

Ortogonalización de Gram-Schmidt

C. López *

Mayo del 2009



Este trabajo está licenciado bajo la licencia *Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0*.

Resumen

En cualquier espacio prehilbertiano, podemos escoger la base en la que queremos trabajar. Muy frecuentemente, el hecho de trabajar en una base ortogonal simplifica mucho los cálculos a hacer. El proceso de Gram-Schmidt es un algoritmo que construye una base ortonormal u ortogonal \mathcal{B} para un espacio prehilbertiano \mathcal{V} dada una base arbitraria \mathcal{D} para ese mismo espacio.

Introducción

El nombre de éste proceso proviene de los matemáticos Jørgen Perdersen Gram y Erhard Schmidt, aunque ellos *irónicamente* no fueran los primeros en trabajarlo. Las diferentes versiones que se han publicado del proceso que ahora conocemos como el proceso de Gram-Schmidt han sido una interesante historia. La primera, una versión ahora conocida como "modificación de Gram-Schmidt" (MGS) fue descrita por primera vez por Laplace en 1812 y es equivalente a un método descrito por Bauer (1865, casi 40 años después). Y también es un caso especial de un algoritmo más general atribuido a Cauchy! publicado en 1837. **Ref:** [3][4] Gram y Schmidt obtuvieron el crédito por publicarlo en alguna fecha entre los años 1907-1908. **Ref:** [1]

*Carlos Eduardo López Camey, Universidad del Valle de Guatemala, Álgebra Lineal, Carné #08107, <http://kmels.net>

Notación

\mathbb{R}, \mathbb{R}^n	números reales, n-tuplas de reales
$\{\dots \mid \dots\}$	conjunto de ... tales que ...
$(a..b), [a..b]$	intervalo (abierto o cerrado) de los reales entre a y b
V, W, U	espacios vectoriales
v, μ, ω	vectores
$\ v\ $	norma L-2 o euclidiana de v
$\langle \mu, v \rangle$ y $\mu \cdot v$	producto interno real entre los vectores μ y v
$\alpha_1 \alpha_2$	multiplicación de dos reales α_1 y α_2
$\mu \perp v$	ortogonalidad entre μ y v
$\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{E}$	conjuntos
B, D	bases

Producto interior, norma y ortogonalidad

Producto interior

El producto interior es una generalización de lo que conocemos como producto punto. En un espacio vectorial, es una manera de multiplicar vectores, dando como resultado de esta multiplicación, un escalar.

Un espacio vectorial junto con un producto interior en él, es llamado un **espacio prehilbertiano** o **espacio prehilbert**.

Definición 1. Un espacio vectorial V cuyo campo escalar es \mathbb{R} , es llamado un espacio prehilbertiano si para cada par de elementos μ, v en V está definido un producto interno real $\langle \mu, v \rangle$ cumpliéndose para $\mu, v, \omega \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\langle \mu + v, \omega \rangle = \langle \mu, \omega \rangle + \langle v, \omega \rangle$
 2. $\langle \alpha v, \omega \rangle = \alpha \langle v, \omega \rangle$
 3. $\langle v, \omega \rangle = \langle \omega, v \rangle$
 4. $\langle v, v \rangle > 0 \Leftrightarrow v \neq 0$
 5. $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
-

En general, decimos que el producto interno de dos vectores de n componentes reales es la combinación lineal de sus componentes, siendo éste el producto punto usual. Sean μ, ν vectores

$$\langle \mu, \nu \rangle = \mu \cdot \nu = \sum_{i=1}^n \mu_i \nu_i = \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \dots + \mu_n \nu_n$$

