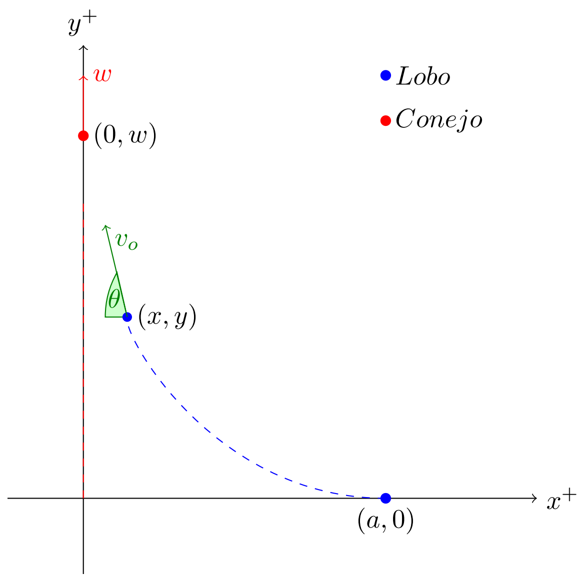
UVG-MM2014, ECUACIONES DIFERENCIALES: PROYECTO EXTRA

CARLOS EDUARDO LÓPEZ CAMEY, CARNÉ #08107

Problema: Un conejo está parado en el origen. Un lobo está en reposo, parado en la coordenada $(a, 0)$ y en el instante $t = 0$ ambos se percatan de su mutua existencia. El conejo echa a correr a lo largo del eje y positivo con una rapidez constante w mientras el lobo trata de alcanzarle con una velocidad que **siempre apunta** en dirección al conejo y con magnitud constante v_0

a. Haga un dibujo que represente el problema, indicando claramente las variables de interés y el sistema de referencia. Coloque al lobo en un punto intermedio de su trayectoria.

Diagrama:



b. Halle la ecuación diferencial que modela la trayectoria del lobo. Escriba la condición inicial de la misma y el intervalo de validez para la variable independiente. De qué orden es la ecuación? Quizás deba investigar un poco de reducción de orden.

Date: Agosto del 2009.

Carlos Eduardo López Camey, Universidad del Valle de Guatemala, Depto. de Matemáticas, Ecuaciones Diferenciales, Sección 40. http://kmels.net.

Solución: Dado que la velocidad del conejo w permanece constante, después de un tiempo t, se sabe que este se encuentra en la posición $(0, wt)$ del plano cartesiano. El lobo se encuentra en (x, y) tal y como lo ilustra el diagrama en el inciso (a).

Procedamos a calcular entonces $\frac{dy}{dx}$ para el modelo. Sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

En donde, calculando $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$, las velocidades v_o del lobo en el eje y y en el eje x respectivamente, tenemos que

$$\frac{dy}{dt} = v_o \cdot \sin\theta = v_o \cdot \frac{wt - y}{\sqrt{x^2 + (wt - y)^2}}$$

y

$$\frac{dx}{dt} = v_o \cdot \cos\theta = v_o \cdot \frac{-x}{\sqrt{x^2 + (wt - y)^2}}$$

Por lo tanto, re-escribiendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_o \cdot \frac{wt-y}{\sqrt{x^2+(wt-y)^2}}}{v_o \cdot \frac{-x}{\sqrt{x^2+(wt-y)^2}}} = -\frac{wt - y}{x} \implies -x\frac{dy}{dx} = wt - y \quad \text{con } x \neq 0 \tag{1}$$

Derivando (1) respecto a x, tenemos que

$$-\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = w\frac{dt}{dx} - \frac{dy}{dx} \implies x\frac{d^2y}{dx^2} = w\frac{dt}{dx}$$

En donde, t no depende de x pero x si depende de t, y conocemos $\frac{dx}{dt}$, entonces, re-escribiendo y por el teorema de la función inversa:

$$\frac{1}{x\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1}{w}\frac{dx}{dt} \implies \frac{dx}{dt} = \frac{w}{x\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{con } w \neq 0 \tag{2}$$

