

Espaços Vetoriais Reais

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Folha Prática 3

Subespaços vetoriais

- Averigue se são subespaços vetoriais reais dos espaços indicados, com as operações usuais de adição e multiplicação por um escalar:
 - o conjunto dos vetores (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tais que $x + 2y = 0$ e $z = 1$;
 - o conjunto dos vetores (x, y, z) de \mathbb{R}^3 colineares a $(1, 2, 3)$, incluindo o vetor nulo;
 - o conjunto das funções reais de variável real que são pares.
- No espaço vetorial \mathbb{R}^2 , o conjunto dos vetores (x, y) tais que
 - $x + y = 0$;
 - $(x, y) \neq (1, 1)$.
 - No espaço vetorial \mathbb{R}^3 , o conjunto dos vetores (x, y, z) tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 - No espaço vetorial \mathcal{P}_2 dos polinómios em x de grau não superior a 2, o conjunto dos polinómios $ax^2 + bx + c$ com
 - $c = 0$;
 - $b = 1$;
 - $bc = 0$.
 - No espaço vetorial $M_{n \times n}$ das matrizes quadradas de ordem n , o conjunto das matrizes
 - simétricas;
 - triangulares ($n > 1$);
 - de determinante 1;
 - invertíveis;
 - $X \in M_{n \times n}$ tais que $AX = O$;
 - $X \in M_{n \times n}$ tais que $AX = I_n$, sendo $A \in M_{n \times n}$.
 - No espaço vetorial \mathbb{R}^m , o conjunto $\{AX : X \in \mathbb{R}^n\}$, sendo $A \in M_{m \times n}$.
 - No espaço vetorial \mathbb{R}^n , o conjunto dos vetores que são ortogonais a um dado vector $X \in \mathbb{R}^n$.
- Sejam \mathcal{V} um espaço vetorial real e $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{V}$. Mostre que o conjunto

$$\mathcal{S} = \{a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço de \mathcal{V} . (\mathcal{S} é o subespaço de \mathcal{V} gerado por X_1, X_2, X_3 .)

Combinação linear, espaço gerado e independência linear


- Escreva, sempre que possível, o vetor
 - $(2, -3, -4, 3)$ como combinação linear dos vetores $(1, 2, 1, 0)$ e $(4, 1, -2, 3)$;
 - $(1, 1, 0)$ como combinação linear dos vetores $(2, 1, -2)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$;
 - $-t^2 + t + 4$ como combinação linear dos vetores $t^2 + 2t + 1$, $t^2 + 3$ e $t - 1$;
 - $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- Determine o espaço gerado pelos conjuntos de vetores indicados.
 - $\{(0, 1), (2, 1), (2, 2)\}$ em \mathbb{R}^2 ;
 - $\{(0, 1), (0, 2)\}$ em \mathbb{R}^2 ;
 - $\{(2, 2, 3), (-1, -2, 1), (0, 1, 0)\}$ em \mathbb{R}^3 ;
 - $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (2, 2, 2)\}$ em \mathbb{R}^3 ;
 - $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$ em \mathcal{P}_2 .
- Determine um conjunto gerador do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^2 e u um vetor não nulo de \mathbb{R}^2 .
- Verifique que $\langle u \rangle$ é a recta que passa pela origem e tem a direcção de u .
 - Represente geometricamente $\langle (1, -1) \rangle$.
8. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 e os vetores u_1 e u_2 de \mathbb{R}^3 linearmente independentes.
- Mostre que o subespaço gerado por u_1 é a recta que passa pela origem e tem a direcção do vector u_1 .
 - Mostre que o subespaço gerado pelos vetores u_1 e u_2 é o plano que passa pela origem e que contém os vetores u_1 e u_2 .
 - Represente geometricamente:
 - $\langle (1, -1, 2) \rangle$;
 - $\langle (1, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle$;
 - $\langle (1, -1, 1), (-2, 2, -2) \rangle$.
9. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes. A
- $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (1, -1, 1)\}$;
 - $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$;
 - $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 2, 3), (1, 3, 0, -1)\}$;
 - $\{2t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$.
10. Seja $A = \{X_1, X_2, X_3\}$ um conjunto linearmente independente num espaço vetorial real \mathcal{V} . Averigue se conjunto $B = \{X_1 + X_2, X_1 + X_3, X_2 + X_3\}$ é linearmente independente em \mathcal{V} .
11. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ um conjunto de vetores de \mathbb{R}^n linearmente independente. Mostre que, se A é uma matriz quadrada de ordem n invertível, então $\{AX_1, \dots, AX_n\}$ é linearmente independente.

Bases e dimensão

12. Dos seguintes conjuntos de vetores indique os que são bases dos espaços vetoriais indicados:

- $\{(1, 2), (2, 4)\}$ em \mathbb{R}^2 ;
- $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ em \mathbb{R}^3 ;
- $\{(1, 0, 1), (2, 1, 0), (3, 1, 1)\}$ em \mathbb{R}^3 ;
- $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ em \mathbb{R}^4 ;
-  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ em $M_{2 \times 2}$;
- $\{3t^2 + 2t + 1, t^2 + t + 1, t^2 + 1\}$ em \mathcal{P}_2 .