Ejemplo 1. El espacio euclidiano \mathbb{R}^n sobre los reales, en donde el producto interno está dado por el producto punto usual $\langle \mathbb{R}^n, \oplus, \otimes, \mathbb{R} \rangle$ es un espacio prehilbertiano. Sean μ, ν y ω vectores $\in \mathbb{R}^n$ y α escalar $\in \mathbb{R}$ entonces

$$1. \langle \mu \oplus \nu, \omega \rangle = \sum_{i=1}^n (\mu_i + \nu_i) \omega_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i + \sum_{i=1}^n \nu_i \omega_i = \langle \mu, \omega \rangle \oplus \langle \nu, \omega \rangle$$

$$2. \langle \alpha \otimes \nu, \omega \rangle = \sum_{i=1}^n (\alpha \mu_i) \omega_i = \sum_{i=1}^n \alpha (\mu_i \omega_i) = \alpha \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i = \alpha \otimes \langle \nu, \omega \rangle$$

$$3. \langle \nu, \omega \rangle = \langle \omega, \nu \rangle = \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i = \langle \omega, \nu \rangle$$

$$4. \langle \nu, \nu \rangle = \sum_{i=1}^n \nu_i \nu_i = \sum_{i=1}^n (\nu_i)^2 > 0 \Leftrightarrow \nu \neq 0$$

$$5. \langle \nu, \nu \rangle = \sum_{i=1}^n \nu_i \nu_i = \sum_{i=1}^n (\nu_i)^2 = 0 \Leftrightarrow \nu = 0$$

Dimensión de un vector

Sabemos lo que es la base de un espacio vectorial, y sabemos también que un espacio puede tener muchas bases diferentes. Por lo tanto, no podemos hablar de "la" base para un espacio vectorial, aunque algunos espacios vectoriales tengan bases que nos parece encontrar más naturalmente que otras, es decir, por ejemplo la base de P_2 , el espacio vectorial de los polinomios de grado mayor o igual que dos, tiene como una base a $\mathcal{B} = \langle 1, x, x^2 \rangle$.

Pero por ejemplo, en el espacio $\{ \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \mid 2\alpha_2 - \alpha_0 = \alpha_1 \}$ ninguna base se nos ocurre tan naturalmente como antes.

Sin embargo, podemos encontrar algo sobre las bases que está asociado únicamente con el espacio. Entonces, con cada espacio, podemos asociar un número, el número de vectores que aparecen en cualquiera de sus bases.

Definición 2. Un espacio vectorial es de dimensión finita si y solo si tiene una base con cualesquiera cantidad finita de vectores.

Longitud o norma de un vector

Definición 3. Dado un vector de dimensión n $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, para $p = 1, 2, \dots$, la norma denotada $\|\mathbf{v}\|_p$ de ese vector se define como $\|\mathbf{v}\|_p = (\sum_i |v_i|^p)^{1/p}$ y cumple con las siguientes propiedades: **Ref:** [5]

1. $\|\mathbf{v}\| > 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \neq 0$
2. $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$
3. $\|k\mathbf{v}\| = k\|\mathbf{v}\|$ para cualquier escalar k
4. $\|\mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\boldsymbol{\mu}\|$ también llamada **desigualdad triangular**

La norma más comunmente encontrada y con la que estaremos trabajando es la llamada norma-L2 o norma Eucladiana.

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_i |v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \quad (1)$$

En general, las propiedades (1), (2) y (3) se cumplen fácilmente siguiendo las propiedades del producto interno. La propiedad (4) o desigualdad triangular la demostraremos más adelante con la ayuda del siguiente teorema.

Teorema 1. Llamada también **desigualdad de Cauchy-Schwartz**, sean $\boldsymbol{\mu}$ y \mathbf{v} dos vectores cualesquiera en un espacio prehilbertiano, se cumple

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\boldsymbol{\mu}\| \|\mathbf{v}\|$$

manteniendo la igualdad si y solo si $\boldsymbol{\mu}$ y \mathbf{v} son linealmente dependientes.