Como dijimos antes, conocemos $\frac{dx}{dt}$, entonces

$$\frac{-xv_o}{\sqrt{x^2 + (wt - y)^2}} = \frac{w}{x\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\frac{-xv_o}{\sqrt{x^2 + (wt - y)^2}} = \frac{w}{x\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Re-escribiendo de nuevo

$$x\frac{d^2y}{dx} = \frac{w}{-xv_o} \cdot \sqrt{x^2 + (wt - y)^2} \quad \text{con } v_o \neq 0$$

$$x\frac{d^2y}{dx} = \frac{w}{v_o} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot [x^2 + (wt - y)^2]}$$

$$x\frac{d^2y}{dx} = \frac{w}{v_o} \cdot \sqrt{1 + \frac{(wt-y)^2}{x^2}}$$

$$x\frac{d^2y}{dx} = \frac{w}{v_o} \cdot \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

Que es el modelo que queríamos encontrar.

Este modelo está sujeto a que, tanto la velocidad del conejo como la del lobo, y la posición x del lobo sean distintas de 0. Es notable ya que, en este caso, no habría persecución o esta se volvería un simple problema de física (en el caso que x=0)

El intervalo de validez para la variable independiente x es, (- ∞,0) ó bien (0, ∞).

c. Halle la solución de la ecuación diferencial. Utilice la constante $k = \frac{w}{v_o}$

Solución: Sabiendo que el modelo es una ecuación de segundo orden, usaremos la técnica de reducción de orden, la cual consiste en, como su nombre lo dice, reducir el orden de una ecuación diferencial.
Haciendo $p = \frac{dy}{dx}$, implica que $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$. Entonces

$$x\frac{dp}{dx} = k\sqrt{1+p^2}$$

Que, cambiando la notación y resolviendo por separación de variables, tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\, dp = k \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\sinh^{-1}(p) = k\ \ln(x) + c$$

Por propiedades de logaritmos, sabemos que $k\ \ln(x) = \ln(x^k)$ y sabiendo que c es una constante, hacemos $c = \ln(c_1)$. Entonces

$$p = \sinh[\ln(x^k) + \ln(c_1)] = \sinh[\ln(\frac{x^k}{c_1})] = \sinh[\ln(c_2\, x^k)] \tag{3}$$

Haciendo uso de la definición de sinh, re-escribimos (3)

$$\frac{1}{2}(e^{\ln(c_2\, x^k)} - e^{-\ln(c_2\, x^k)}) = \frac{1}{2}(c_2\, x^k - \frac{1}{c_2\, x^k}) = \frac{dy}{dx}$$

Sabemos que en $t = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ y x, la posición del lobo, es a. Entonces para éste caso podemos escribir

$$\frac{1}{c_2 x^k} = c_2 x^k \implies (c_2)^2 = \frac{1}{a^{2k}} \implies c_2 = \frac{1}{a^k}$$

Entonces, tenemos nuestra ecuación diferencial reducida

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}[\frac{x^k}{a^k} - \frac{a^k}{x^k}] \tag{4}$$

Resolviendo por separación de variables

$$\int dy = \frac{1}{2}\int [\frac{x^k}{a^k} - \frac{a^k}{x^k}]dx$$

Caso 1: Si $k \neq 1$, entonces

$$y = \frac{1}{2}[\frac{x^{k+1}}{a^k(k+1)} - \frac{a^k x^{1-k}}{1-k}] + d$$

De nuevo, sabemos que en $t = 0$, $x = a$ y $y = 0$. Por lo tanto,

$$0 = \frac{1}{2}[\frac{a^{k+1}}{a^k(k+1)} - \frac{a^k a^{1-k}}{(1-k)}] + d$$

Re-escribimos por propiedades de exponentes

$$0 = \frac{1}{2}[\frac{a^k a}{a^k(k+1)} - \frac{a^k a^{-k} a}{(1-k)}] + d$$

$$0 = \frac{1}{2}[\frac{a}{k+1} - \frac{a}{-k+1}] + d$$

Despejando para d

$$-d = \frac{a \cdot -2k}{2(1-k^2)} \implies d = \frac{a \cdot k}{(1-k^2)}$$

Escribiendo la solución completa para el caso 1

$$y = \frac{1}{2}[\frac{x^{k+1}}{a^k(k+1)} - \frac{a^k x^{-k+1}}{1-k}] + \frac{a \cdot k}{1-k^2} \tag{5}$$

en donde $k = \frac{w}{v_o} \neq 1$

Caso 2: Si $k = 1$, planteando la integral

$$\int dy = \frac{1}{2}\int [\frac{x}{a} - \frac{a}{x}]dx$$

Resolviendo, tenemos

$$y = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2a} - a \cdot \ln x] + h$$

