

Algorithms

Chapter 0 Stable Matching

Associate Professor: Ching-Chi Lin

林清池 副教授

chingchi.lin@gmail.com

Department of Computer Science and Engineering
National Taiwan Ocean University

Stable Matching Problem (穩定配對問題)

- ▶ Goal. Given n men and n women, find a "suitable" matching.
 - ▶ 依喜好程度對於異性排序
 - ▶ 每個男生由高至低列出志願序列
 - ▶ 每個女生由高至低列出志願序列



Stable Matching Problem (穩定配對問題)

- ▶ Goal. Given n men and n women, find a "suitable" matching.
 - ▶ 依喜好程度對於異性排序
 - ▶ 每個男生由高至低列出志願序列
 - ▶ 每個女生由高至低列出志願序列



Stable Matching Problem (穩定配對問題)

- ▶ Goal. Given n men and n women, find a "suitable" matching.
 - ▶ 依喜好程度對於異性排序
 - ▶ 每個男生由高至低列出志願序列
 - ▶ 每個女生由高至低列出志願序列

	favorite ↓ 1 st	2 nd	least favorite ↓ 3 rd
周杰倫	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
錦榮	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
梁朝偉	昆凌	蔡依林	劉嘉玲

	favorite ↓ 1 st	2 nd	least favorite ↓ 3 rd
蔡依林	錦榮	周杰倫	梁朝偉
昆凌	周杰倫	錦榮	梁朝偉
劉嘉玲	周杰倫	錦榮	梁朝偉

Stable Matching Problem (穩定配對問題)

▶ Perfect matching:

- ▶ 每一個男生都剛好和一個女生在一起.
- ▶ 每一個女生都剛好和一個男生在一起.

▶ Unstable pair:

- ▶ 在一個 matching 中，有一對(男,女)，男女生喜歡對方勝於自己的配偶.
- ▶ 這對(男,女)稱為 unstable pair.

▶ Stable matching: Perfect matching + no unstable pair.

▶ Stable matching problem: Given the preference lists of n men and n women, find a stable matching if one exists.

Stable Matching Problem (穩定配對問題)

- ▶ Q. (周, 劉), (錦, 蔡), (梁, 昆), 是一個穩定配對嗎?
- ▶ A. No, (周, 昆) 會發生婚外情.

	favorite ↓ 1 st	2 nd	least favorite ↓ 3 rd
周杰倫	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
錦榮	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
梁朝偉	昆凌	蔡依林	劉嘉玲

	favorite ↓ 1 st	2 nd	least favorite ↓ 3 rd
蔡依林	錦榮	周杰倫	梁朝偉
昆凌	周杰倫	錦榮	梁朝偉
劉嘉玲	周杰倫	錦榮	梁朝偉

Stable Matching Problem (穩定配對問題)

- ▶ Q. (周, 昆), (錦, 蔡), (梁, 劉), 是一個穩定配對嗎?
- ▶ A. 是的, 雖然周杰倫、梁朝偉、劉嘉玲的心中都有遺憾.

	favorite ↓ 1 st	2 nd	least favorite ↓ 3 rd
周杰倫	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
錦榮	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
梁朝偉	昆凌	蔡依林	劉嘉玲

	favorite ↓ 1 st	2 nd	least favorite ↓ 3 rd
蔡依林	錦榮	周杰倫	梁朝偉
昆凌	周杰倫	錦榮	梁朝偉
劉嘉玲	周杰倫	錦榮	梁朝偉

Propose-And-Reject Algorithm

Propose-and-reject algorithm. [Gale-Shapley 1962]

```
while (有男生沒結婚且還沒有跟每個人求過婚){  
    選一個這樣的男生 m  
    讓 w 為 m 未求過婚的最佳選擇  
    if (w 沒結婚)  
        m 跟 w 求婚成功  
    else if (w 已結婚但喜歡 m 勝過目前的配偶)  
        w 與目前的配偶離婚與 m 結婚  
    else  
        w 拒絕 m  
}
```


Propose-And-Reject Algorithm

Propose-and-reject algorithm. [Gale-Shapley 1962]

	favorite ↓ 1st	2nd	least favorite ↓ 3rd
周杰倫	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
錦榮	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
梁朝偉	昆凌	蔡依林	劉嘉玲

