Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica - agrupamento IV

11/02/2022 **exame final** duração: **2h30min**

nome: ______________________________ nº mecanográfico: __________

declaro que desisto: ______________________________ **nº folhas adicionais:** ______

Justifique detalhadamente as respostas.

(3.0) 1. Considere os parâmetros reais α e β, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \end{bmatrix}$ e o vetor $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \\ \alpha-1 \end{bmatrix}$.

Determine, justificando, para que valores de α e β o sistema $AX = B$ é

(i) possível e determinado.

(ii) possível e indeterminado.

(iii) impossível.

(5.0) 2. Seja $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -k \end{bmatrix}$, onde k é um parâmetro real.

a) Determine os valores de k para os quais a matriz N é invertível.

b) Considere $k = -2$. Seja A uma matriz de ordem 3 tal que $\det(A) = 4$. Calcule $\det(2A^T N^{-1})$.

c) Mostre que 1 é valor próprio de N, para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

d) Considere $k = 0$. Mostre que $u = (2, 2, -1)$ é um vetor próprio de N e determine o valor próprio de N que tem u como vetor próprio.

(3.0) 3. Considere a reta $\mathcal{R}$ definida pelas equações cartesianas

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

e o plano Π que passa no ponto $P(4, 1, 1)$ e é ortogonal ao vetor $u = (1, 5, -5)$. Determine a posição relativa e a distância entre o plano Π e a reta $\mathcal{R}$.

(3.0) 4. Considere o subespaço $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ e os vetores $X = (-1, 0, 0)$ e $Y = (0, 1, -1)$.

a) Determine uma base para S e a dimensão de S.

b) Verifique se X e Y são elementos de S. Em caso afirmativo, indique o vetor de coordenadas na base determinada.

c) Determine a projeção ortogonal do vetor $Z = (2, 2, 1)$ no subespaço K gerado por X e Y.

(3.0) 5. Considere a cónica com equação geral $x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x - y + 5 = 0$.

a) Sendo $X = [x \quad y]^\top$, determine as matrizes A e B tais que a equação matricial da cónica apresentada seja dada por $X^T A X + B X + 5 = 0$.

b) Encontre uma matriz ortogonal P diagonalizante de A.

c) Obtenha uma equação reduzida da cónica. Classifique a cónica.

(3.0) 6. Seja $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que $\phi(X) = AX$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Seja $\mathcal{C}_4$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = ((1,-1),(1,2))$ uma base de $\mathbb{R}^2$.

a) Determine o núcleo de ϕ.

b) ϕ é injetiva? ϕ é sobrejetiva? Justifique.

c) Determine a matriz de ϕ relativa às bases $\mathcal{C}_4$ e $\mathcal{B}$.