UVG-MM2015:
Matemática Discreta
Instructor: Héctor Villafuerte

Nombre (y Carnet): $\boxed{\text{Clave}}$

Examen 2

13 de Agosto, 2009

Instrucciones: Responda los siguientes problemas, dejando constancia clara de su procedimiento. Preferiblemente sus respuestas deben mantener un balance entre lo simbólico y lo verbal; además, deben estar sustentadas por un argumento y procedimiento.

1. Encuentre una *expresión cerrada* (i.e. fórmula) para

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

y demuéstrela empleando inducción matemática.

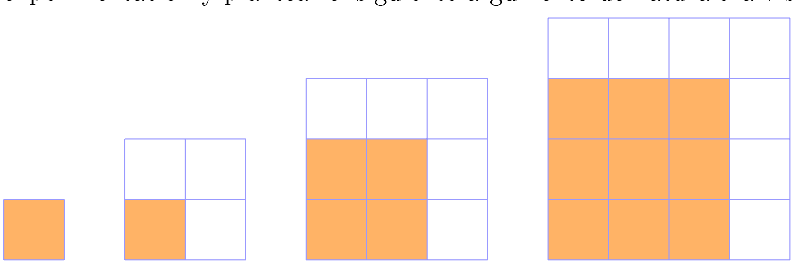
Solución: En la etapa de experimentación podemos tratar de encontrar relaciones con expresiones ya conocidas, e.g. $\sum k$:

n	1	2	3	4	5
$\sum k$	1	3	6	10	15
$\sum k^2$	1	5	14	30	55
cociente	1	$5/3$	$7/3$	$9/3$	$11/3$

Esto parece sugerir que

$$\begin{aligned}
\frac{\sum k^2}{\sum k} &= \frac{2n+1}{3} \\
\sum k^2 &= \frac{2n+1}{3} \sum k \\
\sum k^2 &= \frac{2n+1}{3} \frac{n(n+1)}{2} \\
\sum k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Podríamos proceder ahora a emplear inducción, pero en este primer ejercicio preferimos seguir en la etapa de experimentación y plantear el siguiente argumento de naturaleza visual:



$1^2 = 1 \quad 2^2 = 1 + 3 \quad 3^2 = 1 + 3 + 5 \quad 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 &= (1) + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + (1 + 3 + 5 + 7) \\
&= 4(1) + 3(3) + 2(5) + 1(7)
\end{aligned}$$

En general:

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+\cdots+n^2 &= (1)+(1+3)+(1+3+5)+\cdots+(1+3+\cdots+2n-1)\\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= n(1)+(n-1)(3)+(n-2)(5)+\cdots+1(2n-1)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)(2k-1)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\big(2(n+1)k-(n+1)-2k^2+k\big)\\
&= 2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-(n+1)\sum_{k=1}^{n}(1)-2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\\
&= 2(n+1)\frac{1}{2}n(n+1)-(n+1)n-2\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}n(n+1)\\
&= n(n+1)^2-(n+1)n-2\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}n(n+1)\\
&= n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)-2\sum_{k=1}^{n}k^2\\
3\sum_{k=1}^{n}k^2 &= n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
3\sum_{k=1}^{n}k^2 &= n(n+1)\left(\frac{2n+1}{2}\right)\\
\sum_{k=1}^{n}k^2 &= n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6}\right)
\end{aligned}
$$

Esto último fortalece nuestra conjetura anterior para la forma cerrada de $\sum k^2$. Luego de la fase de experimentación, llegamos a:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Procedemos ahora a plantear una demostración por inducción matemática. Siguiendo los lineamientos de *Flahive*, tenemos:

Paso 1: Identificar la secuencia de enunciados a probar. Para $n \geq 1$, sea

$$S(n): 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Paso 2: Caso Base. En donde probamos $S(1)$. Para $n=1$, sea

$$1^2=\frac{1}{6}1(1+1)(2+1)=1$$

lo cual prueba el caso base.

Paso 3: Paso inductivo. En donde asumimos que se cumple $S(N)$ y mostramos que implica $S(N+1)$.

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+N^2 &= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) \\
1^2+2^2+3^2+\cdots+N^2+(N+1)^2 &= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)+(N+1)^2 \\
&= (N+1)\left(\frac{1}{6}N(2N+1)+(N+1)\right) \\
&= \frac{1}{6}(N+1)\left(N(2N+1)+6(N+1)\right) \\
&= \frac{1}{6}(N+1)\left(2N^2+N+6N+6\right) \\
&= \frac{1}{6}(N+1)\left(2N^2+7N+6\right) \\
&= \frac{1}{6}(N+1)(N+2)(2N+3) \\
&= \frac{1}{6}[N+1][(N+1)+1][2(N+1)+1]
\end{aligned}$$

Paso 4: Conclusión inductiva. Por el principio de inducción matemática queda demostrado que para $n \geq 1$,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

2. Observe el siguiente patrón

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1-4 &= -(1+2) \\
1-4+9 &= 1+2+3 \\
1-4+9-16 &= -(1+2+3+4)
\end{aligned}$$

Encuentre la ecuación general ejemplificada acá; recuerde usar notación matemática adecuada y demuéstrela empleando inducción matemática.

Solución: Notamos que del lado izquierdo de estas ecuaciones estamos sumando cuadrados con signos alternantes, mientras que del lado derecho tenemos sumas de enteros consecutivos. En general podemos escribir,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 &= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}k \\
&= (-1)^{n+1}\frac{1}{2}n(n+1)
\end{aligned}$$

Procedemos por inducción matemática.

