

CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐẾM**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

*) Nhận xét: Đối với “Bài toán đếm số” thì không có phương pháp chung nào cho mọi bài toán ở dạng này. Mà khi gặp mỗi bài toán có liên quan tới việc đếm số, đếm chữ số.... đòi hỏi sự tư duy, tổ chức thông minh kết hợp với những kiến thức đã học về tập hợp số tự nhiên để giải bài toán. Qua mỗi bài toán cụ thể, học sinh sẽ tích lũy được những phương pháp giải, giúp hỗ trợ cho việc giải các bài toán khác ở dạng này được tốt hơn.

*) Đếm số tự nhiên lập được từ m số cho trước lấy ra từ tập hợp số $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$ ta làm như sau:

+ Chọn một trong m số làm chữ số hàng cao nhất, rồi lập sơ đồ hình cây, sau đó đếm số lập được

+ Ví dụ: Từ các số 3, 6, 9 lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau?

Bước 1: Chọn chữ số 3 làm hàng trăm, ta có 2 số 369 và 396.

Bước 2: Từ sơ đồ, ta thấy từ 3 chữ số đã cho ta lập được 2 số có 3 chữ số khác nhau mà chữ số hàng trăm bằng 3. Tương tự, ta lập được 2 số có 3 chữ số khác nhau mà chữ số hàng trăm bằng 6, lập được 2 số có 3 chữ số khác nhau mà có chữ số hàng trăm bằng 9.

Bước 3: Vậy từ 3 chữ số đã cho ta lập được $3 \cdot 2 = 6$ (số).

*) Để tìm số tự nhiên chưa biết, ta vận dụng hai phương pháp cơ bản sau:

- Phân tích cấu tạo số của một số tự nhiên.

Ta có: $\overline{ab} = 10a + b$

$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 10\overline{ab} + c = 100a + \overline{bc}$

$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 10\overline{abc} + d = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 1000a + 10\overline{bc} + d$

- Từ đặc điểm của số cần tìm và dữ kiện của bài toán ta lập luận, nhận xét để lựa chọn chữ số (thường sẽ nhận xét để chỉ ra chữ số của hàng đơn vị và chữ số hàng cao nhất).

PHẦN II. BÀI TẬP:**I. Phương pháp giải**

- Liệt kê: Các phần tử thỏa mãn điều kiện cho trước \Rightarrow dùng phương pháp đếm (ít phần tử)

- Dựa vào quy luật hình thành các phần tử để đếm (chia hết cho 2, 3, ... hoặc thỏa mãn điều kiện nào đó).

II. Bài toán**Dạng 1: Đếm số các chữ số của dãy số**

Bài 1: Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được một số tự nhiên A .

TÊN CHUYÊN ĐỀ. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

- a) Số A có bao nhiêu chữ số?
- b) Tính tổng các chữ số của số A ?
- c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?
- d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Phân tích:

- a) Cần đếm số chữ số của các dãy số sau: Dãy các số tự nhiên có 1 chữ số, dãy các số tự nhiên có 2 chữ số, dãy các số tự nhiên có 3 chữ số. Sau đó cộng các kết quả lại với nhau
- b) Viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A . Số B có: $3.1000 = 3000$ chữ số mà mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt 300 lần

Lời giải:

- a) Số A có bao nhiêu chữ số?

Từ 1 đến 9 có 9 số gồm: 9 (chữ số)

Từ 10 đến 99 số có 90 số gồm: $90.2 = 180$ (chữ số)

Từ 100 đến 999 có 900 số gồm: $900.3 = 2700$ (chữ số)

Số A có: $9 + 180 + 2700 = 2889$ (chữ số).

- b) Tính tổng các chữ số của số A ?

Giả sử ta viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thế thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A . B có: $3.1000 = 3000$ chữ số, mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt: $3000:10 = 300$ (lần)

Tổng các chữ số của B (cũng là của A):

$$(0 + 1 + 2 + \dots + 9).300 = 45.300 = 13500 \text{ (chữ số)}$$

- c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

Cần đếm số chữ số 1 trong 11 dãy: 1, 2, 3, ..., 999 (1)

Ta xét dãy: 000, 001, 002, ..., 999 (2)

Số chữ số 1 trong hai dãy như nhau. Ở đây dãy (2) có 1000 số, mỗi số gồm 3 chữ số, số lượng mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều như nhau. Mỗi chữ số (từ 0 đến 9) đều có mặt

$$3.1000:10 = 300 \text{ (lần).}$$

Vậy ở đây (1) chữ số 1 cũng được viết 300 lần.

- d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

TÊN CHUYÊN ĐỀ. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Ở dãy (2) chữ số 0 có mặt 300 lần.

So với dãy (1) thì ở dãy (2) ta viết thêm các chữ số 0:

- Vào hàng trăm 100 lần (chữ số hàng trăm của các số từ 000 đến 099);
- Vào hàng chục 10 lần (chữ số hàng chục của các số từ 000 đến 009);
- Vào hàng đơn vị 1 lần (chữ số hàng đơn vị của 000).

Vậy chữ số 0 ở dãy (1) được viết là: $300 - 111 = 189$ (lần).

Bài 2: Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được một số tự nhiên A .

