

Coeficientes Indeterminados: Método del Anulador

C. López *

Septiembre del 2009

Resumen

1 Introducción

Consideremos ciertas ecuaciones diferenciales no homogéneas con ciertos coeficientes constantes de orden l :

$$L(y) = f(x), \quad \text{en efecto} \quad (1)$$

$$L(y) = (a_l D^l + a_{l-1} D^{l-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y$$

podemos dar solución a (??) si sabemos como anular $f(x)$ con operadores simples. Aquí llamamos "anular" al efecto de aplicar un anulador mínimo no trivial, digamos algún $M = (p_m D^m + \cdots + b_1 D + b_0)$ a ambos lados de (??) para obtener una ecuación homogénea $M(L(y)) = 0$ o bien

$$ML(y) = 0 \quad (2)$$

cuya solución no necesariamente es la misma que la de (??), pero contendrá la solución de (??), ya que podemos extraer la solución de (??) desde la de (??). Para ilustrar esto sabemos,

$$L(y) = f(x) \implies ML(y) = 0 \Leftrightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots C_{m+l} y_{m+l},$$

en donde L es de orden l y M es de orden m , lo que vuelve a $ML(y)$ una ecuación diferencial homogénea de grado $m+l$ cuyas soluciones y_1, \dots, y_{m+l} son linealmente independientes, es decir, que forman un conjunto fundamental de soluciones esta E.D. Si las soluciones de esta E.D. de orden $m+l$ son linealmente independientes, entonces, la solución a la ecuación diferencial no homogénea $L(y) = f(x)$ está contenida en la nueva ecuación homogénea $ML(y) = 0$, aunque en algunos casos, se pueda perder información al aplicar M .

2 Encontrando M

Ejemplo 1. Consideremos la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$L_1(y) = y'' - y = 1$$

Resolviendo la parte homogénea de L_1 , tenemos como raíces de su polinomio característico $r^2 - r$, a ± 1 , por lo que su solución complementaria es $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

*Carlos Eduardo López Camey, Universidad del Valle de Guatemala, Ecuaciones Diferenciales UVG-MM2014, Carné #08107, <http://kmels.net>

Para resolver la parte no homogénea y haciendo uso del método del anulador, necesitamos un operador M que vuelva homogénea a nuestra ecuación diferencial L_1 . Si derivamos ambos lados para ésta, tenemos

$$ML(y) = y''' - y' = 0$$

lo que nos deja con una E.D. homogénea, eso es en efecto, **el resultado de aplicar el operando $M = D$** en ambos lados de la ecuación de $L(y)$.

Resolviendo $ML(y)$, tenemos como raíces a 0 y a ± 1 , que nos deja como solución general de esta (o viéndolo desde otra perspectiva, la particular de $L(y)$) a $y_p = k_1 + k_2 e^x + k_3 e^{-x}$, con $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

Pero los términos $k_2 e^x$ y $k_3 e^{-x}$ ya están incluidos en la solución complementaria y_c de L_1 , lo que nos deja con $y_p = k_1$.

Encontremos ahora el coeficiente particular k_1 para y_p .

$$\begin{aligned} y_p' &= 0 \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}$$

$$y_p'' - y_p = 1 \Leftrightarrow (0) - k_1 = 1 \implies k_1 = -1$$

Lo que nos deja con la solución particular de L_1 , $y_p = -1$

Sabiendo que la ecuación general de $L(y)$ es, $y = y_c + y_p$, tenemos entonces

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Habiendo resuelto la E.D. del **Ejemplo 1**, tan sólomente aplicando el operador anulador $M = D$, es decir, el operador diferencial (D), fue un caso trivial, pero para algunas ecuaciones diferenciales este no es el caso, resumamos entonces, los diferentes anuladores para volver homogénea a una ecuación que no lo es.

