UVG-MM2015:
Matemática Discreta
Instructor: Héctor Villafuerte

Proyecto de Grafos

13 de Octubre, 2009

1. Se tienen tres contenedores: de 10, 7 y 4 litros, respectivamente. Los contenedores de 7 y 4 litros están llenos de agua, mientras que el de 10 litros está vacío. Tenemos permitido sólo un tipo de *operación*: verter el agua del contenedor A en el contenedor B, deteniéndonos cuando A esté vacío o cuando B esté lleno.
   (a) ¿Existe alguna secuencia de operaciones que deje exactamente 2 litros en alguno de los contenedores?
   (b) Modele este problema como un problema de grafos: proporcione una definición precisa del grafo involucrado y formule la pregunta específica acerca de este grafo que debe ser respondida.
   (c) ¿Qué algoritmo debería aplicarse para resolver este problema?
   (d) Encuentre la respuesta aplicando dicho algoritmo.

2. Resuelva el problema 107 del Proyecto Euler.

3. (a) ¿Cuántos grafos simples pueden definirse en n vértices? *Ayuda:* vea el problema 138 de Flahive.
   (b) Dadas las funciones

$$f(n) = 2^{\binom{n}{2}}$$
$$g(n) = \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$$

   pruebe que $\log_2(f) \sim \log_2(g)$. *Nota:* Decimos que a_n es asintóticamente igual a b_n (denotado por $a_n \sim b_n$) si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$.
   (c) Grafique los logaritmos, $\log_2(\cdot)$, de las funciones f y g versus n.
   Ahora debe seleccionar y resolver uno de los dos siguientes incisos dependiendo de sus inclinaciones (para fortalecer la lamentable dicotomía entre lo práctico y lo teórico):
   (d) Sea $G(n)$ el número de grafos no isomorfos en n vértices. Escriba un programa que calcule $G(n)$ para un n dado. Compare sus resultados con la gráficas del inciso anterior.
   (e) Pruebe que $g_n \leq G(n) \leq f_n$.

4. El departamento de matemática ofrecerá 10 cursos que necesitan ser asignados en el horario del próximo semestre. La siguiente es una tabla de cursos que *no* pueden ser asignados a la misma hora debido a limitaciones de instructores, o estudiantes que están registrados en varios de estos cursos:

Curso	No puede ser simultáneo a
C-01	C-04, C-09
C-02	C-04, C-09, C-10
C-03	C-05, C-06, C-09
C-04	C-01, C-02, C-06
C-05	C-08, C-09
C-06	C-09,
C-07	C-10,
C-08	C-05, C-09, C-10
C-09	C-01, C-02, C-03, C-05, C-06, C-08
C-10	C-02, C-07, C-08

(a) Modele este problema como un problema de grafos: proporcione una definición precisa del grafo involucrado.

(b) Encuentre el mínimo número de casillas en el horario necesarias para asignar todos los cursos. Explique su procedimiento.

(c) Presente su resultado final como un horario de cursos que obtendría de Secretaría. *Ayuda:* investigue coloración de grafos y número cromático.

(d) ¿Es su solución única? Argumente.

5. Una compañía tiene sucursales en seis ciudades $C_1, C_2, \ldots, C_6$. El costo de transporte de C_i hacia C_j está dado por la entrada (i, j) de la siguiente matriz (donde un costo ∞ significa que no hay ruta directa entre esas ciudades):

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

La compañía está interesada en preparar una tabla de *costos mínimos de transporte* entre ciudades. Prepare dicha tabla.