SOLUCIÓN DE LA PRUEBA CORTA #9

1. Halle el radio de convergencia mínimo de

$$\left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right) y'' + 2y' + (x-3)y = 0$$

Para una solución en serie de potencias centrada en $x = 0$

Solución

Para saber el radio de convergencia mínimo para la solución cerca de $x = 0$ se debe hallar el punto singular más cercano a $x = 0$. En este caso los puntos singulares vienen dados por los ceros de $a_2(x) = x^2 + x + \frac{5}{4}$

Utilizando la fórmula cuadrática se tiene

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(5/4)}}{2(1)} = -\frac{1}{2} \pm i$$

Por el teorema de existencia de soluciones en serie sabemos que el radio de convergencia mínimo es la distancia de $x = 0$ hasta estos puntos singulares encontrados previamente. De allí que

$$R_{mín} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

2. Halle los puntos singulares de las siguientes ecuaciones y determine si son regulares o irregulares.

(a) $x^3(x^2 - 25)(x-2)^2 y'' + 3x(x-2)y' + 7(x+5)y = 0$

(b) $(x^2 + x - 6)y'' + (x+3)y' + (x-2)y = 0$

(c) $(x^2 - 9)^2 y'' + (x+3)y' + 2y = 0$

Solución

(a) Los puntos irregulares son: $x = 0, \pm 5, 2$. Construyendo las ecuaciones $p(x) = (x-a)P(x)$ y $q(x) = (x-a)^2 Q(x)$ se tiene

Con $x = 0$

$$p(x) = x \cdot \frac{3x(x-2)}{x^3(x^2-25)(x-2)^2}$$

Que no es analítica en $x = 0$ por lo que éste es un PSI

NOTA: *Con una de las dos que no sea analítica, el punto es un PSI*

Análogamente, con $x = 5$

$$p(x) = (x-5)\frac{3x(x-2)}{x^3(x^2-25)(x-2)^2} = \frac{3x(x-2)}{x^3(x+25)(x-2)^2}$$

Y además

$$q(x) = (x-5)^2\frac{7(x+5)}{x^3(x^2-25)(x-2)^2} = \frac{7(x+5)(x-5)}{x^3(x+25)(x-2)^2}$$

Donde tanto p(x) como q(x) son analíticas, por lo que $x = 5$ es un PSR

Siguiendo la misma línea de procedimiento, se tiene que $x = -5$ y $x = 2$ son también PSR

(b) *Tanto $x = -3$ como $x = 2$ son PSR*

(c) *$x = 3$ es un PSI. $x = -3$ es un PSR*

3. ¿Cuántas funciones solución en forma de serie podrá encontrar para las siguientes ecuaciones alrededor de $x = 0$? Halle los primeros 4 términos de cada serie. En caso de no poderse encontrar más de una función solución deje indicado cómo hallaría la segunda solución.

Substituting $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ into the differential equation and collecting terms, we obtain

$$\begin{aligned}2xy'' - (3+2x)y' + y = \left(2r^2 - 5r\right)c_0x^{r-1} + \sum_{k=1}^{\infty}[2(k+r)(k+r-1)c_k \\ - 3(k+r)c_k - 2(k+r-1)c_{k-1} + c_{k-1}]x^{k+r-1} \\ = 0,\end{aligned}$$

which implies

$$2r^2 - 5r = r(2r-5) = 0$$

and

$$(k+r)(2k+2r-5)c_k - (2k+2r-3)c_{k-1} = 0.$$

The indicial roots are $r = 0$ and $r = 5/2$. For $r = 0$ the recurrence relation is

$$c_k = \frac{(2k-3)c_{k-1}}{k(2k-5)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

and

$$c_1 = \frac{1}{3}c_0, \qquad c_2 = -\frac{1}{6}c_0, \qquad c_3 = -\frac{1}{6}c_0.$$

For $r = 5/2$ the recurrence relation is

$$c_k = \frac{2(k+1)c_{k-1}}{k(2k+5)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

and

$$c_1 = \frac{4}{7}c_0, \qquad c_2 = \frac{4}{21}c_0, \qquad c_3 = \frac{32}{693}c_0.$$

The general solution on $(0, \infty)$ is

$$y = C_1\left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right) + C_2x^{5/2}\left(1 + \frac{4}{7}x + \frac{4}{21}x^2 + \frac{32}{693}x^3 + \cdots\right).$$

Ecuación (b)

Substituting $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ into the differential equation and collecting terms, we obtain

$$xy'' + (1-x)y' - y = r^2 c_0 x^{r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r)(k+r-1)c_k + (k+r)c_k - (k+r)c_{k-1}]x^{k+r-1} = 0,$$

which implies $r^2 = 0$ and

$$(k+r)^2 c_k - (k+r)c_{k-1} = 0.$$

The indicial roots are $r_1 = r_2 = 0$ and the recurrence relation is

$$c_k = \frac{c_{k-1}}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

One solution is

$$y_1 = c_0 \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) = c_0 e^x.$$

A second solution is

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int (1/x-1)dx}}{e^{2x}}\, dx = e^x \int \frac{e^x/x}{e^{2x}}\, dx = e^x \int \frac{1}{x} e^{-x} dx \\ &= e^x \int \frac{1}{x}\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) dx = e^x \int \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3!}x^2 + \cdots\right) dx \\ &= e^x \left[\ln x - x + \frac{1}{2\cdot 2}x^2 - \frac{1}{3\cdot 3!}x^3 + \cdots\right] = e^x \ln x - e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot n!} x^n. \end{aligned}$$

The general solution on $(0, \infty)$ is

$$y = C_1 e^x + C_2 e^x \left(\ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!} x^n\right).$$