Demostración: Si \mathbf{v} y $\boldsymbol{\mu}$ son linealmente dependientes, digamos $\boldsymbol{\mu} = \alpha \mathbf{v}$ para cualquier escalar α entonces

$$\langle \alpha \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\alpha \mathbf{v}\| \|\mathbf{v}\|$$

$$\alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{v}\|$$

$$\alpha ||v||^2 = \alpha ||v||^2$$

Si v y μ son linealmente independientes, entonces para cualquier escalar λ vemos que $\mu - \lambda v \neq 0$

$$\langle \mu - \lambda v, \mu - \lambda v \rangle > 0$$

$$\mu \cdot \mu - 2\lambda v \cdot \mu + \lambda^2 v \cdot v > 0$$

$$\langle \mu, \mu \rangle - 2\lambda \langle v, \mu \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle > 0$$

Supongamos $\lambda = \langle \mu, v \rangle \langle v, v \rangle^{-1}$

$$\langle \mu, \mu \rangle - 2\langle \mu, v \rangle \langle v, v \rangle^{-1} \langle v, \mu \rangle + (\langle \mu, v \rangle \langle v, v \rangle^{-1})^2 \langle v, v \rangle > 0$$

$$\langle \mu, \mu \rangle - 2\langle \mu, v \rangle \langle v, \mu \rangle \langle v, v \rangle^{-1} + \langle \mu, v \rangle^2 \langle v, v \rangle^{-2} \langle v, v \rangle > 0$$

$$\langle \mu, \mu \rangle - 2\langle \mu, \mu \rangle \langle v, v \rangle \langle v, v \rangle^{-1} + \langle \mu, v \rangle^2 \langle v, v \rangle^{-1} > 0$$

$$\langle \mu, v \rangle^2 \langle v, v \rangle^{-1} - \langle \mu, \mu \rangle > 0$$

Que es cierto si y solo si

$$\langle \mu, v \rangle^2 \langle v, v \rangle^{-1} > \langle \mu, \mu \rangle$$

$$\langle \mu, v \rangle^2 > \langle \mu, \mu \rangle \langle v, v \rangle$$

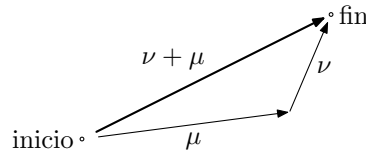
$$|\langle \mu, v \rangle| > ||\mu|| ||v||$$

□

Teorema 2. Llamado también teorema de **desigualdad triangular**, sean μ, v dos vectores cualesquiera en un espacio prehilbertiano,

$$||\mu + v|| \leq ||\mu|| + ||v||$$

Podríamos pensar que ésta desigualdad equivale al enunciado que afirma "La distancia más corta entre dos puntos está en una línea recta."



Demostración:

$$\begin{aligned} \|\mu + \nu\|^2 &\leq (\|\mu\| + \|\nu\|)^2 \\ \|\mu\|^2 + 2\langle \mu, \nu \rangle + \|\nu\|^2 &\leq \|\mu\|^2 + 2\|\mu\| \|\nu\| + \|\nu\|^2 \\ \langle \mu, \nu \rangle &\leq \|\mu\| \|\nu\| \end{aligned}$$

Cumplíndose usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz □

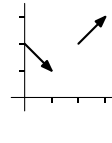
Nótese que la igualdad en ésta propiedad de la norma se mantiene de nuevo si y solo si los vectores μ y ν son linealmente dependientes.

Ortogonalidad

Definición 4. Sea V un espacio prehilbertiano: **Ref:** [6]

1. Dos vectores $\mu, \nu \in V$ son ortogonales si y solo si $\langle \mu, \nu \rangle = 0$
2. Un conjunto de vectores $\{\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n\}$ es ortogonal si $\mu_i \perp \mu_j \forall i, j \in [1..n]$ e $i \neq j$

Ejemplo 2. Dos vectores ortogonales respecto al producto interno de vectores, es decir, el producto punto



$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Teorema 3. Si un conjunto de vectores $\{\mu_1 \dots \mu_k\} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal para cada con $\mu_i \neq 0$, entonces el conjunto es linealmente independiente.

