UVG

CURSO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Introducción

Solución de ecuaciones de una variable (1)

Guatemala, 6 de julio de 2010

Introducción

Métricas

Definición:

Sea X un conjunto no vacío. Una función d:XxX$\rightarrow$R es llamada una métrica sobre X si satisface las condiciones siguientes:

i)d(x,y)$\geq$0; d(x,y)=0 ssi x=y;

ii)d(x,y)=d(y,x);

iii)d(x,y)$\leq$d(x,z)+d(z,y).

El par (X,d) es un espacio métrico.

Métricas

Notas:

1. **Si X' es un subconjunto de X, entonces d también es una métrica sobre X', y se dice que (X',d) es un subespacio de (X,d).**

2. **La función d(x,y) puede (y debe) interpretarse como la distancia entre los elementos x & y en el espacio (X,d).**

3. **Los espacios métricos más conocidos son los del tipo R^n, clase especial de los llamados *Euclidiandos*.**

Métricas

Si X es un espacio vectorial, a menudo es posible expresar la métrica d en términos de una función de una variable que puede interpretarse como la *longitud* de cada elemento (i.e., su distancia desde 0).

<u>Definición</u>

Sea X un espacio vectorial real o complejo. Una función $\|.\|:X\to R$ es llamada una <u>norma</u> sobre X si satisface:

1. $\|x\|\geq 0$; $\|x\|=0$ ssi $x=0$.

2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$, para todo $x\in X$ y todo escalar α.

3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

Métricas

Un espacio vectorial dotado de una norma se dice es un *espacio normado*.

Dada una norma sobre X, la función

$$d(x,y):=\|x-y\|$$

es una métrica sobre X. Sin embargo, no toda métrica sobre X surge de esa forma.

Definición: Sea X un espacio vectorial real. Una función $(\cdot,\cdot):X x X \to R$ es un producto interno sobre X, si satisface las siguientes propiedades:

Métricas

1. $(x,x) \geq 0$, para todo $x \in X$; $(x,x)=0$ ssi $x=0$.

2. $(x,y)=(y,x)$.

3. $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$.

Nótese que el producto interno genera una norma:

$$\|x\|=(x,x)^{1/2}$$

Por lo tanto, todo espacio con producto interno, es un espacio normado (y es, por lo tanto, espacio métrico).

Métricas

Ejemplos:

i) R^n es un espacio con producto interno.

ii) Para cualquier conjunto X, podemos definir la *métrica discreta* como

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

iii) En R la métrica usual es $d(x,y)=|x-y|$

Convergencia

Definición:

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio métrico (X,d) converge a $x \in X$, si para cada $\varepsilon>0$, existe un número entero n_ε tal que $d(x_n,x)<\varepsilon$, para todo $n>n_\varepsilon$.

Definición:

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio métrico (M,d) es de *Cauchy* si, $d(x_n,x_m)\rightarrow 0$, cuando $n,m\rightarrow\infty$.

Continuidad

Definición:

Una función $F:A\rightarrow B$ es continua en el punto a, si:

i) $a\in A$;

ii) Para cada $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$, tal que $d_B(F(x),F(y))<\varepsilon$, cuando $d_A(x,y)<\delta$.

Si F es continua en cada punto de un conjunto S, decimos que F es continua en S. Se dice que F es continua, si F es continua en cada punto de su dominio.

Teorema del Valor Intermedio

Si f es una función continua en [a,b] y K es cualquier número entre f(a) y f(b), entonces existe un número c en (a,b) tal que f(c)=K.

Ejemplo: $F(x)=x^5-2x^3+3x^2-1$, tiene una raíz en [0,1], ya que F(0)=-1 y F(1)=1. Dado que F es un polinomio (y por lo tanto, una función continua), por el teorema del valor intermedio, existe un número c en (0,1), tal que F(c)=0.

Nótese que el teorema asegura la existencia de la raíz, pero no proporciona un procedimiento para encontrarla.

El Teorema de Taylor

Suponga que f tiene hasta la n-ésima derivada continua en [a,b], que $f^{(n+1)}$ existe en (a,b) y x_0 es un elemento de [a,b]. Entonces, existe un número $\xi(x)$ entre x_0 y x, tal que $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, donde

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Algoritmo

Un <u>algoritmo</u> es un procedimiento que describe, sin ambigüedades, una serie finita de pasos a realizar en un orden específico, para que, partiendo de un conjunto de datos o condiciones iniciales, se obtenga un resultado.

