

Álgebra Linear e Geometria Analítica

O determinante

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

Determinante de uma matriz quadrada

Cálculo do determinante

Matrizes de ordem 2

Regra de Sarrus

Teorema de Laplace

Propriedades do determinante

Matrizes invertíveis, adjunta e inversa

Sistemas de equações lineares - regra de Cramer

Significado geométrico do determinante

Determinante de uma matriz quadrada

Existe uma **única** função que a cada matriz quadrada A de colunas C_1, \dots, C_n faz corresponder um escalar real $\det(A)$, satisfazendo:

1. $\det(I_n) = 1$,

2. $\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$,

3. $\det(C_1, \dots, \alpha C_i, \dots, C_n) = \alpha \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$,

4. $\det(C_1, \dots, \widehat{C}_i + \widetilde{C}_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, \widehat{C}_i, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, \widetilde{C}_i, \dots, C_n)$,

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ e $C_i = \widehat{C}_i + \widetilde{C}_i$.

A função $\det(A)$ designa-se por **determinante** de A . Esta função também é frequentemente denotada por $|A|$.

Determinante das matrizes 2×2

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Exercício: Verifique as propriedades 1-4 da definição.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então

$$\det(A) = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -2.$$

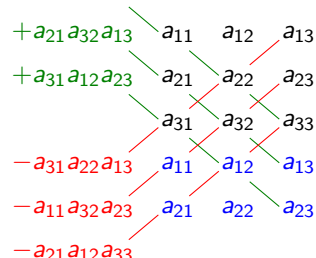
Determinante das matrizes 3×3

$$A = [C_1 \ C_2 \ C_3] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

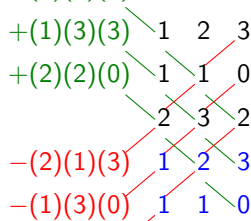
Regra de Sarrus (só para matrizes 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} \\ +a_{21}a_{32}a_{13} \\ +a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} \\ -a_{11}a_{32}a_{23} \\ -a_{21}a_{12}a_{33}$$


Regra de Sarrus - Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) = & +(1)(1)(2) \\ & +(1)(3)(3) \\ & +(2)(2)(0) \\ & -(2)(1)(3) \\ & -(1)(3)(0) \\ & -(1)(2)(2) \end{aligned}$$


$$\det(A) = 2 + 9 + 0 - 6 - 0 - 4 = 1$$

Menor, cofator e adjunta

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ $n \times n$, seja M_{ij} a matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtém de A por eliminação da sua linha i e coluna j .

- O **menor** de a_{ij} é $\det(M_{ij})$.
- O **cofator** (ou **complemento algébrico**) de a_{ij} é $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$.

- A **adjunta** de A é a matriz $n \times n$ $\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$

Exemplo

Relativamente à matriz A do exemplo anterior,

$$\det(M_{21}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \det(M_{21}) = 5 \quad \text{e} \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Teorema de Laplace

Teorema:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n . Então

- para cada $i = 1, \dots, n$,

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}$$

(desenvolvimento de Laplace do $\det(A)$ a partir da linha i);

- para cada $j = 1, \dots, n$,

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

(desenvolvimento de Laplace do $\det(A)$ a partir da coluna j).

Corolário:

O determinante de uma matriz triangular é o produto das entradas na diagonal.

Teorema de Laplace

Cálculo do determinante de uma matriz 3×3 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

pelo Teorema de Laplace, por expansão a partir da primeira linha, obtém-se

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Teorema de Laplace – Exemplo

Considere-se, novamente, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Cálculo do $\det(A)$ pelo **Teorema de Laplace**, por **expansão a partir da terceira coluna**:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 A_{13} + 0 A_{23} + 2 A_{33} \\ &= 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(3 - 2) + 2(1 - 2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Propriedades do determinante

1. $\det(A) = \det(A^T)$.
2. Se A tem uma linha (coluna) **nula**, ou duas linhas (colunas) **iguais**, então $\det(A) = 0$.
3. Se B resulta de A por uma troca de duas linhas (colunas), $L_i \leftrightarrow L_j$, então $\det(B) = -\det(A)$.
4. Se B resulta de A por multiplicação de uma linha (coluna) de A por um escalar α , $L_i := \alpha L_i$, então $\det(B) = \alpha \det(A)$.
5. Se B resulta de A substituindo a linha i pela sua soma com um múltiplo da linha j , $L_i := L_i + \alpha L_j$, então $\det(B) = \det(A)$.
6. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Nota: $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Determinante, adjunta e inversa de uma matriz

Teorema

A é invertível $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Corolário

Seja A $n \times n$. O sistema homogêneo $AX = 0$ tem uma solução não trivial se e só se $\det(A) = 0$.

Teorema

Seja A invertível. Então

$$\blacktriangleright \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\blacktriangleright A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj } A.$$

Regra de Cramer

Seja A $n \times n$ tal que $\det(A) \neq 0$.

Então o sistema $AX = B$ é possível e determinado e a sua **única solução** é

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é dada por

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

onde A_j se obtém de A por substituição da sua coluna j pela coluna B .

Regra de Cramer – Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $\det(A) = 4 \neq 0$, pode usar-se a [Regra de Cramer](#).

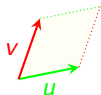
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{4}{4} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

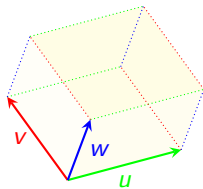
Significado geométrico do determinante

Área de um paralelogramo



$$\text{Área}(u, v) = |\det(A)| \quad \text{para} \quad A = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \quad \text{matriz } 2 \times 2$$

Volume de um paralelepípedo



$$\text{Volume}(u, v, w) = |\det(A)| \quad \text{para} \quad A = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \quad \text{matriz } 3 \times 3$$