HOJA DE TRABAJO
(CORTO 7)
SOLUCIONES EN FORMA DE SERIES DE POTENCIAS
PUNTOS ORDINARIOS
Resolución

1. La siguiente función es analítica en $x = 0$ (demuéstrelo). Halle, usando la división larga, la serie de potencias centrada en cero para la función. Proporcione un intervalo de convergencia para la serie.
$$f(x) = \sec x$$

Debe hacerse la división larga. De modo que tenemos

$$\begin{array}{rl}
 & 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{48}+\frac{13x^6}{1440}+\cdots \\
\hline
1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\cdots \Big) & 1 \\
(-) & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\cdots \\
\hline
 & \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}-\cdots \\
(-) & \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}+\frac{x^6}{48}-\cdots \\
\hline
 & \frac{x^4}{48}-\frac{x^6}{720}+\cdots \\
(-) & \frac{x^4}{48}-\frac{x^6}{96}+\cdots \\
\hline
 & \frac{13x^6}{1440}+\cdots
\end{array}$$

Entonces $\mathbf{\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{48} + \frac{13x^6}{1440}} + \cdots$

El Teorema de Existencia alrededor de puntos ordinarios, nos asegura que esta serie analítica en $x = 0$ tiene radio de convergencia por lo menos hasta el punto singular más cercano, el cual es $x = \pm\frac{\pi}{2}$, por lo tanto, podemos dar como intervalo de convergencia el intervalo
$$\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}}$$

2. Compruebe que para la siguiente ecuación, $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación. Enseguida encuentre la solución en serie de potencias de la ecuación dada.

$$y'' - y' + xy = 0$$

Como $P(x) = -1$ & $Q(x) = x$ son analíticas en todo punto, entonces $x = 0$ es un punto ordinario. Luego, se sustituye la solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$$

De modo que tenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

Buscamos que las tres series comiencen en la misma potencia de cero. Se ajustará a la potencia inicial de la serie de la derecha x^1 liberando un término de las series de la derecha. De esto resulta

$$2c_2 x^0 - c_1 x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

Ajustando los índices de las tres series, restándole 3 al índice de la primera sumatoria y restándole 2 al índice de la segunda tenemos

$$[2c_2 - c_1]x^0 + \sum_{n=0}^{\infty} [c_{n+3}(n+3)(n+2) - c_{n+2}(n+2) + c_n] x^{n+1} = 0$$

Usando la propiedad de identidad se tiene que

$$2c_2 - c_1 = 0 \implies c_2 = \frac{c_1}{2}$$

Y también tenemos la relación de recurrencia

$$c_{n+3} = \frac{c_{n+2}(n+2) - c_n}{(n+3)(n+2)}$$

Con $n = 0, 1, 2, \ldots$

Generando otros tres términos para la serie se tiene

$$c_3 = \frac{2c_2 - c_0}{2 \cdot 3} = \frac{c_1 - c_0}{3!}$$

$$c_4 = \frac{3c_3 - c_1}{3 \cdot 4} = \frac{3\left(\frac{c_1 - c_0}{3!}\right) - c_1}{3 \cdot 4} = -\frac{c_1 + c_0}{4!}$$

$$c_5 = \frac{4c_4 - c_2}{5 \cdot 4} = \frac{-4\left(\frac{c_1 + c_0}{4!}\right) - \frac{c_1}{2}}{5 \cdot 4} = -\frac{c_0 + 4c_1}{5!}$$

Entonces, la solución del problema es

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_1 - c_0}{3!}x^3 - \frac{c_1 + c_0}{4!}x^4 - \frac{c_0 + 4c_1}{5!}x^5 + \cdots$$

O sea, la solución general es

$$\boldsymbol{y(x) = A\left(1 - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) + B\left(x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{4x^5}{5!} + \cdots\right)}$$

3. Halle los primeros 5 términos de la solución completa en forma de serie de potencias de la ecuación no homogénea

$$y'' - 4xy' - 4y = e^x$$

Escribiendo la misma ecuación en forma de serie, tenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - 4\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

La única serie que no comienza en x^0 es $4\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n$ pero podemos hacer que comience en esa potencia simplemente iniciando el contador en $n = 0$ dado que ese primer término es cero. Además, ajustando el índice de la primera serie, restándole 2 tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Pasando a restar el miembro derecho y compactando todo a una sola suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[c_{n+2}(n+2)(n+1) - 4c_n(n+1) - \frac{1}{n!}\right] x^n = 0$$

Usando la propiedad de identidad

$$c_{n+2} = \frac{4c_n(n+1) + \frac{1}{n!}}{(n+2)(n+1)}$$

Con $n = 0, 1, 2, \ldots$

Generaremos 4 términos

$$c_2 = \frac{4c_0 + \frac{1}{0!}}{2 \cdot 1} = 2c_0 + \frac{1}{2}$$

Recordando que $0! = 1$ por definición. Otros tres términos más

$$c_3 = \frac{8c_1 + \frac{1}{1!}}{3 \cdot 2} = \frac{8}{3!}c_1 + \frac{1}{3!}$$

$$c_4 = \frac{4c_2 + \frac{1}{2!}}{4 \cdot 3} = \frac{16c_0 + 5}{4!}$$

$$c_5 = \frac{4c_3 + \frac{1}{3!}}{5 \cdot 4} = \frac{32c_1 + 5}{5!}$$

Entonces, la solución general del problema es

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \frac{4c_0 + 1}{2!}x^2 + \frac{8c_1 + 1}{3!}x^3 + \frac{16c_0 + 5}{4!}x^4 + \frac{32c_1 + 5}{5!}x^5 + \cdots$$

Ordenándola

$$\boldsymbol{y(x) = A\left(1 + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{16}{4!}x^4 + \cdots\right) + B\left(x + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{32}{5!}x^5 + \cdots\right) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{5x^5}{5!} + \cdots\right)}$$

Dónde se reconocen las dos soluciones linealmente independientes del problema homogéneo, y por último, la solución particular debida a la función de entrada $f(x) = e^x$