Tutorium Lineare Algebra

Vorlesung Mathematik 1 - Lineare Algebra - WS 2022/23

Tobias Goetz, Mario Schwartz, Felix Schladt

DHBW Ravensburg

January 26, 2023

Inhalt

Über uns

- Tutoren: Tobias Götz, Mario Schwartz, Felix Schladt
- Mail: dhbw@tobiasgoetz.de oder alternativ über die DHBW Mailadressen
- Schwerpunkt: Mobile Informatik (TIM) / IT Security (TIS)

Zum Tutorium

- Ziel: Stoff wiederholen und Fragen klären
- Wann: verschieden
- Wo: Siehe Rapla
- Anwesenheit ist freiwillig

Bruchgesetze

1. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$
2. $\frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$
3. $\frac{a}{b} * c = \frac{ac}{b}$
4. $\frac{a}{b} * c^{-1} = \frac{a}{bc}$
5. $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{bc}$

Bruchgesetze Rechenarten

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
2. $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$
3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
4. $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$
5. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

Bruchgesetzte Formeln Übungen

1. $\frac{a}{b} * (1 + \frac{c}{1-c})$
2. $\frac{a}{\ln(1)}$
3. $\frac{6p+11}{2p+4} - \frac{2p+5}{p^2+2p} - 3$

Bruchgesetze Formeln Übungen Lösungen

1. $\frac{a}{b} * (1 + \frac{c}{1-c}) = \frac{a}{b} * (\frac{1-c}{1-c} + \frac{c}{1-c}) = \frac{a}{b} * (\frac{1}{1-c})$
2. $\frac{a}{\ln(1)}$ Nicht erlaubt, da durch 0 geteilt wird
3. $\frac{6p+11}{2p+4} - \frac{2p+5}{p^2+2p} - 3 = \frac{6p^2+11p-4p-10-6p^2-12p}{2p(p+2)} = -\frac{5}{2p}$

Binomische Formeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Binomische Formeln Übungen

1. $(2 + r)^2 - (2 - r)^2$
2. $\frac{1}{2}a^2 - 4ab + 4b^2$
3. $(0.5 - y)^2 - (0.5x - y) * (0.5 + y)$

Binomische Formeln Übungen Lösungen

1. $(2+r)^2 - (2-r)^2 = 8r$
2. $\frac{1}{2}a^2 - 4ab + 4b^2$ hier kann keine binomische Formel angewendet werden
3. $(0.5 - y)^2 - (0.5x - y) * (0.5 + y) =$
   $0.25x^2 - xy + y^2 - 0.25x^2 + y^2 - xy + 2y^2$

Potenzgesetze

- $a^m * a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^n * b^n = (ab)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a}{b}^n$
- $(a^m)^n = a^{m*n}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Potenzgesetze Übungen

1. $\frac{1^3}{5^n}$
2. $\frac{5^0 - \sin(a^2) + \cos(a^2)}{\ln(e)}$
3. $x^{-n} * x$
4. $\frac{x^5+1}{x^{m+2}} - \frac{2x^2-2}{x^m} + \frac{2-x}{x^{m-2}}$

Potenzgesetze Lösungen

1. $\frac{1^3}{5^n} = (\frac{1}{5})^n$
2. $\frac{5^0 - \sin(a^2) + \cos(a^2)}{\ln(e)} = \frac{1-1}{1} = 0$
3. $x^{-n} * x = x^{-n+1}$
4. $\frac{x^5+1}{x^{m+2}} - \frac{2x^2-2}{x^m} + \frac{2-x}{x^{m-2}} = \frac{x^5+1-2x^4-2x^2+2x^4-x^5}{x^{m+2}} = \frac{1+2x^2}{x^{m+2}}$

Definitionen

- Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte
- Einzelne Objekte heißen **Elemente.**
- A ist **Teilmenge** von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Mengenschreibweisen

