Clave de los Cortos 6 y 7
Ing. Luis Mijangos
Ecuaciones Diferenciales

Corto 6

1. Hallar la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{3s+5}{s^2-6s+25}$$

Para ello completamos cuadrados en el denominador, y arreglamos un poco el numerador

$$F(s) = 3\frac{s+5/3}{(s-3)^2+16}$$

Para tener el mismo desplazamiento arriba y abajo, sumamos y restamos 3 en el numerador de la fracción, esto produce

$$F(s) = 3\frac{s-3}{(s-3)^2+16} + \frac{14}{(s-3)^2+16}$$

La transformada inversa de ambas fracciones es

$$f(t) = 3e^{3t}\cos 4t + \frac{7}{2}e^{3t}\sin 4t$$

2. Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4}$$

Acá se aplica directamente la propiedad de desplazamiento en t, la cual viene de la exponencial $e^{-\pi s/2}$

$$f(t) = \cos 2(t-\tfrac{\pi}{2})\, u(t-\tfrac{\pi}{2})$$

3. Resuelva el siguiente PVI

$x'' + 4x' + 5x = e^{1-t}\, u(t-1) \qquad\qquad x(0) = x'(0) = 0$

Para lograr el mismo desplazamiento en t en la función de entrada se invierte la resta

$$x'' + 4x' + 5x = e^{-(t-1)}\, u(t-1)$$

La transformada de Laplace de la ecuación anterior, utilizando el teorema de traslación en *t*, es

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4sX(s) - 4x(0) + 5X(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

Donde se resuelve para *X(s)*

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{(s^2+4s+5)(s+1)}$$

Donde se sacan las fracciones parciales

$$\frac{As+B}{s^2+4s+5} + \frac{C}{s+1}$$

Se tiene el polinomio

$$As^2 + As + Bs + B + Cs^2 + 4Cs + 5C = 1$$

De donde se obtiene el sistema de ecuaciones

$$A + C = 0$$
$$A + B + 4C = 0$$
$$B = 1$$

De allí que $A = \frac{1}{3},\ B = 1,\ C = -\frac{1}{3}$ entonces las fracciones son

$$\frac{1}{3}\left[\frac{s}{s^2+4s+5}\right] + \frac{1}{s^2+4s+5} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

Completando cuadrados en los denominadores1

$$\frac{1}{3}\left[\frac{s}{(s+2)^2+1}\right] + \frac{1}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

Ajustando el primer término para que en su numerador aparezca $(s+2)$ tenemos

$$\frac{1}{3}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right] + \frac{1/3}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

Entonces *X(s)* es

$$X(s) = \left(\frac{1}{3}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right] + \frac{1/3}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s+1}\right]\right)e^{-s}$$

Al aplicar la trasformada inversa se obtiene

$$x(t) = \frac{e^{-2(t-1)}}{3}u(t-1)[\cos(t-1) + \sin(t-1)] - \frac{e^{1-t}}{3}u(t-1)$$

Corto 7

1. Resuelva el PVI

$$\frac{d\theta}{dt} + 110\,\theta(t) + 1000\int_0^t \theta(\tau)d\tau = 1$$

Sujeta a la condición $\theta(0) = 0$

Se aplica la transformada de Laplace y se obtiene

$$\mathrm{s}\,\Theta(\mathrm{s}) - \theta(0) + 110\,\Theta(\mathrm{s}) + \frac{1000}{\mathrm{s}}\Theta(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Si se multiplica toda la ecuación por s y se despeja para $\Theta(\mathrm{s})$

$$\Theta(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}^2 + 110\mathrm{s} + 1000} = \frac{1}{(\mathrm{s}+10)(\mathrm{s}+100)}$$

Por fracciones parciales se obtiene

$$\Theta(\mathrm{s}) = \frac{1/90}{\mathrm{s}+10} - \frac{1/90}{\mathrm{s}+100}$$

Cuya transformada inversa es

$$\theta(t) = \frac{1}{90}e^{-10t} - \frac{1}{90}e^{-100t}$$

2. Utilizando el teorema para la transformada de una función periódica, demuestre que

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

El período de $f(t) = \cos bt$ es $T = \frac{2\pi}{b}$ de modo que aplicando el teorema se tiene

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi}{b}s}} \int_0^{\frac{2\pi}{b}} e^{-st}\cos bt \; dt$$

Consultando una tabla de integrales se sabe que

$$\int e^{-st}\cos bt \; dt = \frac{e^{-st}}{s^2+b^2}(b\sin bt - s\cos bt)$$

Entonces

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s/b}} \left[\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}(b\sin bt - s\cos bt)\right]_0^{\frac{2\pi}{b}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s/b}}\left(\frac{s}{s^2+b^2} - \frac{s\,e^{-2\pi s/b}}{s^2+b^2}\right) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s/b}}\left[\frac{s(1-\ e^{-2\pi s/b})}{s^2+b^2}\right] = \frac{s}{s^2+b^2}$$

3. Resuelva el PVI

$$y'' + 3ty' - 6y = 1 \qquad\qquad y(0) = y'(0) = 0$$

Aplicando la trasformada de Laplace se tiene

$$s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 3\left[-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\}\right] - 6\,Y(s) = \frac{1}{s}$$

O sea

$$s^2Y(s) + 3\left[-\frac{d}{ds}\left(\,sY(s) - y(0)\right)\right] - 6\,Y(s) = \frac{1}{s}$$

Es decir

$$s^2 Y(s) + 3[-Y(s) - s\,Y'(s)] - 6\,Y(s) = \frac{1}{s}$$

La cual se puede reordenar como

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right)\,Y(s) = \frac{-1}{3s^2}$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden. Su factor integrante es

$$\rho(s) = e^{\int\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{3}\right)ds} = s^3 e^{-s^2/6}$$

Que al multiplicarse por la ecuación produce

$$\frac{d}{ds}\left(Y(s)\;s^3 e^{-s^2/6}\right) = -\frac{s}{3}\,e^{-s^2/6}$$

Integrando ambos lados se obtiene

$$Y(s)\,s^3 e^{-s^2/3} = -\int \frac{s}{3}\,e^{-s^2/6} ds = \;e^{-s^2/6} + C$$

Entonces

$$Y(s)\; = \frac{1}{s^3} + \frac{C}{s^3} e^{s^2/6}$$

Sea $y(t)$ de orden exponencial y continua por partes en $[0, \infty]$, se tiene que $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$, por lo que $C = 0$. De allí que

$$Y(s)\; = \frac{1}{s^3}$$

Por lo que

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2$$