- Số A có bao nhiêu chữ số?
- Tính tổng các chữ số của số A ?
- Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?
- Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Phân tích:

- Cần đếm số chữ số của các dãy số sau: Dãy các số tự nhiên có 1 chữ số, dãy các số tự nhiên có 2 chữ số, dãy các số tự nhiên có 3 chữ số. Sau đó cộng các kết quả lại với nhau
- Viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A . Số B có: $3 \cdot 1000 = 3000$ chữ số mà mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt 300 lần

Lời giải:

- Số A có bao nhiêu chữ số?

Từ 1 đến 9 có 9 số gồm: 9 (chữ số)

Từ 10 đến 99 số có 90 số gồm: $90 \cdot 2 = 180$ (chữ số)

Từ 100 đến 999 có 900 số gồm: $900 \cdot 3 = 2700$ (chữ số)

Số A có: $9 + 180 + 2700 = 2889$ (chữ số).

- Tính tổng các chữ số của số A ?

Giả sử ta viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A . Số B có: $3 \cdot 1000 = 3000$ chữ số, mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt: $3000 : 10 = 300$ (lần)

Tổng các chữ số của B (cũng là của A):

$(0 + 1 + 2 + \dots + 9) \cdot 300 = 45 \cdot 300 = 13500$ (chữ số)

c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

Cần đếm số chữ số 1 trong 11 dãy: 1, 2, 3, ..., 999 (1)

Ta xét dãy: 000, 001, 002, ..., 999 (2)

Số chữ số 1 trong hai dãy như nhau. Ở đây dãy (2) có 1000 số, mỗi số gồm 3 chữ số, số lượng mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều như nhau. Mỗi chữ số (từ 0 đến 9) đều có mặt

$$3 \cdot 1000 : 10 = 300 \text{ (lần)}.$$

Vậy ở đây (1) chữ số 1 cũng được viết 300 lần.

d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Ở dãy (2) chữ số 0 có mặt 300 lần.

So với dãy (1) thì ở dãy (2) ta viết thêm các chữ số 0:

- Vào hàng trăm 100 lần (chữ số hàng trăm của các số từ 000 đến 099);

- Vào hàng chục 10 lần (chữ số hàng chục của các số từ 000 đến 009);

- Vào hàng đơn vị 1 lần (chữ số hàng đơn vị của 000).

Vậy chữ số 0 ở dãy (1) được viết là: $300 - 111 = 189$ (lần).

Bài 3: Để đánh số trang của một cuốn sách, người ta viết dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1 và phải dùng tất cả 1998 chữ số.

a) Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?

b) Chữ số thứ 1010 là chữ số nào?

Phân tích: Để đếm số trang sách ta cần phân số trang sách theo 3 loại

Loại 1: Số trang sách mà mỗi số có 1 chữ số

Loại 2: Số trang sách mà mỗi số có 2 chữ số

Loại 3: Số trang sách mà mỗi số có 3 chữ số

Từ đó tính số chữ còn lại để đánh dấu các trang có 3 chữ số, rồi tính được số trang sách

b) Nhận thấy số 100 là số thứ nhất có 3 chữ số. Bằng việc dùng phép chia dư ta cần tìm xem chữ số thứ 1010 thuộc số thứ bao nhiêu có 3 chữ số

Lời giải

a) Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?

Ta có: Từ trang 1 đến trang 9 phải dùng 9 chữ số (viết tất chữ số).

TÊN CHUYÊN ĐỀ. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Từ trang 10 đến trang 99 cần $(99 - 10) + 1 = 90$ số có 2 chữ số, phải dùng 180 (chữ số)

Vì còn các trang gồm các số có 3 chữ số

Đ Còn lại: $1998 - (180 + 9) = 1809$ (chữ số) là đánh dấu các trang có 3 chữ số.

Đ Có: $1809 : 3 = 603$ số có 3 chữ số.

Đ Cuốn sách đó có: $603 + 99 = 702$ (vì trang 1 ® 99 có 99 trang).

Cuốn sách có 702 trang.

b) Vì $1010 > 180 + 9$ nên chữ số thứ 1010 nằm trong các số có 3 chữ số

Ta có: $1010 - (180 + 9) = 821$ (chữ số) đánh dấu các trang có 3 chữ số tính từ trang 100 (số thứ nhất có 3 chữ số) nên có $821 : 3$ được 273 và dư 2 Đ Chữ số thứ 1010 sẽ nằm ở số thứ 274 có 3 chữ số.

Số thứ 274 có 3 chữ số là 374 Đ Chữ số thứ 1010 là chữ số 7 của 374.

Bài 4: Bạn Tâm đánh số trang của một cuốn vở có 110 trang bằng cách viết dãy số tự nhiên 1, 2, 3, ..., 110. Bạn Tâm phải viết tất cả bao nhiêu chữ số?

Lời giải:

Ta có: Từ trang 1 đến trang 9 có 9 trang, phải dùng 9 chữ số.

Từ trang 10 đến trang 99 có $(99 - 10) + 1 = 90$ (trang), phải dùng 180 (chữ số).

Từ trang 100 đến trang 110 có $(110 - 100) + 1 = 11$ (trang), phải dùng $11 \cdot 3 = 33$ (chữ số).

