \quad \rightarrow$ duas retas coincidentes (eixo Oy, $x = 0$);
5. $\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \rightarrow$ duas retas estritamente paralelas ($x = \pm a$);
6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \rightarrow$ duas retas concorrentes ($y = \pm \frac{b}{a} x$).

Identificação de cónicas com 2 valores próprios não nulos

Identificação da cónica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0.$$

Caso 1. λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal, ou seja, $|A| > 0$

μ e λ_1 têm sinais contrários	elipse
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	um ponto: $(0, 0)$

Caso 2. λ_1 e λ_2 têm sinais contrários, ou seja, $|A| < 0$

$\mu \neq 0$	hipérbole
$\mu = 0$	duas retas concorrentes: $y = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\, x$

Identificação de cónicas com 1 valor próprio não nulo

Identificação da cónica representada pela equação (onde $|A| = 0$)

$$\lambda_1 x^2 + \eta\, y + \mu = 0.$$

Caso 1. $\eta \neq 0 \;\to\;$ parábola

Caso 2. $\eta = 0$

μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
μ e λ_1 têm sinais contrários	duas retas estritamente paralelas: $x = \pm\sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}$
$\mu = 0$	duas retas coincidentes: $x = 0$ (eixo Oy)

Equação geral de uma quádrica

A equação geral (na forma matricial) de uma quádrica é

$$X^T A X + B X + \mu = 0, \tag{1}$$

com A matriz simétrica 3×3 não nula, B matriz 1×3, $X \in \mathbb{R}^3$ e $\mu \in \mathbb{R}$.

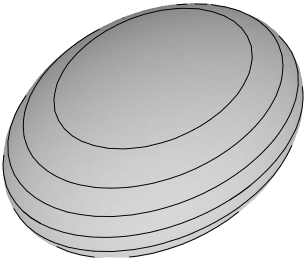
A partir desta equação geral podem ser obtidas as equações reduzidas das quádricas por um processo análogo ao levado a cabo para as cónicas:

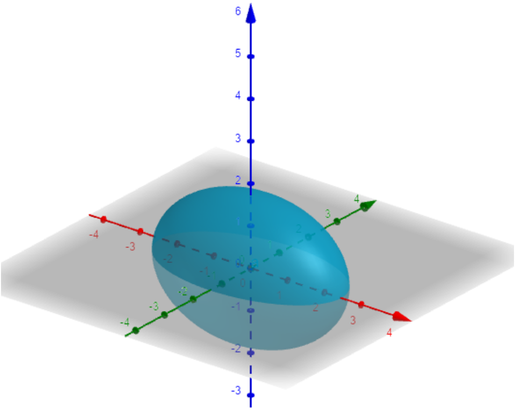
1. "rotação" dos eixos (diagonalização ortogonal de A) e
2. "translação" dos eixos.

Exercício: Determine as interseções com os planos coordenados ($x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$) de todas as quádricas apresentadas nos próximos 5 slides.

Equação reduzida do elipsóide

Equação reduzida de um elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$



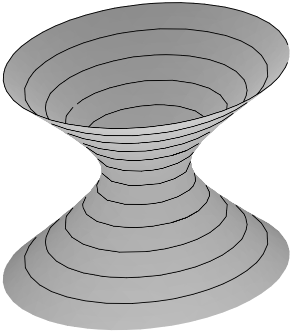


Nota: No caso particular $a = b = c$, tem-se uma esfera.

Equações reduzidas dos hiperbolóides

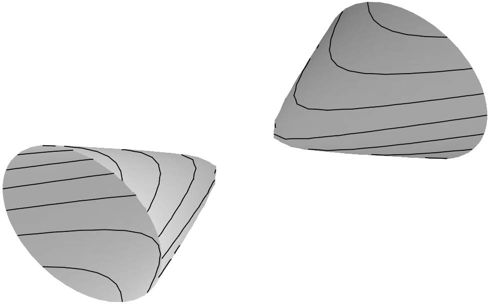
Equação reduzida de um hiperbolóide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



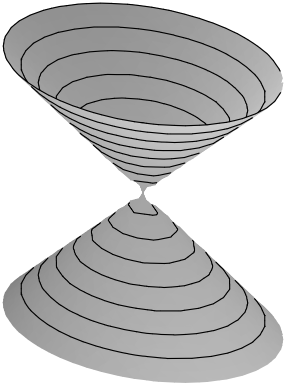
Equação reduzida de um hiperbolóide de duas folhas:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



Quádricas degeneradas: o cone

Equação reduzida de um cone: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$