Demostración: Considérese la relación lineal $\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \dots + \alpha_k \mu_k = 0$. Si $i \in [1 \dots k]$, aplicando el producto punto μ_i en ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned} \mu_i \cdot (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \dots + \alpha_k \mu_k) &= \mu_i \cdot 0 \\ \mu_i \alpha_1 \mu_1 + \mu_i \alpha_2 \mu_2 + \dots + \mu_i \alpha_i \mu_i \dots + \mu_i \alpha_k \mu_k &= 0 \\ \alpha_1 (\mu_i \mu_1) + \alpha_2 (\mu_i \mu_2) + \dots + \alpha_i (\mu_i \mu_i) + \dots + \alpha_k (\mu_i \mu_k) &= 0 \\ \alpha_i (\mu_i \cdot \mu_i) &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es $\alpha_i = 0$ cumpliéndose la propiedad (4) del producto interno. □

Ejemplo 3 (Teorema de Pitágoras). Sea $\xi = \{\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n\}$ un conjunto ortogonal de vectores entonces

$$\|\sum_{i=1}^n \mu_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\mu_i\|^2$$

En particular, si $\mu \perp v \forall \mu, v \in \xi$

$$\|\mu + v\|^2 = \|\mu\|^2 + \|v\|^2$$

Demostración:

$$\|\sum_{i=1}^n \mu_i\|^2 = \langle \sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{j=1}^n \mu_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \mu_i, \sum_{j=1}^n \mu_j \rangle$$

Pero $\mu_i \cdot \mu_j = 0 \forall i \neq j$, entonces

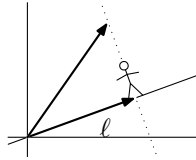
$$\sum_{i=1}^n \langle \mu_i, \sum_{j=1}^n \mu_j \rangle = \sum_{i=1}^n \|\mu_i\|^2$$

□

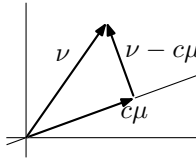
Proyecciones ortogonales

Hasta el momento hemos hablado de lo que es la norma de un vector, el producto interior de vectores y la propiedad de la ortogonalidad. Todas éstas nos ayudarán ahora a definir lo que es una proyección ortogonal.

Para poder explicar lo que es una proyección ortogonal, la consideraremos primero sobre una línea. Si queremos proyectar ortogonalmente un vector v sobre una línea ℓ , pensemos que ésta es la sombra que proyecta v en ℓ . Sabemos que un punto se obscurecerá en la línea si alguien en esa línea al ver hacia arriba o hacia abajo, puede observar a v .



La figura anterior muestra a alguien que ha caminado en la línea hasta que la punta del vector v esté justamente arriba de él. Aquí, la línea estará descrita como la extensión de algún vector $\ell = \{c\mu \mid c \in \mathbb{R}\} \neq 0$.



Podemos dar solución al coeficiente c al notar que $\mathbf{v} - c\boldsymbol{\mu} \perp c\boldsymbol{\mu}$, manteniendo \mathbf{v} su ortogonalidad con $\boldsymbol{\mu}$. Haciendo uso de la propiedad de la ortogonalidad

$$\langle \mathbf{v} - c\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} \rangle = 0 \Rightarrow c = \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu}}$$

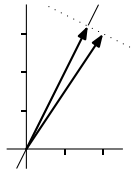
Definición 5. La proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre una línea extendida o generada por el vector $\boldsymbol{\mu} \neq 0$ es el vector

$$\text{proj}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\mu}$$

Ejemplo 4. Para proyectar ortogonalmente el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sobre la línea $y = 2x$, escogeremos primero la dirección de un vector para la línea y .