Vậy bạn Tâm phải viết tất cả: $9 + 180 + 33 = 222$ (chữ số).

Bài 5: Một cô nhân viên đánh máy liên tục dãy số chẵn bắt đầu từ 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... Cô phải đánh tất cả 2000 chữ số. Tìm chữ số cuối cùng mà cô đã đánh.

Lời giải:

Đánh từ số 2 đến số 8 cần $(8 - 2) : 2 + 1 = 4$ số chẵn có 1 chữ số, phải đánh 4 (chữ số).

Đánh từ số 10 đến số 98 cần $(98 - 10) : 2 + 1 = 45$ số chẵn có 2 chữ số, phải đánh $45 \cdot 2 = 90$ (chữ số).

Đánh từ số 100 đến số 998 cần $(998 - 100) : 2 + 1 = 450$ số chẵn có 3 chữ số, phải đánh $450 \cdot 3 = 1350$ (chữ số).

Vì còn các số chẵn phải đánh gồm các số chẵn có 4 chữ số

Đ Còn lại: $2000 - (1350 + 90 + 4) = 556$ chữ số là đánh các số chẵn có 4 chữ số

Có: $556 : 4$ được 139 Đ chữ số thứ 2000 sẽ nằm ở số chẵn thứ 139 có 4 chữ số

Số chẵn thứ 139 có 4 chữ số là: $(139 - 1) \cdot 2 + 1000 = 1276$.

TÊN CHUYÊN ĐỀ. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Đ Chữ số thứ 2000 là chữ số 6 của số 1276.

Bài 6: Bạn Mai viết dãy số lẻ $1; 3; 5; \dots; 245$.

a) Bạn Mai phải viết tất cả bao nhiêu chữ số?

b) Nếu mỗi chữ số viết mất một giây thì viết đến số 245 mất bao nhiêu giây? Sau 5 phút, bạn Mai viết đến chữ số nào?

Lời giải:

a) Viết từ số 1 đến số 9 cần $(9-1):2+1=5$ số lẻ có 1 chữ số, phải viết 5 chữ số.

Viết từ số 11 đến số 99 cần $(99-11):2+1=45$ số lẻ có 2 chữ số, phải viết $45 \cdot 2 = 90$ chữ số.

Viết từ số 101 đến số 245 cần $(245-101):2+1=73$ số lẻ có 3 chữ số, phải viết $73 \cdot 3 = 219$ chữ số.

Vậy bạn Mai phải viết tất cả: $5 + 90 + 219 = 314$ (chữ số).

b) Nếu mỗi chữ số viết hết một giây thì viết đến số 245 mất 314 giây.

Đổi: $5 \text{ phút} = 300 \text{ giây}$.

Sau 5 phút, bạn Mai viết đến chữ số thứ 300.

Vì $300 > 90 + 5$ nên chữ số thứ 300 nằm trong các số lẻ có 3 chữ số.

Ta có: $300 - (90 + 5) = 205$ chữ số để viết các số lẻ có 3 chữ số tính từ số 101 (số lẻ thứ nhất có 3 chữ số) mà có $205 : 3$ được 68 và dư 1.

Đ Chữ số thứ 300 sẽ nằm ở số lẻ thứ 69 có 3 chữ số.

Số lẻ thứ 69 có 3 chữ số là $(69-1) \cdot 2 + 101 = 237$

Đ Chữ số thứ 300 là chữ số 2 của số 237.

Dạng 2: Đếm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm bốn chữ số, chữ số tận cùng bằng 2?

Phân tích: Đây là bài toán đếm số tự nhiên có liên quan tới dấu hiệu chia hết cho 4. Trước hết ta cần viết số tự nhiên cần tìm dưới dạng $\overline{abc2}$, sau đó đếm số cách chọn mỗi chữ số tập hợp $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Việc thực hiện số cách chọn các chữ số a, b, c có sự ràng buộc lẫn nhau. Do đó nếu chữ số a có m cách chọn, chữ số b có n cách chọn, chữ số c có k cách chọn thì ta sẽ có $m \cdot n \cdot k$ số có bốn chữ số thỏa mãn bài toán. Việc chọn chữ số c phải thỏa mãn điều kiện chỉ chia hết cho 4 là $\overline{c2} : 4$.

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng: $\overline{abc2}$ ($a \neq 0, 0 \leq a, b, c \leq 9$).

Chữ số a có 9 cách chọn.

TÊN CHUYÊN ĐỀ. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Với mỗi cách chọn a , chữ số b có 10 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 5 cách chọn (1, 3, 5, 7, 9) để tạo với chữ số 2 tận cùng làm thành số chia hết cho 4.

Tất cả có: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ (số).

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5?

Phân tích: Số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5, ta cần hiểu chữ số 5 có thể là chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng chục, chữ số hàng trăm nên ta cần chia ra ba loại số có 3 chữ số thỏa mãn là: $\overline{5ab}; \overline{a5b}; \overline{ab5}$. Ở mỗi loại số ta thực hiện đếm số cách chọn mỗi chữ số từ tập hợp $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ giống như bài 2.