El algoritmo es <u>estable,</u> si cambios pequeños en los datos iniciales corresponden a cambios pequeños en los resultados.

Algoritmo

Un algoritmo que es estable sólo para ciertas elecciones de datos iniciales es <u>condicionalmente estable.</u>

Un algoritmo que no es estable se dice es <u>inestable</u> <u>(¡¡¡¡ ??? !!!!)</u>.

Solución de ecuaciones de una variable (1)

Soluciones de Ecuaciones de una Variable

Problema: Encontrar una “buena” aproximación de las soluciones de la ecuación $F(x)=0$.

Idea general de los métodos de solución:

- **Se propone una aproximación inicial x_0 de la solución;**
- **¿Es válido $F(x_0)=0$? En caso que no,**
- **Se estima (mediante un proceso iterativo), una nueva aproximación, digamos x_1;**

Soluciones de Ecuaciones de una Variable

– **¿Son x_0 y x_1 muy parecidos? En caso la respuesta es afirmativa, entonces el procedimiento llegó al final. En otro caso,**

– **Se calcula una nueva aproximación, $x_{2,}$...,**

– **El proceso finaliza hasta que se tiene una aproximación que satisface los requerimientos de exactitud que se predefinen.**

Soluciones de Ecuaciones de una Variable

Nótese que la idea es generar una sucesión de aproximaciones $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, de tal manera que el límite de esta sucesión es nuestra aproximación a la solución del problema.

¿Cómo se encuentra el límite de la sucesión?

No se encuentra, se utiliza el criterio de Cauchy para la convergencia de sucesiones, el cual asegura la existencia y proporciona un procedimiento que indica que "se está cerca del límite".

Soluciones de Ecuaciones de una Variable

El criterio de Cauchy considera que, la sucesión está “cerca del límite”, cuando al tomar dos términos sucesivos de la secuencia, éstos se encuentran lo suficientemente cercanos que son, en referencia a la tolerancia seleccionada, indistinguibles.

Soluciones de Ecuaciones de una Variable

Supóngase se selecciona una tolerancia $\varepsilon>0$ (por ejemplo, "4 cifras de exactitud" es equivalente a una tolerancia de 0.00001), y se genera una sucesión de aproximaciones $x_0,\ldots,x_n,\ldots$, para la solución de $F(x)=0$.

Entonces, se tienen las siguientes posibilidades para el criterio de parada (o "alto") para el método de solución:

Soluciones de Ecuaciones de una Variable

Condición 1:

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$$

Condición 2:

$$\frac{\left|x_n - x_{n-1}\right|}{\left|x_n\right|} < \varepsilon, \quad \left|x_n\right| \neq 0$$

Condición 3:

$$\left|F(x_n)\right| < \varepsilon$$

Soluciones de Ecuaciones de una Variable

¿Cómo iniciar el problema?

Dos tipos:

1. **Problema restringido: En este caso, se predefine el intervalo en el que se estudia la existencia de la raíz;**

2. **Problema irrestricto: No se hace referencia a intervalo alguno.**

   Nótese que todo problema irrestricto se transforma en un problema restringido, mediante la aplicación del teorema del valor intermedio.

Soluciones de Ecuaciones de una Variable

Métodos usuales para generar las aproximaciones:

1. **Método de Bisección (o método de encajonamiento o de “arrinconamiento”);**
2. **Iteración de Punto Fijo (caso en que el problema F(x)=0 se transforma en G(x)=x);**
3. **Método de Newton-Raphson (¡La función debe ser diferenciable!)**
4. **Método de la Secante (la versión de N-R para no diferenciables).**
5. **Método “Régula Falsi” (o de la “posición falsa”).**

Método de Bisección

Método de Bisección: Suponiendo que F una función continua en [a,b], con F(a)F(b)<0, entonces

1. El método siempre converge a una solución.

2. El número de iteraciones puede ser muy grande, antes que el método converja.

3. El método de bisección genera una sucesión $\{x_n\}$ que aproxima a un cero c de F, tal que

$$|x_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Método de Bisección

¿Qué sucede si la función F tiene un cambio de signo en [a,b], pero no es necesariamente continua?

Este método sigue un procedimiento que busca el “encajonamiento” del origen del cambio de signo de la función. De esa cuenta, el método podría encontrar una discontinuidad, en lugar de una raíz.

Método de Bisección

¡Cuidado!

Recuerde que, si la función es continua y hay cambio de signo en un intervalo, entonces la función tiene un cero en dicho intervalo.