13. Determine uma base e a dimensão do subespaço gerado pelos vetores:

- $(1, 3, 0), (-1, 1, 0)$ em \mathbb{R}^3 ;
- $(1, -1, 1), (0, 2, 1), (1, 1, 2)$ em \mathbb{R}^3 ;
- $t^2 + 1, t^2 - t + 1$ em \mathcal{P}_2 .

14. Determine todos os valores de a para os quais $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 . ✓

15. Determine uma base de \mathbb{R}^4 que contenha os vetores $(1, 0, 1, 0)$ e $(0, 1, -1, 0)$. 

16. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\}$.

- Verifique que S é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .
- Determine um conjunto gerador de S e verifique se ele é linearmente independente.
- Indique, justificando, a dimensão de S .

17. Mostre que, se $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ for uma base de um espaço vetoriais real \mathcal{V} , então

- $\{cX_1, X_2, \dots, X_n\}$ com $c \neq 0$ é também uma base de \mathcal{V} ;
- $\{X_1 + X_2 + \dots + X_n, X_2 + \dots + X_n, \dots, X_n\}$ é ainda uma base de \mathcal{V} .

Espaço das linhas e espaço das colunas, espaço nulo e nulidade

18. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine uma base do espaço nulo de A e indique, justificando, a nulidade de A .
(b) Determine o subespaço $\mathcal{S} = \{AX : X \in \mathbb{R}^4\}$.
(c) Mostre que $\{(1, -1, -1), (4, -3, -2)\}$ é uma base de \mathcal{S} .

19. Para cada uma das matrizes $A \in M_{m \times n}$ a seguir:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- i. determine uma base para o espaço nulo de A ;
ii. determine bases para o espaço das linhas e o espaço das colunas de A ;
iii. calcule a característica e a nulidade, e verifique que $\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n$;
iv. diga, usando a informação dada pela característica, se as linhas de A são linearmente independentes.

20. Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$. Mostre que

- (a) o espaço das colunas de A é o conjunto $\{AX : X \in \mathbb{R}^n\}$;
(b) o espaço das colunas de AB está contido no espaço das colunas de A .

Coordenadas e mudança de base

21. Considere a base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ de \mathbb{R}^4 constituída pelos vetores

$$X_1 = (1, 1, 0, 0), \quad X_2 = (1, 0, 0, 0), \quad X_3 = (1, 1, 1, 0), \quad X_4 = (1, 1, 1, 1).$$

Determine as coordenadas dos seguintes vetores na base \mathcal{B} .

- (a) $(-1, 2, -6, 5)$;
(b) $(2, 1, 0, 0)$;
(c) $(1, 2, 3, 4)$.

22. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1), (0, 2, 0), (0, 0, -1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 3, -1))$ de \mathbb{R}^3 .

- (a) Calcule $[X]_{\mathcal{B}_1}$ e $[X]_{\mathcal{B}_2}$ para
i. $X = (2, 3, 5)$; ii. $X = (-1, 2, 0)$; iii. $X = (1, 1, 1)$.
(b) Determine a matriz P de mudança da base \mathcal{B}_1 para a base \mathcal{B}_2 . Confirme os resultados obtidos em (a) usando P .

23. Sejam $S = ((1, 2), (0, 1))$ e $T = ((1, 1), (2, 3))$ duas bases de \mathbb{R}^2 e o vetor $X = (1, 5)$. Determine

- (a) as coordenadas de X na base T ;
(b) o vetor Z tal que $[Z]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$;
(c) a matriz P de mudança da base T para a base S ;
(d) as coordenadas de X na base S usando P ;
(e) as coordenadas de X na base S diretamente;
(f) a matriz Q de mudança da base S para a base T ;
(g) as coordenadas de X na base T usando Q .

24. Sejam $S = (X_1, X_2, X_3)$ e $T = (Y_1, Y_2, Y_3)$ bases de \mathbb{R}^3 com $X_1 = (-1, 1, 0)$, $X_2 = (1, 0, 1)$ e $X_3 = (0, 0, 1)$. Determine T , sabendo que a matriz de mudança da base T para a base S é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$



25. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando convenientemente.

- (a) Todos os vetores da forma $(a, 0, -a)$ com $a \in \mathbb{R}$ formam um subespaço de \mathbb{R}^3 .
- (b) Todo o conjunto de vetores de \mathbb{R}^3 com dois vetores é linearmente independente.
- (c) O espaço das soluções do sistema homogêneo $AX = 0$ é gerado pelas colunas de A .
- (d) Se as colunas de uma matriz $n \times n$ formarem uma base de \mathbb{R}^n , então o mesmo acontece com as linhas.
- (e) Se A é uma matriz 8×8 tal que o sistema homogêneo $AX = 0$ só tem a solução trivial, então $\text{car}(A) < 8$.
- (f) Todo o conjunto de 5 vetores em \mathbb{R}^5 é uma base em \mathbb{R}^5 .
- (g) Todo o conjunto de vetores de \mathbb{R}^3 linearmente independente contém 3 vetores.
- (h) Se A é uma matriz simétrica $n \times n$, então $\text{car}(A) = n$.
- (i) Todo o conjunto de vetores que geram \mathbb{R}^3 contém pelo menos 3 vetores.