OSCILATOR: SIMULACIÓN DE UN MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO

CARLOS LÓPEZ CAMEY Y MARTÍN GUZMÁN

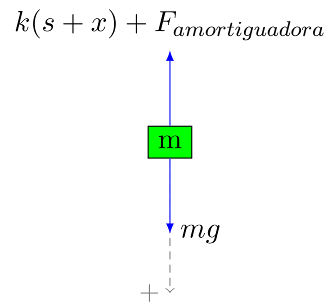
Abstract. Diseñamos y construímos un simulador de un sistema masa-resorte en un movimiento libre amortiguado.

1. Modelaje

Consideremos un sistema-masa resorte, en donde un resorte flexible se suspende verticalmente de un soporte rígido y luego se une una masa m a su extremo libre. Existe también una fuerza amortiguada $F_{amortiguadora}$ considerada proporcional a la velocidad instantánea del sistema v, digamos $F_{amortiguadora} = bv$.

Sabemos que por la Ley de Hooke, el resorte ejerce una fuerza restauradora $F_{resorte} = ks$ opuesta a la dirección de alargamiento y proporcional a la cantidad de elongación s en donde k es una constante de proporcionalidad llamada **constante de resorte**.

En un diagrama de cuerpo libre, tenemos



Deducimos por la segunda ley de Newton que

$$ma = mg - k(s+x) - F_{amortiguadora} = mg - ks - kx - F_{amortiguadora}$$

Notemos que los términos mg y ks son iguales en $t = 0$, por lo que

$$ma = -kx - F_{amortiguadora}$$

$$ma + bv + kx = 0$$

Escrito de otra forma,

$$my'' + by' + kx = 0 \tag{1}$$

Con condiciones iniciales $y(0) = s = x_o$ y $y'(0) = v_o$

2. Solución

Re-escribiendo (**??**) tenemos:

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = 0 \tag{2}$$

en donde escogemos $2\lambda = \frac{b}{m}$ y $\omega^2 = \frac{k}{m}$ por conveniencia algebraíca.

Tenemos una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, cuyo polinomio característico es

$$m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$$

con raíces en

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$
$$m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Observemos que $\lambda^2 - \omega^2 = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = b^2 - 4mk$.
Notemos entonces que existen tres diferentes casos para las raíces i.e. soluciones

2.1. **Caso 1:** Si $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ entonces, tenemos dos soluciones reales y decimos que el sistema está **sobreamortiguado**, por que el coeficiente de amortiguamiento b es grande comparado con la constante de resorte k. La solución correspondiente a **??** y por consiguiente a la expresión que modela el movimiento en función del tiempo es,

$$y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$$

En donde sabemos que $y(0) = x_o$, por lo tanto

$$y(0) = x_o = c_1 + c_2 \implies c_1 = x_o - c_2$$

Derivando (**??**), tenemos

$$y'(t) = c_1 m_1 e^{m_1 t} + c_2 m_2 e^{m_2 t}$$

Y dadas las condiciones iniciales, podemos evaluar en $t = 0$, que

$$y'(0) = v_o = c_1 m_1 + c_2 m_2$$

Substituyendo $c_1 = x_o - c_2$

$$v_o = (x_o - c_2) m_1 + c_2 m_2$$

$$\implies c_2 = \frac{v_o - x_o m_1}{m_2 - m_1}$$

Notemos que c_1 y c_2 están en términos de las condiciones del problema.

2.2. **Caso 2:** Si $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ entonces, decimos que el sistema está críticamente amortiguado y tenemos una solución real, por lo que la solución correspondiente sería

$$y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_1 t}$$

e inmediatamente vemos que

$$y(0) = c_1 = x_o$$

De nuevo, derivando la solución $y(t)$, tenemos la expresión que modela a la velocidad de este respecto al tiempo

$$y'(t) = c_1 m_1 e^{m_1 t} + c_2 [m_1 t e^{m_1 t} + e^{m_1 t}]$$

que dadas las condiciones iniciales, tenemos

$$y'(0) = x_o m_1 + c2 = v_o$$

$$\implies c_2 = v_o - x_o m_1$$

2.3. **Caso 3:** Si $\lambda^2 - \omega^2 < 0$, decimos que el sistema está subamortiguado, puesto que el coeficiente de amortiguamiento es pequeño comparado con la constante del resorte. Las raíces ahora son complejas:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} i$$
$$m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} i$$

Así que la ecuación general de (**??**) en este caso es,

$$y(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

en donde $\beta = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$
Entonces,

$$y'(t) = -\lambda e^t(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) + e^{-\lambda t}\beta(-c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t)$$

Por lo tanto,

$$y(0) = c_1 = x_o$$

y

$$y'(0) = -\lambda c_1 + c_2 \beta$$

$$\implies c_2 = \frac{v_o + \lambda x_o}{\beta}$$

Tenemos entonces, para cualquiera de los tres casos, una función solución $y(t)$ en función de las condiciones iniciales y de las características del resorte, fuerza amortiguadora y la masa relacionada.