De nuevo, haciendo uso de que en $t = 0$, $x = a$ y $y = 0$

$$0 = \frac{1}{2}[\frac{a^2}{2a} - a \cdot \ln a] + h \implies h = \frac{1}{2}[a \ln a - \frac{a}{2}]$$

Escribiendo la solución completa para el caso 2

$$y = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2a} - a \cdot \ln x] + \frac{1}{2}[a \ln a - \frac{a}{2}]$$

Finalmente, simplificando un poco, tenemos

$$y = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2a} - a \cdot \ln x + a \cdot \ln a - \frac{a}{2}] \tag{6}$$

en donde $k = \frac{w}{v_o} = 1$

d. Analice qué sucede para el caso cuando $v_o < w$

Análisis: Si $v_o < w$ entonces, $k > 1$. Tenemos para (5)

$$y = \frac{1}{2}[\frac{x^{k+1}}{a^k(k+1)} - \frac{a^k x^{1-k}}{1-k}] + \frac{a \cdot k}{1-k^2}$$

que el primer término, $\frac{x^{k+1}}{a^k(k+1}$ es menor que el segundo, $\frac{a^k x^{1-k}}{1-k}$, eso se debe a que el x^{1-k} que aparece en el segundo, en realidad es $\frac{1}{x^{k-1}}$ y con $k > 1$, este es mayor. El tercer y último término es una constante.

El último enunciado nos dice que x en (6) se indefine en 0. Si analizamos $\lim_{x \to 0^+} y$, tendremos que éste tiende a ∞. Por lo tanto, el lobo no alcanzaría al conejo jamás en esta situación

e. Analice qué sucede para el caso cuando $v_o = w$

Análisis: Si $v_o = w$ entonces, $k = 1$. Tomemos (6):

$$y = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2a} - a \cdot \ln x + a \cdot \ln a - \frac{a}{2}]$$

Claramente, la función se indefine, como en el inciso (d), significando que el lobo nunca alcanzará al conejo si los dos tienen la misma velocidad en la persecución.

f. Analice qué sucede para el caso cuando $v_o > w$

Análisis: Si $v_o < w$ entonces, $k < 1$. Tenemos para (5)

$$y = \frac{1}{2}[\frac{x^{k+1}}{a^k(k+1)} - \frac{a^k x^{1-k}}{1-k}] + \frac{a \cdot k}{1-k^2}$$

Nótese que al contrario de los dos incisos anteriores, esta solución no se indefine para ningún x, por lo tanto, se podría despejar para esta y descubrir en que punto las trayectorias del conejo y del lobo se intersectan, es decir, cuando el lobo alcanza al conejo.

Si evaluamos para $x = 0$ tenemos

$$y = \frac{1}{2}(\frac{0}{a^k(k+1} - \frac{0}{-k+1}) + \frac{a \cdot k}{1-k^2} = \frac{a \cdot k}{1-k^2} \tag{7}$$

el punto en donde el lobo lo alcanza.

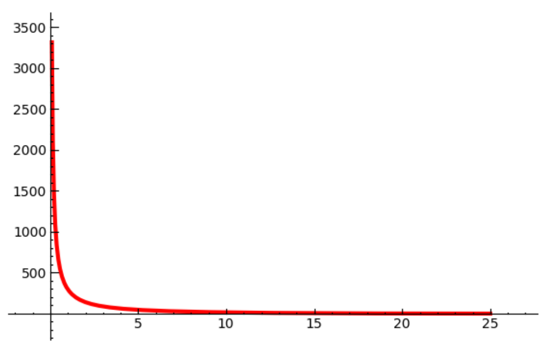
g. Grafique la trayectoria del lobo para los casos planteados en los incisos (d), (e) y (f). Para este efecto deberá asignar valores numéricos apropiados para todas las constantes.

