Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV

26/11/2021 **1º Teste - Resolução** **Duração: 1h45min**

Justifique detalhadamente todas as respostas. Apresente todos os cálculos.

Observação. Em cada questão, é apresentada uma resolução. Eventualmente, existem outras resoluções possíveis.

(3.0) 1. Efetue a discussão do sistema seguinte com parâmetros reais $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - \beta y + 2z = 6(\alpha - 1) \\ -4\beta y + z = -4 \\ -z = -2\alpha \end{cases}$$

Indique para que valores dos parâmetros o sistema é

(i) possível e determinado,

(ii) possível e indeterminado,

(iii) impossível.

Resposta:

(i) $\boxed{\beta \neq 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}}$

(ii) $\boxed{\beta = 0 \text{ e } \alpha = -2}$

(iii) $\boxed{\beta = 0 \text{ e } \alpha \neq -2}$

Resolução: seja $AX = B$ a forma matricial do sistema anterior, sendo n o número de variáveis/colunas do sistema, a matriz ampliada $[A|B]$ do sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\beta & 2 & 6(\alpha-1) \\ 0 & -4\beta & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2\alpha \end{array}\right]$$

que já está na forma escalonada.

Quando $\beta \neq 0$ temos $\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = n = 3$, sendo n o número de variáveis/colunas de A. O sistema é possível e determinado. O parâmetro α pode ter qualquer valor. A resposta à alínea (i) é $\beta \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Quando $\beta = 0$ a matriz ampliada deixa de ter um pivô na posição $(2, 2)$ e deixa de estar escalonada. Ao escalonar obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\beta & 2 & 6(\alpha-1) \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2\alpha \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 := L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\beta & 2 & 6(\alpha-1) \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha - 4 \end{array}\right]$$

e $\text{car}(A) = 2$.

Quando $-2\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ teremos $\text{car}(A) = \text{car}(A|B)$ pelo que o sistema é possível, mas como $\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 2 < n = 3$ o sistema é indeterminado. A resposta à alínea (ii) é $\beta = 0$ e $\alpha = -2$.

Quando $-2\alpha - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -2$ teremos $\text{car}(A) < \text{car}(A|B)$ e o sistema é impossível. A resposta à alínea (iii) é $\beta = 0$ e $\alpha \neq -2$.

(4.0) 2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Obtenha uma matriz C equivalente por linhas a A, na forma escalonada.

Resposta:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 := L_3 \\ L_3 := L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 := L_3 - 2L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 := L_3 + 5L_2]{} C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

A matriz C é uma matriz escalonada porque o primeiro elemento não nulo de cada linha está numa coluna à direita da coluna em que está o primeiro elemento não nulo de cada uma das linhas anteriores.

(b) Calcule a entrada $(3, 2)$ da matriz adjunta de A

Resposta: a entrada $(3, 2)$ da matriz adjunta de A é o cofactor (ou complemento algébrico) A_{23}, com

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5.$$

(3.0) 3. (a) Justifique que:
Se A é uma matriz de ordem m e o sistema $AX = B$ é possível e determinado então, para qualquer C, $m \times 1$, o sistema $AX = C$ tem solução única.

(b) A afirmação da alínea anterior é ainda verdadeira se A é uma matriz $m \times n$, com $m > n$? Justifique.

Resposta:

(a) A matriz A é quadrada de ordem m e o sistema $AX = B$ é possível e determinado, portanto podemos concluir que $\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = m$ e que a matriz A é invertível. Uma vez que A é invertível, qualquer sistema com a matriz A é possível e determinado, ou seja o sistema $AX = C$ é possível e determinado e tem solução única ($X = A^{-1}C$).

(b) Neste caso a matriz A não é uma matriz quadrada, $\text{car}(A) \leq \min\{m, n\} = n$. Como o sistema $AX = B$ é possível e determinado sabemos que $\text{car}(A) = \text{car}(A|B)$ e igual ao número de colunas de A, ou seja, $\text{car}(A) = n$. Relativamente ao sistema $AX = C$, que tem mais equações que variáveis, sabemos apenas que $\text{car}(A) = n$ e que $\text{car}(A|C)$ pode ser igual ou maior a n, $\text{car}(A|C) \geq n$. Assim, o sistema $AX = C$ pode ser possível e determinado (quando $\text{car}(A) = n = \text{car}(A|C)$), mas pode também ser impossível, caso em que $\text{car}(A) = n < \text{car}(A|C)$.

(6.0) 4. (a) Use propriedades dos determinantes e, eventualmente, o Teorema de Laplace, para mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b), \qquad \text{onde } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Resposta: tendo em conta que o determinante não se altera ao somar a uma linha um múltiplo de outra linha, uma possibilidade de resolução do exercício consiste em aplicar, num primeiro passo, as operações $L_2 := L_2 - aL_1$ e $L_3 := L_3 - a^2L_1$ e, em seguida, calcular o determinante aplicando o Teorema de Laplace, fazendo o desenvolvimento pela primeira coluna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix},$$
$$= (b-a)(c^2-a^2) - (b^2-a^2)(c-a) = (b-a)(c-a)(c+a) - (b-a)(b+a)(c-a)$$
$$= (b-a)(c-a)(c-b).$$

(b) Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz invertível.