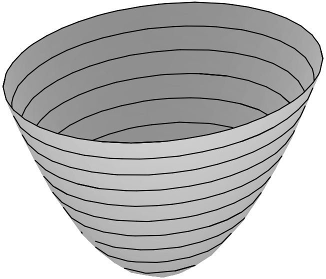
Equações reduzidas dos parabolóides

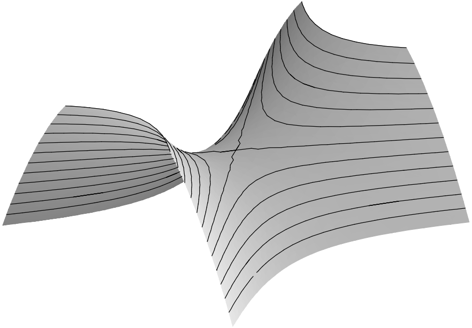
Equação reduzida de um parabolóide elíptico:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Equação reduzida de um parabolóide hiperbólico:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$





Quádricas degeneradas: os cilindros

Equação reduzida de um cilindro elíptico:

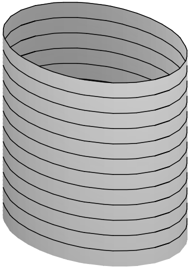
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

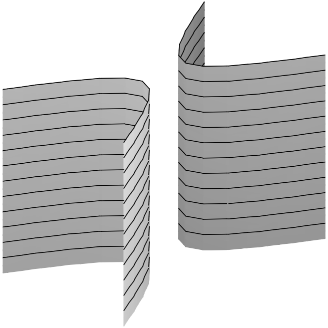
Equação reduzida de um cilindro hiperbólico:

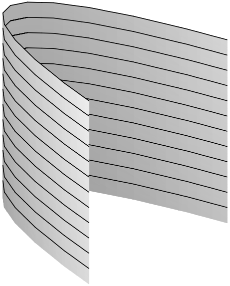
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Equação reduzida de um cilindro parabólico:

$$y = ax^2.$$







Exemplo 6

$$-8x^2 - 8y^2 + 10z^2 + 32xy - 4xz - 4yz - 24 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$X^T A X = 24,$$

com $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} -8 & 16 & -2 \\ 16 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$.

Como os valores próprios de A são 12, 6 e -24, existe P ortogonal tal que

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6 – continuação

Considerando $X = P\,\hat{X}$ na equação geral, com $\hat{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
X^T A X = 24 \iff & \hat{X}^T D \hat{X} = 24 \\
\iff & 12\hat{x}^2 + 6\hat{y}^2 - 24\hat{z}^2 = 24 \\
\iff & \frac{\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{y}^2}{4} - \hat{z}^2 = 1
\end{aligned}
$$

que é a equação reduzida de um hiperbolóide de uma folha.

Nota: As interseções com os eixos coordenados são:

$\hat{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\hat{y}^2}{4} - \hat{z}^2 = 1$ hipérbole no plano $\hat{y}O\hat{z}$

$\hat{y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\hat{x}^2}{2} - \hat{z}^2 = 1$ hipérbole no plano $\hat{x}O\hat{z}$

$\hat{z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{y}^2}{4} = 1$ elipse no plano $\hat{x}O\hat{y}$

Identificação de quádricas com 3 valores próprios não nulos

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \mu = 0.$$

Caso 1. λ_1, λ_2 e λ_3 têm o mesmo sinal

μ e λ_1 têm sinais contrários	elipsóide
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	ponto $(0,0,0)$

Caso 2. λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal que é contrário ao de λ_3

μ e λ_1 têm sinais contrários	hiperbolóide de uma folha
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	hiperbolóide de duas folhas
$\mu = 0$	*cone*

Identificação de quádricas com 2 valores próprios não nulos

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \eta\, z + \mu = 0.$$

Caso 1. λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal

$\eta \neq 0 \;\rightarrow\;$ parabolóide elíptico

$\eta = 0 \;\rightarrow$

μ e λ_1 têm sinais contrários	*cilindro elíptico*
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	eixo Oz

Caso 2. λ_1 e λ_2 têm sinal contrário

$\eta \neq 0 \;\rightarrow\;$ parabolóide hiperbólico

$\eta = 0 \;\rightarrow$

$\mu \neq 0$	*cilindro hiperbólico*
$\mu = 0$	dois planos concorrentes $y = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\; x$ que se intersetam no eixo Oz

Identificação de quádricas com 1 valor próprio não nulo

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \eta\, y + \mu = 0.$$

Caso 1. $\eta \neq 0 \quad \rightarrow$ *cilindro parabólico*

Caso 2. $\eta = 0$

μ e λ_1 têm sinais contrários	dois planos estritamente paralelos: $x = \pm\sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}$
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	dois planos coincidentes: $x = 0$ (plano yOz)

Nota: Na equação $\lambda_1 x^2 + \eta y + \nu z + \mu = 0$, o termo em z elimina-se com uma oportuna escolha da base do espaço próprio associado a zero.