Lời giải:

Ta chia ra 3 loại số:

Số đếm có dạng $\overline{5ab}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5$): chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn các số thuộc loại này có: $9 \cdot 9 = 81$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{a5b}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, a \neq 0$): chữ số a có 8 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn, các số thuộc loại này có: $8 \cdot 9 = 72$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{ab5}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, a \neq 0$): các số thuộc loại này có: $8 \cdot 9 = 72$ (số).

Vậy số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5 là $81 + 72 + 72 = 225$ (số).

Bài 3: Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số:

- a) Chứa đúng một chữ số 4?
- b) Chứa đúng hai chữ số 4?
- c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?
- d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Lời giải:

- a) Chứa đúng một chữ số 4?

Các số phải đếm có 3 dạng:

- Dạng $\overline{4bc}$ ($0 \leq c, b \leq 9, c \neq 4, b \neq 4$) có $9 \cdot 9 = 81$ (số).

- Dạng $\overline{a4c}$ ($0 \leq a, c \leq 9, a \neq 4, c \neq 4, a \neq 0$) có $8 \cdot 9 = 72$ (số).

- Dạng $\overline{ab4}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 4, b \neq 4, a \neq 0$) có $8 \cdot 9 = 72$ (số).

Tất cả có: $81 + 72 + 72 = 225$ (số).

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

Các số phải đếm gồm 3 dạng:

- Dạng $\overline{44c}$ ($0 \leq c \leq 9, c \neq 4$) có 9 (số).

- Dạng $\overline{a44}$ ($0 \leq a \leq 9, a \neq 4, a \neq 0$) có 8 (số).

- Dạng $\overline{4b4}$ ($0 \leq b \leq 9, b \neq 4$) có 9 (số).

Tất cả có: $9 + 8 + 9 = 26$ (số).

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

Số có ba chữ số, chia hết cho 5 gồm 180 số, trong đó số không chứa chữ số 5 có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, c \neq 5, a \neq 0$), a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 1 cách chọn (là 0) gồm $8.9 = 72$ (số).

Vậy có $180 - 72 = 108$ (số) phải đếm.

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Số phải tìm có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 3, b \neq 3, c \neq 3, a \neq 0$), a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 3 cách chọn (nếu $a + b = 3k$ thì $c = 0; 6; 9$, nếu $a + b = 3k + 1$ thì $c = 2; 5; 8$, nếu $a + b = 3k + 2$ thì $c = 1; 4; 7$) có $8.9.3 = 216$ (số).

Bài 4: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5?

Phân tích: Những số có tận cùng bằng 5 luôn cách nhau 10 đơn vị, tuy nhiên bài toán đòi hỏi số tự nhiên có 4 chữ số và chia hết cho 3. Do đó ta cần xác định: Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5. Khoảng cách trong dãy này sẽ là 30. Từ đó vận dụng công thức “Số số hạng = (số cuối – số đầu): Khoảng cách + 1”.

Lời giải:

Số lớn nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 9975

Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 1005

Ta có dãy số: 1005; 1035; 1065;...; 9975

Khoảng cách của dãy là 30

\Rightarrow Số số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là: $(9975 - 1005) : 30 + 1 = 300$

Vậy có 300 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 5: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 100, có bao nhiêu số:

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Lời giải:

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

Các số chia hết cho 2 là: 2; 4; 6; ...; 100

Số các số chia hết cho 2 là:

$$\frac{(100-2)}{2} + 1 = 50 \text{ (số)}$$

Các số chia hết cho 2 và 3: 6; 12; 18; 24; ...; 96

Số các số chia hết cho cả 2 và 3 là:

$$\frac{(96-6)}{6} + 1 = 16 \text{ (số)}$$

Vậy từ 1 đến 100 có $50 - 16 = 34$ số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3.

b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

Các số chia hết cho 3 là: 3; 6; 9; 12; 15; ...; 99

Số các số chia hết cho 3 là:

$$\frac{(99-3)}{3} + 1 = 33 \text{ (số)}$$

Vậy các số chia cho ít nhất một trong hai số 2 và 3 là:

$$50 + 33 - 16 = 67 \text{ (số)}$$

c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Số các số không chia hết cho 2 và cho 3 là:

$$100 - 67 = 33 \text{ (số)}.$$

Bài 6: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 1000, có bao nhiêu số:

a) Chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5?

b) Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5?

Lời giải:

a) Chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5?

Gọi A, B, C, D, E, G, H là tập hợp các số từ 1 đến 1000 mà theo thứ tự chia hết cho 2, chia hết cho 3, chia hết cho 5, chia hết cho 2 và 3, chia hết cho 2 và 5, chia hết cho 3 và 5, chia hết cho cả 3 số. Số phần tử của các tập hợp đó theo thứ tự bằng $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$

TÊN CHUYÊN ĐỀ. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Ta có: $S_1 = 1000 : 2 = 500$; $S_2 = [1000 : 3] = 333$; $S_3 = 1000 : 5 = 200$; $S_4 = [1000 : 6] = 166$

$$S_5 = 1000 : 10 = 100; S_6 = [1000 : 15] = 66; S_7 = [1000 : 30] = 33$$

Số các số phải tìm gồm: $S_1 + S_2 + S_3 - S_4 - S_5 - S_6 + S_7 = 734$ (số)

b) Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5?

