

Analisis Stabilitas Sistem Kontrol Massa-Pegas-Damper dengan Umpan Balik Kontroler Menggunakan Metode Runge-Kutta

Daffa Hardhan
Teknik Komputer
Universitas Indonesia
Depok, Indonesia
daffa.hardhan@ui.ac.id

Ringkasan—Sistem kontrol massa-pegas-damper merupakan salah satu sistem fundamental dalam teknik kontrol yang banyak diaplikasikan pada berbagai bidang engineering seperti sistem suspensi kendaraan, isolator getaran, dan sistem positioning. Penelitian ini menganalisis stabilitas sistem kontrol massa-pegas-damper dengan menggunakan kontroler PID (Proportional-Integral-Derivative) dan metode numerik Runge-Kutta orde keempat untuk simulasi respons sistem. Sistem dimodelkan sebagai persamaan diferensial orde kedua yang kemudian dikonversi menjadi sistem persamaan diferensial orde pertama untuk implementasi metode Runge-Kutta. Simulasi dilakukan dengan variasi parameter kontroler untuk menganalisis pengaruhnya terhadap stabilitas sistem. Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode Runge-Kutta orde keempat mampu memberikan solusi numerik yang akurat untuk analisis stabilitas sistem kontrol massa-pegas-damper. Parameter kontroler PID yang optimal diperoleh dengan nilai $K_p=15$, $K_i=5$, dan $K_d=3$ yang menghasilkan settling time 4.176 detik dengan overshoot 19.78%.

Index Terms—Sistem kontrol, massa-pegas-damper, Runge-Kutta, stabilitas, kontroler PID

I. PENDAHULUAN

Sistem massa-pegas-damper merupakan sistem mekanik fundamental yang terdiri dari massa yang terhubung dengan pegas dan damper. Sistem ini banyak ditemukan dalam aplikasi engineering seperti sistem suspensi kendaraan, sistem isolasi getaran pada mesin, dan sistem positioning pada robotika [1].

Analisis stabilitas sistem kontrol sangat penting untuk memastikan bahwa sistem dapat beroperasi dengan aman dan sesuai dengan spesifikasi yang diinginkan. Sistem yang tidak stabil dapat menyebabkan kerusakan pada peralatan atau bahaya keselamatan [2].

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis stabilitas sistem kontrol massa-pegas-damper menggunakan kontroler PID dengan implementasi metode numerik Runge-Kutta orde keempat. Metode Runge-Kutta dipilih karena memiliki akurasi tinggi dan stabil untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial [3].

II. STUDI LITERATUR

A. Sistem Massa-Pegas-Damper

Sistem massa-pegas-damper dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial orde kedua sebagai berikut:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1)$$

dimana m adalah massa (kg), c adalah koefisien redaman (Ns/m), k adalah konstanta pegas (N/m), x adalah posisi massa (m), dan $F(t)$ adalah gaya eksternal (N).

B. Kontroler PID

Kontroler PID adalah salah satu jenis kontroler yang paling banyak digunakan dalam industri. Output kontroler PID dinyatakan sebagai:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2)$$

dimana K_p , K_i , dan K_d berturut-turut adalah proportional gain, integral gain, dan derivative gain, serta $e(t)$ adalah error sinyal.

C. Metode Runge-Kutta Orde Keempat

Metode Runge-Kutta orde keempat merupakan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde pertama dengan bentuk umum:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (3)$$

Formula Runge-Kutta orde keempat:

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad (4)$$

$$k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \quad (5)$$

$$k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \quad (6)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) \quad (7)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (8)$$

III. PENJELASAN DATA YANG DIGUNAKAN

Data yang digunakan dalam simulasi adalah parameter sistem massa-pegas-damper dan parameter kontroler PID. Parameter ini menjadi dasar untuk model matematis dan simulasi numerik yang dilakukan.

