Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

1. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$; (e) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Propriedades dos determinantes

2. Mostre que se c é um número real e A é uma matriz do tipo $n \times n$, então $\det(cA) = c^n \det(A)$.

3. Se A e B são matrizes 5×5 tais que $|A| = 3$ e $|B| = -5$, determine, justificando, os seguintes determinantes:

(a) $|A^T|$; (b) $|AB|$; (c) $|A^4|$; (d) $|B^{-1}|$; (e) $|2A|$; (f) $|2A^{-1}|$; (g) $\left|(2A)^{-1}\right|$;
(h) $\left|\left(2A^{-1}\right)^T\right|$; (i) $|AB^{-1}A^T|$.

4. Sejam A e B matrizes 5×5, com B invertível. Sabendo que $\det(AB) = 24$ e $\det(B^{-1}) = 4$, calcule $\det(A)$.

5. Sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 7$, determine, justificando, o valor dos seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 4c_2 & 4c_3 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} a_1 - 5c_1 & a_2 - 5c_2 & a_3 - 5c_3 \\ 10b_1 & 10b_2 & 10b_3 \\ -4c_1 & -4c_2 & -4c_3 \end{vmatrix}$.

6. Sem calcular explicitamente os determinantes, mostre que:

(a) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$;

(b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

7. Utilizando apenas propriedades dos determinantes, calcule:

(a) $\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & a_2+2b_2 & a_3+2b_3 \\ 3c_1+b_1 & 3c_2+b_2 & 3c_3+b_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}$, sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1$;

(b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, sabendo que $\begin{vmatrix} 2a_1 & a_2+a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2+b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 10$;

(c) $\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1+a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2+a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3+a_3 \end{vmatrix}$, sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2$;

(d) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_3 & 2a_3+5a_1 \\ b_1+b_2 & b_3 & 2b_3+5b_1 \\ c_1+c_2 & c_3 & 2c_3+5c_1 \end{vmatrix}$, sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1$.

Teorema de Laplace

8. Calcule os determinantes seguintes usando o Teorema de Laplace:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & -6 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Matrizes invertíveis, matriz adjunta e matriz inversa

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine a matriz adjunta de A, $\operatorname{adj} A$.

   (b) Calcule o determinante de A.

   (c) Mostre que $A\,(\operatorname{adj} A) = \det(A)\, I_3$.

   (d) Calcule a matriz inversa de A.

10. Calcule a adjunta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e efetue o produto $A\,(\operatorname{adj} A)$. Sem efetuar mais cálculos indique o valor do determinante de A.

11. Calcule, caso exista, a inversa das seguintes matrizes:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

12. Verifique que a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
é invertível e calcule o elemento $(1, 2)$ da inversa de A.

13. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule o determinante de A.

   (b) Calcule o elemento $(2, 3)$ da adjunta de A e o elemento $(2, 3)$ da inversa de A.

14. Dada a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
calcule o elemento $(4, 1)$ da inversa de A, A^{-1}, sem determinar a matriz A^{-1}.

15. Determine todos os valores de α para os quais a matriz
$$\begin{bmatrix} \alpha - 4 & 0 & 10 \\ 4 & \alpha + 5 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha - 3 \end{bmatrix}$$
é singular.

16. Se
$$A = \begin{bmatrix} \beta & 6 & 1 \\ 0 & \beta - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta + 5 \end{bmatrix},$$
determine todos os valores de β para os quais o sistema homogéneo $AX = 0$ apenas admite a solução trivial.

Regra de Cramer

17. Diga em que condições se pode usar a Regra de Cramer para resolver um sistema de equações lineares.

18. Se possível, resolva os seguintes sistemas de equações lineares, usando a Regra de Cramer:

(a) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 6 \\ 3x + 2y - z = -1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 4x - 3z = -2 \\ 2x - y = -2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -2x - y + z = -3 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + 3y + 2z + w = 0 \\ 2y + z + 3w = 4 \\ 2x + y - z + 2w = 5 \\ 3x - z + 3w = 9 \end{cases}$

Exercícios de aplicação das propriedades dos determinantes

19. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e B e C matrizes tais que $AB = AC$.
Mostre que se $\det(A) \neq 0$, então $B = C$. Mostre ainda através de um exemplo não trivial que esta conclusão pode não ser válida se $\det(A) = 0$.