Còn lại $1000 - 734 = 266$ (số).

Bài 7: Có bao nhiêu số \overline{abcd} mà $\overline{ab} < \overline{cd}$?

Lời giải: Điều kiện: $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$

Xét các trường hợp sau:

Nếu $\overline{ab} = 10$ thì \overline{cd} ($0 \leq c, d \leq 9$) có thể bằng: 11, 12, ..., 99, có 89 số.

Nếu $\overline{ab} = 11$ thì \overline{cd} ($0 \leq c, d \leq 9$) có thể bằng: 12, ..., 99, có 88 số.

.....

Nếu $\overline{ab} = 98$ thì \overline{cd} ($0 \leq c, d \leq 9$) có thể bằng: 98, 99, có 2 số.

Nếu $\overline{ab} = 99$ thì \overline{cd} ($0 \leq c, d \leq 9$) bằng: 99, có 1 số.

Vậy có tất cả: $1 + 2 + 3 + \dots + 89 = 4005$ (số).

Bài 8: Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số \overline{abcd} , trong đó $b - a = 1$; $d - c = 1$?

Lời giải:

Chữ số a ($0 \leq a \leq 9, a \neq 0$) có 8 cách chọn (1, 2, ..., 8).

Chữ số b ($0 \leq b \leq 9$) có 1 cách chọn ($b = a + 1$).

Chữ số c ($0 \leq c \leq 9$) có 9 cách chọn (0, 1, 2, ..., 8).

Chữ số d ($0 \leq d \leq 9$) có 1 cách chọn ($d = c + 1$).

Tất cả có: $8.1.9.1 = 72$ (số).

Bài 9: Có bao nhiêu số chứa ít nhất một chữ số 1 trong các số tự nhiên:

a) Có ba chữ số.

b) Từ 1 đến 999.

Lời giải:

a) Ta đếm các số tự nhiên có ba chữ số rồi bớt đi các số có ba chữ số không chứa chữ số 1.

TÊN CHUYÊN ĐỀ. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Số có ba chữ số là: 100, 101, ..., 999, có 900 số (1).

Trong các số trên, số không chứa chữ số 1 có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$) trong đó a có 8 cách chọn (từ 2 đến 9), b có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 1), c có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 1), có: $8.9.9 = 648$ (số) (2).

Từ (1) và (2) \Rightarrow Số các số phải đếm là: $900 - 648 = 252$ (số).

b) Ta thêm chữ số 0 vào dãy 1, 2, ..., 999 thành dãy mới 000, 001, ..., 999 để đếm số được dễ dàng.

Trước hết, ta đếm các số không chứa chữ số 1 của dãy này: đó là các số có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$) trong đó mỗi chữ số a, b, c đều có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 1), tất cả có: $9.9.9 = 729$ (số). Vậy số lượng các số từ 1 đến 999 không chứa chữ số 1 có:

$$729 - 1 = 728 \text{ (số)}.$$

Số lượng các số từ 1 đến 999 có chứa chữ số 1 là:

$$999 - 728 = 271 \text{ (số)}.$$

Bài 10: Tìm số lượng các số tự nhiên có bốn chữ số mà:

a) Số tạo bởi hai chữ số đầu (theo thứ tự ấy) cộng với số tạo bởi hai chữ số cuối (theo thứ tự ấy) nhỏ hơn 100.

b) Số tạo bởi hai chữ số đầu (theo thứ tự ấy) lớn hơn số tạo bởi hai chữ số cuối (theo thứ tự ấy)?

Lời giải:

a) Các số cần tìm có dạng: \overline{abcd} ($0 \leq a, b, c, d \leq 9, a \neq 0$) trong đó: $\overline{ab} + \overline{cd} < 100$.

Ta có các số sau thỏa mãn đề bài:

+) 1000; 1001; 1002; ...; 1089 \Rightarrow Gồm: $1090 - 1000 + 1 = 90$ (số).

+) 1100; 1101; 1102; ...; 1188 \Rightarrow Gồm: $1188 - 1100 + 1 = 89$ (số).

.....

+) 9700; 9701; 9702 \Rightarrow gồm: 3 (số).

+) 9800; 9801 \Rightarrow gồm: 2 (số).

+) 9900 \Rightarrow gồm: 1 (số).

Vậy có tất cả: $90 + 89 + \dots + 3 + 2 + 1 = (90 + 1).90 : 2 = 4095$ (số).

b) Các số cần tìm có dạng: \overline{abcd} ($0 \leq a, b, c, d \leq 9, a \neq 0$) trong đó: $\overline{ab} > \overline{cd}$.

Ta có các số sau thỏa đề bài:

+) 1000; 1001; 1002...; 1009 \Rightarrow gồm: $1009 - 1000 + 1 = 10$ (số).

+) 1100; 1101; 1102; ...; 1110 \Rightarrow gồm: $1110 - 1100 + 1 = 11$ (số).

.....

+) 9700; 9701; ...; 9796 \Rightarrow gồm: $9796 - 9700 + 1 = 97$ (số).

+) 9800; 9801; ...; 9897 \Rightarrow gồm: $9897 - 9800 + 1 = 98$ (số).

