

Álgebra Linear e Geometria Analítica**Agrupamento IV:** Mestrado Integrado em Eng.^a Eletrónica e Telecomunicações | Mestrado Integrado em Eng.^a de Computadores eTelemática | Licenciatura em Eng.^a Informática

30 de Outubro de 2019

Duração: 1h30

1ª prova de avaliação

Justifique devidamente todas as suas respostas.

1. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas
- x, y
- e
- z
- e com os parâmetros
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- .

$$\begin{cases} \alpha y + 2z = \alpha \\ x + \alpha y + 3z = 0 \\ \alpha x + z = \beta \end{cases}$$

- (a) Determine os valores de
- α
- e de
- β
- para os quais o sistema é

- i. possível e determinado;
- ii. possível e indeterminado;
- iii. impossível.

- (b) Faça
- $\alpha = 1$
- e
- $\beta = -1$
- . Determine o conjunto de soluções do sistema.

2. Considere
- A
- e
- B
- , matrizes
- 4×4
- tais que
- $\det(A) = 3$
- e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Verifique que
- B
- é invertível.

- (b) Calcule
- $\det(2A^T B^{-1})$
- .

3. Sejam
- A
- ,
- B
- e
- C
- matrizes quadradas tais que
- $AB = AC$
- .

- (a) Mostre que, se
- $\det(A) \neq 0$
- , então
- $B = C$
- .

- (b) Verifique ainda, usando um exemplo em que
- A
- não é a matriz nula, que esta conclusão pode não ser válida se
- $\det(A) = 0$
- .

4. Em
- \mathbb{R}^3
- considere o ponto
- $P(1, -1, 1)$
- , a reta
- \mathcal{R}
- de equações cartesianas
- $\begin{cases} 2y + z = -1 \\ 2x + 3y + z = -1 \end{cases}$
- e o plano
- \mathcal{P}
- de equação cartesiana
- $2x + 3y + z = -1$
- .

- (a) Obtenha a equação cartesiana do plano que passa no ponto
- $P(1, -1, 1)$
- e é ortogonal à reta
- \mathcal{R}
- .

- (b) Indique a posição relativa da reta
- \mathcal{R}
- e do plano
- \mathcal{P}
- . Qual a distância entre ambos?

- (c) Determine a distância do ponto
- P
- ao plano
- \mathcal{P}
- .

5. Considere o sistema de equações lineares
- $AX = B$
- , cuja matriz ampliada
- $[A|B]$
- é equivalente por linhas à matriz
- $[C|D]$
- seguintes

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ a & a & 1 & -1 \end{array} \right], \quad [C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1-a \end{array} \right],$$

sendo a um parâmetro real. Indique, justificando, os valores de a para os quais:

- (a)
- $(1, -1, -1) \in \mathcal{C}(A)$
- , sendo
- $\mathcal{C}(A)$
- o conjunto de todas as combinações lineares das colunas de
- A
- ;

- (b) a reta
- \mathcal{R}'
- de equações cartesianas
- $\begin{cases} ay + z = -1 \\ ax + ay + z = -1 \end{cases}$
- é estritamente paralela ao plano
- \mathcal{P}'
- de equação cartesiana
- $x + y + z = 1$
- .

Questão	1	2	3	4	5
Cotação	5	4	4	4,5	2,5