Exámen 2: Inducción Matemática

Carlos E. López Camey, Carné #08107

UVG - MM2015

Instrucciones: Responda los siguientes problemas, dejando constancia clara de su procedimiento. Preferiblemente sus respuestas deben mantener un balance entre lo simbolico y lo verbal; ademas, deben estar sustentadas por un argumento y procedimiento

Problema 1

Encuentre una *expresión cerrada* (i.e. fórmula) para

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

y demuéstrela empleando inducción matemática.

Solución: Nos damos cuenta por la NOTA 2 dada en clase que:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{2n+1}{3}$$

Sabiendo, por *clásico* problema de Gauss, que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{\sum_{k=1}^{n} k} * \sum_{k=1}^{n} k = \frac{2n+1}{3} * \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Probando por inducción

El enunciado $S(n)$ que tenemos que probar es

$$S(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para el caso n=0, caso base, tenemos que

$$\frac{0(1)(1)}{6} = 0$$

cumple.

Suponiendo que el enunciado $S(n)$ se cumple para n, para n+1 tendríamos que

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

Haciendo un poco de álgebra, la expresión anterior es equivalente a

$$\frac{(2n^2+n)(n+1)+6(n^2+2n+1)}{6} = \frac{2n^3+6n^2+4n+3n^2+9n+6}{6}$$

y factorizando, tenemos

$$\frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \tag{1}$$

Que es exactamente el enunciado $S(n+1)$ $\square$

Problema 2

Observe el siguiente patrón

$$1 = 1$$

$$1 - 4 = -(1+2)$$

$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$$

$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1+2+3+4)$$

Encuentre la ecuación general ejemplicada acá; recuerde usar notación matemática adecuada y demuéstrela empleando inducción matemática.

Solución. La ecuación general del patrón presentado es

$$\sum_{j=1}^{n} j^2(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}\sum_{j=1}^{n} j \tag{2}$$

NOTA: El enunciado anterior se podría enunciar de la siguiente manera: "La suma alternada de signos de los números de 1 hasta n al cuadrado es igual a la suma de los números de 1 hasta n negativa (si n es par) o positiva (si n es impar)"

NOTA 2: La ecuación es equivalente a la siguiente

$$\sum_{j=1}^{n} j^2(-1)^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1} \tag{3}$$

Probando por inducción

El enunciado $S(n)$ a probar es:

$$S(n) : \sum_{j=1}^{n} j^2(-1)^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$$

Para el caso n=0, el caso base, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{0} j^2(-1)^{1} = \frac{0(1)}{2}(-1)^{1}$$

cumple.

Suponiendo que $S(n)$ se cumple para n, para n+1 tenemos entonces la expresión

$$\frac{n(n+1)(-1)^{n+1}}{2} + (-1)^{n+2}(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(-1)^{n+1} + 2(-1)^{n+2}(n+1)^2}{2}$$

Sabiendo que, por propiedades de exponentes, $(-1)^{n+2} = (-1)(-1)^{n+1}$

$$\frac{n(n+1)(-1)^{n+1} + 2(-1)^{n+2}(n+1)^2}{2} = \frac{-n(n+1) + 2(n+1)^2}{2}(-1)^{n+2}$$

Y haciendo de nuevo, un poco de álgebra tenemos

$$\frac{-n(n+1) + 2(n+1)^2}{2}(-1)^{n+2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}(-1)^{n+2}$$

Finalmente, factorizando

$$\frac{n^2 + 3n + 2}{2}(-1)^{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^{n+2}$$

Tenemos exactamente el enunciado de $S(n+1)$. $\square$

Problema 3

Encuentre una expresión cerrada (i.e. fórmula) para

$$(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{3^2})(1 + \frac{1}{4^2})\dots(1 + \frac{1}{n^2})$$

Demuéstrela empleando inducción matemática. Ayuda: use Sage en la etapa de experimentación/descubrimiento.