+) 9900; 9901; ...; 9998 \Rightarrow gồm $9998 - 9900 + 1 = 99$ (số).

Số các số thỏa đề bài là: $10 + 11 + \dots + 97 + 98 + 99$

Tổng trên gồm $99 - 10 + 1 = 90$ (số).

Vậy số các số thỏa đề bài là: $(99 + 10).90 : 2 = 4905$ (số).

Bài 11: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 252, xoá các số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5, rồi xoá các số chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 2. Còn lại bao nhiêu số?

Lời giải:

Các số phải xoá có tận cùng 2; 4; 6; 8; 5. Mỗi chục xoá 5 số, còn lại 5 số. Từ 1 đến 250 có 25 chục, còn lại: $5.25 = 125$ (số).

Xét các số 251; 252, số 251 được giữ lại.

Vậy còn lại 126 số.

Bài 12: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số mà:

a) Các chữ số đều chẵn?

b) Chữ số hàng chục là chữ số lẻ?

Lời giải:

a) Các số phải đếm có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 0$), trong đó:

Chữ số a có 4 cách chọn (2, 4, 6, 8).

Với mỗi cách chọn a, chữ số b có 5 cách chọn (0, 2, 4, 6, 8).

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 5 cách chọn (0, 2, 4, 6, 8).

Tất cả có: $4.5.5 = 100$ (số).

b) Các số phải đếm có dạng \overline{abcd} ($0 \leq a, b, c, d \leq 9, a \neq 0$), trong đó:

Chữ số a có 9 cách chọn (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

TÊN CHUYÊN ĐỀ. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Với mỗi cách chọn a , chữ số b có 5 cách chọn $(1, 3, 5, 7, 9)$.

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 10 cách chọn $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.

Tất cả có: $9 \cdot 5 \cdot 10 = 450$ (số).

Bài 13: Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số trong đó:

a) Mỗi chữ số đều chẵn?

b) Tổng các chữ số là số chẵn?

Lời giải:

a) Các số phải đếm có dạng \overline{abcd} ($0 \leq a, b, c, d \leq 9, a \neq 0$), trong đó:

Chữ số a có 4 cách chọn $(2, 4, 6, 8)$.

Với mỗi cách chọn a , chữ số b có 5 cách chọn $(0, 2, 4, 6, 8)$.

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 5 cách chọn $(0, 2, 4, 6, 8)$.

Với mỗi cách chọn a, b, c chữ số d có 5 cách chọn $(0, 2, 4, 6, 8)$.

Tất cả có: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$ (số).

b) Các số phải đếm có dạng \overline{abcd} ($0 \leq a, b, c, d \leq 9, a \neq 0$), trong đó:

Chữ số a có 9 cách chọn $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.

Với mỗi cách chọn a , chữ số b có 10 cách chọn $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 10 cách chọn $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.

Với mỗi cách chọn a, b, c chữ số d có 5 cách chọn:

+ Nếu $a + b + c$ lẻ thì $d = 1, 3, 5, 7, 9$.

+ Nếu $a + b + c$ chẵn thì $d = 0, 2, 4, 6, 8$.

Tất cả có: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$ (số).

Bài 14: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng cộng nó với số gồm ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại thì được một số chia hết cho 5?

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 0$).

Theo đề bài, ta có: $\overline{abc} + \overline{cba} : 5$.

Với mỗi cách chọn \overline{ab} (từ 10 đến 99) thì c có 2 cách chọn phụ thuộc vào a :

Nếu $a = 5k$ thì c bằng 0 hoặc 5

Nếu $a = 5k + 1$ thì c bằng 4 hoặc 9

Nếu $a = 5k + 2$ thì c bằng 3 hoặc 8

Nếu $a = 5k + 3$ thì c bằng 2 hoặc 7

Nếu $a = 5k + 4$ thì c bằng 1 hoặc 6

Vậy có: $90.2 = 180$ (số).

Bài 15: Có bao nhiêu số chẵn có ba chữ số, các chữ số khác nhau?

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 0$).

Nếu $c = 0$ thì a có 9 cách chọn (từ 1 đến 9), b có 8 cách chọn (từ 1 đến 9, khác a).

Nếu $c = 2, 4, 6, 8$ thì a có 8 cách chọn (từ 1 đến 9, khác c), b có 8 cách chọn (từ 0 đến 9, khác a và c).

Vậy có: $9.8 + 8.8.4 = 328$ (số).

Bài 16: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có ít nhất hai chữ số như nhau?

Lời giải:

Ta đếm các số tự nhiên có ba chữ số rồi bớt đi các số ba chữ số khác nhau.

Số có ba chữ số là: 100, 101, ..., 999, có 900 số. (1)

Trong các số trên, số có 3 chữ số khác nhau dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 0$), trong đó a có 9 cách chọn (từ 1 đến 9), b có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác a), c có 8 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác a và b), có: $9.9.8 = 648$ (số) (2)

Từ (1) và (2) \Rightarrow Số lượng số phải đếm là: $900 - 648 = 252$ (số).

Bài 17: Trong các số tự nhiên có bốn chữ số, có bao nhiêu số trong đó có đúng ba chữ số như nhau?