20. Mostre que:
   (a) Se A é uma matriz $n \times n$, então $\det(AA^T) \geq 0$;
   (b) Se A e B são matrizes quadradas e $AB = I_n$, então $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$;
   (c) Sendo A e B matrizes $n \times n$, se A é singular, então AB também é uma matriz singular;
   (d) Se A é uma matriz não singular tal que $A^2 = A$, então $\det(A) = 1$;
   (e) Se $A = A^{-1}$, então $\det(A) = \pm 1$;
   (f) Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 invertível, então $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A^2)$.

21. Diga, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa.
   (a) $\det\left(AA^T\right) = \det\left(A^2\right)$;
   (b) $\det(-A) = -\det(A)$;
   (c) Se $A^T = A^{-1}$, então $\det(A) = 1$;
   (d) Se $\det(A) = 0$, então $A = O$;
   (e) Se $\det(A) = 7$, então o sistema $AX = 0$ tem apenas a solução trivial;
   (f) Se $A^4 = I_n$, então $\det(A) = 1$;
   (g) Se $A^2 = A$ e $A \neq I_n$, então $\det(A) = 0$;
   (h) Se $\det(AB) = 0$, então $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$;
   (i) Se $AB \neq BA$ então $\det(AB) \neq \det(BA)$;

22. Seja A uma matriz $n \times n$ com determinante não nulo. Mostre que $\det(\operatorname{adj} A) = \left(\det(A)\right)^{n-1}$.

1. (a) 1; (b) -3; (c) 1; (d) -43; (e) 3.

3. (a) 3; (b) -15; (c) 81; (d) $-\frac{1}{5}$; (e) 96; (f) $\frac{32}{3}$; (g) $\frac{1}{96}$; (h) $\frac{32}{3}$; (i) $-\frac{9}{5}$.

3. $\frac{16}{3}$.

4. 96.

5. (a) 28; (b) -7; (c) -280.

7. (a) 3; (b) 5; (c) 16; (d) 5.

8. (a) -13; (b) 37; (c) 1496; (d) -8; (e) 0.

9. (a) $\begin{bmatrix} -14 & -2 & -11 \\ -32 & 14 & 12 \\ -40 & 50 & 15 \end{bmatrix}$; (b) -130; (d) $\begin{bmatrix} \frac{7}{65} & \frac{1}{65} & \frac{11}{130} \\ \frac{16}{65} & -\frac{7}{65} & -\frac{6}{65} \\ \frac{4}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{3}{26} \end{bmatrix}$.

10. $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$; $A\,(\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $\det(A) = -2$.

11. (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{15} & -\frac{11}{60} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{39}{17} & 2 & -\frac{16}{17} \\ 0 & \frac{2}{17} & 0 & \frac{3}{17} \\ -1 & \frac{21}{17} & -1 & \frac{6}{17} \\ 0 & \frac{5}{17} & 0 & -\frac{1}{17} \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$.

12. O elemento $(1, 2)$ de A^{-1} é 1.

13. (a) 2; (b) o elemento $(2, 3)$ de $\operatorname{adj} A$ é 2 e o elemento $(2, 3)$ de A^{-1} é 1

14. O elemento $(4, 1)$ de A^{-1} é -1.

15. $\alpha \in \{-5, -1, 8\}$.

16. $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-2 - \sqrt{10}, 0, -2 + \sqrt{10}\}$.

17. Se a matriz dos coeficiente do sistema é quadrada e tem determinante não nulo.

18. (a) $x = -2$, $y = 1$, $z = -3$; (b) $x = -\frac{28}{11}$, $y = -\frac{34}{11}$, $z = -\frac{30}{11}$; (c) $x = -2$, $y = -1$, $z = -8$; (d) $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$, $w = 2$.

19. Se $\det(A) \neq 0$, então A é invertível e $AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C$.

21. (a) Verdadeira; (b) falsa; (c) falsa; (d) falsa; (e) verdadeira; (f) falsa; (g) verdadeira; (h) verdadeira; (i) falsa;