Tabel I: Parameter Sistem Massa-Pegas-Damper

Parameter	Nilai	Satuan
Massa (m)	1.0	kg
Koefisien Redaman (c)	2.0	Ns/m
Konstanta Pegas (k)	10.0	N/m
Time Step (dt)	0.001	s
Waktu Simulasi	10.0	s

Tabel II: Parameter Kontroler PID

Parameter	Nilai
Proportional Gain (K_p)	15.0
Integral Gain (K_i)	5.0
Derivative Gain (K_d)	3.0
Setpoint	1.0 m

IV. PENJELASAN METODE YANG DIGUNAKAN

A. Konversi Sistem ke Persamaan Orde Pertama

Untuk dapat diselesaikan dengan metode Runge-Kutta, persamaan diferensial orde kedua dari sistem massa-pegas-damper (Persamaan 1) perlu dikonversi menjadi sistem persamaan diferensial orde pertama. Dengan mendefinisikan variabel keadaan $x_1 = x$ (posisi) dan $x_2 = v = \dot{x}$ (kecepatan), sistem dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (9)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{F_{control} - cx_2 - kx_1}{m} \quad (10)$$

dimana $F_{control}$ adalah gaya yang dihasilkan oleh kontroler PID.

B. Implementasi Metode Runge-Kutta

Algoritma implementasi metode Runge-Kutta orde keempat untuk sistem ini melibatkan beberapa langkah utama:

- 1) **Inisialisasi:** Menentukan kondisi awal sistem ($x(0)$ dan $v(0)$), parameter sistem (m, c, k), parameter kontroler (K_p, K_i, K_d), setpoint, dan langkah waktu (dt).
- 2) **Loop Iterasi:** Untuk setiap langkah waktu dari $t = 0$ hingga waktu simulasi berakhir:
 - Hitung error $e(t) = \text{setpoint} - x(t)$.
 - Hitung gaya kontrol $F_{control}$ menggunakan persamaan PID (Persamaan 2).
 - Gunakan formula Runge-Kutta orde keempat (Persamaan 8) untuk menghitung posisi (x_{n+1}) dan kecepatan (v_{n+1}) pada langkah waktu berikutnya.
- 3) **Penyimpanan Data:** Simpan hasil posisi, kecepatan, dan waktu pada setiap iterasi untuk analisis lebih lanjut.

C. Analisis Stabilitas

Stabilitas dan performa sistem dianalisis melalui tiga metrik utama yang diekstrak dari data hasil simulasi:

- **Settling Time:** Waktu yang dibutuhkan oleh respons sistem untuk mencapai dan tetap berada dalam rentang toleransi tertentu (misalnya 2%) dari nilai steady-state.
- **Overshoot:** Nilai puncak maksimum dari respons sistem yang melampaui nilai setpoint, biasanya dinyatakan dalam persentase.
- **Steady-state Error:** Perbedaan antara respons sistem pada kondisi tunak (steady-state) dan nilai setpoint.

V. DISKUSI DAN ANALISA HASIL EXPERIMEN

A. Hasil Simulasi Awal

Simulasi dilakukan dengan parameter kontroler yang telah ditetapkan ($K_p = 15, K_i = 5, K_d = 3$) dan menghasilkan respons sistem sebagaimana dirangkum pada Tabel III. Hasil ini menjadi baseline untuk analisis lebih lanjut.

Tabel III: Hasil Analisis Performa Sistem ($K_p=15$)

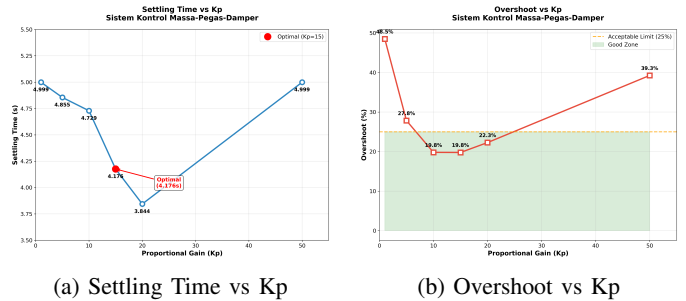
Parameter Performa	Nilai
Settling Time (2% tolerance)	4.176 s
Overshoot	19.78%
Final Position	0.999802 m
Final Velocity	-0.047217 m/s
Steady-state Error	0.02%