Problema 4

(1) Beginning with the 3-string 000, write a list of all eight binary 3- strings which is ordered in such a way that each 3-string differs from the previous one in the list by changing just one digit. This should be considered cyclically; that is, the last element also differs in only one digit from the rst. There are many such sequences, and are called (cyclic) Gray Code for 3-strings. That is, a Gray Code for binary n-strings is a listing of all 2n binary n-strings in such a way that each n-string di?ers from the previous one in exactly one place. Describe how to get your Gray Code for 3-strings from some Gray code for 2-strings.

(2) Can you describe how to get some Gray Code for 4-strings from the one you found for 3-strings?

Solución. Listando los ocho binarios de 3 strings (empezando con 000) que cumplen con la propiedad de cambiar sólamente un bit respecto al anterior

Código de Gray con 3 bits	
1:	000
2:	001
3:	011
4:	010
5:	110
6:	111
7:	101
8:	100

Tabla 1

Haciéndolo para 2 bits

Código de Gray con 2 bits	
1:	000
2:	001
3:	011
4:	010

Tabla 2

(a) Nos damos cuenta que los primeros cuatro números del código de Gray con 3 bits, son los mismos que los cuatro en la segunda tabla (con 2 bits) pero con un bit ”0” delante.

Para los siguientes 4 números (los últimos 4), observemos que el primero en la Tabla 2, equivale al último en la Tabla 1, pero con un bit ”1” adelante. Análogamente, el penúltimo número en la Tabla 2, equivale al primero en la Tabla 1, con el bit ”1” delante. Los dos restantes, se obtendrían de la misma manera.

Pensaremos que la primera mitad de la Tabla 2, equivale a la Tabla 1 pero con un ”0” delante, y la otra mitad, equivale a una especie de reflexión de la Tabla 1, es decir, como si fuera leída al revés pero con un ”1” delante.

(b) Si obtenemos ésta tabla similarmente a como se hizo para la Tabla 2, se tendría el mismo resultado.

Sabemos que la cantidad de números en una Tabla 2, código de gray para 4 bits, es 2^4 (16) y para 3 bits, es 8, es decir, la mitad. Esto se cumple para cualquier n y $n-1$ respectivamente y está demostrado por el ejercicio echo en clase del problema 56 de Flahive.

Es un pensamiento razonable ya que si se sigue haciendo el mismo proceso para las *hipotéticas* siguientes tablas, se tendría siempre el doble que en la Tabla anterior, es decir: los números en primera mitad, serán exactamente los mismos de la Tabla anterior pero con un bit ”0” delante y la segunda mitad, sería la Tabla anterior *reflejada* y con un bit ”1” delante.

(c) Definamos la función T : secuencia → secuencia, que toma una secuencia de 2^n números, cada uno con n bits.

También tomemos en cuenta la función A : número binario -¿ → número binario que mapea un número binario de 2^{n-1} bits a uno de 2^n bits, agregándole un ”0” al principio.

Consideramos, por último, función B : número binario -¿ → número binario que toma un número binario de 2^{n-1} bits y lo mapea en uno de 2^n bits, agregándole un ”1” al principio.

Consideremos ahora, el código de Gray para 1 bit (nuestro caso base), tendríamos lo siguiente:

Código de Gray con 1 bit	
1:	0
2:	1

Tabla 3

Si queremos, generar un código de 2 bits, se tendría, como en el inciso a

Código de Gray con 1 bit	
1:	A(0) = 00
2:	A(1) = 01
3:	B(1) = 11
4:	B(0) = 10

Tabla 4

Nos damos cuenta que, si no hubieramos aplicado las funciones A y B para los números 2 y 3 en ésta Tabla, la secuencia, no sería un código de gray, puesto que se repetiría el bit ”1”. Tampoco lo sería para los números 4 y 1.

Agregándole los bit, mediante las funciones A y B, generamos un código de Gray, en donde solo cambia un solo bit. □

Problema 5

En lenguaje académico: cuál es el máximo núumero L_n de regiones denidas por n líneas en el plano? En lenguaje coloquial: cuántos pedazos de pizza (L_n) puede obtener al realizar n cortes rectos?