1. Para anular una constante $C \in \mathbb{R}$, usar el operador D (como en el Ejemplo 1)
Para anular x^n, x^{n-1}, \dots, C , usar D^{n+1}
2. Para anular e^{kx} , usar el operador $(D - k)^{n+1}$
Para anular $x^n e^{kx}, x^{n-1} e^{kx}, \dots, e^{kx}$, usar el operador $(D - k)^{n+1}$
3. Para anular $\sin(kx)$ ó $\cos(kx)$ (o las dos al mismo tiempo), usar el operador $(D^2 + k^2)$.
Para anular $x^n \sin(kx), x^n \cos(kx), x^{n-1} \sin(kx), \dots, \sin(kx), \cos(kx)$, usar el operador $(D^2 + k^2)^{n+1}$
4. Para anular $e^{kx} \sin(bx)$ ó $e^{kx} \cos(bx)$ (o las dos al mismo tiempo), necesitamos el operador cuyo polinomio característico tenga como raíces a $k \pm bi$, es decir, $(r - k - bi)(r - k + bi) = r^2 - 2kr + (k^2 + b^2)$, en efecto el operador a usar es $(D^2 - 2kD + k^2 + b^2)$
Para anular $x^n e^{kx} \sin(bx), x^n e^{kx} \cos(bx), x^{n-1} e^{kx} \sin(bx), x^{n-1} e^{kx} \cos(bx), \dots, e^{kx} \sin(bx)$ ó $e^{kx} \cos(bx)$, usar el operador $(D^2 - 2kD + k^2 + b^2)^{n+1}$

Ejemplo 2. Encontremos un operador diferencial lineal con coeficientes constantes, con el mínimo grado posible y anula a la función dada.

- $e^{8x} + e^{2x}$: $(D - 8)(D - 2)$
- $2x^3 + 7x^2 e^{-2x}$: $D^4(D + 2)^3$
- $2\sin(3x) + 3\cos(6x)$: $(D^2 + 9)(D^2 + 36)$

- $3x^6 + 2x^4 + x^3 - 2 : D^7$
- $x\sin(2x) + \cos(2x) + 3 : D(D^2 + 4)^2$
- $x_x^2 \cos(3x) + x\sin(2x) + \cos(5x) - \sin(5x) : D^2(D^2 + 9)^3(D^2 + 4)^2(D^2 + 25)$
- $x^3 + e^{-x} + e^x \sin(2x) : D^4(D + 1)(D^2 - 2D + 5)$
- $x^4 e^x \sin(2x) + 3x e^x \cos(2x) : (D^2 - 2D + 5)^5$

3 Resumen de los pasos a seguir

Los siguientes pasos explicados pueden variar alguna vez, pero cada uno va a ser parte del proceso de resolver la E.D. eventualmente

1. Identificar la solución complementaria de L , y_c que consiste en la combinación lineal de l funciones linealmente independientes. Esta es, la solución a la E.D. homogénea relacionada.
2. Obtener una nueva ecuación diferencial lineal homogénea aplicando el anulador mínimo posible M de la función relacionada con L a ambos lados de la E.D. original L , para obtener $ML(y)$
 - (a) Resolver la nueva ecuación homogénea $ML(y)$, que tendrá $m + l$ funciones soluciones linealmente independientes.
 - (b) Identificar cuales de esas funciones, ya están contenidas en y_c .
 - (c) Las funciones que no fueron "eliminadas" por el paso 2b, forman a y_p
3. Sustituir los coeficientes indeterminados de y_p en la E.D. original $L(y)$
 - (a) Establecer $L(y_p) = f(x)$ y expandir la igualdad
 - (b) Comparar los coeficientes en las diferentes funciones de $L(y_p)$ con los de $f(x)$ y resolver para ellos, para obtener y_p
4. Establecer la solución general de $L(y)$, que es $y_c + y_p$.