Lời giải:

Các số phải đếm gồm bốn dạng:

Dạng \overline{baaa} ($0 \leq a, b \leq 9, b \neq 0$): Chữ số b có 9 cách chọn (từ 1 đến 9), chữ số a có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác b). Có: $9.9 = 81$ (số).

Dạng \overline{abaa} ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 0$), dạng \overline{aaba} ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 0$), dạng \overline{aaab} ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 0$): ở mỗi dạng này, chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn (khác a). Mỗi dạng có: $9.9 = 81$ (số).

Tất cả có: $81.4 = 324$ (số).

Bài 18: Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số chứa ít nhất một chữ số 4?

Lời giải:

Ta đếm các số tự nhiên có ba chữ số rồi bớt đi các số ba chữ số không chứa chữ số 4.

Số có ba chữ số là: 100, 101, ..., 999, có 900 số. (1)

Trong các số trên, số có 3 chữ số không chứa chữ số 4 dạng \overline{abc} .

Trong đó ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 0, a \neq 4, b \neq 4, c \neq 4$), trong đó a có 8 cách chọn (từ 1 đến 9 nhưng khác 4), b có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 4), c có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 4), có: $8.9.9 = 648$ (số). (2)

Từ (1) và (2) \Rightarrow Số lượng số phải đếm là: $900 - 648 = 252$ (số).

Bài 19: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 10000

a) Có bao nhiêu số chứa chữ số 0?

b) Số chứa chữ số 1 hay số không chứa chữ số 1 có nhiều hơn?

Lời giải:

a) Ta đếm các số tự nhiên từ 1 đến 10000 rồi bớt đi các số không chứa chữ số 0.

Các số tự nhiên từ 1 đến 10000 có 10000 số.

Ta đếm các số không chứa chữ số 0:

+ Từ 1 đến 9 có 9 (số).

+ Từ 10 đến 99 có $9.9 = 81$ (số).

+ Từ 100 đến 999 có $9.9.9 = 729$ (số).

+ Từ 1000 đến 9999 có $9.9.9.9 = 6561$ (số).

Vậy số lượng số phải đếm là: $10000 - (9 + 81 + 729 + 6561) = 2620$ (số) có chứa chữ số 0.

b) Các số tự nhiên từ 1 đến 10000 có 10000 số.

Ta đếm các số không chứa chữ số 1:

+ Từ 1 đến 9 có 8 số.

+ Từ 10 đến 99 có $8.9 = 72$ số.

+ Từ 100 đến 999 có $8.9.9 = 648$ số.

+ Từ 1000 đến 9999 có $8.9.9.9 = 5832$ số.

\Rightarrow Có tất cả: $8 + 72 + 648 + 5832 = 6560$ (số) không chứa chữ số 1.

Còn lại: $10000 - 6560 = 3440$ (số) có chứa chữ số 1.

TÊN CHUYÊN ĐỀ. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Vậy số không chứa chữ số 1 có nhiều hơn số chứa c số 1.

Bài 20: Có bao nhiêu số tự nhiên từ 10 đến 24 chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

Lời giải: Trong các số tự nhiên từ 10 đến 24:

Các số tự nhiên chia hết cho 2 là: 10, 12, 14, ..., 24, gồm: $(24 - 10) : 2 + 1 = 8$ (số).

Các số chia hết cho 3 là: 12, 15, 18, 21, 24, gồm 5 số.

Có những số có mặt ở hai dãy trên, đó là các bội của 6 : 12, 18, 24, gồm 3 số.

Vậy có: $8 + 5 - 3 = 10$ (số) chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3.

Bài 21: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, có bốn chữ số, có đúng một chữ số 5?

Lời giải:

Các số phải đếm có 4 dạng:

$\overline{5ab0}$ ($0 \leq a, b \leq 9$) có $9 \cdot 9 = 81$ (số)

$\overline{a5b0}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 0$) có $8 \cdot 9 = 72$ (số)

$\overline{ab50}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 0$) có $8 \cdot 9 = 72$ (số)

$\overline{abc5}$ ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 0$) có $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ (số)

Tất cả có: $81 + 72 + 72 + 648 = 873$ (số).

Bài 22: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 200, có bao nhiêu số:

- Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?
- Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?
- Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Lời giải:

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

Các số chia hết cho 2 : 2; 4; ..., 200

Số các số chia hết cho 2 là:

$$(200 - 2) : 2 + 1 = 100 \text{ (số)}$$

Các số chia hết cho 2 và 3 là: 6; 12; 18; 24; ..., 198

Số các số chia hết cho cả 2 và 3 là:

$$(198 - 6) : 6 + 1 = 34 \text{ (số)}$$

TÊN CHUYÊN ĐỀ. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Vậy từ 1 đến 200 có $100 - 34 = 66$ số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3.

b) Các số chia hết cho 3 là: 3; 6; 9; ...; 198

Số các số chia hết cho 3 là:

$$(198 - 3) : 3 + 1 = 66 \text{ (số)}$$

Vậy các số chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3 là:

$$100 + 66 - 34 = 132 \text{ (số)}$$

c) Không chia hết cho 2 và cho 3 là:

$$200 - 132 = 68 \text{ (số)}$$

Bài 23: Tuấn muốn đến nhà bạn, nhưng không nhớ số nhà, chỉ biết rằng số nhà của bạn là số chia hết cho 3 và có hai chữ số. Biết số nhà cuối của dãy phố đó là 135. Hỏi Tuấn phải gõ cửa nhiều nhất bao nhiêu số nhà? (các số nhà không đánh số a, b, \dots).

