UVG

CURSO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Solución de ecuaciones de una variable III

Guatemala, 27 de julio de 2009

Método de Bisección: Número de iteraciones

Problema: Dada la función $f(x)=x^3-x^2-1$, determine el número de iteraciones del método de bisección, requeridas para encontrar un cero de f, con un error absoluto no mayor de 10^{-6}.

Sol: Nótese que f(x) tiene una raíz en [1,2]. Ahora, buscamos un valor de *n* tal que

$$|x_n - c| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{2-1}{2^{n+1}} < 10^{-6}$$

$$\Rightarrow -(n+1)\log 2 < -6 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{6}{\log 2} \approx 19$$

Por lo tanto, se necesitan más de 19 iteraciones del método para alcanzar

Punto Fijo: condiciones de convergencia

<u>Problema</u>: Suponga que se desea resolver la ecuación $x=\pi+0.5(\operatorname{sen} x)$, utilizando el método de punto fijo. Si $G(x)=\pi+0.5(\operatorname{sen} x)$, debemos encontrar un intervalo en el que se cumplan las condiciones de convergencia del método.

<u>Sol</u>: Debe notarse que G(x) es continua, por ejemplo en $[0,2\pi]$, y que cualquier imagen de G se sitúa dentro de este intervalo.

Adicionalmente, G’(x), cumple

$$|G'(x)| = |0.5\cos x| < 1, \quad x \in [0,2\pi]$$

Así, el proceso de punto fijo convergerá a una solución única en ese intervalo.

NR es un método local

Considere la función f(x)=(4x-7)/(x-2) tiene una raíz en x=1.75. Utilice el método de NR para estudiar la convergencia de la iteración, en los casos de x_0=1.6, 1.5 y 3.

Entonces,

$$f(x) = \frac{4x-7}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \ldots = x_n + (4x_n - 7)(x_n - 2)$$

Con:

$x_0=1.6 \Rightarrow x_{n+1}$=1.84, 1.7824, 1.7554, 1.7500,…

$x_0=1.5 \Rightarrow x_{n+1}$=2,2,2,2,2,2,…

$x_0=3 \Rightarrow x_{n+1}$=8, 158, 97658, 38146972658,…

Una curiosidad: NR para sistemas de ec.

Problema:

Resolver el sistema de dos ecuaciones simultáneas no lineales:

$$F_1(x_1,x_2)=0$$

$$F_2(x_1,x_2)=0$$

Idea del método:

Dado un punto inicial (aproximación a la solución), se aproxima cada función no lineal mediante su plano tangente en el punto considerado. La aproximación siguiente es la raíz común de las ecuaciones lineales resultantes.

Una curiosidad: NR para sistemas de ec (II).

<u>El método</u>:

Cada paso del método consiste de dos procesos:

- **La aproximación de la solución responde al sistema iterativo:**

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i + \Delta x_i \\ y_i + \Delta y_i \end{bmatrix}$$

- **Donde cada "Δ", es solución del sistema de ecuaciones:**

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_i, y_i)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x_i, y_i)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x_i, y_i)}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2(x_i, y_i)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1(x_i, y_i) \\ f_2(x_i, y_i) \end{bmatrix}$$

Ejemplo: NR para sistemas

Problema:

Resuelva el sistema:

$$f_1(x,y)=x^3+3y^2-21=0$$

$$f_2(x,y)=x^2+2y+2=0$$

Utilizando el método de Newton, con el estimado inicial P=(1,-1). Itere hasta que $\max_i\{|\Delta x_i|\}<10^{-6}$ **.**

- **Entonces:**

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -17 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **por lo que:** $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0+\Delta x_0 \\ y_0+\Delta y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\Delta x_0 \\ -1+\Delta y_0 \end{bmatrix}$

Ejemplo: NR para sistemas (cont…)

Entonces:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.555556 \\ -2.055560 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.555556 \\ -2.055560 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.555556 \\ -3.055560 \end{bmatrix}$$

Así, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.865049 \\ -2.5006801 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.661337 \\ -2.359271 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.643173 \\ -2.349844 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.643038 \\ -2.349787 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_6 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.643038 \\ -2.349787 \end{bmatrix}$$

¿NR para Complejos?

¡Si!

Problema

Encuentre todas las soluciones de la ecuación polinomial z^3-1=0, donde $z \in C$.

Estrategia de solución:

Supóngase que z=x+iy, entonces elevando al cubo:

$$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + iy)^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3] - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 3xy^2 - 1) + i(3x^2y - y^3) = 0$$

NR para Complejos y los sistemas de ecs.

De lo anterior, entonces debe resolverse el sistema de ecuaciones simultáneo y no lineal:

$$x^3 - 3xy^2 - 1 = 0$$

$$3x^2y - y^3 = 0$$

El cual debe resolverse mediante la versión de NR para sistemas de ecuaciones (i.e., el método utilizando el Jacobiano).

De esta cuenta, NR aplica en los complejos de forma indirecto (i.e., el método ajustado vía planos tangente).

Métodos "muy matemáticos" para encontrar límites de sucesiones

Recordemos:

<u>Teorema de convergencia monótona</u>: Una sucesión de números reales que es monótona creciente es convergente ssi la sucesión es acotada. En este caso, el límite de la sucesión es el supremo de sus imágenes.

<u>Ejercicio:</u>

La secuencia a_n se define $a_0=0$, $a_{n+1}=(6+a_n)^{1/2}$. Compruebe que esta sucesión converge y encuentre el límite.

Monótona y acotada = Convergente

Probemos que la sucesión es creciente:

- **Sabemos que** $a_0 < a_1 = \sqrt{6}$.
- **Suponemos** $a_{n-1} < a_n$
- **Entonces,** $a_{n-1} < a_n \Rightarrow a_{n-1} + 6 < a_n + 6 \Rightarrow \sqrt{a_{n-1} + 6} < \sqrt{a_n + 6}$

  $\Rightarrow a_n < a_{n+1}$

Probemos que la sucesión es acotada:

- **Sabemos que** $0 = a_0 < 3$
- **Suponemos** $a_n < 3$
- **Entonces,** $a_n < 3 \Rightarrow a_n + 6 < 3 + 6 \Rightarrow \sqrt{a_n + 6} < \sqrt{9}$

  $\Rightarrow a_{n+1} < 3$

¿Y el límite?

Supongamos que, en el límite, la diferencia entre a_n y a_{n+1} es irrelevante, entonces:

$$a = \sqrt{a+6} \Rightarrow a^2 = a+6 \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (a-3)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 3$$

Entonces, el límite de la sucesión es a=3.

Próximo día: Métodos de interpelación.