4 Más Ejemplos

Ejemplo 3. Resolvamos

$$y'' - 3y' - 40y = 6e^{2x}$$

Eso es,

$$L_2(y) = (D^2 - 3D - 40)y = 6e^{2x}$$

Resolviendo la parte homogénea de $L_2(y)$, tenemos que las raíces de su polinomio característico son, 8 y -5 .

$$y_c = c_1 e^{8x} + c_2 e^{-5x}$$

Ahora, aplicamos el anulador $M_2 = (D - 2)$:

$$(D - 2)(D - 8)(D + 5)y = (D - 2)(6e^{2x})$$

$$ML(y) = (D - 2)(D - 8)(D + 5)y = 0$$

La solución a $ML_2(y)$ es entonces,

$$y = Ae^{2x} + Be^{8x} + Ce^{-5x}$$

En donde, el término Ae^{2x} representa a y_p y $y_c = Be^{8x} + Ce^{-5x}$, que ya está incluido en y_c de $L_2(y)$

Resolviendo por el método de coeficientes indeterminados entonces,

$$y_p = Ae^{2x}$$

$$y'_p = 2Ae^{2x}$$

$$y''_p = 4Ae^{2x}$$

$$y''_p - 3y'_p - 40y_p = 6e^{2x} \Leftrightarrow (4Ae^{2x}) - 3(2Ae^{2x}) - 40(Ae^{2x}) = 6e^{2x}$$

Resolviendo entonces para A,

$$e^{2x}A(4 - 6 - 40) = 6e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow -42A = 6$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{1}{7}$$

Lo que nos deja, a la solución general $y = y_p + y_c$

$$y = -\frac{1}{7}e^{2x} + Be^{8x} + Ce^{-5x}, \quad B, C \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 4. Resolviendo

$$L_3(y) = (D^2 - 3D - 40)y = \sin(2x)$$

Resolviendo la parte homogénea, tenemos como raíces a 8 y -5 de nuevo, por lo que

$$y_c = c_1 e^{8x} + c_2 e^{-5x}$$

Ahora, procediendo a anular, es decir, volviendo homogénea a $L(y)$ y obteniendo $ML(y)$ al aplicar $M_3 = (D^2 + 4)$, tenemos

$$ML_3(y) = (D^2 + 4)(D - 8)(D + 5)y = (D^2 + 4)\sin 2x$$

$$ML_3(y) = (D^2 + 4)(D - 8)(D + 5)y = 0$$

De donde, tenemos como solución particular

$$y_p = A\sin 2x + B\cos(2x)$$

Ya que, los términos e^{8x} y e^{-5x} ya están incluidos en y_c . Encontremos entonces los valores de A y B

$$y_p = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

$$y'_p = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$$

$$y''_p = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$$

Nos deja

$$(-4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)) - 3(2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)) - 40(A\sin(2x) + B\cos(2x)) = \sin(2x)$$

$$(-4A + 6B - 40A)\sin(2x) + (-4B - 6A - 40B)\cos(2x) = \sin(2x)$$

$$(-44A + 6B)\sin(2x) + (-6A - 44B)\cos(2x) = \sin(2x)$$

Y resolviendo el sistema de ecuaciones

$$-44A + 6B = 1$$

$$-6A - 44B = 0$$

nos deja con $A = -\frac{11}{493}$ y $B = \frac{3}{986}$ y

$$y_p = -\frac{11}{493}\text{sen}(2x) + \frac{3}{986}\cos(2x).$$

Encontrando la solución final $y = y_p + y_c$

$$y = -\frac{11}{493}\text{sen}(2x) + \frac{3}{986}\cos(2x) + Ee^{8x} + Fe^{-5x} \quad E, F \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 5. Resolviendo

$$y'' + 6y' + 8y = e^{3x} - \text{sen}(x)$$

$$L_4(y) = (D^2 + 6D + 8)y = e^{3x} - \text{sen}(x)$$

Resolviendo la parte homogénea de L_4 , tenemos como raíces del polinomio característico a -4 y -2