Lời giải:

Dãy số lẻ chia hết cho 3 và có hai chữ số là: 15, 21, 27, ..., 99 gồm $(99 - 15) : 6 + 1 = 15$ (số).

Vậy Tuấn phải gõ cửa nhiều nhất 15 số nhà.

Bài 24: Có bao nhiêu biển số xe máy khác nhau, mỗi số xe lập bởi hai chữ cái đứng đầu và ba chữ số đứng sau? (bảng chữ cái có 25 chữ, không có biển số 000).

Lời giải:

Vì bảng chữ cái có 25 chữ số nên có $25 \cdot 25 = 625$ cách lập kí hiệu đứng đầu gồm 2 chữ cái.

Ta có: 999 cách lập số từ 001 đến 999 \Rightarrow có tất cả: $25 \cdot 25 \cdot 999 = 624375$ (biển số xe).

Dạng 3: Dạng khác

Bài 1: Trong số 100 học sinh có 75 học sinh thích học Toán, 60 học sinh thích Văn.

a) Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

b) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

c) Có ít nhất bao nhiêu học sinh không thích cả hai môn Văn và Toán?

Lời giải:

Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là x ($0 < x \leq 75, x \in \mathbb{N}$), số học sinh thích Toán mà k thích Văn là $75 - x$.

a) Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

Ta có: $75 - x + 60 + 5 = 100$

$$\Leftrightarrow x = 40$$

Vậy có 40 học sinh thích cả hai môn.

a) Vì trong 100 học sinh có 75 học sinh thích toán và 60 học sinh thích văn nên số học sinh nhiều nhất thích cả toán và văn không thể vượt 60 học sinh.

Vậy số học sinh thích cả 2 môn nhiều nhất là 60 học sinh.

b) Ta có: $75 - x + 60 \leq 100$

$$\Rightarrow x \geq 35.$$

Có ít nhất 35 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

Bài 2: Kết quả điều tra ở một lớp học cho thấy: có 20 học sinh thích bóng đá, 17 học sinh thích bơi, 36 học sinh thích bóng chuyền, 14 học sinh thích bóng đá và bơi, 13 học sinh thích bơi và bóng chuyền, 15 học sinh thích bóng đá và bóng chuyền, 10 học sinh thích cả ba môn, 12 học sinh không thích một môn nào. Tính xem lớp học đó có bao nhiêu học sinh?

Lời giải:

Số học sinh thích đúng 2 môn bóng đá và bơi:

$$14 - 10 = 4 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh thích đúng hai môn bơi và bóng chuyền:

$$13 - 10 = 3 \text{ (học sinh).}$$

Số học sinh thích đúng hai môn bóng đá và bóng chuyền:

$$15 - 10 = 5 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh chỉ thích bóng đá:

$$20 - (4 + 10 + 5) = 1 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh chỉ thích bơi:

$$17 - (4 + 10 + 3) = 0 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh chỉ thích bóng chuyền:

$$36 - (5 + 10 + 3) = 18 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh của lớp là:

$$1 + 5 + 18 + 10 + 4 + 3 + 12 = 53 \text{ (học sinh)}$$

Vậy số học sinh của lớp học là 53 học sinh.

TÊN CHUYÊN ĐỀ. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Bài 3: Tổng kết đợt thi đua "100 điểm 10 dâng tặng thầy cô", lớp 6A có 43 bạn được từ 1 điểm 10 trở lên, 39 bạn được từ 2 điểm 10 trở lên, 14 bạn được từ 3 điểm 10 trở lên, 5 bạn được 4 điểm 10, không có ai được trên 4 điểm 10. Tính xem trong đợt thi đua đó, lớp 6A có bao nhiêu điểm 10?

Lời giải:

Số học sinh đạt 1 điểm 10 là: $43 - 39 = 4$ (học sinh).

Số học sinh đạt 2 điểm 10 là: $39 - 14 = 25$ (học sinh).

Số học sinh đạt 3 điểm 10 là: $14 - 5 = 9$ (học sinh).

Số điểm 10 của lớp 6A đạt được là:

$$1.4 + 2.25 + 3.9 + 4.5 = 101 \text{ (điểm 10).}$$

Bài 4: Trong số 200 học sinh có 150 học sinh thích học Toán, 120 học sinh thích Văn.

- a) Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?
- b) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?
- c) Có ít nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

Lời giải:

Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là x ($0 < x \leq 150, x \in \mathbb{N}$), số học sinh thích Toán mà không thích Văn là $150 - x$.

a) Ta có: $150 - x + 120 + 5 = 200$

$$\Rightarrow x = 75$$

Vậy có 75 học sinh thích cả hai môn.

b) Có nhiều nhất 120 học sinh (nếu tất cả số thích văn đều thích toán)

c) Ta có: $150 - x + 120 \leq 200$

$$\Rightarrow x \geq 70$$

Có ít nhất 70 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.