3. Simulación

Para la simulación, tuvimos que hacerla por medio de 4 imágenes separadas: El gancho de arriba, el resorte, el gancho de abajo y la masa.

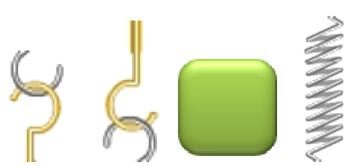


Figure 1. Imágenes utilizadas

Cada una de estas concatenada a donde finalizaba la anterior, componían el sistema.

FIGURE 2. Como luce el sistema "armado"

Algoritmo: Se tenía una variable que controlaba el tamaño vertical i.e. altura del resorte, dependiendo de la función solución $y(t)$.

Se tenía un *Timer* que corría cada 50 milisegundos y representaba a la variable independiente, t. Finalmente, lo que se hacía era asignarle una escala al resultado de $y(t)$ para mejor visualización en pantalla.

El secreto estubo en irle cambiando el tamaño del resorte y siempre manteniendo la masa y el gancho al final de éste

4. Ejemplos

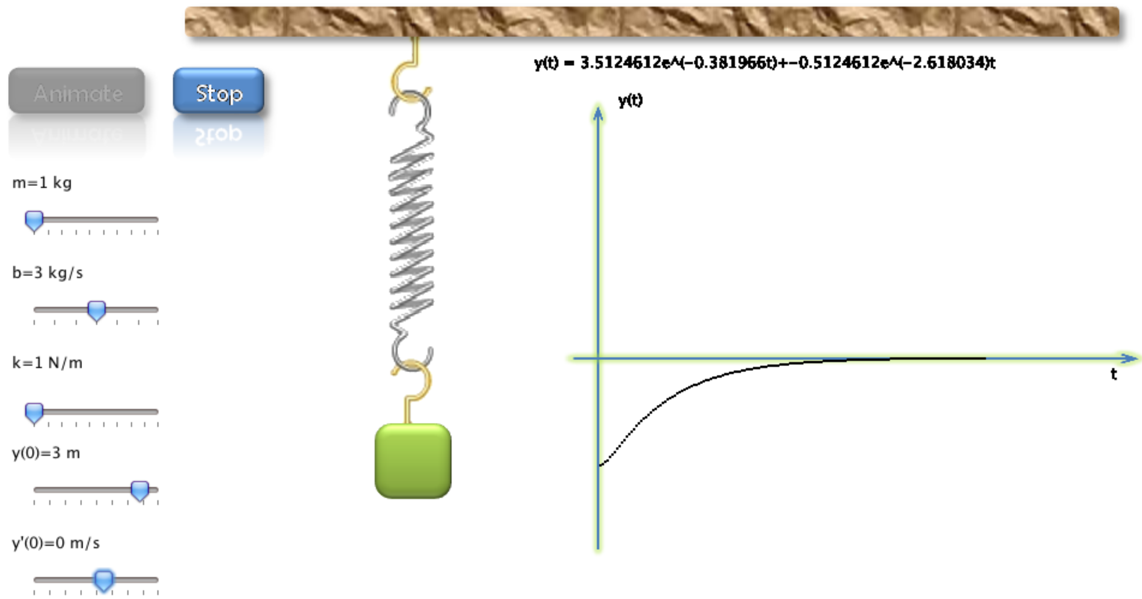
4.1. **Sistema sobre-amortiguado.** Supongamos $m = 1$, $b = 3$, $k = 1$ con condiciones iniciales $y(0) = 3$ y $y'(0) = 0$.

Tenemos entonces, el caso sobre-amortiguado ya que vemos que $b^2 > 4mk$, y por lo tanto las raíces del polinomio característico de la E.D. diferencial $y''(t) + 3y'(t) + y = 0$ que modela este caso, son dos soluciones reales distintas.

Entonces, la función solución del problema está dada por

$$y(t) = 3.512e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} - 0.512e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t}$$