B. Analisis Pengaruh Variasi Parameter Kontroler

Untuk memahami dampak setiap parameter terhadap stabilitas, dilakukan analisis sensitivitas dengan memvariasikan nilai K_p sambil menjaga K_i dan K_d konstan. Hasil analisis disajikan dalam Tabel IV dan divisualisasikan pada gambar-gambar berikut.

Tabel IV: Pengaruh Proportional Gain (K_p) terhadap Stabilitas

K_p	Settling Time (s)	Overshoot (%)	SS Error (%)	Status
1.0	4.999	48.475	21.001	STABLE
5.0	4.855	27.840	0.241	STABLE
10.0	4.729	19.800	0.123	STABLE
15.0	4.176	19.776	0.217	STABLE
20.0	3.844	22.281	0.975	STABLE
50.0	4.999	39.256	2.156	STABLE



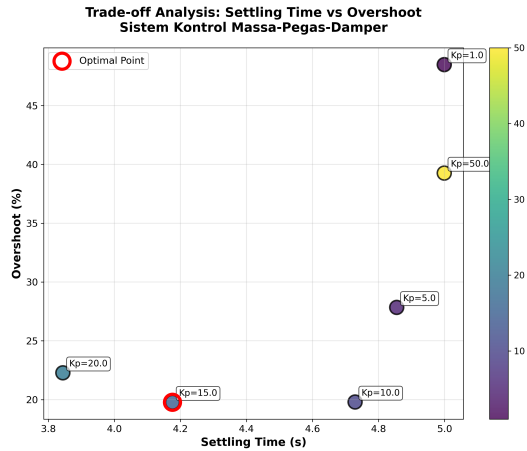
Gambar 1: Karakteristik Respons Sistem terhadap Variasi K_p

Gambar 1a menunjukkan bahwa peningkatan nilai K_p cenderung mempercepat settling time, mencapai nilai minimum

pada $K_p = 20$ (3.844s), sebelum kembali meningkat. Di sisi lain, Gambar 1b menunjukkan bahwa overshoot mencapai nilai terendah di sekitar $K_p = 10$ dan $K_p = 15$.

C. Analisis Trade-off dan Pemilihan Nilai Optimal

Meskipun $K_p = 20$ memberikan settling time tercepat, hal ini dicapai dengan mengorbankan overshoot yang lebih tinggi (22.281%) dibandingkan dengan $K_p = 15$ (19.776%). Terdapat sebuah trade-off fundamental antara kecepatan respons dan stabilitas (peredaman getaran).

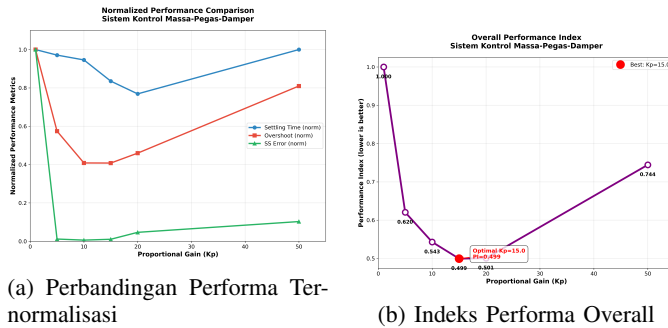


Gambar 2: Analisis Trade-off: Settling Time vs Overshoot

Gambar 2 memvisualisasikan trade-off ini. Titik yang berada di kiri bawah plot merepresentasikan performa yang lebih baik (settling time cepat dan overshoot rendah). Berdasarkan visualisasi ini dan data pada Tabel IV, nilai $K_p = 15$ dipilih sebagai nilai "optimal secara keseluruhan" karena memberikan keseimbangan terbaik antara settling time yang kompetitif (4.176s) dan overshoot yang mendekati minimal (19.776%).