$$y_c = c_1e^{-4x} + c_2e^{-2x}$$

Aplicando el anulador $M_4 = (D - 3)(D + 1)$, tenemos

$$(D - 3)(D^2 + 1)(D^2 + 6D + 8)y = (D - 3)(D^2 + 1)(e^{3x} - \text{sen}(x))$$

$$ML_4(y) = (D - 3)(D^2 + 1)(D^2 + 6D + 8)y = 0$$

Resolviendo ahora, tenemos como raíces a 3 , $\pm i$, -4 y -2 . Las soluciones de las últimas dos raíces ya fueron incluídas en y_c , lo que nos deja con

$$y_p = c_3e^{3x} + c_4\cos(x) + c_5\text{sen}(x)$$

Y resolviendo los coeficientes indeterminados

$$y'_p = 3c_3e^{3x} - c_4\text{sen}(x) + c_5\cos(x)$$

$$y''_p = 9c_3e^{3x} - c_4\cos(x) - c_5\text{sen}(x)$$

Implicando que

$$9c_3e^{3x} - c_4\cos(x) - c_5\text{sen}(x) + 6(3c_3e^{3x} - c_4\text{sen}(x) + c_5\cos(x)) + 8(c_3e^{3x} + c_4\cos(x) + c_5\text{sen}(x)) = e^{3x}$$

$$9c_3e^{3x} - c_4\cos(x) - c_5\text{sen}(x) + 18c_3e^{3x} - 6c_4\text{sen}(x) + 6c_5\cos(x) + 8c_3e^{3x} + 8c_4\cos(x) + 8c_5\text{sen}(x) = e^{3x}$$

$$35c_3e^{3x} + 7c_4\cos(x) - 6c_4\text{sen}(x) + 7c_5\text{sen}(x) + 6c_5\cos(x) = e^{3x} - \text{sen}(x)$$

Que nos deja con el sistema de ecuaciones siguiente

$$35c_3 = 1$$

$$7c_4 + 6c_5 = 0$$

$$-6c_4 + 7c_5 = -1$$

y resolviendo, tenemos $c_3 = \frac{1}{35}$, $c_4 = -\frac{7}{35}$, $c_5 = \frac{6}{65}$

Finalmente, escribiendo la solución general de L_4 , $y = y_p + y_c$

$$y = c_1e^{-4x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{35}e^{3x} - \frac{7}{85}\cos(x) + \frac{6}{65}\text{sen}(x)$$

5 Comparación con otros métodos

Primero que nada, vamos a resaltar desventajas y ventajas que tiene éste método

- **Ventaja:** Para resolver la solución particular de una E.D, es suficiente saber resolver ecuaciones de sistemas lineales y de conocer, el anulador a aplicar.
- **Desventaja** Podrían quedar un sistema de ecuaciones muy grande a resolver.

Comparando con el método de superposición y el de variación de parámetros

- **Variación de parámetros vs. Método del anulador:** Vemos que en variación de parámetros, de igual forma resolvemos una ecuación homogénea primero (para obtener la solución complementaria). Luego, con el método de variación de parámetros hace falta calcular tres determinantes de matrices, y luego integrar, lo que hace más largo el proceso.

La única ventaja acá sobre el método del anulador es que, no hace falta resolver sistemas de ecuaciones, pero a mi juicio, es mucho más preferible, resolverlo, que calcular determinantes de matrices o integrales (pueden ser matrices muy grandes, o integrales largas).

- **Superposición vs. Método del anulador** De igual forma, hay que resolver para la solución homogénea en ambos casos. En el método de superposición, antes de llegar a resolver el sistema de ecuaciones (que se hace en ambos casos también), hay que tener una buena intuición para proponer la forma de y_p , cuando en el método del anulador, solo hace falta resolver una ecuación homogénea.

Referencias

- [1] 2007, Michael M. Dougherty, *Lecture 10: Nonhomogeneous Linear ODEs And The Annihilator Method*, Southwestern Oklahoma State University, Differential Equations 1.
- [2] 2006, Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*, Octava Edición.