Y simulada, se ve de la siguiente manera

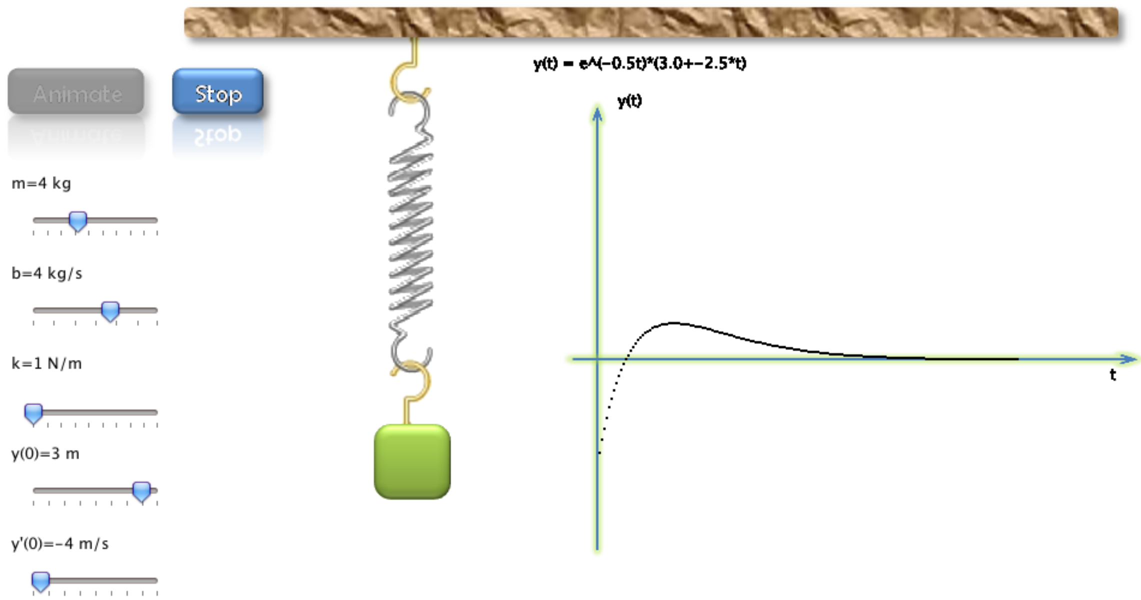


4.2. **Sistema críticamente-amortiguado.** Supongamos $m = 4$, $b = 4$, $k = 1$ con condiciones iniciales $y(0) = 3$ y $y'(0) = -4$.

Tenemos entonces, el caso críticamente-amortiguado ya que vemos que $b^2 = 4mk$, y por lo tanto las raíces del polinomio característico de la E.D. diferencial $4y''(t) + 4y'(t) + y = 0$ que modela este otro caso, son iguales

Entonces, la función solución del problema está dada por

$$y(t) = 3e^{-\frac{t}{2}} - \frac{5}{2}te^{-\frac{t}{2}} = e^{-\frac{t}{2}}(3 - \frac{5}{2}t)$$

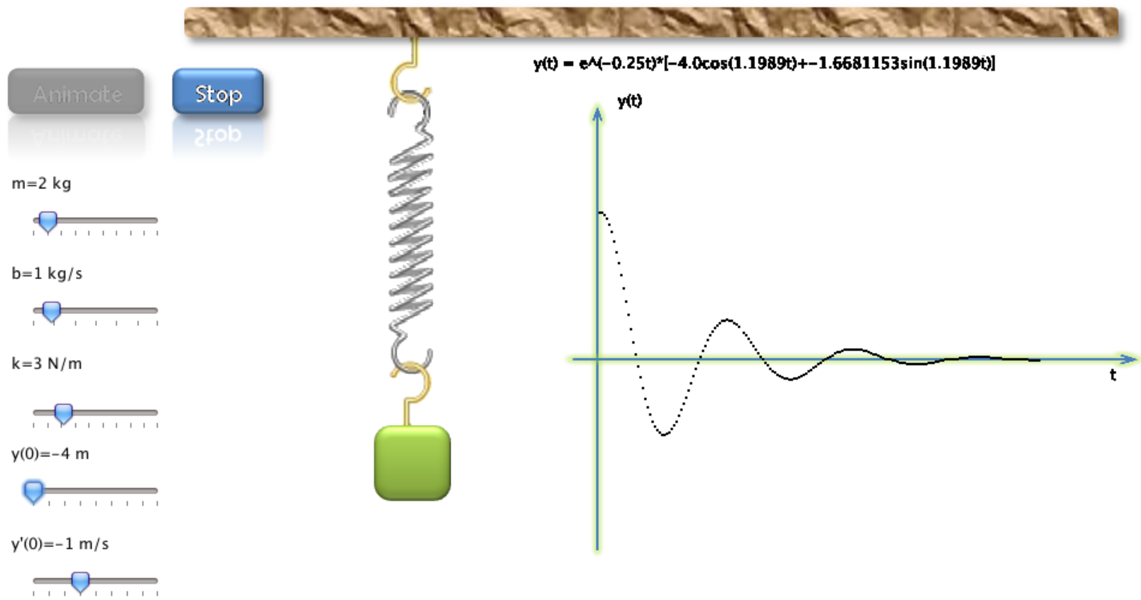


4.3. **Sistema sub-amortiguado.** Supongamos $m = 2$, $b = 1$, $k = 3$ con condiciones iniciales $y(0) = -4$ y $y'(0) = -1$.

Tenemos entonces, el caso sub-amortiguado ya que vemos que $b^2 < 4mk$, y por lo tanto las raíces del polinomio característico de la E.D. diferencial $2y''(t) + y'(t) + 3y = 0$ que modela este otro caso, son imaginarias.

Entonces, la función solución del problema está dada por

$$y(t) = e^{-\frac{1}{4}t}(-4\cos\frac{\sqrt{23}}{4}t - \frac{8\sqrt{23}}{23}\sin\frac{\sqrt{23}}{4}t)$$


Animate
Stop
m=2 kg
b=1 kg/s
k=3 N/m
y(0)=-4 m
y'(0)=-1 m/s
y(t) = e^(-0.25t)*[-4.0cos(1.1989t)+-1.6681153sin(1.1989t)]
y(t)
t