- $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ bedeutet die Menge aller Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$
- $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \bmod 2 = 0\}$ bedeutet die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 2 teilbar sind
- $A \subseteq B$ bedeutet, dass A Teilmenge von B ist
- $A \subset B$ bedeutet, dass A Teilmenge von B ist und $A \neq B$
- $a \in A$ bedeutet, dass a Element von A ist
- $a \notin A$ bedeutet, dass a kein Element von A ist

Mengenoperationen

- $A \subseteq B$ bedeutet, dass A Teilmenge von B ist
- $A \subset B$ bedeutet, dass A Teilmenge von B ist und $A \neq B$
- $a \in A$ bedeutet, dass a Element von A ist
- $a \notin A$ bedeutet, dass a kein Element von A ist
- $A \cap B$ bedeutet die Schnittmenge von A und B
- $A \cup B$ bedeutet die Vereinigungsmenge von A und B
- $A \setminus B$ bedeutet die Differenzmenge von A und B

Uebung

Es seien $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ zwei Mengen. Berechnen Sie die folgenden Mengen:

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $A \setminus B$
4. $B \setminus A$

Loesung

Es seien $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ zwei Mengen. Berechnen Sie die folgenden Mengen:

1. $A \cap B = \{3, 4, 5\}$
2. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
3. $A \setminus B = \{1, 2\}$
4. $B \setminus A = \{6, 7\}$

Bekannte Zahlenmengen

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ist die Menge aller ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \wedge b \neq 0\}$ ist die Menge aller rationalen Zahlen
- $\mathbb{I} = \mathbb{R} \cup \mathbb{Q}$ ist die Menge aller irrationalen Zahlen
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ ist die Menge aller reellen Zahlen
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge aller komplexen Zahlen $i = \sqrt{-1}$

Summen, Produkte

- $x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \iff x = \sum_{i=1}^{10} i$
- $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \iff x = \prod_{i=1}^{10} i \iff 10!$

Uebung

Schreiben Sie die folgenden Summen und Produkte in Summen- und Produktform:

1. $x = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$
2. $x = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$
3. $x = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$
4. $x = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 + 30$

Uebung Loesung

Schreiben Sie die folgenden Summen und Produkte in Summen- und Produktform:

1. $x = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \sum_{i=1}^{5} 2i$
2. $x = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{i=1}^{5} 2i - 1$
3. $x = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = \prod_{i=1}^{5} 2i - 1$
4. $x = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 + 30 = \sum_{i=1}^{10} 3i$

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion wird verwendet um die Gültigkeit von Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu beweisen, die größer oder gleich einem Startwert sind

Vorgehen wie bei Domino:
Bedingung zuerst für den ersten "Stein" prüfen und dann für den nächsten, welcher alle anderen umwirft

- Induktionsanfang(IA)($n = 1$):
- Induktionsvoraussetzung(IV):
  Die Aussage gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$
- Induktionsschritt(IS)($n \Rightarrow n + 1$):
  Die Aussage gilt für "immer das nächste n"

Vollständige Induktion

Zu beweisende Aussage: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

- Induktionsanfang(IA)($n = 1$):
  $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$
- Induktionsvoraussetzung(IV):
  Die Aussage gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$
- Induktionsschritt(IS)($n \Rightarrow n + 1$):
  $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n + 1) \overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) =$
  $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n(n+1)+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \blacksquare$

Vollständige Induktion

Übungsaufgabe:

- Summe über Quadratzahlen: Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen gilt:
  $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Summe über ungerade Zahlen: Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen gilt:
  $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

Vollständige Induktion

Lösungen zu 1:

- Induktionsanfang
  $\sum_{i=1}^{1} 1^2 = \frac{1(1+1)(2*1+1)}{6} = 1$
- Aus Induktionsanfang folgt Induktionsvorraussetzung
- Induktionsschritt ($n \Rightarrow n+1$):
  $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Vollständige Induktion

Lösungen zu 1:

- $\sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
- $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n^2 + 1$
- $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} + \frac{6n^2+12n+6}{6}$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{((n+1)^2)6}{6} = \frac{(n+1)+(n+2)(2*(n+1)+1)}{6}$