Solución. Inspeccionando un poco, tenemos, para $n = 0$, el caso es trivial, se tiene "una pizza entera" puesto que no se partió o dividió en ningún pedazo.

Para $n = 1$, la pizza se partiría a la mitad, por lo que hay dos mitades, o sea, dos pedazos.

Para $n = 2$, ya se tienen dos mitades (por el caso de $n = 1$), y la nueva "cortadura" se podría hacer de dos maneras:
(a) Se podrá hacer el corte paralelo al corte $n = 1$. es decir, sin atravesar las dos mitades, solamente una de las dos. De esta forma se tendrían $L_n = 3$pedazos.

(b) Se podría hacer el corte cortando las dos mitades, de ésta forma se tendrán $L_n = 4$ pedazos. En éste caso, es la máxima cantidad de regiones o pedazos posibles, pasando por uno de los cortes hechos anteriormente (el corte de $n = 1$).

Para $n = 3$, se tienen dos opciones Por inspección o experimentación nos damos cuenta que para los primeros 4 casos, es decir, para $n = 0, 1, 2\, y\, 3$ tenemos lo siguiente:

(a) Se podrá, de nuevo, hacer un corte paralelo a alguno de los cortes $n = 2$ ó $n = 3$, nótese que estos dos (el corte $n = 3$ y $n = 2$) no pueden ser paralelos, ya que si lo fueran, no estaríamos describiendo a la mayor cantidad de regiones posibles (por el inciso anterior).

(b) La otra manera, el caso en donde no ocurre (a), es, en donde se hace un corte no paralelo a ninguna de las dos líneas anteriores. En éste caso, se haría un corte atravesando a las dos anteriores, y tendríamos $L_n = 7$ pedazos.

Para $n = 4$, tenemos las opciones (a) El corte atraviesa 2 de los 3 cortes anteriores posibles, en éste caso, se tendrían 9 regiones.

(b) El corte atraviesa los 3 cortes anteriores (todas las posibles) y de nuevo, el máximo se da en éste caso, en donde $L_n = 9$.

En general, decimos que el máximo número de regiones se da cuando se cortan mayor número de pedazos, esto es, cuando se atraviesan todos los cortes posibles hechos anteriormente.

El máximo número de cortes que se pueden atravesar para el corte n, es $n - 1$. Entonces, se tendría la siguiente Tabla, en donde L_n es el número máximo de regiones posibles con el caso de n cortes y C_n representa la cantidad de cortes que se atravesaron para ese caso.

Problema 5		
n	L_n	C_n
0:	1	0
1:	2	0
2:	4	1
3:	7	2
4:	11	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n:$	$L_{n-1}+n$	$n-1$

Tabla 5

En la tabla anterior, se indujo o se enunció un enunciado $S(n)$ que establece que cantidad L_n para cualquier $n \in N$ es la suma entre la cantidad máxima de regiones en $n-1$ cortes, más n. Observemos que ésta es una función recursiva en en donde para el caso base 0, L_0 es 1.

Entonces, tendríamos que

$$L_n = L_{n-1} + n$$

en donde

$$L_{n-1} = L_{n-2} + (n-1)$$

por la misma definición de la función recursiva. Esto nos deja, escribiendo de nuevo una expresión para L_n

$$L_n = (L_{n-2} + (n-1)) + n = L_n = (L_{n-3} + (n-2)) + (n-1) + n = L_0 + \sum_{i=1}^{n} i$$

En donde L_0, el caso base de nuestro enunciado $S(n)$ es 1.

Nuestro enunciado $S(n)$ sería entonces formulado de la siguiente manera (utilizando *famosa* forma cerrada de la sumatoria de Gauss):

$$S(n) : L_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Interesante, esto supone que para cualquier corte n, se puede tener un máximo de $L_n = 1 + \sum_1^n i$ regiones en una pizza.

Probando entonces por inducción para n+1

$$1+\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=1+\frac{n(n+1)+2((n+1))}{2}$$

Expandiendo, nos quedamos con

$$1+\frac{n^2+3n+2}{2}=1+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

que es exactamente el enunciado de $S(n+1)$. $\square$