Grafica inciso (d): Tomando en cuenta que un lobo puede correr hasta 35mph [**?**] y el conejo, unos 45 mph[**?**], consideremos el caso cuando el conejo tiene una velocidad w de 40mph y el lobo de 20mph.

Suponiendo que el lobo parte 25 millas hacia el este del conejo y calculando k, tenemos $k = 2$, por lo que la trayectoria del lobo estaría dada por

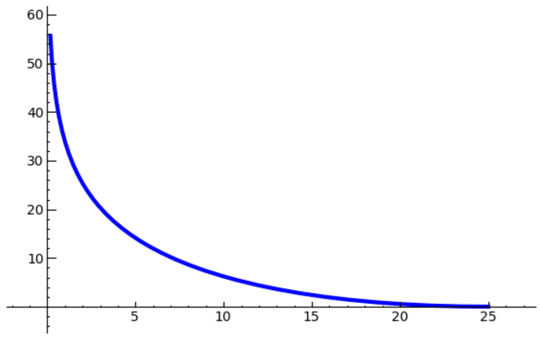
$$y = \frac{1}{2}[\frac{x^{2+1}}{25^2(2+1)} - \frac{25^2 x^{-2+1}}{1-2}] + \frac{25 \cdot 2}{1-2^2} = \frac{1}{2}[\frac{x^3}{25^2 \cdot 3} + \frac{25^2}{x}] - \frac{50}{3} \tag{8}$$

Graficando (8) tenemos:



Grafica inciso (e): En el caso que los dos tengan la misma velocidad, $k = 1$. Suponiendo que el lobo parte 25 millas al este del coenjo, entonces evaluando para (6)

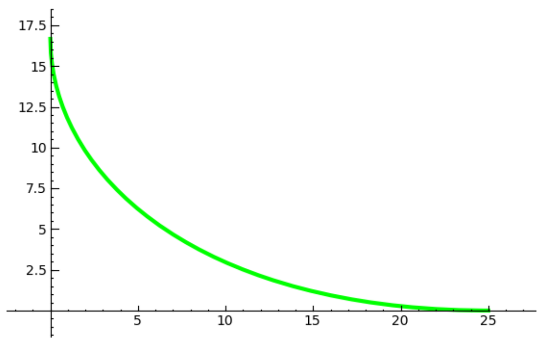
$$y = \frac{1}{2}[\frac{25^2}{2 \cdot 25} - 25 \cdot \ln 25 + 25 \cdot \ln 25 - \frac{25}{2}]$$



Grafica inciso (f): Tomemos $w = 15$ mph y $v_o = 30$mph, eso implicaría $k = 0.5$. Con el lobo partiendo 25 millas al oeste del conejo tenemos:

$$y = \frac{1}{2}[\frac{x^{0.5+1}}{25^{0.5}(0.5+1)} - \frac{25^{0.5}x^{-0.5+1}}{1-0.5}] + \frac{25 \cdot 0.5}{1-0.5^2} = \frac{1}{2}[2\frac{x\sqrt{x}}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{x}}{1}] + \frac{12.5}{0.75} \tag{9}$$

Graficando (9)



h. Asignando valores apropiados para las constantes, y para el caso $v_o > w$ halle el momento en el que el lobo alcanza al conejo.

Suponiendo $vo = 30$ mph y $w = 15$ mph, tenemos $k = 0.5$. Si la distancia a que separa al lobo del conejo en sus partidas es 1 milla, entonces evaluando para (7) tenemos

$$y = \frac{1 \cdot 2}{1 - 0.5^2} = \frac{2}{0.75} \approx 2.66 \,\text{millas}$$

Sabiendo que la velocidad w del conejo es constante en toda la persecución, calculando t

$$t = \frac{y}{w} = \frac{2.66 \,\text{millas}}{\frac{15 \,\text{millas}}{\text{hora}}} \approx 0.18\text{horas} \approx 10.8 \,\text{minutos}$$

Que es lo que queríamos encontrar para las condiciones dadas.

References

[1] Wolf Facts, WolfCountry.Net, http://www.wolfcountry.net/information/WolfObserved.html#speed
[2] How Fast does a Rabbit Run?, eHow.com, http://www.ehow.com/about_4605256_how-fast-does-rabbit-run.html