Si la función no tiene un cero en el intervalo I, entonces puede ocurrir que:

1. **La función no es continua; o**
2. **La función no tiene cambios de signo en I.**

Método de Bisección

¿Qué sucede si se aplica el método de bisección a una función que tiene más de un cero en un intervalo I?

La bisección ocurrirá. El método encontrará una de estas raíces (¡¡o bien una singularidad!!).

Ejemplo:

Encuentre $\sqrt{3}$

Método de Newton-Raphson

- **El método con mayor popularidad para aproximar las soluciones de F(x)=0 es el método de Newton, también conocido como método de Newton-Raphson (NR).**
- **Este método se distingue porque en su aplicación es necesaria la evaluación de la función F y de su derivada F' en puntos arbitrarios x.**
- **El método se fundamenta en una aproximación lineal de Taylor para la función F(x).**

Método de Newton-Raphson

Considere el desarrollo de Taylor para F(x), alrededor de x_0,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$\approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

Recuérdese que estamos interesados en resolver el problema F(x)=0, entonces

$$x = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

Método de Newton-Raphson

Entonces, siguiendo con esta idea, se propone un procedimiento iterativo, así:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

Esta ecuación de recurrencia se conoce como método de Newton-Raphson.

Ejemplo: Encuentre la raíz cuadrada de 3.

Método de Newton-Raphson

- **Cerca de una raíz de F(x), este método casi duplica el número de cifras significativas de la aproximación (es por ello que se dice que NR es un método de convergencia cuadrática).**
- **Esa fortaleza, hace que NR sea el método de elección para una función cuya derivada es continua y no nula en una vecindad de la raíz.**

Método de Newton-Raphson

- **La convergencia del método de Newton-Raphson (NR) se asegura únicamente para valores de inicio "suficientemente cercanos" a la solución c de la ecuación F(x)=0.**
- **Como la solución exacta de la ecuación es desconocida, la metodología para encontrar la primera aproximación x_0 es también desconocida.**

Método de Newton-Raphson

Teorema: Sea F una función con, al menos, segunda derivada continua en [a,b] y no nula en (a,b), y tal que

i)F(a)F(b)<0;

ii)F”(x) es no negativa o no positiva para todo x∈[a,b];

iii)Si c denota el punto de [a,b] en el que $\left|F'(x)\right|$ **toma el menor valor, entonces**

$$\left|\frac{F(c)}{F'(c)}\right| \leq b-a$$

Entonces, el método NR converge a una solución única de F(x)=0 para cualquier selección de x_0 **en [a,b].**

Método de Newton-Raphson

<u>Nota histórica:</u>

1. Newton nunca tuvo interés en la aproximación numérica de soluciones de las ecuaciones. Su único ejemplo, en este tema, se refiere a una ecuación cúbica. En este ejemplo nunca se hace referencia a la derivada de la función.

2. El objetivo de Newton se enfocaba en, dada la ecuación $F(x,y)=0$, expresar y como una serie de potencias de x.

3. Antes de estudiar "algebráicamente" el problema anterior, Newton hizo un ejemplo con cálculos numéricos para la ecuación $y^3-2y-5=0$.

Método de Newton-Raphson

Nota histórica:

4. El trabajo en este tema fue desarrollado por Newton en 1669, pero publicado muchos años después. Los métodos numéricos que incluyó en su ejemplo fueron estudiados con anterioridad.

5.Veinte años después (1689), Raphson propone una ecuación similar al mecanismo recursivo de NR, pero únicamente para ciertos polinomios. Además, no hay mención a la derivada de la función.

6. La conexión entre el método y la derivada fue presentada 50 años después por Euler y Simpson.

7.La interpretación geométrica del método fue propuesta por Mourraille (1768), y el análisis de convergencia por Fourier y Cauchy en la segunda década del siglo XIX.

Método de Newton-Raphson

Ejercicios "especiales":

1. **¿Qué sucede con NR cuando, para una aproximación x_{n+1}, la función que se estudia alcanza un extremo relativo?**

2. **¿Es aplicable el método NR en el caso de la ecuación $z^3-1=0$, donde z es un número complejo?**

3. **Use el método NR para encontrar la menor y la segunda menor raíz positiva de $tanx=4x$ con cuatro decimales de exactitud.**

4. **Aplique el método NR a $f(x)=x(x+1)(x-1)$.**

5. **Encuentre <u>todas</u> las soluciones de $e^{2x}=x+6$ con 4 decimales de exactitud, mediante el método NR.**