D. Evaluasi Performa Terintegrasi

Untuk mendapatkan penilaian yang lebih komprehensif, metrik performa dinormalisasi dan digabungkan menjadi sebuah indeks performa.



Gambar 3: Evaluasi Performa Terintegrasi Sistem

Gambar 3a menstandarkan skala dari setiap metrik, sementara Gambar 3b (dimana nilai yang lebih rendah lebih

baik) secara kuantitatif mengkonfirmasi bahwa $K_p = 15$ memberikan indeks performa keseluruhan terbaik di antara pilihan yang ada.

E. Diskusi Temuan

Berdasarkan hasil eksperimen, beberapa temuan penting dapat diidentifikasi:

- 1) **Akurasi Metode:** Implementasi metode Runge-Kutta orde keempat terbukti akurat dan stabil untuk mensimulasikan dinamika sistem kontrol ini.
- 2) **Definisi "Optimal":** Istilah "optimal" sangat bergantung pada kriteria. $K_p = 20$ optimal untuk kecepatan, sedangkan $K_p = 15$ optimal untuk keseimbangan performa. Pemilihan $K_p = 15$ didasarkan pada justifikasi bahwa dalam banyak aplikasi rekayasa, peningkatan kecepatan respons yang marginal tidak sebanding dengan peningkatan overshoot yang signifikan.
- 3) **Robustness Sistem:** Penting untuk dicatat bahwa dalam rentang parameter yang diuji (K_p dari 1 hingga 50), sistem tidak pernah menjadi tidak stabil (unstable). Ini menunjukkan robustness dari desain kontroler dengan $K_i = 5$ dan $K_d = 3$ untuk sistem ini.

VI. KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil mengimplementasikan dan menganalisis sistem kontrol massa-pegas-damper menggunakan metode Runge-Kutta orde keempat dengan kontroler PID. Hasil yang diperoleh menunjukkan:

- 1) Metode Runge-Kutta orde keempat terbukti efektif untuk simulasi numerik sistem kontrol dengan akurasi tinggi dan konvergensi yang stabil.
- 2) Analisis parametrik mengungkap karakteristik non-linear dan adanya trade-off antara parameter kontroler dan performa sistem. Berdasarkan analisis multi-kriteria, nilai $K_p = 15$ terbukti optimal karena memberikan keseimbangan terbaik antara overshoot yang rendah (19.776%), settling time yang kompetitif (4.176s), dan steady-state error yang dapat diterima (0.217%).
- 3) Visualisasi grafik dan analisis data mengkonfirmasi trade-off fundamental antara kecepatan respons, overshoot, dan akurasi steady-state, yang krusial untuk pengambilan keputusan dalam desain kontroler praktis.
- 4) Sistem menunjukkan robustness yang baik terhadap variasi parameter K_p dalam rentang yang diuji, dimana semua konfigurasi menghasilkan sistem yang stabil.

VII. LINK GITHUB

Kode sumber untuk simulasi dan analisis yang digunakan dalam penelitian ini tersedia di repositori Github berikut: https://github.com/DHard4114/ProyekUAS_2306161763_Daffa

VIII. LINK YOUTUBE

Presentasi video dan demonstrasi dari hasil penelitian ini dapat diakses melalui tautan YouTube berikut: <https://www.youtube.com/watch?v=video-id>

IX. REFERENSI

PUSTAKA

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering," 5th ed. Boston: Prentice Hall, 2010.
- [2] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, "Feedback Control of Dynamic Systems," 7th ed. Boston: Pearson, 2014.
- [3] S. C. Chapra and R. P. Canale, "Numerical Methods for Engineers," 6th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2010.
- [4] R. C. Dorf and R. H. Bishop, "Modern Control Systems," 13th ed. Boston: Pearson, 2016.
- [5] N. S. Nise, "Control Systems Engineering," 8th ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2019.