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

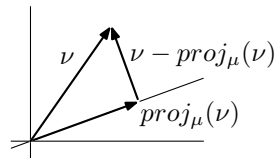
cumple. Entonces



$$\text{proj}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 16/5 \end{pmatrix}$$

El proceso de Gram-Schmidt

Podemos estudiar la proyección sobre una línea extendida por $\boldsymbol{\mu}$ como una descomposición de \mathbf{v} en dos partes



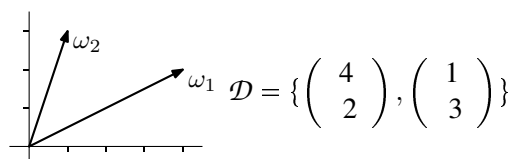
$$\mathbf{v} = \text{proj}_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{v} + (\mathbf{v} - \text{proj}_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{v})$$

Corolario 4. Un conjunto \mathcal{S} de vectores ortogonales en un sub-espacio de tamaño k de un espacio de dimensión k es una base para ese espacio.

Demostración: Sabemos que \mathcal{S} es linealmente independiente (Teorema 3) y cualquier subconjunto L.I. de tamaño k de un espacio de dimensión k es una base \square

Nótese que el inverso de éste Corolario no se cumple (no cualquier base de cualquier sub-espacio de \mathbb{R}^n está conformada por vectores ortogonales). Pero podemos decir que para cada sub-espacio de \mathbb{R}^n hay por lo menos una base compuesta por vectores ortogonales.

Ejemplo 5. Los vectores ω_1 y ω_2 de ésta base \mathcal{D} para \mathbb{R}^2 no son ortogonales

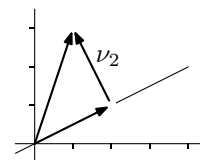


Sin embargo, podemos encontrar a partir de \mathcal{D} una nueva base para el mismo espacio que esté compuesta por vectores ortogonales. Para el primer vector miembro de nuestra nueva base escogeremos a ω_1

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para el segundo vector, quitaremos de ω_2 su parte en la dirección de v_1

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \text{proj}_{v_1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



que deja la parte v_2 de $\omega_2 \perp v_1$ (por la definición de proyección). Notemos que, por el Corolario (4), $\{v_1, v_2\}$ es una base para \mathbb{R}^2

Definición 6. Un conjunto de vectores ortogonal que es base para un espacio vectorial, es llamado **base ortogonal**.

Ejemplo 6. Para convertir a la base $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ de \mathbb{R}^3 en una base ortogonal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, tomaremos el primer vector v_1 de nuestra nueva base tal y como está dado en \mathcal{D} .

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos v_2 comenzando con el segundo vector miembro de \mathcal{D} y quitándole su parte en la dirección de v_1 (tal y como en el ejemplo anterior)

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{proj}_{v_1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

De igual manera, con v_3 , tomaremos el tercer vector dado en \mathcal{D} y quitándole su parte en la dirección de v_1 , y también en la dirección de v_2

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \text{proj}_{v_1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) - \text{proj}_{v_2} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De nuevo tenemos, que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, según el Corolario (4), es una base ortogonal para \mathbb{R}^n .

El siguiente resultado –propósito de ésta publicación– verifica que el proceso usado en estos últimos dos ejemplos funciona con cualquier base para cualquier sub-espacio de \mathbb{R}^n (estamos restringidos a \mathbb{R}^n ya que no dimos una definición de ortogonalidad para otros espacios vectoriales)

Teorema 5. Ortogonalización de Gram-Schmidt. Ref: [7] Si $\mathcal{B} = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ es una base para un sub-espacio de \mathbb{R}^n entonces, $\mathcal{D} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ donde

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega_1 \\ v_2 &= \omega_2 - \text{proj}_{v_1}(\omega_2) \\ v_3 &= \omega_3 - \text{proj}_{v_1}(\omega_3) - \text{proj}_{v_2}(\omega_3) \\ &\vdots \\ v_k &= \omega_k - \text{proj}_{v_1}(\omega_k) - \dots - \text{proj}_{v_{k-1}}(\omega_k) \end{aligned}$$

es una base ortogonal.