Resposta: considerando $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$ no determinante do enunciado principal obtém-se o determinante de A. Da igualdade da alínea anterior vem

$$\det(A) = (2-1)(3-1)(3-2) = 2.$$

Como $\det(A) = 2 \neq 0$, conclui-se que A é uma matriz invertível.

(c) Diga, justificando, qual é o volume do paralelepípedo com arestas correspondentes aos vetores $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,4)$ e $w = (1,3,9)$.

Resposta: o volume V do paralelepípedo com arestas u, v e w é obtido através do módulo do produto misto de u, v e w,

$$V = |(u \times v) \cdot w|,$$

que pode ser calculado através do seguinte determinante:

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \right| = |\det(A^\top)| = |\det(A)| = 2,$$

onde A é a matriz da alínea anterior.

(d) Calcule a área do paralelogramo de lados $u = (1,1,1)$ e $v = (1,2,4)$.

Resposta: a área do paralelogramo determinado pelos vetores u e v é igual a $||u \times v||$. Para obter o vetor resultante do produto externo $u \times v$, calculamos o seguinte determinante (aplicando o desenvolvimento de Laplace através da primeira linha):

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} i + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} j + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} k = 2i - 3j + k.$$

A área do paralelogramo é igual a

$$||(2,-3,1)|| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$$

(4.0) 5. Considere os planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ de equações gerais $x + y - z = 2$ e $2x - 2y - z = 5$, respectivamente.

(a) Verifique que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são concorrentes e apresente uma equação vetorial ou equações paramétricas da reta $\mathcal{R}$ resultante da interseção dos planos.

Resposta:
Consideremos o sistema que tem como equações as equações gerais dos planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$: $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-2y-z=5 \end{cases}$.
A matriz ampliada do sistema é reduzida a uma matriz escalonada:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 := L_2 - 2L_1]{} [C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Verifica-se que $\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 2 < n = 3$, sendo n o número de variáveis do sistema (ou colunas da matriz A). Portanto, o sistema é possível e indeterminado, o que significa que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ têm pontos em comum. Como $car(A) = 2$, O grau de indeterminação do sistema (ou número de variáveis livres) é igual a $nul(A) = n - car(A) = 3 - 2 = 1$, onde $nul(A)$ é a nulidade de A. Conclui-se, assim, que a interseção dos planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ é uma reta e, consequentemente, $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são concorrentes.

Para a determinação de equações paramétricas ou de uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ resultante da interseção de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, terminamos a resolução do sistema inicial. Da matriz escalonada $[C|D]$ vem

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ -4y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1-4y=2 \\ z=1+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+3y \\ z=1+4y \end{cases},$$

onde $y \in \mathbb{R}$ é uma variável livre. Então as equações paramétricas da reta $\mathcal{R}$ são as seguintes equações:

$$\begin{cases} x=3+3\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+4\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Em alternativa, podemos apresentar a equação vetorial de $\mathcal{R}$:

$$(x,y,z) = (3,0,1) + \lambda(3,1,4), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Determine a distância do ponto $A(1,1,0)$ ao plano $\mathcal{P}_2$.

Resposta:
A distância de A a $\mathcal{P}_2$ é igual a

$$d(A, \mathcal{P}_2) = \frac{|2(1) - 2(1) - 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{3}.$$

Em alternativa, tendo em conta que $u = (2,-2,-1) \perp \mathcal{P}_2$, podemos determinar a reta $\mathcal{S}$ ortogonal a $\mathcal{P}_2$ e que contém A:

$$(x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(2,-2,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Das equações paramétricas de $\mathcal{S}$ e da equação geral de $\mathcal{P}_2$ obtém-se $2(1+2\lambda) - 2(1-2\lambda) + \lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow 9\lambda = 5 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{9}$. Substituindo λ por este valor obtém-se o ponto Q que resulta da interseção de $\mathcal{S}$ com $\mathcal{P}_2$:

$$\begin{cases} x=1+2\frac{(5)}{9} \\ y=1-2\frac{(5)}{9} \\ z=-\frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{19}{9} \\ y=-\frac{1}{9} \\ z=-\frac{5}{9} \end{cases} \longrightarrow Q\left(\frac{19}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{5}{9}\right).$$

Conclui-se, assim, que

$$d(A,\mathcal{P}_2) = d(A,Q) = ||\overrightarrow{AQ}|| = ||Q - A|| = ||\left(\frac{19}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{5}{9}\right) - (1,1,0)|| = ||\left(\frac{10}{9}, -\frac{10}{9}, -\frac{5}{9}\right)||$$

$$= \sqrt{\left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{-10}{9}\right)^2 + \left(\frac{-5}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{225}}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$