Men's Preference Profile

	favorite ↓ 1st	2nd	least favorite ↓ 3rd
蔡依林	錦榮	周杰倫	梁朝偉
昆凌	周杰倫	錦榮	梁朝偉
劉嘉玲	周杰倫	錦榮	梁朝偉

Women's Preference Profile

周杰倫：依林嫁給我吧！

蔡依林：沒問題，周董。

Propose-And-Reject Algorithm

Propose-and-reject algorithm. [Gale-Shapley 1962]

	favorite ↓ 1st	2nd	least favorite ↓ 3rd
周杰倫	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
錦榮	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
梁朝偉	昆凌	蔡依林	劉嘉玲

Men's Preference Profile

	favorite ↓ 1st	2nd	least favorite ↓ 3rd
蔡依林	錦榮	周杰倫	梁朝偉
昆凌	周杰倫	錦榮	梁朝偉
劉嘉玲	周杰倫	錦榮	梁朝偉

Women's Preference Profile

錦榮：依林嫁給我吧！

蔡依林：沒問題，錦榮。

雖然我已經有了周董，但你才是我的最愛。

Propose-And-Reject Algorithm

Propose-and-reject algorithm. [Gale-Shapley 1962]

	favorite ↓ 1st	2nd	least favorite ↓ 3rd
周杰倫	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
錦榮	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
梁朝偉	昆凌	蔡依林	劉嘉玲

Men's Preference Profile

	favorite ↓ 1st	2nd	least favorite ↓ 3rd
蔡依林	錦榮	周杰倫	梁朝偉
昆凌	周杰倫	錦榮	梁朝偉
劉嘉玲	周杰倫	錦榮	梁朝偉

Women's Preference Profile

周杰倫：昆凌嫁給我吧！

昆凌：沒問題，周董。你是我的最愛。

Propose-And-Reject Algorithm

Propose-and-reject algorithm. [Gale-Shapley 1962]

	favorite ↓		least favorite ↓
	1st	2nd	3rd
周杰倫	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
錦榮	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
梁朝偉	昆凌	蔡依林	劉嘉玲

Men's Preference Profile

	favorite ↓		least favorite ↓
	1st	2nd	3rd
蔡依林	錦榮	周杰倫	梁朝偉
昆凌	周杰倫	錦榮	梁朝偉
劉嘉玲	周杰倫	錦榮	梁朝偉

Women's Preference Profile

梁朝偉：昆凌嫁給我吧！

昆凌：不行，我愛的是周董。

Propose-And-Reject Algorithm

Propose-and-reject algorithm. [Gale-Shapley 1962]

	favorite ↓ 1st	2nd	least favorite ↓ 3rd
周杰倫	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
錦榮	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
梁朝偉	昆凌	蔡依林	劉嘉玲

Men's Preference Profile

	favorite ↓ 1st	2nd	least favorite ↓ 3rd
蔡依林	錦榮	周杰倫	梁朝偉
昆凌	周杰倫	錦榮	梁朝偉
劉嘉玲	周杰倫	錦榮	梁朝偉

Women's Preference Profile

梁朝偉：依林嫁給我吧！

蔡依林：不行，我愛的是錦榮。

Propose-And-Reject Algorithm

Propose-and-reject algorithm. [Gale-Shapley 1962]

	favorite ↓ 1st	2nd	least favorite ↓ 3rd
周杰倫	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
錦榮	蔡依林	昆凌	劉嘉玲
梁朝偉	昆凌	蔡依林	劉嘉玲

Men's Preference Profile

	favorite ↓ 1st	2nd	least favorite ↓ 3rd
蔡依林	錦榮	周杰倫	梁朝偉
昆凌	周杰倫	錦榮	梁朝偉
劉嘉玲	周杰倫	錦榮	梁朝偉

Women's Preference Profile

梁朝偉：嘉玲嫁給我吧！

劉嘉玲：沒問題，朝偉。

問題集

- ▶ 穩定配對一定存在嗎？
 - ▶ Yes, 請證明.
 - ▶ NO, 請舉一個反例.
- ▶ 如果穩定配對一定存在，演算法會產生答案嗎？
 - ▶ Correctness.
- ▶ 演算法的效率？
 - ▶ Time complexity.