Demostración: Usaremos la inducción para probar que cada v_i es diferente de cero, está dentro del generado de $\{\omega_1 \dots \omega_i\}$ y es ortogonal a sus vectores precedentes, es decir $v_1 \cdot v_i = v_2 \cdot v_i \dots = v_{i-1} \cdot v_i = 0$. Cumpliéndose esto, junto con el Corolario (4), tendremos que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es una base para el mismo espacio que $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$.

Cubriremos los casos hasta $i = 3$, dejando al lector como ejercicio completar el resto de casos.

Para $i = 1$, el caso es trivial ya que establecemos $v_1 = \omega_1$, haciendolo diferente de cero y también está dentro del generado de \mathcal{B} . La tercera condición se cumple por vacuidad.

Para $i = 2$, expandiremos la definición de v_2

$$v_2 = \omega_2 - \text{proj}_{v_1}(\omega_2) = \omega_2 - \frac{\omega_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \omega_2 - \frac{\omega_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \omega_1$$

Vemos que v_2 es diferente de cero, de otro modo ésta sería una dependencia lineal de \mathcal{B} , también muestra que está en el generado de éste y es ortogonal a su único vector precedente

$$v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot (\omega_2 - \text{proj}_{v_1}(\omega_2)) = 0$$

por la definición de proyección.

Para $i = 3$, como en el caso de $i = 2$, expandiremos su definición

$$v_3 = \omega_3 - \frac{\omega_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{\omega_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \omega_3 - \frac{\omega_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \omega_1 - \frac{\omega_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} (\omega_2 - \frac{\omega_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \omega_1)$$

Mostrando que v_3 es diferente de cero y está en el generado. Mostrando que es ortogonal a su vector vector precedente v_1

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_3 &= v_1 \cdot (\omega_3 - \text{proj}_{v_1}(\omega_3) - \text{proj}_{v_2}(\omega_3)) \\ &= v_1 \cdot (\omega_3 - \text{proj}_{v_1}(\omega_3)) - v_1 \cdot \text{proj}_{v_2}(\omega_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vemos que el primer término es cero ya que ésta es una proyección ortogonal, como en el caso para $i = 2$. El segundo término es cero dado que v_1 es ortogonal a v_2 (y también lo es para cualquier vector en la línea expandida por v_2). Para mostrar que v_3 es ortogonal a su otro vector precedente v_2 , el proceso es el mismo. \square

Ahora que tenemos una base ortogonal, podríamos hacer que cada vector dentro de ésta tenga longitud o norma uno, diviendo a cada uno dentro de su propia longitud. A éste proceso se le llama **normalización** y a el conjunto ortogonal formado por vectores de longitud uno, **conjunto de vectores ortonormales**.

Ejemplo 7. Normalizando la norma de cada vector en la base ortogonal del ejemplo (6) produce esta *base ortonormal*

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Referencias

- [1] The National Science Digital Library, *Short History of the names behind the Gram-Schmidt Process*, The National Science Foundation.
- [2] Frank Deutsch, *Best approximation in inner product spaces*, Springer, 2001.
- [3] Owe Axelsson, *Iterative solution methods*, Edición 3, Cambridge University Press, 1996, ISBN 0521555698, 9780521555692
- [4] R.W. Farebrother, *Fitting Linear Relationships: A History of the Calculus of Observations 1750-1900*, Edición Ilustrada, Springer, 1999, ISBN 0387985980, 9780387985985
- [5] Gradshteyn, I. S. y Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, Sexta edición, p. 1081, 2000, ISBN 0123736374, 9780123736376
- [6] Ernest L. Hall, *Handbook of Industrial Automation, Orthogonality*, p. 60, ISBN ISBN 0824703731, 9780824703738
- [7] J. Hefferon, Linear Algebra, Saint Michael's College. [Agradecimiento especial por las imágenes elaboradas en Metapost usadas en éste texto]