Paso 1: Identificar la secuencia de enunciados a probar. Para $n \geq 1$, sea

$$S(n) : \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2}n(n+1)$$

Paso 2: Caso Base. En donde probamos $S(1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}k^2 &= \frac{(-1)^{1+1}}{2}(1+1)\\ (-1)^2 &= \frac{(-1)^2}{2}(2)\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

lo cual prueba el caso base.

Paso 3: Paso inductivo. En donde asumimos que se cumple $S(N)$ y mostramos que implica $S(N+1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}k^2 &= \frac{(-1)^{N+1}}{2}N(N+1)\\ \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{N+2}(N+1)^2 &= \frac{(-1)^{N+1}}{2}N(N+1) + (-1)^{N+2}(N+1)^2\\ &= (-1)^{N+2}\left(\frac{-1}{2}N(N+1) + (N+1)^2\right)\\ &= (-1)^{N+2}(N+1)\left(\frac{-1}{2}N + (N+1)\right)\\ &= (-1)^{N+2}(N+1)\left(\frac{1}{2}N + 1\right)\\ &= (-1)^{N+2}(N+1)\left(\frac{N+2}{2}\right)\\ &= \frac{(-1)^{N+2}}{2}[N+1][(N+1)+1]\end{aligned}$$

Paso 4: Conclusión inductiva. Por el principio de inducción matemática queda demostrado que para $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2}n(n+1)$$

3. Encuentre una *expresión cerrada* (i.e. fórmula) para

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

con $n \geq 2$. Demuéstrela empleando inducción matemática. *Ayuda:* use Sage en la etapa de experimentación/descubrimiento.

Solución: Con el siguiente código de *Sage* podemos agilizar el proceso de experimentación:

```
from sage.all import *
N = 10
Acc = 1
for n in range(2,N):
```

```
    Acc = Acc * ( 1 - QQ(1)/QQ(n**2) )
    print "Para n = \%s tenemos A_n = \%s" \% (n, factor(Acc))
```

se podría argumentar que una alternativa más *"pythónica"* es emplear listas:

```
from sage.all import *
N = 10
for n in range(2,N):
    An = prod([1 - QQ(1)/QQ(k**2) for k in range(2,n+1)])
    print "Para n = \%s tenemos A_n = \%s" \% (n, factor(An))
```

De cualquier formar, el resultado obtenido es:

```
sage: load examen-02.py
Para n = 2 tenemos A_n = 2^-2 * 3
Para n = 3 tenemos A_n = 2 * 3^-1
Para n = 4 tenemos A_n = 2^-3 * 5
Para n = 5 tenemos A_n = 3 * 5^-1
Para n = 6 tenemos A_n = 2^-2 * 3^-1 * 7
Para n = 7 tenemos A_n = 2^2 * 7^-1
Para n = 8 tenemos A_n = 2^-4 * 3^2
Para n = 9 tenemos A_n = 3^-2 * 5
sage:
```

que puede interpretarse como

n	A_n
2	$\frac{3}{4} = \frac{2+1}{2(2)}$
3	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{3+1}{2(3)}$
4	$\frac{5}{8} = \frac{4+1}{2(4)}$
5	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{5+1}{2(5)}$
6	$\frac{7}{12} = \frac{6+1}{2(6)}$

En general, esta etapa de experimentación parece sugerir que $A_n = \frac{n+1}{2n}$ para $n \geq 2$.

Procedemos ahora por inducción matemática.

Paso 1: Identificar la secuencia de enunciados a probar. Para $n \geq 2$, sea

$$S(n) : \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Paso 2: Caso Base. En donde probamos $S(2)$.

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}$$

lo cual prueba el caso base.

Paso 3: Paso inductivo. En donde asumimos que se cumple $S(N)$ y mostramos que implica $S(N+1)$.

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{N^2}\right) &= \frac{N+1}{2N} \\
\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{N^2}\right)\left(1-\frac{1}{(N+1)^2}\right) &= \frac{N+1}{2N}\left(1-\frac{1}{(N+1)^2}\right) \\
&= \frac{N+1}{2N}\left(\frac{(N+1)^2-1}{(N+1)^2}\right) \\
&= \frac{N+1}{2N}\left(\frac{N^2+2N+1-1}{(N+1)^2}\right) \\
&= \frac{N+1}{2N}\left(\frac{N^2+2N}{(N+1)^2}\right) \\
&= \frac{N+1}{2N}\left(\frac{N(N+2)}{(N+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(N+2)}{N+1}\right) \\
&= \frac{(N+1)+1}{2(N+1)}
\end{aligned}$$

Paso 4: Conclusión inductiva. Por el principio de inducción matemática queda demostrado que para $n \geq 2$,

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

4. Responda el problema 61 de Flahive (*códigos de Gray*).

Solución: El código de Gray de n bits es un listado de todas las 2^n cadenas de n bits de manera que cada cadena difiera de la anterior en exactamente un bit (considere que la última cadena precede a la primera, i.e. el código tiene un carácter cíclico).

Pueden encontrar una buena descripción de códigos de Gray en Wikipedia:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Gray_code`

5. En lenguaje académico: ¿cuál es el máximo número L_n de regiones definidas por n líneas en el plano? En lenguaje coloquial: ¿cuántos pedazos de pizza (L_n) puede obtener al realizar n cortes rectos?

Solución: Este problema está explicado en §3.3 de Lóvasz, uno de los libros de referencia en el programa del curso que también está disponible en internet:
`http://uvgmm2015.wordpress.com/2009/07/08/programa-del-curso/`